Litho

Sabri, Kitab Bulūgh

Sabri

كتاب بلوغ الآمال

فى المنحنيات الكثيرة الاستعمال

تاليف

صابر افندى صبرى

مدرس فرع الوصفيات

بمدرسة المهندسخانه

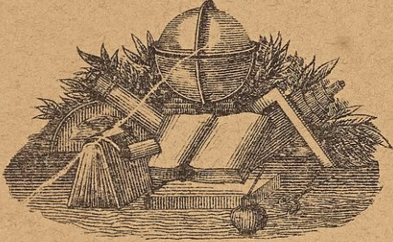
الخديويه

قد قرر مجلس المعارف الاعلى فى جلسة ٢٥ ابريل سنة ١٨٨٢ فرنكيه
لزوم استعمال هذا الكتاب بالمدارس الاميريه
المصريه

الطبعة الاولى

بمطبعة ديوان عموم المعارف بسراى درب الجماميز
سنة ١٢٩٩ هجريه
على صاحبها افضل الصلاة
وازكى التحيه

٢



بسم الله الرحمن الرحيم

حمدا لا نهائيا لمن بحكمته اهتدينا الى الطريق المعتدل القويم وشكرا دائما
لمن خص النوع الانسانى بالعقل ليعرف كنه قدرته ويستقيم فسبحانه من اله
أتقن صنع العالم بعظيم قدرته اتقانا ورتبه على ما اقتضته حكمته ترتيبا محكما
لا يعرف قدره الا كل ذى بصيرة ممن ملأ الله قلوبهم ايمانا فجعل الشمس والقمر
والنجوم تجرى فى مداراتها المنحنية بانتظام وكلفها بان تتبع فى سيرها قوانين
ثابتة قوية الاحكام لا الشمس ينبغى لها ان تدرك القمر ولا الليل سابق النهار وكل
فى فلك يسبحون وصلاة وسلاما مستقيمين متوازيين ممتدين لا يقطعهما
مدى الزمان قاطع فهما غير منتهيين على مركز محيط الدائرة الاسلامية مسقط
الوحى ومهبط الرسالة الربانية سيدنا محمد القاطع بسيف برهانه كل مماس يطعن
لشيئ من ايات تبيانه وعلى اله واصحابه المساعدين له على تأييد دعائم الدين
واسقاط رؤس اعدائه المشركين وبعد فيقول الراجى العفو عن كل ما يزرى
عبده صابر صبرى مدرس علم الهندسة الوصفية وفروعه التطبيقية بمدرسة
المهندسخانه الخديويه المصريه هذه رسالة ابتدائية فى المنحنيات الكثيرة الاستعمال
قد كلفنى بجمعها من لا يسعنى مقابلة أمره الا بالامتثال ذو السيرة المرضية والشهرة

التى

التى يعجز عن وصفها سحبان الفصاحه حضرة العالم الشهير اسماعيل بك الفلكى ناظر مدرسة المهندسخانه والمساحه على شرط ان تكون سهلة العبارات والبراهين لاتتوقف اثباتاتها الا على الهندسة العادية وما فى الجبر الواطى من القوانين ليتاتى استعمالها بمدرسة المساحه والمدارس التجهيزيه وينتفع بها بنو الديار المصريه فى ظل هذا الخديو الاعظم والداورى الافخم لازالت البلاد ممتعة ببقائه وانجاله ولازال محفوفا بالنصر بجاه سيدنا محمد واله ولما اشرفت على التمام وتحلت بحلية الختام سميتها بلوغ الامال فى المنحنيات الكثيرة الاستعمال راجيا من المولى الغفور ان يقرنها بالقبول لدى الجمهور لنفوز برضاء اولياء الامور انه على كل شئ قدير وبالاجابة جدير وهذا اوان الشروع فى المقصود

الباب الاول

فى المقدمات وفيه فصول

الفصل الاول

فى المبادى والتعاريف الاوليه

سـ١ـد قد علم من الهندسة العادية ان كلمة خط كلمة عموميه تشمل الخط المستقيم والخط المنحنى بجميع انواعه لان لفظة خط تطلق على المسار الهندسى لنقطة تتحرك فى الفراغ بكيفية وشروط معلومة مهما كانت تلك الكيفية وهذه الشروط

مثلا اذا تحركت نقطة فى الفراغ واتجهت الى جهة معينة بشرط ان لا يتغير اتجاهها ابدا كان المسار الهندسى الذى ترسمه هذه النقطة خطا مستقيما

واما اذا تحركت النقطة فى الفراغ وتغير اتجاه سيرها فى كل لحظة كان المسار الهندسى لها خطا منحنيا شكله وهيئته تابعان لكيفية وشروط حركة النقطة المذكورة

شكل ١

سـ٢ـد فيعلم مما تقدم حينئذ ان المنحنى هو الخط الحادث من تحرك نقطة هندسية بحيث يتغير اتجاه سيرها على الدوام

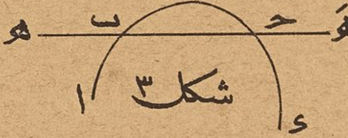
وذلك كالخط اب حء (شكل ١)
ولاجل فهم الطالب معنى هذا التعريف نقربه بمثال فنقول اذا فرض ان صيادا كان
واقفا فى نقطة ا (شكل ٢)

شكل ٢

وكان معه فى الصيد كلب واقف
على بعد منه فى نقطة مثل ح ثم اراد
الكلب أن يلحق بصاحبه ويتوجه
الى نقطة مقره وهى ا فانتقل
الصياد من مكانه واتجه فى الطريق المستقيم اب قاصدا الذهاب الى نقطة ب
فبالضرورة يعلم ان الكلب فى مبدا الأمر يقصد السير فى اتجاه المستقيم حا الواصل
بين نقطة وقوفه ونقطة وقوف صاحبه فيسير فى هذا الاتجاه برهة صغيرة لكنه
متى وجد صاحبه انتقل من موضعه الى موضع آخر التزم الكلب بأن يغير اتجاه سيره
الابتدائى ويتجه نحو الموضع الذى وصل اليه صاحبه بحيث اذا اتخذ الصياد
موضعا ثالثا تغير اتجاه سير الكلب مرة اخرى وهكذا
بمعنى انه اذا اتخذ الصياد أوضاعا متتالية مثل ا ، ا′ ، ا″ ، ا‴ ، ...... الخ
التزم الكلب أن يسير على التوالى فى اتجاه المستقيمات حا ، حا′ ، حا″ ، حا‴
، ...... الخ لكن متى كان الصياد مستمرا فى السير بعد خروجه من نقطة ا
واتجاهه نحو نقطة ب فلاشك أن الكلب يغير اتجاه سيره فى كل لحظة لان مطمح
نظره هو الوصول الى صاحبه فى أي نقطة يجده فيها واذن يكون مسار الكلب خطا
منحنيا وقد يعرف المنحنى أحيانا بأنه هو النهاية التى يؤول اليها الخط المنكسر عند
ما تأخذ أضلاعه وزواياه الخارجة فى القلة والصغر الى ما لانهاية ولذا يعتبر
محيط الدائرة نهاية لأي مضلع منتظم مرسوم داخلها وسطحها نهاية لسطح ذلك المضلع
٣ ـ جميع المنحنيات الممكن تصورها تنقسم الى قسمين عظيمين تحت كل قسم منهما
أنواع متعددة من المنحنيات وهذان القسمان هما المنحنيات المستوية والمنحنيات
المضاعفة الانحنا وتسمى أيضا المنحنيات الشمالية
٤ ـ فالمنحنى المستوى هو ما كانت جميع نقطه موجودة فى مستو واحد وذلك
كمحيط الدائرة مثلا وجميع ما يماثله من المنحنيات التى لا تخرج نقطها عن مستو واحد
وأما المنحنى المضاعف الانحناء اى الشمالى فهو عكس الاول أعنى ما لا تكون جميع
نقطه

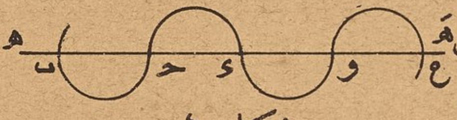
نقطه فى مستو واحد وذلك كما اذا التوى سلك رفيع من المعدن التواء حيثما اتفق بحيث اذا وضع فوق السطح المستوى فلا يتكئ عليه الا بالبعض من نقطه حالة كون معظم السلك خارجا عن المستوى المذكور

بند ٥ وتنقسم المنحنيات المستوية الى قسمين وهما المنحنيات المحدبة والمنحنيات الغير محدبه فالمنحنى المحدب هو الذى لا يقطعه المستقيم فى اكثر من نقطتين وذلك كمحيط الدائرة مثلا لانه مثبوت فى الهندسة العادية ان المستقيم لا يقطعه الا فى نقطتين وكالمنحنى ا ب حـ ء (شكل ٣) أيضا



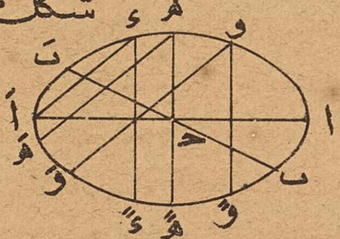
شكل ٣

اذ أن المستقيم هـ هَ الموضوع حيثما اتفق لا يقطعه الا فى نقطتى ب ، حـ لا غير وأما المنحنى الغير محدب فهو الذى يقطعه المستقيم فى اكثر من نقطتين وذلك كالمنحنى هَ المبين فى (شكل ٤) الذى يقطعه المستقيم هـ هَ فى النقط ب ، حـ ، ء ، ع ، و ..... الخ



شكل ٤

بند ٦ قطر المنحنى هو المستقيم المنصف لجميع أوتار ذلك المنحنى الموازية لاتجاه معلوم وذلك كالقطر ب بَ فى المنحنى ا اَ (شكل ٥) لانه منصف للاوتار ء ءَ ، هـ هَ ، و وَ ، .... الخ المتوازية وموازية لاتجاه معلوم وهذا الاتجاه يسمى الاتجاه المزاوج للقطر ب بَ

شكل ٥


بند ٧ واما محور المنحنى فهو المستقيم المنصف للأوتار المتوازية التى اتجاهها مزاوج له حالة كونه عموديا عليها وذلك كالمحور ا اَ (شكل ٥) المنصف للاوتار ء ءً ، هـ هً ، .... الخ التى اتجاهها مزاوج له وهو عمودى عليها

ويعلم من ذلك أن كل محور من محاور المنحنى قطر له وليس كل قطر محورا وان كل محور من محاور المنحنى يقسمه الى قسمين متماثلين

وكذلك ينتج مما تقدم أن كل قطر من أقطار الدائرة محور لها

بند ٨ راس المنحنى هى نقطة تقابل المنحنى بأي محور من محاوره فعلى ذلك تكون نقطتا ا ، اَ (شكل ٥) رأسين من رؤس المنحنى ا ب اَ وقد يكون للمنحنى

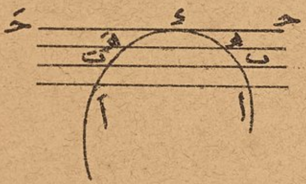
الواحد رأس واحدة أو اثنتان أو أكثر من ذلك
وحيث تقدم أن كل قطر من أقطار الدائرة يعتبر محورا لها فكذلك تعتبر أي نقطة
من محيط الدائرة رأسا له (أي للمحيط) وبناء على ذلك يكون لمحيط الدائرة
رؤس بقدر ما فيه من النقط

س ٩ د مركز المنحنى هو النقطة التي تكون جميع نقط المنحنى متماثلة الوضع بالنسبة
لها بمعنى أن نقط المنحنى المذكور موضوعة مثنى على مستقيمات مارة بنقطة المركز
ومتساوية البعد عنها فمركز المنحنى ا ب اَ بَ (شكل ٥) مثلا هو نقطة حـ
وينتج من ذلك أن كل مستقيم مار بمركز أي منحن ومنتهى الطرفين بهذا المنحنى يكون
منصفا بالمركز

ويفهم مما تقدم أن جميع أقطار المنحنى تمر بمركزه

س ١٠ د مماس المنحنى هو الوضع النهائي الذي يأخذه أي قاطع من قواطع ذلك المنحنى
عند اتحاد نقطتين من نقط تقاطعه مع المنحنى ببعضهما وصيرورتهما نقطة واحدة
مثلا اذا فرض منحن محدب كالمنحنى ا ب ء بَ اَ

شكل ٦



(شكل ٦) فكل مستقيم كالمستقيم ا اَ لا تقطعه
بمقتضى س ٨ د الا في نقطتين كنقطتي ا و اَ
فاذا توهمنا ان المستقيم ا اَ يتحرك بالتوازي
لنفسه آخذا الاوضاع ا اَ، ب بَ، هـ هـَ ... الخ
رأينا أن نقطتي تقاطع أوضاعه المتتالية تقربان من بعضهما شيأ فشيأ حتى اذا اخذ
المستقيم القاطع وضعا نهائيا كالوضع حـ ء حـَ اتحدت نقطتا التقاطع وصارتا
نقطة واحدة كالنقطة ء ففي هذا الوضع النهائي لا يقال للمستقيم حـ حـَ قاطع
للمنحنى بل يقال له مماس له في نقطة ء التي يطلق عليها اذ ذاك اسم نقطة التماس
هنا ولكونه مفروضا أن المنحنى ا ب هـ ء هـَ بَ اَ محدب فبالضرورة لا يكون
لأي قاطع كالقاطع ا اَ أو ب بَ أو ... الخ نقط مشتركة بينه وبين ذلك
المنحنى سوى نقطتين اثنتين بحيث متى صار القاطع مماسا واتحدت نقطتا التقاطع
المذكورتان وصارتا نقطة واحدة ظهر أن المماس لمنحن محدب لم يشترك معه الا
في نقطة واحدة وهي نقطة التماس فقط وأن المنحنى يكون موجودا بأكمله في جهة
واحدة من المماس وهذه الخاصية لا توجد الا في المنحنيات المحدبة فقط ويمكن
جعلها

جعلها تعريفا لها بأن يقال
المنحنى المحدب هو ما كان موجودا بأكمله فى جهة واحدة من أى مماس فرض له
أما اذا كان المنحنى المعلوم منحنيا غير محدب كالمنحنى المبين فى (شكل ٧) بمعنى أن
القاطع له مشترك معه فى أكثر من نقطتين

شكل ٧

فانه عندما يصير هذا القاطع مماسا
للمنحنى المذكور تتحد نقطتان من نقط
التقاطع وتصيران نقطة واحدة
وأما نقط التقاطع الباقية فلا تتحد معها بالضرورة وبناء على ذلك يرى أنه قد يكون
المستقيم مماسا لمنحنى محدب فى نقطة حالة كونه قاطعا له فى نقطة أخرى وذلك
كالمستقيم ا ا فانه مماس للمنحنى فى نقطة ب وقاطع له فى نقط ح ، ء ، ه
، ... الخ
سادسا اذا كان المنحنى ذا أقطار فيكون لمماسه بعض خواص تساعد على رسم ذلك
المماس وحينئذ يلزمنا ان نشرح هذه الخواص لنستعين بها عند لزومها فنقول

نظرية أولى

المستقيم المماس لمنحن من المنحنيات ذوات الاقطار يكون موازيا لجميع الاوتار
التى تجاهها مزاوج للقطر المار بنقطة التماس

شكل ٨

ولاجل البرهنة على ذلك نفرض ان المستقيم
ب ا مثلا (شكل ٨) هو أحد أقطار
المنحنى المعلوم س ب س وأن المستقيم
ح ء هو الوتر المزاوج لهذا القطر فبمقتضى
ما تقدم يكون هذا الوتر منصفا بالقطر
المذكور فى نقطة مثل ه فاذا حرك هذا الوتر بالتوازى لنفسه بشرط ان تقرب
نقطتا تقابله بالمنحنى من بعضهما شيأ فشيأ كانت بالضرورة نقطة تقابله بالقطر
منتصفا له مهما أخذ من الاوضاع بمعنى أن النقط ه ، هَ ، ... الخ تكون
فى أوساط الاوتار ح ء ، حَ ءَ ، ... الخ
ومن ذلك يرى أنه عندما يأخذ الوتر المتحرك وضعه النهائى أعنى عندما تتحد

نقطتا التقابل مع بعضهما يلزم أن تتحد معهما نقطة هـ الموجودة دائما في منتصف ذلك الوتر المتحرك فتصير الثلاث نقط المذكورة نقطة واحدة ومن ذلك يرى أيضا أن نقطة التماس تكون هي نهاية القطر أعني نقطة ب

وينتج من هذه النظرية أن المستقيم المماس لأي منحن في احد رؤسه يكون عموديا على محوره المار بتلك الرأس

ولذا ان المماس لمحيط الدائرة في أي نقطة منه يكون عموديا على قطره المار بنقطة التماس

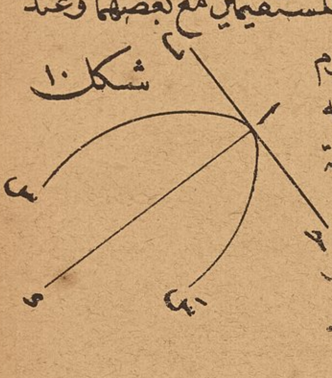
نظرية ثانية

١٢ـ اذا وجد مستقيمان مماسان لمنحن معلوم فأقول ان الوتر الواصل بين نقطتي تماسهما يكون مزاوجا للقطر المار بنقطة تقاطع هذين المماسين

شكل ٩

ولاثبات ذلك نفرض ان مستقيمي حء ، حَءَ وتران من أوتار المنحنى س اسَ (شكل ٩) وأن المستقيم اب هو قطره المزاوج لهما ثم نصل الوترين ححَ ، ءءَ ونمدهما على استقامتيهما حتى يتقاطعا في نقطة ولتكن م مثلا فاقول ان نقطة م يلزم أن تكون موجودة على امتداد القطر ب ا لأن نسبة حه : حَهَ :: ءه : ءَهَ

وحيث ان هذه الخاصية لاتزال توجد مهما قرب الوتران حء ، حَءَ من بعضهما فتوجد أيضا في الحالة النهائية أعني عند اتحاد هذين المستقيمين مع بعضهما وعندما يصير الوتران حَحَ ، ءءَ مماسين للمنحنى المعلوم



شكل ١٠

١٣ـ العمودي على منحن من نقطة مفروضة عليه هو المستقيم المقام عموديا على مماس ذلك المنحنى من النقطة المفروضة

مثلا العمودي على منحنى س اسَ من نقطة ا هو العمود اء المقام من نقطة ا على المماس ب حـ للمنحنى المذكور في نقطة ا المذكورة

ويؤخذ

ويؤخذ من هذا التعريف أولاً أن محاور أى منحن هى العموديات عليه فى نقط رؤسه وثانيا أن جميع أنصاف أقطار الدائرة أعمدة على محيطها

الفصل الثانى

فى طرق رسم المماس لمنحن ما والعمودى عليه

ش ١٤ د كثير من المنحنيات ما يكون لمماسه جملة خواص مخصوصة به ولا توجد فى غيره منها تستنتج بعض طرق هندسية مضبوطة بها يمكن رسم المماس لهذا المنحنى بالسهولة وذلك كالدائرة مثلا فان لمماسها خاصية معلومة وهى كونه عموديا على نصف القطر المار بنقطة التماس فبواسطة هذه الخاصية وجدت سهولة عظيمة فى كيفية رسم المماس لمحيط الدائرة

وخلاف ذلك توجد أيضا عدة منحنيات لمماسها خواص مختلفة نذكرها عند الكلام على كل نوع من هذه المنحنيات فى محله

لكن أغلب المنحنيات ليس لمماسها خواص تساعد على رسمه فيضطر على رسمه بطريقة تقريبية

ش ١٥ د ولنشرح حينئذ الطرق اللازم سلوكها فى رسم المستقيم المماس لمنحن معلوم حيثما اتفق مجهول الخواص بالكلية فنقول

ان رسم المماس لمنحن ما يشتمل على ثلاث مسائل أصلية نذكرها على الترتيب وهى

(المسئلة الاولى) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن ما من نقطة مفروضة عليه

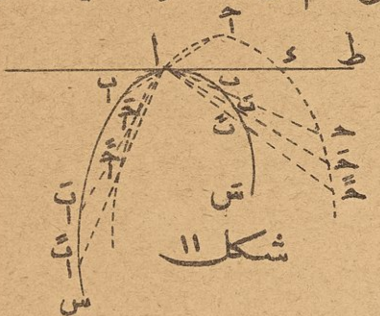
(المسئلة الثانية) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم ومار بنقطة خارجة عنه

(المسئلة الثالثة) أن يكون المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم ومواز لمستقيم معلوم أيضا

ولنورد لك حل هذه المسائل الثلاث على الترتيب ثم نذكر بعد حلها حل المسائل المناظرة لها فى كيفية رسم العمودى على منحن معلوم فنقول

المسئلة الاولى

مطلب اذاكان المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنى معلوم من نقطة مفروضة عليه تستعمل



شكل ١١

الطريقة المعروفة بطريقة المنحنى المساعد وهى أن يفرض أن المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحنى كالمنحنى س اس من نقطة ا المفروضة عليه كما فى (شكل ١١) ولذلك تمد من نقطة التماس وهى ا جملة مستقيمات قاطعة للمنحنى كالمستقيمات

اب ، ات ، اتَ الخ و اب ، ابَ ، ابً والخ فهذه القواطع تقطع المنحنى المعلوم فى نقط مثل نقط ب ، ت ، تَ الخ و ب ، بَ ، بً ، الخ بعضها فى احدى جهتى نقطة التماس والبعض الاخر فى جهتها الثانية ثم يؤخذ على هذه القواطع بالابتدا من النقط المذكورة جملة ابعاد متساوية طول الواحد منها اختيارى كالابعاد ب ح ، تَ حَ ، ... الخ و ب ج ، بَ جَ ، ... الخ مع الاعتنا بأخذ هذه الابعاد على امتداد القواطع فى احدى جهتى نقطة التماس وعلى نفس القواطع فى الجهة الثانية منها ثم تجمع نقط نهايات الابعاد المقطوعة بخط متصل فيحدث منحنى جديد يكون مارا بالضرورة بنقطة التماس وهى ا وذلك لأنه يوجد من ضمن القواطع التى فى الجهة اليمنى قاطع يكون وتره المحصور داخل المنحنى الجديد مساويا بالضبط الى البعد ب ح

ويعلم من ذلك انه اذا فرض أن المماس اط معلوم وأخذ عليه بالابتدا من نقطة التماس بعد مساوٍ الى ب ح كالبعد اء كانت نهاية هذا البعد نقطة من نقط المنحنى المساعد وحينئذ بالعكس اذا جعلت نقطة التماس ا مركزا وببعد مساو الى ب ح يرسم قوس دائرة فيقطع المنحنى المساعد فى نقطة تكون هى احدى نقط المماس المطلوب

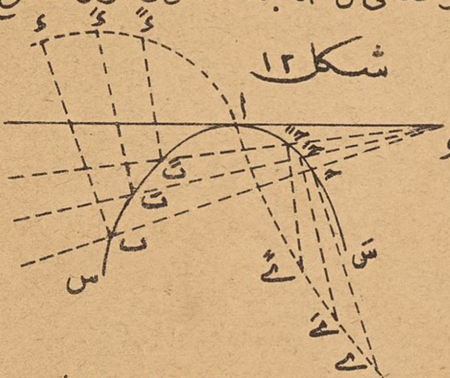
ويتبادر مما تقدم انه بدل رسم المنحنى المساعد بأكمله يكتفى فقط برسم الجزء المجاور لنقطة ء وأنه لأجل الضبط فى ايجاد المماس يؤخذ الطول الاختيارى ب ح طويلا طولا كافيا وملائما

المسئلة الثانية

س١٧ـ المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن معلوم ومار بنقطة خارجة عنه
يمكن حل هذه المسئلة بواسطة المسطرة فقط بان يجعل حد المسطرة مارا بالنقطة المعلومة ومماسا لهذا المنحنى لكن هذه الطريقة غير كافية لضبط اتجاه المماس ولا لتعيين نقطة التماس بالضبط ويتوصل الى تعيين المماس ونقطة تماسه بالضبط بواسطة الطريقة الآتية المسماة ايضا بطريقة المنحنى المساعد

مثلا ليكن س ا سَ (شكل ١٢) هو المنحنى المعلوم ولتكن نقطة هـ هي النقطة التى يراد إمرار المماس بها فنمد من نقطة هـ قاطعا كالقاطع هـ ب متباعدا عن وضع المماس بعد قليل ثم يقام عليه من نقطتى ب ، حـ فى اتجاهين متضادين عمودان مثل ب ء ، حـ ے ويؤخذ على كل منهما بعد مساو الى الوتر المقطوع ب حـ ثم نمد منها قاطع آخر ونجري عليه العملية بعينها وهكذا تؤخذ جملة قواطع كافية لتحصيل عدة نقط مثل ء ، ءَ ، ءً الخ و ے ، ےَ ، ےً الخ متقاربة من بعضها قربا كافيا ونجمع هذه النقط بخط متصل فيحدث منحن

شكل ١٢



يكون بالضرورة مارا بنقطة التماس المطلوبة لانه متى صار القاطع مماسا يصير الوتر المقطوع ب حـ مساويا للصفر ويصير كل من العمودين ب ء ، حـ ے معدوما

(تنبيه) يمكن اخذ الاعمدة ب ء ، حـ ے مساوية لضعف البعد ب حـ أو الى ثلاثة امثاله أو الخ وتعويض الاعمدة المذكورة بمستقيمات متوازية مثنى اتجاهها اختيارى لكن بشرط ان تكون الزوايا هـ ب ء ، هـ تَ ءَ ، .... الخ متساويه دائما

المسئلة الثالثة

س١٨ـ المطلوب رسم مستقيم مماس لمنحن وموازٍ لاتجاه معلوم
قد يمكن ايضا حل هذه المسئلة بواسطة المسطرة بان تحرك بالتوازى للاتجاه

المعلوم حتى يصير حدها مماسا للمنحنى الا انه بهذه الطريقة لا يمكن تعيين نقطة التماس بالضبط الكافى فلاجل تعيينها نجرى عليها العمل كما أجريناه على المسئلة الثانية بان نمد جملة قواطع موازية الى الاتجاه المعلوم ويقام من نهايتى كل قاطع منها مستقيمان مختلفا الاتجاه وعموديان عليه وتؤخذ عليهما ابعاد مساوية للوتر المقطوع وتتمم العملية كما تقدم (انظر تنبيه المسئلة الثانية)

فى كيفية رسم العمودى على منحن

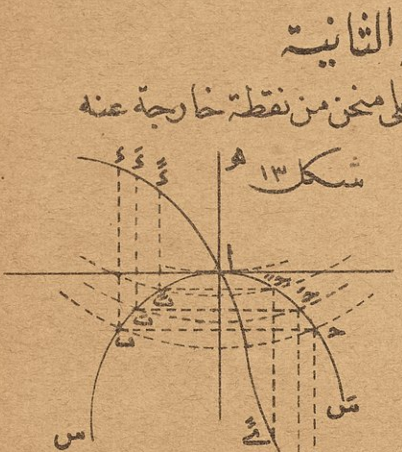
س ١٩ يشتمل البحث عن المستقيم العمودى على منحن على ثلاث مسائل أصلية كالبحث عن مماس هذا المنحنى

المسئلة الاولى

ان يكون المطلوب تعيين المستقيم العمودى على منحن من نقطة مفروضة عليه ولحل هذه المسئلة نبحث بمقتضى ما تقدم عن المماس لهذا المنحنى فى النقطة المعلومة ويقام من نقطة التماس عمود عليه فيكون هو المستقيم العمودى على المنحنى

المسئلة الثانية

س ٢٠ المطلوب ايجاد المستقيم العمودى على منحن من نقطة خارجة عنه



مثلا ليكن س ا س' (شكل ١٣) هو المنحنى المعلوم ونقطة ه هى النقطة التى يراد مد المستقيم العمودى على المنحنى منها

فنفرض أن المسئلة محلولة وأن ه ا هو العمودى المطلوب ونقول

من المعلوم انه اذا جعلت نقطة ه مركزا وببعد مساو الى ه ا رسم محيط دائرة لكانت هذه الدائرة مماسة للمنحنى المعلوم حيث ان العمودى على كل منهما فى نقطة التماس واحد ولاجل تعيين نقطة ا تجعل نقطة ه مركزا وترسم جملة اقواس متحدة المركز قاطعة للمنحنى المعلوم

فى

فى نقطتى ب ، ح و بَ ، حَ .. الخ ثم يقام من نهايتى كل وتر من الاوتار ب ح ، بَ حَ .. الخ فى اتجاهين متضادين مستقيمان عموديان عليه ويؤخذ على كل منهما بعد مساوله كما تقدم وتجمع النقط د ، دَ .. الخ و دً ، دً .. الخ بخط متصل فيحدث منحن يكون بالضرورة مارا بنقطة ا وبه تتعين هذه النقطة بغاية الضبط كلما كثرت النقط وقربت من بعضها

المسئلة الثالثة

بند ٢١ المطلوب مد مستقيم عمودي على منحن ومواز لمستقيم معلوم يكفي لحل هذه المسئلة رسم مستقيم مماس للمنحنى وعمودى على الاتجاه المعلوم ثم تعين نقطة تماسه بمقتضى ما تقدم ويقام منها مستقيم عمودى عليه فيكون هو العمودى المطلوب

الفصل الثالث

فى تقدير أطوال المنحنيات ومساحة الاشكال المنحنية

بند ٢٢ كثير من المنحنيات ما يمكن تعيين طوله بالضبط والسهولة سواء كان بالطريقة الحسابية أو بالطريقة الرسمية وذلك كالدائرة والقطع الناقص وغيرهما مما سنذكره فى محله لكن فى أغلب الاحوال لا يمكن تقدير طول المنحنيات الا بالطريقة التقريبية

وهى أن يرسم داخل القوس أو المنحنى الذى يراد تقدير طوله خط كثير الاضلاع أضلاعه صغيرة جدا على قدر الامكان ثم يقاس طول هذا الخط فيكون طوله عين طول المنحنى الاصلى تقريبا

واذا اريد ايجاد طول القوس بغاية التقريب يرسم عليه خط كثير الاضلاع اخر أضلاعه صغيرة جدا ومماسة لهذا المنحنى فيكون طول هذا الخط أكبر من طول المنحنى وطول الخط الاول أصغر منه وحينئذ اذا اخذنا المتوسط بين الطولين كان هو طول المنحنى مقربا الى الحقيقة جدا

أما اذا كان المنحنى الذى يراد قياس طوله موجودا على سطح جسم صلب فيكتفى بأن يلف عليه شريط لين قابل للالتفاف عليه كما اذا اريد معرفة طول محيط جذع

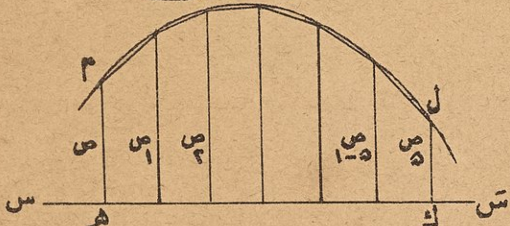
شجرة مثلا ومع ذلك فان هذه الطريقة لا تستعمل الا فى الاعمال التقريبية لانها لا تعطى الطول الحقيقى حيث أنه بكثرة شد الشريط أو قلته يزيد الطول أو ينقص

فى تقدير مساحة الاشكال المنحنية

س ٢٣ - الاشكال المستوية المحدودة بخطوط منحنية غير منتظمة الانحنا لا يمكن تعيين مساحتها بطرق بسيطة مضبوطة بل يلزم الاستعانة على تعيين مساحتها بطرق تقريبية نذكرها فنقول

(طريقة أشباه المنحرف) لنفرض أن المراد معرفة مساحة الشكل المتكون من جزء منحنى مثل م ل (شكل ١٤) ومن مستقيم مثل س سَ ومن العمودين المنزلين من نهايتى المنحنى على هذا المستقيم

شكل ١٤



ولذلك تقسم المسافة ك هـ الى جملة اقسام متساوية عددها حيثما اتفق يرمز لكل منها بحرف ع ثم يقام من نقط التقاسيم أعمدة على المستقيم س سَ فهذه الاعمدة المسماة بالاحداثيات الرأسية تقسم الشكل المعلوم الى جملة أشباه منحرفات صغيرة وقائمة الزوايا فى كل منها ضلع واحد منحن لكنه يكون صغيرا جدا حينما تقسم المسافة هـ ك الى جملة اقسام عددها كاف لاعتباره كمستقيم ثم تعتبر جميع هذه الاشباه منحرفات كانها مستقيمة الاضلاع ويبحث عن مساحة كل منها على حدته ومجموع مساحات هذه الاشكال الجزئية يكون هو مساحة السطح الكلى التى يراد تعيينها وهذه المساحة تكون قريبة من المساحة الحقيقية كلما كانت ارتفاعات الاشباه منحرفات صغيرة جدا

ولنفرض أن ص ، ص١ ، ص٢ ، ... صن هى اطوال الاحداثيات الرأسية المتتالية وأن ع ارتفاع مشترك لكل منها ونرمز بحرف س لمساحة الشكل الكلى فيكون

$$\text{س} = \text{ع}\,\frac{\text{ص} + \text{ص}_1}{2} + \text{ع}\,\frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} + \cdots + \text{ع}\,\frac{\text{ص}_{\text{ن}-1} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2}$$

أو

$$\text{س} = \text{ع}\left[\frac{\text{ص} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2} + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \cdots + \text{ص}_{\text{ن}-1}\right]$$

وعلى هذا تكون مساحة الشكل الكلى مساوية لحاصل ضرب المسافة بين كل احداثيين متواليين

متواليين في مجموع الاحداثيات المتوسطة مضافا اليه نصف مجموع الاحداثيين المتطرفين

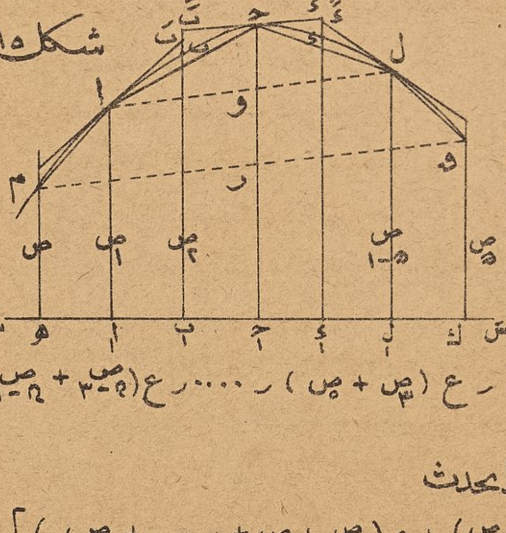
ويشاهد من ذلك أن المساحة المأخوذة بهذه الطريقة تكون أصغر من المساحة الحقيقية بقليل عندما يكون تقعير المنحنى موجها نحو المستقيم س سَ كما حصل ذلك في (شكل ١٤) وفي الواقع لان كل شبه منحرف منحنى الضلع استعوض بشبه منحرف مستقيم الاضلاع أصغر منه

وبالعكس تكون هذه المساحة أكبر من المساحة الحقيقية عندما يكون تحديب المنحنى جهة المستقيم س سَ

وأما اذا كان المنحنى المعلوم مشتملا على جملة انقلابات كان بعض اشباه المنحرف أكبر من مناظره والبعض الاخر أصغر منه بحيث يحصل التعادل الجزئي بينهما

٤٤ في طريقة المسيو پونسليه پونسليه اخترع طريقة بها يمكن الحصول بغاية السرعة على مساحة أضبط من الاولى وغاية هذه الطريقة هي ان تقسم المسافة هك (شكل ١٥) الى عدد زوجي من الاقسام المتساوية مثل الاقسام ه ا ، ا ب ، ب ج الخ يرمز لطول كل واحد منها بحرف ع

ثم تقام من جميع نقط التقاسيم احداثيات مثل ا ا ، ب ب الخ وتوصل المستقيمات م ا ، ا ج الخ فتحصل كما تقدم جملة اشباه منحرف مستقيمة الاضلاع ارتفاع أولها وآخرها هو البعد ع وامّا ارتفاع باقيها فانه مساوالى ٢ع ثم تمسح هذه الاشكال أي تؤخذ مساحاتها وتجمع ويرمز لحاصل جمعها بحرف ط فتكون مساحاتها على التوالي هي



شكل ١٥

$ع \,\frac{ص + ص_{1}}{2}$ ، $ع\,(ص_{1} + ص_{3})$ ، $ع\,(ص_{3} + ص_{5})$ ، ..... ، $ع\,(ص_{ن-3} + ص_{ن-1})$

، $ع\,\frac{ص_{ن-1} + ص_{ن}}{2}$

ويجمع هذه المساحات على بعضها يحدث

$$ط = ع \left[\frac{ص + ص_{ن}}{2} + \frac{3}{2}\,(ص_{1} + ص_{ن-1}) + 2\,(ص_{3} + ص_{5} + \cdots\cdots + ص_{ن-3}) \right]$$

فاذا اضفنا كمية $\frac{\text{ص}_{1}+\text{ص}_{\text{ن}-1}}{2}$ وطرحناها من الكمية التى داخل القوسين حدث

$$\text{ط} = \text{ع}\left[\frac{\text{ص}+\text{ص}_{\text{ن}}}{2} - \frac{\text{ص}_{1}+\text{ص}_{\text{ن}-1}}{2} + 2(\text{ص}_{1}+\text{ص}_{3}+\text{ص}_{5}+\ldots\ldots\text{ص}_{\text{ن}-1})\right]$$

ثم نرسم من نقط ا و ح و الخ التى هى نهايات الاحداثيات الرأسية الزوجية الوضع مماسات للمنحنى المعلوم فتتكون من ذلك جملة أشباه منحرف جديدة مثل م هـ ب َب و تَ ب ء ءَ والخ التى يمكن ايجاد مساحاتها بالسهولة لان ارتفاع كل منها مساو الى ٢ ع وفيها الاحداثى المنسوب لنقطة التماس مساو الى نصف مجموع القاعدتين فاذا رمز بحرف طَ لمجموع هذه الاشباه منحرف كان

$$\text{طَ} = 2\text{ع}(\text{ص}_{1}+\text{ص}_{3}+\text{ص}_{5}+\ldots\ldots+\text{ص}_{\text{ن}-1})$$

فاذا تأملنا نجد أن مقدار ط أصغر من المساحة المطلوبة وأن مقدار طَ أكبر منها وذلك كما فى مثالنا هذا (وانما حينما يكون تحديب المنحنى جهة المستقيم س سَ فيكون الامر بالعكس) وعلى هذا اذا اخذ المتوسط بين مقدارى ط و طَ تحصل مقدار للمساحة المقربة جدا من المساحة الحقيقية فاذا رمز بحرف ح لهذه المساحة المقربة جدا حدث

$$\text{ح} = \frac{\text{ط}+\text{طَ}}{2} = \text{ع}\left[\frac{\text{ص}+\text{ص}_{\text{ن}}}{2} - \frac{\text{ص}_{1}+\text{ص}_{\text{ن}-1}}{4} + 2(\text{ص}_{1}+\text{ص}_{3}+\ldots\ldots\text{ص}_{\text{ن}-1})\right]$$

واما اذا كان للمنحنى بعض انقلابات يلزم أولا أن ترسم الاحداثيات الرأسية المارة بنقط الانقلاب وتؤخذ مساحة كل شكل من الاشكال الحادثة على حدتها وتجمع المساحات الحادثة على بعضها فتحدث المساحة الكلية

تنبيه ومن المشاهد فى هذه الطريقة أنه لا يحتاج فيها الا لقياس الاحداثيات المتطرفة والاحداثيات المزدوجة الوضع وعليه فيكون العمل بها أسرع من الطريقة المتقدمة سيما انه يتحصل بها على مساحة أقرب الى للمساحة الحقيقية من الاولى ولها مزية أخرى وهو أنه يمكن بواسطتها معرفة نهاية الخطاء الذى يحدث فيها وفى الواقع من حيث ان هذا الخطأ بالبداهة أصغر من نصف الفرق بين المساحتين وهما ط و طَ فيكون

$$\text{الخطأ} \frac{\text{طَ}-\text{ط}}{2} = \frac{\text{ع}}{4}\left[(\text{ص}_{1}+\text{ص}_{\text{ن}-1}) - (\text{ص}+\text{ص}_{\text{ن}})\right]$$

وفى هذا القانون يمكن تقدير الكمية الموجودة بين القوسين بالطريقة الهندسية لانه فى الواقع اذا وصل بين نقطتى م و ف نهايتى المنحنى بمستقيم وكذا بين نهايتى

نهايتى الاحداثى الثانى والاحداثى الذى قبل الاخير بمستقيم آخر حدث مستقيمان قاطعان للاحداثى المتوسط فى نقطتى ر ، و فيحدث من شبهى المنحرفين م هـ ك و ، ر ا ا ل ل أن

$$\text{ر ج}_1 = \frac{\text{ص} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2} \quad , \quad \text{و ج}_1 = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_{\text{ن}-1}}{2}$$

ومنهما يكون

$$\text{و ج}_1 - \text{ر ج}_1 = \text{و ر} = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_{\text{ن}-1}}{2} - \frac{\text{ص} + \text{ص}_{\text{ن}}}{2}$$

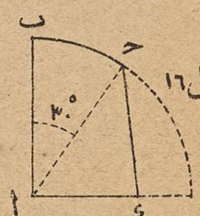
وبنا عليه يكون

$$\frac{\bar{\text{ط}} - \text{ط}}{2} = \frac{\text{ع}}{2} \times \text{و ر}$$

وهذا المقدار يكون فى العادة اكبر من الخطأ الحادث فى العملية بمعنى انه يكون نهاية لذلك الخطأ.

٢٦ تطبيق على ذلك — لأجل مقارنة العمل بهاتين الطريقتين نطبق كلا منهما على التوالى فى كيفية ايجاد مساحة قطعة دائرة كالقطعة ا ب ح ء (شكل ١٦) المحصورة بين نصف القطر ا ب وبين قوس الدائرة ب ح المقابر مساويا الى ٣٠° وبين المستقيم ح ء الموازى الى نصف القطر ا ب وبين المستقيم ء ا المقام من المركز ا عموديا على نصف القطر ا ب

فاذا فرضنا ان نصف القطر ا ب مساو الى ٤ متر وقسمنا المسافة الكائنة بين الاحداثيين المتطرفين الى اربعة اجزا متساوية كان



شكل ١٦

$\text{ص} = ٤\text{ر}٠٠٠$ م ر

$\text{ص}_1 = ٣\text{ر}٩٦٨٦$ ر

$\text{ص}_2 = ٣\text{ر}٨٧٣٠$ ر

$\text{ص}_3 = ٣\text{ر}٧٠٨١$ ر

$\text{ص}_4 = ٣\text{ر}٤٦٤١$ ر

$\text{ع} = ٠\text{ر}٥٠٠٠$

فبمقتضى الطريقة الاولى أعنى طريقة اشباه المنحرف يكون

$$\text{ح} = ٠\text{ر}٥ \left(\frac{٤ + ٣\text{ر}٤٦٤١}{2} + ٣\text{ر}٩٦٨٦ + ٣\text{ر}٨٧٣٠ + ٣\text{ر}٧٠٨١ \right)$$

$= ٧\text{ر}٦٤٠٩$ أمتار مسطحة

وبطريقة پونسليه يكون

$$ح = ٠٫٥\left(\frac{٤+٣٫٤٦٤١}{٢} - \frac{٣٫٩٦٨٦+٣٫٧٠٨١}{٢} + ٢(٣٫٩٦٨٦+٣٫٧٠٨١)\right) = ٧٫٦٥٠٢ \text{ م س}$$

وحيث انه ممكن في هذا المثال حساب المساحة المطلوبة بالضبط أعنى ممكن ايجاد حقيقتها وذلك بملاحظة أنها مركبة من قطاع دائرة قوسه ٣٠° مساحته مساوية بالضرورة الى جزء من اثنى عشر جزءا من سطح الدائرة مضافا اليه مثلث قائم الزاوية أحد ضلعى قائمته هو مسقط القوس على المستقيم المقابل له والضلع الثانى مساو لنصف ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل هذه الدائرة

فحينئذ تكون المساحة الحقيقية هى

$$ح = \frac{ط\, نق^{٢}}{١٢} + \frac{نق^{٢}\sqrt{٣}}{٨} = ١٦\left(\frac{ط}{١٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٨}\right) = ٨\left(\frac{ط}{٦} + \frac{\sqrt{٣}}{٤}\right) = ٧٫٦٥٢٩ \text{ مترا مسطحا}$$

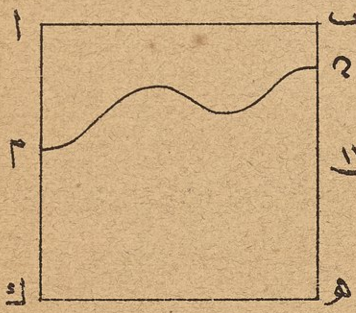
وحينئذ يكون الخطا المتحصل من الطريقة الأولى هو ٠٫٠١٢٠ والمتحصل من طريقة بونسليه هو ٠٫٠٠٢٧ فقط واذا حسبنا نهاية الخطأ بالقانون المتقدم المختص بذلك نجد أن

$$\text{الخطا} < \frac{٠٫٥}{٤}\left[٣٫٩٦٨٦ + ٣٫٧٠٨١ - (٤+٣٫٤٦٤١)\right] = ٠٫٠٠٢٦٦$$

فيشاهد أن هذا الخطا اكبر من الخطا الحقيقى بعشر مرات

وهناك توجد طريقة أخرى لايجاد المساحة التقريبية للاشكال المنحنية وهى المنسوبة الى المسيو (توما سمپسون) لكن لا يمكن ذكرها فى هذا المحل لكونها مبنية على خاصية فى القطع المكافى ولذلك قد أخرناها هنا لكن سنذكرها بعد الكلام على القطع المكافى ان شاء الله تعالى

س ٢٧ (فى كيفية تعيين المساحة بالوزن) هذه الطريقة التى ليست هندسية بالكلية تستعمل كثيرا فى العمل مثلا ليكن م ح ه ك (شكل ١٧) هو الشكل الذى يراد ايجاد مساحته فيرسم أولا هذا الشكل على فرخ من الورق أو من المعدن متماثل التركيب والمادة تماثلا جيدا ومتحد السمك فى جميع امتداده ويمد



شكل ١٧

الاحداثيان ه ح ، ك م حتى يتكون عنهما شكل مستطيل مثل ا ب ه ك

فتؤخذ مساحته بالطريقة المعتادة ثم يقطع هذا المستطيل من الفرخ او اللوح المرسوم هو عليه ويوزن بميزان كثير الاحساس ثم يقطع اللوح على حسب محيط المنحنى ويوزن الشكل الاصلى وهو هـ ع م ك وحيث انه فى هذه الحالة تكون المساحات مناسبة للاثقال وقد علم ثقل المساحتين واحدهما فتحل المسئلة بواسطة القاعدة الثلاثية مثلا اذا رمز بحرف ح لمساحة المستطيل وبحرف و لوزنه وبحرف وَ لوزن الشكل الذى يراد معرفة مساحته وبحرف س لمساحته المجهولة فيكون

$$\frac{س}{ح} = \frac{وَ}{و} \quad ومنه يكون \quad س = \frac{ح\ وَ}{و}$$

وهذه طريقة قديمة وكانت مستعملة فى ابتداء هذا القرن ومع ذلك فانه لم يترك استعمالها الى الآن بل تستعمل نادرا فى الاشغال العمليه

الباب الثانى

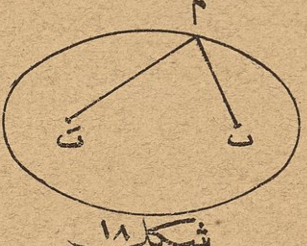
فى القطع الناقص والجسم الناقصى

الفصل الاول

فى تعريف منحنى القطع الناقص وفى طرق رسمه

ند ٢٨ القطع الناقص هو منحن مستو مجموع بعدى أى نقطة من محيطه عن نقطتين ثابتتين داخله يساوى كمية ثابتة

والنقطتان المفروضتان داخله الثابتتان تسميان بورتين والبعدان الواصلان من بورتيه الى نقطة حيثما اتفق من محيطه يسميان بعدين بوريين او نصفى قطرين بوريين



شكل ١٨

وهذا المنحنى يكون بالضرورة منحنيا مقفولا

ند ٢٩ (فى رسم القطع الناقص بطريقة الاستمرار)

تنتج من تعريف القطع الناقص طريقة لرسمه بحركة مستمرة ولذلك يرمز بكمية ٢ ء لمجموع نصفى القطرين البوريين ويؤخذ

خيط طوله مساوٍ لهذه الكمية وتثبت نهايتا هذا الخيط فى مسمارين رفيعين موضوعين فى البورتين ب ، ت (شكل ١٨) ثم يشد الخيط بسن قلم الرسم ويحرك القلم مع جعل الخيط على الدوام مشدودا فمن البديهى ان سن القلم يرسم اثناء تحركه محيط القطع الناقص

وهذه هى الطريقة التى تستعملها الجنانينية حينما يريدون تخطيط القطع الناقص على الارض انما يستعوض فى هذه الحالة المسماران والقلم الرصاص بثلاثة أوتاد يوضع اثنان منها فى البورتين والثالث يحرك باليد بدل قلم الرسم ويستعوض أيضا الخيط بحبل طوله مساو الى ٢ ﻫ

لكن من المشاهد أنه لا يتحصل بهذه الطريقة على الضبط الكلى فى تعيين نقط القطع الناقص التى تكون قريبة من المستقيم الواصل بين البورتين لانه لقرب جزئى الخيط وانطباقهما على بعضهما تقريبا لا يكون أحدهما مستقيما وفضلا عن ذلك انه متى رسم أحد نصفى القطع الناقص لزم بالجبر رفع القلم من داخل الخيط لاجل امرار الخيط الى الجهة الثانية من المستقيم ب ت وذلك لاجل رسم النصف الآخر لكن يمكن بسهولة مداواة عيوب هذه الطريقة باستعمال الطريقة الآتية

(طريقة ثانية) يستعمل فى هذه الطريقة خيط طرفاه مربوطان ببعضهما طوله الكلى مساو الى ٢ ﻫ + ٢ ﺣ بفرض أن ٢ ﺣ رمز للبعد بين البورتين ثم يلف هذا الخيط على المسمارين ويجعل على الدوام مشدودا بواسطة القلم فبهذه الكيفية يمكن رسم القطع الناقص باكمله دفعة واحدة بدون وقوف أبدا

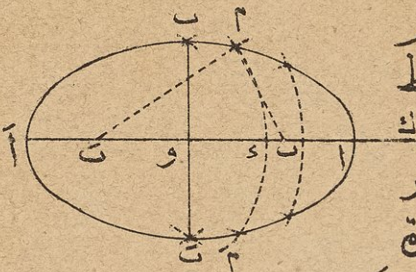
هذه الطريقة وان كانت سهلة وسريعة العمل لكنها قليلة الضبط أيضا لأنه يصعب أولا عقد الخيط بحيث يكون جزءه المطلق مساويا بالضبط الى الطول المعلوم ثانيا لانها تستلزم استعمال خيط رفيع لاجل سهولة انثنائه فيتسبب عن ذلك تغيير طول هذا الخيط بحسب كثرة شده وقلته

بند ٣ (رسم القطع الناقص نقطة فنقطة) . حينما يراد رسم القطع الناقص بالضبط فالاحسن ان تعين منه جملة نقط ثم يمر بها خط منحن متصل ولاجل الحصول على النقط الكافية لذلك يستسهل استعمال البرجل

مثلا

مثلا ليكن ب ، ت (شكل ١٩) هما بورتا القطع الناقص الذى يراد رسمه فيؤخذ على المستقيم الواصل بينهما بعد ت ك مساويا الى ٢م ثم تجعل نقطة ت مركزا ويرسم محيط دائرة حيثما اتفق فيقطع خط ب ت فى نقطة ء وتجعل أيضا نقطة ب مركزا وبنصف قطر مساو الى ءك يرسم محيط دائرة يقطع الاول فى نقطتين مثل م ، مَ

شكل ١٩



فمن البديهى أن تكون هاتان النقطتان من القطع الناقص وبهذا السير يمكن ايجاد جملة نقط بحسب الارادة بتغيير وضع نقطة ء ويلاحظ أنه فى كل وضع من أوضاع نقطة ء يمكن ايجاد أربع نقط من القطع الناقص ويكفى لذلك أن يبدل العمل على البورتين ب ، ت بمعنى أن تجعل نقطة ب مركزا وترسم دائرة كالدائرة التى رسمت بجعل نقطة ت مركزا والعكس بالعكس ومن المشاهد بالسهولة أيضا ان نقطة ء لا يمكن ان تشغل على المستقيم ب ت أوضاعا اختيارية لانه يلزم لاجل امكان تقاطع الدائرتين أن يكون البعد بين مركزيهما على الدوام أصغر من مجموع نصفى القطرين وأكبر من فاضلهما ولاشك أن ذلك يستلزم أن لا يكون أحد نصفى القطرين أكبر من البعد ت ا ولا أصغر من اك حيث كانت نقطة ا وسطا للبعد ب ك

فى بعض قواعد ونظريات هندسية

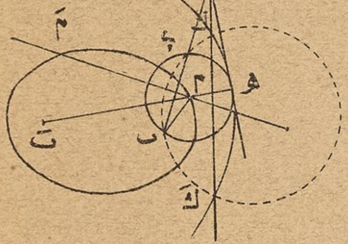
س ١٣ النظرية الاولى — القطع الناقص منحن محدب

ولاثبات ذلك يكفى أن نبرهن على أن المستقيم لا يقطعه الا فى نقطتين ويتوصل الى ذلك بشرح المسئلة الآتية

وهى طريقة ايجاد نقطتى تقابل المستقيم بمنحنى القطع الناقص التى يؤول منطوقها الى المنطوق الآتى

المعلوم نقطتان ومستقيم والمراد ايجاد النقطة الكائنة على هذا المستقيم التى

يكون حاصل جمع بعديها عن النقطتين المعلومتين مساويًا لطول معلوم مثلا ليكن ب ، تَ (شكل ٢٠) بورتى القطع الناقص أعنى النقطتين المعلومتين وليكن م ، مَ المستقيم المعلوم فنفرض أن المسئلة محلولة وان نقطة م هى النقطة التى يراد ايجادها فنصل المستقيم تَ م ونمده بقدر المسافة م ه المساوية الى م ب لاجل ان يكون تَ ه مساويا للمجموع المعلوم ثم نعين النقطة بَ المماثلة لنقطة ب بالنسبة للمستقيم م مَ فتكون الثلاثة أبعاد م ه ، م ب ، م بَ متساوية



شكل ٢٠

ولو رسمت دائرة مركزها نقطة م ونصف قطرها م ب لمرت بالثلاث نقط ب ، بَ ، ه التى معلوم منها النقطتان الاوليان وهما ب ، بَ واما الثالثة فايجادها سهل فى الواقع لاننا اذا جعلنا نقطة تَ مركزا وبنصف قطر مساو للمجموع المعلوم ورسمنا دائرة فانها تمر بنقطة ه وتكون مماسة الى الدائرة السابقة فى النقطة المذكورة وحيث ان رسم هذه الدائرة سهل لان مركزها ونصف قطرها معلومان فتؤل المسئلة الى ايجاد مركز دائرة تمر بنقطتين معلومتين وتمس محيط دائرة معلومة

وهذه المسئلة قد سبق حلها فى الهندسة العادية ومعلوم انه يكفى فيها أن تمرر بالنقطتين المعلومتين ب ، بَ محيط دائرة حيثما اتفق فيقطع محيط الدائرة المعلوم فى نقطتى ك ، كَ ويوصل بين ك ، كَ بمستقيم ك كَ ويمد الى أن يتقابل مع امتداد مستقيم ب بَ فى نقطة ے ثم يمرر بهذه النقطة مماس للمحيط المعلوم فتكون نقطة التماس ه لهذا المماس هى نقطة تماس الدائرة المطلوبة ومع ذلك فلا باس من ذكر اثبات هذه العملية من باب التذكار فنقول حيث كان المستقيم ے ه مماسا للمحيط المطلوب وكان ے ب قاطعا له فيحدث

ےه² = ے ب × ے بَ

فاذا وصل من نقطة ے الى نقطة اختيارية مثل ك من المحيط المعلوم حدث ايضا

ےه² = ے ك × ے كَ

وبناء

وبنا على ذلك يكون

ےب × ےبَ = ےك × ےكَ

وحينئذ تكون الاربع نقط ب ، بَ ، ك ، كَ موجودة على محيط دائرة واحدة بمعنى اننا اذا مررنا بنقطتي ب ، بَ ثم بنقطة ك الاختيارية محيط دائرة مر ايضا بنقطة كَ الموجودة على المحيط المعلوم وعلى المستقيم ے ك وحيث اننا لانبحث فى المسئلة التى نحن بصددها الا عن مركز هذه الدائرة فليس رسمها ضروريا بل يكفى أن نصل من نقطة تَ الى نقطة هـ بمستقيم فيقطع المستقيم المعلوم فى المركز المطلوب م

وحيث انه يمكن من نقطة ے تمرير مماسين للدائرة فيوجد حينئذ للمسئلة حل آخر هو مَ يتحصل عليه بوصل نقطة تَ مع نقطة تماس المماس الآخر فاذا كانت نقطة ے موجودة على محيط الدائرة الذى مركزه نقطة تَ فلا يوجد للمسئلة الا حل واحد وتكون المسئلة غير ممكنة الحل اذا كانت نقطة ے داخل محيط الدائرة المذكور

وحينئذ تبين ان لهذه المسئلة على الأكثر حلان اثنان فقط بمعنى انه لا يمكن المستقيم ان يقابل محيط القطع الناقص الا فى نقطتين وهذا هو ما لزم اثباته

فى محاور القطع الناقص ورؤسه

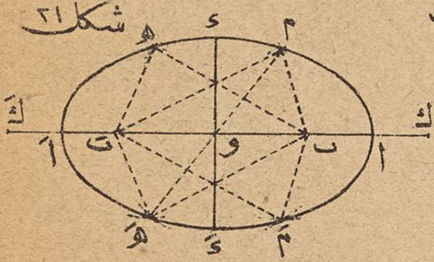
بند ٣٢ النظرية الثانية — المستقيم الواصل بين بورتى قطع ناقص والمستقيم العمودى عليه من وسطهما محورا هذا المنحنى

لاننا اذا لاحظنا ما سبق فى كيفية رسم المنحنى بالطريقة الثانية المذكورة فى بند ٣٠ وجدنا أن أي نقطة من محيط القطع الناقص قد تعينت من تقاطع قوسين مرسومين بجعل كل من البورتين مركزا وبنصفى قطرين مجموعهما يساوى ٢ ﻫ لكن من البديهى انه اذا تقاطع محيطا دائرتين حدث من تقاطعهما نقطتان متماثلتا الوضع بالنسبة للمستقيم الواصل بين مركزيهما فيظهر من ذلك أن نقط محيط القطع الناقص متماثلة مثنى بالنسبة للمستقيم ب تَ وبناء عليه يكون هذا المستقيم محورا له وذلك هو مقتضى التعريف المفرز فى بند ٧

بند ٣٣ ثانيا قد أوريناً أيضا فى بند (٣٠) أنه يمكن ايجاد نقطتى م ، مَ (شكل ٢)

يمكن بتغيير العمل على البورتين ب ، بَ ايجاد نقطتين اخريين مثل هـ ، هَ من القطع الناقص ومن البديهى أنه اذا دور الشكل حول مستقيم ء ءَ العمودى على وسط المستقيم ب بَ نصف دورة صارت نقطة ب فى بَ ونقطة بَ فى ب وكذا تأخذ نقطة هـ وضع نقطة م والعكس بالعكس ويظهر حينئذ أن نقط المنحنى متماثلة الوضع أيضا بالنسبة الى مستقيم ء ءَ فيكون هذا المستقيم بالضرورة محورا آخر له

وينتج من ذلك ان للقطع الناقص اربع رؤس سهلة الايجاد وفى الواقع كذلك لانه مشاهد أن الرأس ا الموجودة على المحور ب بَ هى وسط البعد ب ك اذ يلزم أن يكون بَ ا + ب ا = بَ ك وبطرح بَ ا من كل من الطرفين يحدث ب ا = اك



وأما الرأس اَ فلتعيينها يؤخذ الطول بَ كَ = بَ ك على المحور وينصف بعد بَ كَ أو يؤخذ بَ اَ = ب ا

(تنبيه) من المهم ملاحظة أن المحور الأكبر ا اَ يلزم أن يكون مساويا لمجموع نصفى القطرين البوريين الذى هو كمية ثابتة وفى الواقع لأن

ا اَ = بَ ك - اك + اَ بَ

وحيث انه معلوم مما تقدم أن اك = اَ بَ = $\frac{\text{ب ك}}{\text{٢}}$ فحينئذ يكون

ا اَ = بَ ك = ٢ ح

وأما الرأسان ء ، ءَ فلتعيينهما يلاحظ أن نصفى القطرين البوريين ء ب ، ء بَ مائلان متساويا البعد عن موقع العمود ء و وبناء على ذلك يكونان متساويين فيكون حينئذ لايجاد هاتين النقطتين أن تجعل النقطتان ب ، بَ مركزين وبنصفى قطرين متساويين وكل منهما مساو الى نصف البعد بَ ك أو الى و ا يرسم قوسا دائرتين فتتعين من تقاطعهما الرأسان ء ، ءَ

٣٤ يشاهد مما تقدم آنفا ان المحور المار بالبورتين هو الاكبر وذلك لأن ء و عمود ، ء ب مائل فيكون

ء و > ء ب = ا و أو ء ءَ > ا اَ

وبسبب ذلك قد سمى أحد المحورين بالمحور الاكبر والاخر بالمحور الاصغر

س ٣٥ د اذا رمز بالكميات ٢ᴖ ، ٢ᴖَ و ٢ح لمقادير كل من المحور الاكبر والمحور الاصغر والبعد بين البورتين حدث من المثلث القائم الزاوية و ب ء هذا القانون $\text{ᴖ}^{2} = \text{ᴖ}'^{2} + \text{ح}^{2}$

الذى بواسطته يمكن حساب أحد تلك الكميات الثلاث من بعد معلومية الاثنتين الآخريين

س ٣٦ د بناء على ما تقدم يمكن ان يقال ان القطع الناقص يصير معلوما اذا علم مقدار كل من محوريه وفي الواقع لان البعد بين البورتين يستخرج من القانون المتقدم الذى ينتج منه أن

شكل ٢٢

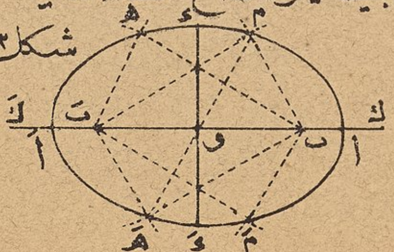
$$\text{ح} = \sqrt{\text{ᴖ}^{2} - \text{ᴖ}'^{2}}$$

وأما اذا كان المراد تعيينه بالطريقة الرسمية فيرسم مستقيمان متعامدان على بعضهما فى نقطة مثل و (شكل ٢٢) ويؤخذ بجانبي نقطة تقاطعهما وهى و بعدان مثل و ا , و أَ متساويان وكل منهما مساو الى ᴖ وكذلك يؤخذ البعدان و ء , و ءَ متساويين وكل منهما مساو الى ᴖَ ثم تجعل نقطة ء مركزا وبنصف قطر مساو الى و ا يرسم قوس دائرة ليقابل المستقيم ا أَ فى نقطتين مثل ب , تَ تكونان هما البورتان ثم بعد ذلك تستعمل احدى الطرق السابق ذكرها لرسم المنحنى

فى مركز القطع الناقص

س ٣٧ د النظرية الثالثة — نقطة تقابل المحورين هى مركز القطع الناقص ولبيان ذلك تعتبر نقطة حيثما اتفق مثل م من هذا المنحنى (شكل ٢٣) ونقطة أخرى مثل هَ منه أيضا موضوعة فى الزاوية الواقعة بين المحورين المقابلة للزاوية الموجودة بها النقطة الاولى لكن بحيث يكون وضع النقطة الثانية معينا بالشرط الآتى

شكل ٢٣



ب م = تَ هَ

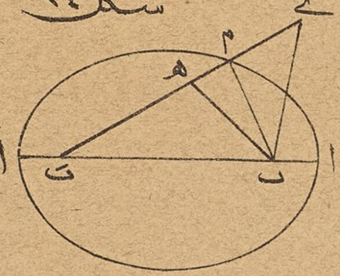
و تَ م = ب هَ

فتكون الاضلاع المتقابلة من الشكل الرباعى ب م ت هَ متساوية
وبناء على ذلك يكون شكلا متوازى الاضلاع وقطراه منصفين بعضهما بعضا
بحيث يكون مستقيم م هَ مارا من وسط المستقيم ب ت ويكون
وم = وهَ
وينتج حينئذ من ذلك ان نقط المنحنى متماثلة مثنى بالنسبة لنقطة و فتكون
هذه النقطة مركزا للمنحنى وذلك بناء على التعريف المقرر فى ند ٩
ند ٣٨ الاختلاف المركزى — اذا زاد المحور الاصغر بدون ان يتغير المحور
الاكبر أو صغر البعد بين البورتين بدون ان يتغير المحور الاكبر أيضا قرب المنحنى
شيأ فشيأ من أن يصير دائرة فاذا استمر تقارب البورتين من بعضهما حتى انطبقا
فمن البديهى أن المنحنى يصير دائرة
وبالعكس اذا بعد البورتان عن بعضهما صغر المحور الاصغر وآل القطع الناقص
فى نهاية الامر الى مستقيم وحينئذ يكون شكل القطع الناقص متعلقا فى آن
واحد بطول كل من المحور الاكبر والبعد بين البورتين
ونسبة البعد بين البورتين فى أى قطع ناقص الى محوره الاكبر تسمى الاختلاف
المركزى له بمعنى انه اذا رمز لها بحرف ف كان

$$\text{ف} = \frac{\text{٢ج}}{\text{٢م}} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} = \frac{\sqrt{\text{م}^{٢} - \text{ه}^{٢}}}{\text{م}}$$

ويظهر من ذلك حينئذ ان الاختلاف المركزى كمية أصغر من الواحد دائما
ند ٣٩ القطع الناقص يصير معينا بالضرورة اذا علم كل من محوره الاكبر
والاختلاف المركزى وقد جرت العادة بان تتوصل الفلكيون الى تعيين مدارات
الكواكب السيارة بواسطة هاتين الكميتين
ند ٤٠ النظرية الرابعة — محيط القطع الناقص يقسم مستويه الى قسمين
أحدهما داخله والآخر خارج عنه بحيث يكون مجموع البعدين الواصلين
من أى نقطة من القسم الخارجى الى بورتيه أعظم من محوره الاكبر ومجموع
البعدين الواصلين من اى نقطة من القسم الداخل الى البورتين أصغر من
المحور المذكور
فلنعتبر اولا نقطة مثل ى (شكل ٢٤) موضوعة خارج القطع الناقص
ونصل منها الى البورتين ونقول من حيث أن هذه النقطة خارجة عن المنحنى
مستقيما

شكل ٢٤



فمستقيما ى ب ، ى بَ الواصلان
منها الى البورتين يقطعان محيط في نقطتين
ولتكن احداهما هي م فنصل م ب
ويكون حينئذ

م ب + م بَ = ٢ ع

لكن من مثلث م ب ى يحدث

م ى + ب ى > م ب

فاذا اضفنا م بَ الى طرفي هذه المتباينة حدث

م بَ + م ى + ب ى > م ب + م بَ أو

ى ب + ى بَ > ٢ ع

واما اذا اعتبرنا نقطة مثل ﻫ داخل محيط القطع الناقص ووصلنا منها الى البورتين بمستقيمين مثل ﻫ ب و ﻫ بَ ثم مددنا احدهما الى أن يتقابل مع المنحنى في نقطة مثل م ووصل المستقيم م ب حدث من المثلث م ﻫ ب ان ﻫ ب < ب م + م ﻫ
وباضافة ﻫ بَ الى الطرفين يكون

ﻫ ب + ﻫ بَ < ب م + م ﻫ + ﻫ بَ = ب م + م بَ = ٢ ع

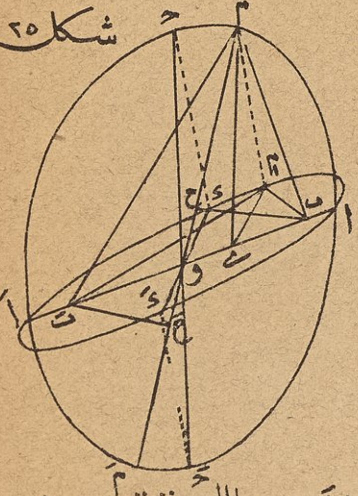
وحينئذ فقد اتضح انه على حسب وضع النقطة خارج القطع الناقص أو على محيطه أو داخله يكون مجموع بعديها البورتين أكبر أو مساويا أو أصغر من المحور الاكبر للقطع الناقص المذكور

١٤ـ النظرية الخامسة ـ القطع الناقص هو مسقط لدائرة مستويها مائل على مستويه

فاولا لا يخفى أن مسقط شكل ما (على مستوى مسقط معلوم) لايتغير ابدا مهما حرك هذا المستوى بالتوازي لنفسه وحينئذ يسوغ لنا ان ناخذ مستوي المسقط مارا بمركز الدائرة

اذا تقرر ذلك لنفرض ان اح أحَ (شكل ٢٥) هي الدائرة المعلومة وان مسقطها على المستوي المفروض هو المنحنى ا ى أ ىَ وتثبت ان هذا المنحنى يكون قطعا ناقصا ولذلك يرسم داخل الدائرة قطر مثل حح عمودي على خط

شكل ٢٥



تقاطع المستوي المعلوم بمستوي الدائرة وهو المستقيم ا اَ فيكون مسقط القطر المذكور وهو ء ءَ عمودا أيضا على المستقيم ا اَ ثم يؤخذ على ا اَ بعدا و ب ، و بَ مساويين الى ﺣ ء ويوصل من نقط حيثما اتفق من محيط الدائرة كالنقطة م مثلا الى نقطتى ب ، بَ وكذا من مسقطها وهو م١ الى نقطتى ب ، بَ ويوصل ايضا القطر م مَ

فاذا أنزل الآن مستقيم م١ ى عموديا على ا اَ ووصل المستقيم م ى فبمقتضى ما هو مقرر في نظرية الثلاثة أعمدة يكون المستقيم الاخير عمودا أيضا على ا اَ وبالتبعية لذلك تكون أضلاع مثلثى ﺣ و ء ، م ى م١ متوازية على التناظر ويكون المثلثان المذكوران متشابهين وينتج من تشابههما ان نسبة

م م١ : ﺣ ء :: م ى : ﺣ و

وغير ذلك اذا انزلنا من نقطتى ب ، بَ عمودي ب ح ، بَ حَ على القطر م مَ كان مثلثا و ح ب ، و ى م متشابهين لانهما قائما الزاوية وفيهما الزاوية الحادة مشتركة فينتج منهما هذا التناسب

ح ب : و ب :: م ى : و م

لكن مستقيما و ب ، ﺣ ء متساويان بالعمل وكذلك مستقيما و م ، و ﺣ متساويان لانهما نصفا قطري دائرة واحدة فتكون في التناسبين السابقين ثلاثة حدود مشتركة وعلى ذلك يكون ح ب = م م١

وينتج من ذلك أن المثلثين القائمي الزاوية م م١ ب ، م ح ب مشتركان في الوتر وأن ضلعين منهما متساويان وبذلك يتساوى المثلثان ويكون

م١ ب = م ح

وكذلك حيث ان مثلثى م م١ بَ ، م حَ بَ مشتركان في الوتر وفيهما ضلعان متساويان لان حَ بَ = ح ب = م م١ فيكونان متساويين وينتج منهما أن م١ بَ = م حَ

وغير ذلك

وغير ذلك من البديهي أن مستقيمي م حَ ، م َح متساويان ولهذا يكون

$$م_١ ب + م_١ بَ = مَ ح + م حَ = ٢ م َ = اا َ$$

وحينئذ يكون المنحنى الحادث قطعاً ناقصاً بورتاه هما نقطتا ب ، بَ

س٤٢ـ اذا رسم مستقيم في مستوى منحن ما وأنزل من احدى نقط هذا المنحنى عمود على هذا المستقيم سمي هذا العمود بالاحداثي الراسي لهذه النقطة اذا تقرر هذا فتنتج من النظرية السابق ذكرها النتيجة الآتية

(نتيجة) اذا علم قطع ناقص ودائرة قطرها هو المحور الاكبر لهذا القطع الناقص واعتبرنا نقطة من القطع الناقص والنقطة من محيط الدائرة التي تسقط معها في نقطة واحدة على المحور الاكبر كان بين احداثيهما الراسيين نسبة ثابتة

ولبيان ذلك نتصور أن سطح الدائرة دار حول مستقيم ا اَ وانطبق على مستوى القطع الناقص فينطبق أيضاً مستقيم ى م بالضرورة على مستقيم ى م١ لكن حيث ان مثلثي و حـ ى ، ى م م١ متشابهان فينتج منهما أن نسبة

$$م_١ ى : م ى :: و ى : و حـ :: ٥ : ٥َ$$

حينئذ يعلم أن نسبة الاحداثيين المتناظرين في كل من القطع الناقص والدائرة الى بعضهما كنسبة نصف المحور الاصغر الى نصف المحور الاكبر

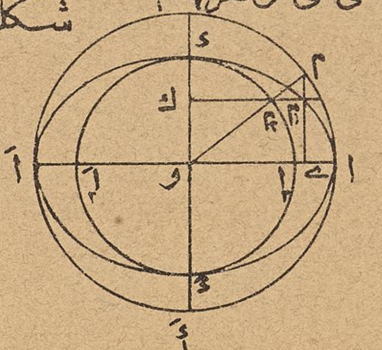
(تنبيه) هذه النسبة متعلقة بميل مستوي المنحنيين على بعضهما لانه ينتج من مثلث و حـ ى أن

$$و ى = و حـ \text{ جتا } حـ و ى \qquad \text{أو}$$

$$\frac{٥َ}{٥} = \text{جتا } حـ و ى$$

س٤٣ـ وتوجد هذه الخاصية بعينها في حالة ما اذا اعتبرت الاحداثيات العمودية على المحور الاصغر والدائرة المرسومة عليه أعني التي هو قطرها

شكل ٢٦



لانه اذا رسم على المحور الاصغر والاكبر محيطا دائرتين متحدتي المركز كما في (شكل ٢٦) ثم أنزل من نقطة حيثما اتفق مثل نقطة م١ من القطع الناقص احداثي عمودي على المحور الاكبر كالاحداثي م١ ى ومد على استقامته الى ان يقابل

محيط الدائرة المرسومة على المحور الاكبر ثم وصل مستقيم وم حدث بمقتضى ما تقدم فى (ند ٤٢) أن نسبة

م ى : م١ ى :: ءَ : ء :: وم٢ : وم

وينتج من ذلك ان مستقيم م١ م٢ موازٍ الى المحور اا وبناً على ذلك يكون عموديا على م ى

اذا تقرر ذلك يحدث من مثلثى وم ى و وم٢ ك المتشابهين ان نسبة

وى : م٢ ك :: وم : وم٢

أو نسبة م١ ك : م٢ ك :: ء : ءَ

وبناً على ذلك اتضح ان نسبة الاحداثيات الرأسية المتناظرة فى كل من القطع الناقص والدائرة المرسومة على المحور الاصغر الى بعضها كنسبة المحور الاكبر الى المحور الاصغر

ند ٤٤ ويمكن جمع هاتين النظريتين فى منطوق واحد بأن يقال اذا علم قطع ناقص ومحيط الدائرة المرسومة على احد محوريه تكون النسبة بين الاحداثيات الراسية للقطع الناقص العمودية على المحور المشترك بينه وبين تلك الدائرة الى الاحداثيات المناظرة لها من الدائرة المذكورة كالنسبة بين القطرين العموديين على المحور المشترك

ند ٤٥ طريقة اخرى لرسم القطع الناقص — ينتج من الخواص التى شرحناها طريقة سهلة لرسم القطع الناقص نقطة فنقطة ولذلك نرسم اولا المحورين ا اَ ء ءَ (شكل ٢٦) ونرسم على هذين المحورين محيطى دائرتين ثم نرسم نصف قطر حيثما اتفق مثل وم ونسقط نقطة م بعمود على المحور الاكبر ونقطة م٢ بعمود على المحور الاصغر فهذان العمودان يتقاطعان فى نقطة مثل م١ تكون نقطة من القطع الناقص لانه يفهم بداهة ان نسبة

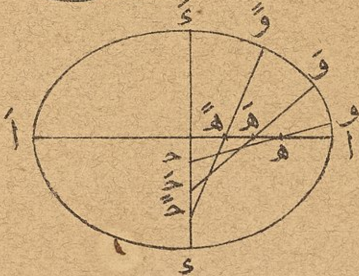
ا١ ى : م ى :: وم٢ : وم :: ءَ : ء

وفى العادة لا تؤخذ انصاف الاقطار التى مثل وم بالاختيار بل الاحسن ان يقسم محيط الدائرة الى اقسام متساوية ويوصل من نقط التقاسيم الى المركز

ند ٤٦ النظرية السادسة — اذا علم المحوران ا اَ و ء ءَ (شكل ٢٧) من قطع ناقص ثم اخذ مستقيم مثل حـ هـ وطوله الكلى حـ و مساوٍ لنصف

المحور

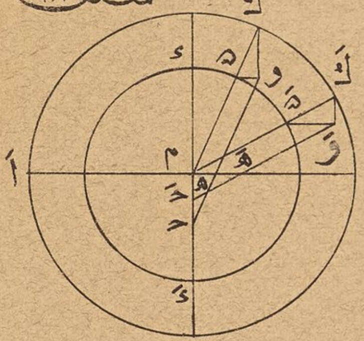
شكل ٢٧



المحور الاكبر ثم أخذ على ذلك المستقيم بالابتدا
من نقطة و بعدا كالبعد وه مساو لنصف
المحور الاصغر ثم علمنا نقطة ه باشارة على
المستقيم حه و لاجل ان تكون ثابتة عليه
فاقول اذا احرك المستقيم حه وحركة اختيارية
لكن بشرط ان تتحرك نهايته ح على المحور الاصغر
وبشرط ان تتحرك نقطة ه الثابتة بالنسبة
له على المحور الاكبر فان نهايته الاخرى تتحرك على منحنى القطع الناقص الذى
محوراه هما اآ و د دَ

بمعنى أنه اذا أخذ المستقيم المتحرك أوضاعا متجاورة كالاوضاع حهو و
حَهَوَ و حًهًوً و .... الخ كانت النقط و ووَ ووً و ... الخ نقطا من
القطع الناقص المذكور

شكل ٢٨



وللبرهنة على صحة هذه النظرية بطرق الهندسة
العادية نقول تقدم فى ش ٤٠ انه لرسم قطع
ناقص محوراه معلومان كالمحورين اآ و د دَ
(شكل ٢٨) يرسم على هذين المحورين دائرتان
ثم نرسم نصف قطر حيثما اتفق مثل م ن ك
ويرسم من نقطة ن أفقى كالافقى ن و
وينزل من نقطة ك رأسى كالرأسى ك و فيتقاطع
مع الافقى فى نقطة مثل و وتكون هى نقطة من القطع الناقص المطلوب
اذا تقرر هذا ورسم من نقطة و مستقيم مثل وه موازيا لنصف القطر ك ن م
فانه يقطع اولا المحور الاكبر فى نقطة مثل ه بحيث يكون البعد وه مساويا
لنصف المحور الاصغر وذلك لانه من متوازى الاضلاع وهم ن يعلم أن
وه = ن م وبما أن ن م مساو الى د م الذى هو نصف المحور الاصغر
لكونهما نصفى قطر دائرة واحدة فيكون حينئذ وه = د م أعنى مساويا
لنصف المحور الاصغر

وثانيا اذا مد وه من جهة ه حتى يقطع المحور الاصغر فى نقطة مثل ح

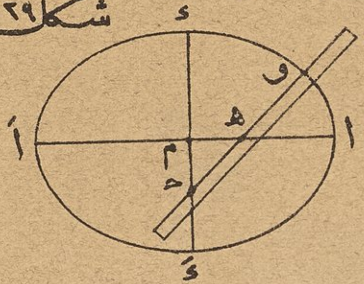
فأقول أن وحـ يكون مساويا لنصف المحور الأكبر لانه يؤخذ من متوازى الاضلاع كـ وحـ م أن وحـ = كـ م
لكن بما أن كـ م = ا م
فحينئذ يكون وحـ = ا م أعنى مساويا الى نصف المحور الاكبر
فاذا فرضنا ان نصف القطر كـ م انتقل من موضعه وأخذ وضعا آخر مثل كَ م وأجرينا عليه ما أجري على نصف القطر كـ م تعينت نقطة أخرى مثل وَ من القطع الناقص فاذا رسم منها مستقيم مثل وَهَ حَ موازٍ الى كَ م قطع المحورين في نقطتين مثل هَ , حَ بحيث يكون وَهَ مساويا لنصف المحور الاصغر ويكون وَحَ مساويا لنصف المحور الاكبر
واثبات ذلك واضح من متوازى الاضلاع الجديد وهو كَ وَحَ م وهكذا كلما تغير وضع نصف القطر حدثت نقطة من القطع الناقص بحيث لو رسم منها موازٍ لنصف القطر المذكور تحدد عليه جزآن مساو أحدهما لنصف المحور الاصغر والآخر لنصف المحور الاكبر
وعليه فيكون عكس ذلك صحيحا بمعنى أنه اذا تحرك المستقيم وهـحـ الذى طوله الكلى وحـ مساو لنصف المحور الاكبر من القطع الناقص وطول جزئه وهـ مساو لنصف المحور الاصغر حركة بحيث لا تخرج نقطته حـ عن المحور الاصغر ونقطته هـ عن المحور الاكبر لزم أن تكون جميع الأوضاع التى تأخذها نهايته الثانية و موجودة على القطع الناقص وهو المطلوب
(تنبيه) اعلم ان لهذه النظرية اثباتا آخر معلوما فى علم تطبيق الجبر على الهندسة وهو الاثبات المشهور والمستعمل فى جميع كتب المنحنيات لكن بما أن كتابى هذا موضوع لتلامذة التجهيزية على الاخص وتلامذة هذه المدرسة لم يكن سبق لهم دراسة علم تطبيق الجبر على الهندسة قد التزمت لأجل أن لا أحرمهم من مزايا هذه النظرية الجميلة التى قد اسس عليها برجل القطع الناقص بان أبحث لهم على اثبات لهذه النظرية لم يكن مبنيا الا على الهندسة العادية التى هى من ضمن معارفهم فساعدتنى الفكرة لحسن حظهم ووجدت لهم الاثبات المتقدم الذى لم يكن مبنيا الا على خاصية متوازى الاضلاع

٤٧ـ طريقة رسم القطع الناقص بشريط من الورق أو بالمسطرة ـــــ

ينبغ

ينتج من النظرية السابقة طريقة لرسم القطع الناقص بواسطة شريط من ورق ان كان المراد رسمه على فرخ من الورق او بواسطة مسطرة من الخشب ان كان المراد رسمه على حائط كما تفعل طائفة النحاتين حينما يريدون رسم عقد اسطوانى دليله قطع ناقص وبيان هذه الطريقة هو الآتى

شكل ٢٩



وذلك ان يعلم بالقلم على حرف شريط الورق أو المسطرة ثلاث نقط مثل و ، هـ ، حـ شكل ٢٩ بحيث يكون بعد وحـ = ا م أى نصف المحور الاكبر وان يكون بعد وهـ = م ء أعنى نصف المحور الاصغر ومن ذلك يكون حـهـ مساويا للفرق بين نصفى المحورين

فاذا حرك الشريط او المسطرة بشرط ان لا تخرج نقطة هـ عن المحور ا آ ونقطة حـ عن المحور ء ءَ فبناء على ما ثبت فى ش ٤٦ يعلم ان نقطة و تتحرك على القطع الناقص فاذا علم بالقلم على سطح الورق الذى يراد الرسم عليه مواضعها المختلفة المتتالية تحصلت عدة نقط على قدر اللزوم من القطع الناقص فتجمع بمنحن متصل ويكون هو المنحنى المطلوب

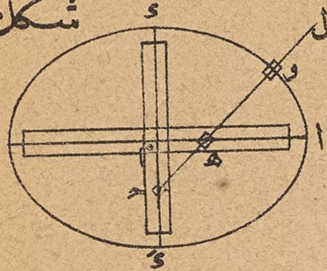
ملحوظة مفيدة — حيث انه اذا جعلت نقطة حـ مركزا وبنصف قطر مساو للفرق بين نصفى المحورين رسمنا قوس دائرة فانه يقطع المحور الأكبر بالضرورة فى نقطة هـ بحيث اذا وصل من حـ الى هـ بمستقيم واخذ عليه بعد هـو مساويا لنصف المحور الاصغر كانت نقطة و من القطع الناقص فحينئذ يمكن جعل هذه الكيفية طريقة لرسم القطع الناقص بتغيير مركز القوس من نقطة حـ الى نقطة اخرى ومن هذه الى اخرى وهلم جرا حتى تتعين النقط الكافية

ش ٤٨ برجل القطع الناقص — برجل القطع الناقص هو آلة بواسطتها يمكن رسم القطع الناقص دفعة واحدة بالاستمرار وهو مؤسس على النظرية التى تقررت فى ش ٤٦ وهاك وصفه

يتركب هذا البرجل من مسطرتين عموديتين على بعضهما من وسطيهما ومرتبطتين ببعضهما ارتباطا ثابتا وبكل مسطرة منهما شق مصنوع فى وسطها

ومتجه في جميع طولها بحيث عند رسم القطع الناقص توضع الالة بشرط
ان يكون محورا الشقين اللذين بالمسطرتين
منطبقين على المحورين اأ ، ى ىَ شكل ٣٠
من القطع الناقص الذي يراد رسمه ثم من
ذراع مثل حـ ل عليه مقبضان مثل
و ، هـ يمكن تثبيتهما في نقطتين حيثما اتفق
من الذراع وفي المقبض هـ يوجد
أصبع أو سن ينزلق بطول شق المسطرة

شكل ٣٠

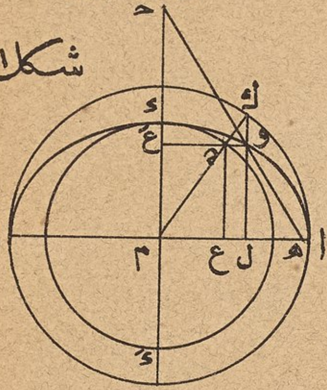


اأ واما المقبض و فان فيه محلا لوضع سن قلم الرسم الذي به يرسم القطع الناقص بتحريك الذراع حـ ل ويوجد في النهاية حـ من الذراع حـ و حامل ذو أصبع ينزلق في شق المسطرة ى ىَ فاذا ثبتنا المقبضين هـ ، و بحيث صار البعد حـ و = م ا ، هـ و = م ى ثم وضعنا المسطرتين بحيث يكون محورا شقيهما منطبقين على محوري القطع الناقص كما تقدم وحركنا الذراع حـ ل فان نقطة حـ لا تزال تتحرك على المحور ى ىَ ونقطة هـ على المحور اأ واما نقطة و فانها ترسم بالضرورة قطعا ناقصا وذلك بنا على بند ٤٦

بند ٤٩ (طريقة اخرى لرسم القطع الناقص بواسطة المسطرة أو شريط من ورق)

غاية هذه الطريقة ان يؤخذ شريط
من ورق أو مسطرة ويعلم عليها ثلاث
نقط مثل هـ ، و ، حـ شكل ٣١
بحيث يكون بعد هـ و مساويا لنصف
المحور الاصغر ى ىَ وبعد و حـ مساويا
لنصف المحور الاكبر اأ من القطع الناقص
الذي يراد رسمه ثم تحرك المسطرة لكن
بشرط ان لا تخرج نقطة حـ عن المحور

شكل ٣١



الاصغر وامتداده وان تتحرك نقطة هـ على المحور الاكبر وامتداده ويعلم على سطح الورق الذي يراد رسم القطع الناقص عليه جميع الاوضاع التي تاخذها نقطة و فتكون هذه الاوضاع نقطا من القطع الناقص

وفي الواقع لاننا اذا فرضنا ان القطع الناقص مرسوم من قبل بالطريقة المقررة في ش ٤ د بمعنى انه من بعد رسم نصف القطر م ه ك انزلنا من نقطة ك الراسي ك و ل ومن نقطة ه رسم الافقي ع ه و الذي يقطع الراسي المتقدم في نقطة و التي تكون بموجب ما تقدم نقطة من القطع الناقص فاذا رسم الآن من نقطة و مستقيم كالمستقيم ح و هـ صانع مع المحور الاكبر للقطع الناقص زاوية مثل وهم مساوية للزاوية ك م هـ الواقعة بين ذلك المحور وبين نصف القطر لكان هذا المستقيم صانعا بالضرورة مع المحور الاصغر زاوية مثل وحم = ك م ح ويكون جزؤه الاسفل و هـ مساويا لنصف المحور الاصغر وجزؤه الاعلى وح مساويا لنصف المحور الاكبر

وفي الواقع لاننا اذا انزلنا من نقطة ه عمود ه ع على اآ حدث مثلث ه ع م القائم الزاوية في ع مساويا لمثلث و ل هـ القائم الزاوية في ل لان فيهما ضلع ه ع = و ل وزاوية ه م ع = وهـ ل بالعمل فتكون الزاوية الثالثة م ه ع من المثلث الاول مساويه لنظيرتها و هـ من المثلث الثاني وحينئذ فيكون مثلث ه م ع = و ل هـ ومن تساويهما يكون و هـ = ه م = د م وهو برهان الجزء الاول

وثانيا اذا نظرنا الى مثلثي ك ل م ر ح ع و القائمي الزاوية وجدنا أن فيهما ضلع ل م مساو لضلع و ع وزاوية ك م ل = ح و ع فتكون الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية لنظيرتها من المثلث الثاني وعليه فيكون هذان المثلثان متساويين وينتج من تساويهما أن وح = ك م = ا م وهو المطلوب الثاني

فاذا تصورنا ان نصف القطر انتقل من وضعه الى وضع آخر تعينت نقطة أخرى من القطع الناقص بحيث اذا رسم من تلك النقطة مستقيم صانع مع المحورين زاويتين مساويتين للزاويتين الواقعتين بين نصف القطر في وضعه الجديد وبين المحورين المذكورين كان جزؤه الاسفل مساويا ايضا لنصف المحور الاصغر وجزؤه الاعلى لنصف المحور الاكبر وهكذا

وبما ان هذه النظرية لا تزال موجودة في أي وضع اخذه المستقيم ح و هـ المتغير

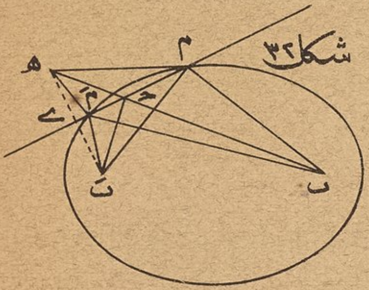
بتعا التغير نصف القطر فيكون حينئذ عكسها صحيحا على الدوام بمعنى انه اذا
تحرك المستقيم ح و هـ بحيث لا تخرج نقطة هـ عن المحور ا اَ ونقطة ح عن
المحور ى ىَ ازمان تتحرك نقطته المتوسطة وهى و على منحنى القطع الناقص
وهذا هو ما أردنا بيانه

الفصل الثانى

فى المماس للقطع الناقص والعمودى عليه واقطاره

ن ش د النظرية السابعة — المستقيم المماس للقطع الناقص يصنع مع
نصفى القطرين البوريين الواصلين الى نقطة التماس زاويتين متساويتين
ولبيان ذلك يعتبر مستقيم قاطع لمحيط القطع الناقص فى نقطتين قريبتين
من بعضهما مثل م ، مَ شكل (٣٢)

شكل ٣٢



فاذا حرك هذا القاطع حتى انطبقت هاتان
النقطتان على بعضهما لصار القاطع مماسا
بحيث لو أوجدنا نقطة هـ المماثلة للبورة بَ
بالنسبة لمستقيم م مَ ثم رسمنا المستقيمات
ب م ، ب مَ ، بَ م ، بَ مَ ، م هـ ، مَ هـ
ووصلنا بين نقطتى ب ، هـ بمستقيم لكان
هذا المستقيم قاطعا للقاطع م مَ فى نقطة مثل ح ويكون المستقيمان
م بَ ، م هـ متساويين لكونهما مائلين متساويى البعد عن موقع العمود
م ى ويكون كذلك المستقيمان مَ بَ ، مَ هـ وبناء على ذلك يكون الخطان المنكسران
ب م هـ ، ب مَ هـ مساويين الى الخطين المنكسرين ب م بَ ، ب مَ بَ بمعنى ان مجموع
طوليهما مساو الى ٢ ق ولكن حيث كان مستقيم ب هـ أقصر من كل من المنكسرين
ومستقيم هـ ح = ح بَ لنفس هذا السبب المتقدم فيكون حينئذ

ب هـ = ب ح + ح بَ

واخيرا يكون ب ح + ح بَ < ٢ ق

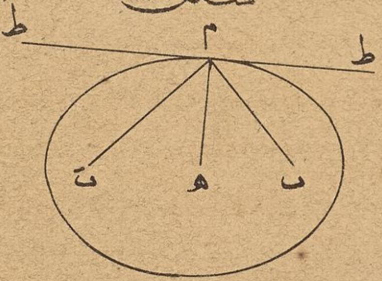
وحينئذ تكون نقطة ح داخل محيط القطع الناقص وواقعة بين نقطتى
م ، مَ مهما كان وضع القاطع وعلى هذا اذا تحركت هاتان النقطتان واقتربتا
من بعضهما الى ان انطبقتا فنقطة ح تنطبق عليهما ويصير المستقيمان ح ب
،

، ح ت نصفي القطرين البوريين لنقطة التماس

اذا تقرر ذلك يلاحظ أنه في جميع أوضاع نقطة ح يكون مثلثا ح ى ه ، ح ى ت متساويين وبناء عليه تكون زاويتا ى ح ه ، ت ح ى متساويتين ايضا وغير ذلك حيث ان زاويتي ى ح ه ، م ح ب متساويتان لانهما متقابلتان بالرؤس فتكون زاويتا ت ح ى ، م ح ب متساويتين وهذا التساوي يحصل ايضا بالضرورة عندما يصير القاطع م مَ مماسا وبذلك يثبت المطلوب

ش ٥١ نتيجة المستقيم العمودي على منحنى القطع الناقص في نقطة من محيطه يكون قاسما للزاوية الواقعة بين نصفي قطريها البوريين الى قسمين متساويين مثلا ليكن ط طَ شكل (٣٣) هو المماس للقطع الناقص في نقطة م فاذا رسم العمودي على المنحنى في هذه النقطة وهو م ه أقول ان هذا العمودي منصف لزاوية ب م ت وفي الواقع لانه ينتج من النظرية السابقة ان زاويتي ط م ب ، طَ م ت متساويتان وعليه تكون زاوية ب م ه المتممة لزاوية ط م ب مساوية لزاوية ت م ه المتممة لزاوية طَ م ت وهو المطلوب

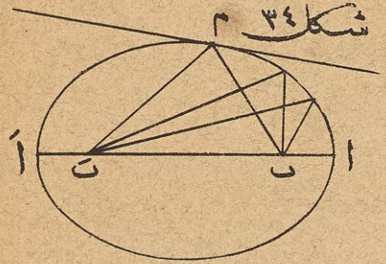
شكل ٣٣



ش ٥٢ (في المرايات الناقصية)

خاصية القطع الناقص التي ذكرناها حالا هي السبب الوحيد في تسمية نقطتي ب ، ت بالبورتين المتناظرتين وذلك انه من المقرر في علم الطبيعة انه اذا صادمت كرة مرنة حاجزا مرنا أيضا تغير اتجاهها بعد المصادمة فتتبع اتجاها آخر بحيث تكون زاوية السقوط مساوية لزاوية الانعكاس بمعنى ان الاتجاهين اللتين تسير عليهما تلك الكرة قبل المصادمة وبعدها يصنعان مع العمودي المقام على سطح الحاجز المرن من نقطة المصادمة زاويتين متساويتين وكذلك ينعكس كل من الاهتزازات الصوتية والاشعة الحرارية او الضوئية تبعا لنفس هذا القانون

فاذا تصورنا حينئذ قطعا ناقصا مصنوعا من شريط أو صفيحة قليلة العرض مأخوذة من جسم مرن بمعنى انه صار تشكيل هذه الصفيحة على هيئة قطع ناقص فصارت تشبه حرف الصينية ثم قذفت كرة مرنة من نقطة ب فى اتجاه حيثما اتفق مثل ب م شكل (٣٤) فانها تمر بعد المصادمة بنقطة ت



شكل ٣٤

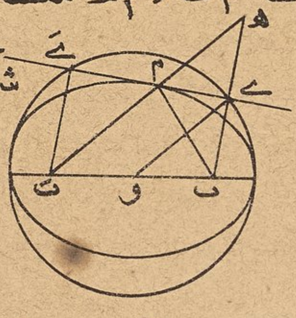
وكذلك اذا فرض ان كرة اخرى قد قذفت من نقطة ت مرت بعد المصادمة بنقطة ب وأيضا اذا ارتج جسم رنان فى نقطة ب انعكست ارتجاجاته الصوتية على سطح القطع الناقص وتجتمع فى نقطة ت بحيث يسمع الصوت فى هذه النقطة اكثر من غيرها وكذلك اذا فرض ان الصفيحة مصقولة من الداخل ووضع فى نقطة ب ينبوع حرارى فان الاشعة الخارجة منه تجتمع بعد انعكاسها على سطح هذه الصفيحة فى نقطة ت بحيث اذا وضع الترمومتر فى هذه النقطة أظهر ان فيها درجة حرارة مرتفعة عن الدرجات التى فى غيرها من النقط وتكون الحرارة فى نقطة ت كما لو كان ينبوع الحرارة موضوعا فيها ويحصل مثل ذلك ايضا اذا كان الينبوع موضوعا فى نقطة ت والترمومتر فى نقطة ب فلجميع هذه الاسباب قد سميت نقطتا ب ، ت بالبورتين المتناظرتين واذا وضعت فى نقطة ب نقطة ضوئية فان الاشعة الخارجة منها تنعكس على الحاجز الناقصى وتجتمع فى نقطة ت بحيث ان العين الموضوعة فى نقطة ت تحس بالضوء كما اذا كانت النقطة المضيئة موجودة فى نفس هذه النقطة

٥٣ ـ النظرية الثامنة ـ المحل الهندسى لمساقط بورتى قطع ناقص على جميع المماسات لمحيطه هو محيط دائرة قطرها المحور الاكبر لهذا القطع الناقص لانه لا يخفى ولان مسقط نقطة على مستقيم هو موقع العمود النازل منها على هذا المستقيم

فاذا تقرر هذا ينزل من البورة ب شكل (٣٥) عمود مثل ب ى على مماس حيثما اتفق مثل ى ىَ ويمد على استقامته حتى يتلاقى مع نصف قطر البورى

ت م فى نقطة مثل نقطة هـ فيكون خطا م ب ، م هـ متساويين
لان المماس منصف لزاوية ب م هـ
بمقتضى (٣٥د) وعلى هذا يكون طول
المستقيم ت هـ مساويا الى ٢ ﺣ
لكن من حيث ان خط و ى الواصل
من مركز القطع الناقص الى مسقط
البورة على المماس مار بمنتصف كل من

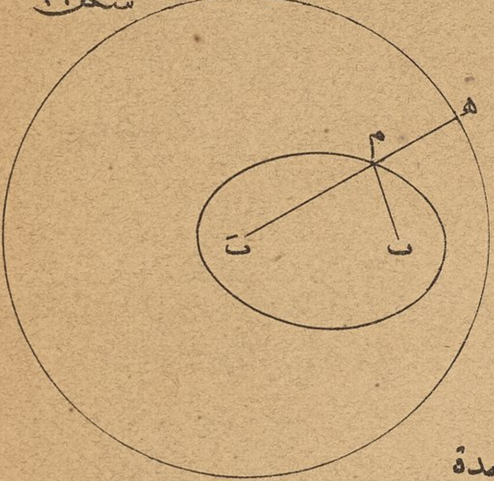
شكل ٣٥



ت ، ب هـ اللذين هما ضلعا المثلث ت ب هـ فيكون حينئذ هذا الخط
موازيا الى ضلعه الثالث ومساويا لنصف طوله بحيث يكون و ى = ﺣ
وعلى هذا يكون بعد نقطة ى التى هى مسقط البورة عن مركز القطع الناقص
ثابت الطول ومساويا لنصف المحور الاكبر وبهذا تثبت النظرية المتقدمة
وهذه الدائرة تسمى غالبا بالدائرة الاصلية للقطع الناقص ومن المشاهد انها
مساوية للدائرة التى مسقطها هو القطع الناقص كما فى (٣٤د)
٤٥د فى دائرة الاستدلال — دائرة الاستدلال هى دائرة معرفتها مهمة
جدا لانها تستعمل كثيرا فى رسم مماسات القطع الناقص وهى الدائرة التى ترسم
بجعل احدى بورتى القطع الناقص مركزا وبنصف قطر مساو الى ٢ ﺣ
وبنا على ذلك يعلم انه يوجد لكل قطع ناقص دائرتا استدلال متميزتان
٥٥د تعريف آخر للقطع الناقص — من المعلوم أن بعد أى نقطة عن محيط
دائرة يحسب على المستقيم الواصل من تلك النقطة الى مركز هذه الدائرة
فاذا تقرر هذا فلتكن نقطة م شكل (٣٦) نقطة حيثما اتفق من محيط القطع
الناقص ويوصل منها الى البورتين بنصفى القطرين البوريين ب م ، ت م
اللذين يمد ثانيهما على استقامته حتى يتلاقى مع دائرة الاستدلال التى
مركزها نقطة ت فيكون بالضرورة م هـ = م ب
وعلى هذا يرى ان نقطة م متساوية البعد عن كل من نقطة ب ومحيط هذه
الدائرة فيمكن حينئذ ان يعرف القطع الناقص بتعريف جديد بأن يقال القطع
الناقص منحن جميع نقطه متساوية البعد عن محيط دائرة وعن نقطة موضوعة
داخلها

ند ٥٦ قد يمكن بالسهولة ان تستخرج من هذا التعريف طريقة جديدة لرسم القطع الناقص لكنها تكون اقل بساطة وسهولة من الطرق التى ذكرناها قبل الآن فلذا لم نطل الكلام عليها زيادة عن ذلك

شكل ٣٦

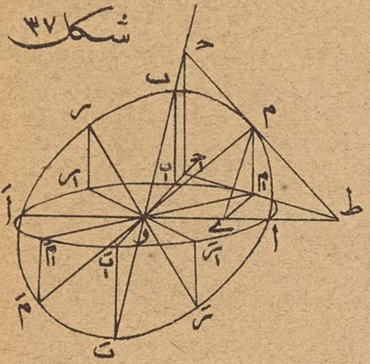


ند ٥٧ النظرية التاسعة

اذا رسم مستقيمان مماسان للقطع الناقص ولدائرته الاصلية فى نقطتين مسقطهما على المحور الاكبر واحد كان هذان المماسان متلاقيين مع هذا المحور فى نقطة واحدة

ولاثبات ذلك نعتبر الدائرة ا ب اَ بَ شكل (٣٧) التى مسقطها هو القطع الناقص اب اَ بَ كما فى (ند ٣٧) ونفرض أن نقطة م نقطة من الدائرة وان نقطة م هى مسقطها فيكون حينئذ مسقط المماس للدائرة وهو م ط مماسا للقطع الناقص فى نقطة م لكن من حيث ان هذا المماس الاخير يلزم ان يكون بالضرورة مارا بنقطة ط التى هى نقطة تقابل مماس الدائرة بمستوى المسقط وهذه النقطة لا يمكن وجودها الا على المحور اا الذى هو خط تقاطع المستويين

شكل ٣٧



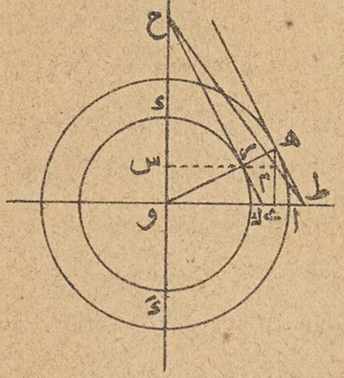
فنعلم حينئذ أن هذين المماسين تلاقيا فى نقطة واحدة على المحور فاذا طبق الآن مستوى الدائرة على مستوى المسقط انطبقت هذه الدائرة على الدائرة الاصلية للقطع الناقص وأخذ مستقيم ء م الاتجاه ء م بشرط ان يكون مسقط نقطتى م ، م على المحور الاكبر واحدا فمن حيث ان نقطة ط لم تتغير موضعا لانها موجودة على محور الدوران يثبت المطلوب حينئذ من ان المماسين لا يزالان متلاقيين فى هذه النقطة وهذا هو ما اردنا بيانه

ند ٥٨

٤٥ وهذه الخاصية توجد أيضا بالنسبة الى المحور الاصغر في حالة ما اذا اعتبرنا نقطتين مسقطهما على هذا المحور واحد احداهما من نقط القطع الناقص والاخرى من نقط الدائرة التى قطرها المحور المذكور

فاذا فرض مثلاان و ر ه شكل (٣٨) نصف قطر حيثما اتفق ثم رسمنا مماسى ه ط ، ر ك المتوازيين لكل من الدائرة الاصلية والدائرة المرسومة على المحور الاصغر حدث من ذلك مثلثان متشابهان ينتج منهما هذا التناسب

شكل ٣٨



و ط : و ك :: و ه : و ر :: ه : هَ

وفى هذا التناسب ه ، هَ رمزان لنصفى المحورين

فاذا وصل الآن مستقيم ط ح وانزل مستقيم ر س عموديا على المحور الاصغر حدث بالضرورة هذا التناسب الآتى

م س : ر س :: و ط : و ك :: ه : هَ

وبنا على ذلك تكون نقطة م بمقتضى بند (٤٤) نقطة من القطع الناقص لكن حيث ان مستقيم ط م هو بمقتضى النظرية السابقة المماس لهذا القطع الناقص فى نقطة م فحينئذ يعلم ان هذا المماس متلاق مع المماس ك ر على امتداد المحور الاصغر وهذا هو ما أردنا بيانه

(تنبيه) يستنتج من البرهان السابق ومن القضايا المبرهنة فى بندى (٤٢) و (٤٣) ان المستقيم ه م عمودى على المحور الأكبر

ويمكن التعبير عن هاتين الخاصيتين المهمتين جدا فى العمل بمنطوق واحد وهو المنطوق الآتى

اذا علم قطع ناقص والدائرة التى قطرها احد محوريه أقول ان مماسى هذين المنحنيين فى نقطتين مسقطهما على المحور المشترك واحد يتقاطعان فى نقطة واحدة على هذا المحور المشترك

بند ٥٩ نتيجة — نصف المحور فى القطع الناقص هو وسط متناسب بين البعدين الواصلين من مركزه الى مسقط نقطة تماس أى مماس كان على المحور والى نقطة تقابل هذا المماس بالمحور المذكور

وفى الواقع لانه ينتج من مثلث وهـط القائم الزاوية أن

$$\overline{\text{وهـ}}^{2}=\overline{\text{وا}}^{2}=\text{وى}\times\text{وط}$$

وبالمثل ينتج من مثلث ورح القائم الزاوية أن

$$\overline{\text{ور}}^{2}=\overline{\text{وء}}^{2}=\text{وس}\times\text{وح}$$

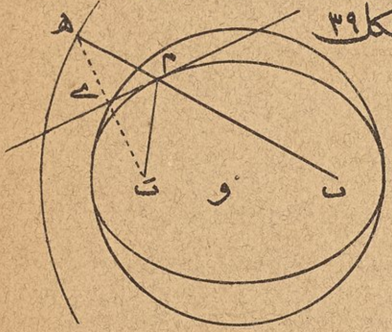
بند (فى رسم مماسات القطع الناقص) الخواص المتنوعة التى ذكرناها آنفا تساعد على ايجاد طرق هندسية بسيطة جدا لحل الثلاث مسائل الاصلية التى توجد فى البحث عن مماسات القطع الناقص

المسئلة الاولى

المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع ناقص من نقطة معلومة على محيطه

(الطريقة الاولى) لتكن نقطة م شكل (٣٩) هى النقطة المعلومة فأقول اذا وصل ب م ، تَ م كان المماس المطلوب هو المستقيم المنصف لزاوية تَ م هـ وحينئذ فيسهل إيجاده بتنصيفها لا غير لكنه يمكن الاستغناء عن إيجاد هذا المستقيم المنصف للزاوية برسم دائرة الاستدلال والدائرة الاصلية وبعد ذلك يكفى أن نمد مستقيم ب م حتى يتقابل مع محيط دائرة الاستدلال فى نقطة مثل هـ ثم نصل مستقيم تَ هـ فيكون المماس المطلوب هو المستقيم الواصل من نقطة م الى نقطة ى التى هى نقط تقابل مستقيم تَ هـ بمحيط الدائرة الاصلية

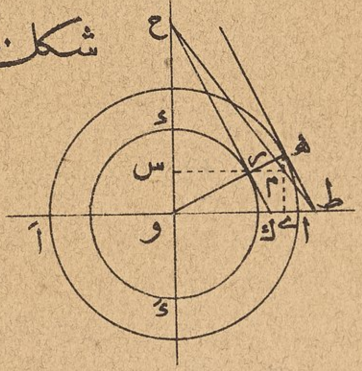
شكل ٣٩



(الطريقة الثانية) ينتج من النظرية التاسعة المذكورة فى بند ٥٧ طريقة أخرى لحل نفس هذه المسئلة فمثلا لتكن نقطة م شكل (٤٠) هى النقطة المعلومة

فينزل احداثى هذه النقطة وهو م ى ثم يمد على استقامته حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية فى نقطة مثل نقطة هـ ويرسم من هذه النقطة مستقيم مماس لهذه الدائرة فهذا المماس يقطع المحور ا اَ فى نقطة مثل نقطة ط اذا وصل منها الى نقطة م بمستقيم ط م كان هو المماس المطلوب

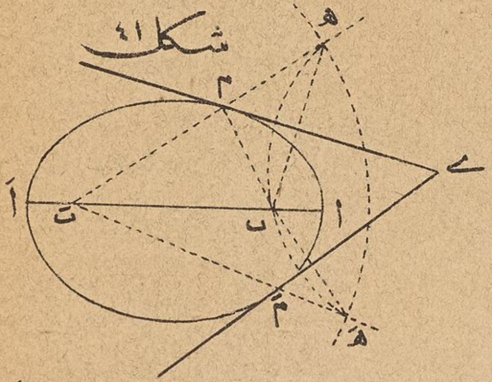
شكل ٤٠



من الجائز أن تقع نقطة ط بعيدة جدا فيترتب على ذلك تقاطع المستقيمين ا اَ و هـ ط على زاوية حادة جدا فلا تتعين نقطة تقاطعهما بالضبط أو ربما وقعت النقطة المذكورة خارج حدود الرسم بالكلية ففى كلتا هاتين الحالتين تستعوض الدائرة الاصلية بدائرة قطرها المحور الاصغر ويستعوض الاحداثى م ى بالاحداثى م س العمودى على المحور الاصغر والمماس هـ ط بالمماس س ح

المسئلة الثانية

٦١ــ المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الناقص من نقطة خارجة عنه (الطريقة الاولى) يفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة ى هى النقطة المعلومة شكل (٤١) وان ى م هو المماس المطلوب وان م هى نقطة تماسه بالمنحنى فاذا وصل مستقيم ث م ومد على استقامته حتى يتلاقى فى نقطة مثل هـ مع العمود النازل من البورة ب على المماس كان بعد ث هـ مساويا الى ٢ ٦ وحينئذ تكون نقطة هـ موجودة على محيط دائرة الاستدلال التى مركزها هو نقطة ث وغير ذلك من حيث ان المماس عمودى على منتصف المستقيم ب هـ فيكون البعدان ى ب , ى هـ متساويين وحينئذ تكون نقطة هـ هى نقطة تقاطع دائرة الاستدلال مع الدائرة المرسومة بجعل نقطة ى مركزا وبعد ى ب نصف قطرها ومتى تعينت نقطة هـ بهذه الوسيلة فلا يبقى علينا سوى ان ننزل من نقطة ى عمودا على ب هـ أو نصل من نقطة ى



الى نقطة تقابل المستقيم ب هـ بالدائرة الاصلية فيكون العمود المنزل او المستقيم الموصول بهذه الكيفية هو المماس المطلوب واما من خصوص نقطة التماس فهى نقطة تقابل المماس مع المستقيم ت هـ

وحيث ان محيطى الدائرتين يتقاطعان على العموم فى نقطتين فتوجد حينئذ نقطة تقاطع أخرى مثل هَ ويلزم بناء على ذلك وجود مماس اخر مثل ح مَ

بشرط لامكان حل هذه المسئلة ان تكون النقطة المعلومة موضوعة خارج القطع الناقص لان دائرة الاستدلال والدائرة التى مركزها نقطة ح لايمكنهما ان يكونا خارجتين عن بعضهما حيث ان الثانية منهما مارة بنقطة ب الكائنة داخل الأولى وحيث انه لاجل تقاطع محيطى دائرتين يلزم ان يكون البعد بين مركزيهما اكبر من فاضل نصفى قطريهما اعنى يكون

ح ت > ت هـ - ح ب   أو

ح ت + ح ب > ت هـ = ٢ ق

وهذا هو الشرط المقرر فى بند (٢٩) الذى يدل على ان نقطة ح موضوعة خارج المنحنى

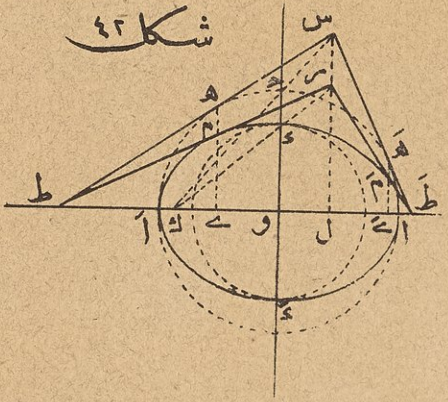
(الطريقة الثانية) لنفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة ر هى النقطة المعلومة وان ر م هو المماس المطلوب الذى نقطة تماسه بالمنحنى هى نقطة م شكل (٤٢) فيرسم العمود م ح ويمد حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية فى نقطة مثل نقطة هـ ثم يوصل المستقيم هـ ط فيكون بمقتضى بند (٥٧) هو المماس لهذه الدائرة فيمد هذا المماس حتى يتلاقى مع احداثى نقطة ر فى نقطة مثل نقطة س ويحدث

س ل : ر ل :: هـ ح : م ح :: ق : قَ

وبذلك يسهل رسم نقطة س لانه اذا وصل المستقيم ر ى ومد الى أن

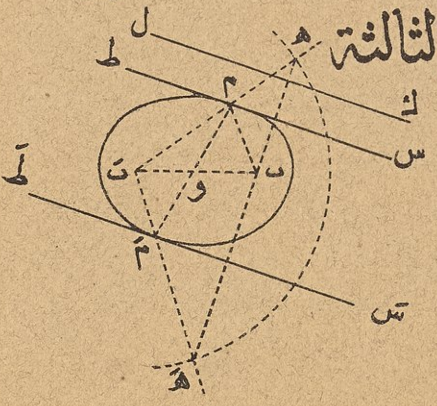
يقطع

شكل ٤٢



يقطع المحور ا اَ فى نقطة ك
ثم وصل مستقيم ك س حدث
ح و : د و :: س ل : ر ل :: ع : عَ
لكن بما ان بعد ى و هو عين عَ
فيكون بنا على ذلك ح و مساويا
الى ع أعنى ان نقطة ح هى
من نقطة الدائرة الاصلية
وتؤل طريقة العمل الى ما سيأتى
وهو ان نصل من النقطة المعلومة الى رأس المحور الاصغر مستقيم ويمد هذا المستقيم حتى يتلاقى مع المحور الاكبر ثم يوصل من نقطة تقابلهما وهى ك الى نقطة ح التى هى نقطة تقابل الدائرة الاصلية بامتداد المحور الاصغر فتحصل بنا على ذلك نقطة س وهى نقطة تقاطع المستقيم ك ح مع احداثى نقطة ر وأخيرا يرسم من نقطة س مستقيم مماس للدائرة الاصلية كالمستقيم س هـ ط فلا يبقى حينئذ سوى أن يوصل المستقيم ط ر فيكون هو المماس المطلوب وتكون نقطة تقابله مع الاحداثى هـ ى هى نقطة تماسه بالمنحنى واما المماس الثانى للدائرة الاصلية المرسوم من نقطة س أيضا فانه يعين المماس الثانى للقطع الناقص
ويمكن استعواض هذه الاجراءات عند اللزوم باجراءات أخرى مشابهة لها بالكلية انما يستعوض فيها المحور الاكبر بالمحور الاصغر فقط

شكل ٤٣



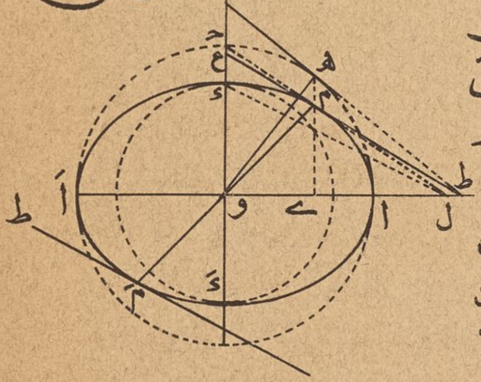
المسئلة الثالثة

٦٢ — المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع ناقص وموازٍ لاتجاه معلوم (الطريقة الاولى) لنفرض ان ل ك هو الاتجاه المعلوم كما فى شكل (٤٣) ونفرض انه قد صار حل المسئلة وعلم ان س ط هو المماس المطلوب

فاذا انزلنا من نقطة ب عمودا مثل ب هـ على المستقيم المماس لكان عمودا أيضا على ما يوازيه وهو ل ك وحينئذ يكون هذا العمود معين الوضع ولاشك فى ان نقطة هـ توجد أيضا على دائرة الاستدلال التى مركزها نقطة ب وحينئذ فيسهل تعيين هذه النقطة ثم بعد ذلك يتمم العمل كما فى (الطريقة الأولى) من المسئلة السابقة

وحيث أن المستقيم يقابل محيط الدائرة فى نقطتين فيوجد حينئذ مماس ثان للقطع الناقص مثل المماس طَ سَ موف للشرط المقرر فى منطوق هذه للمسئلة التى تكون دائما ممكنة الحل لكون المستقيم ب هـ مارا بنقطة ب الكائنة داخل دائرة الاستدلال

شكل ٤٤



(الطريقة الثانية) لنفرض ان المسئلة محلولة وان م ط هو المماس المطلوب فاذا مد الاحداثى م ح حتى يتلاقى مع الدائرة الاصلية فى نقطة مثل هـ شكل (٤٤) لكان المستقيم هـ ط بمقتضى بند (٥٧) مماسا للدائرة المذكورة وتؤل المسئلة حينئذ الى البحث عن مستقيم مماس للدائرة الاصلية اذا كان اتجاه المستقيم هـ ط معلوما

ولاجل تعيين هذا الاتجاه نمد من نقطة ى مستقيما موازيا الى الاتجاه المعلوم كالمستقيم ى ل ثم نرسم من نقطة ل مستقيما موازيا الى هـ ط فيحدث من مثلثى و ى ل ، ح م ط أن

وى : م ح :: و ل : ط ح

ومن جهة اخرى ينتج من تشابه مثلثى و ح ل ، ح هـ ط أن

وح : هـ ح :: و ل : ط ح

وبناء عليه يكون

وى : م ح :: وح : هـ ح

فاذا غيرنا الوسطين ببعضهما يحدث

و ز : و حـ :: م ى : هـ ى :: عَ : ع

لكن بما ان مستقيم و ز = عَ فيكون و حـ = ع ويلزم حينئذ ان تكون نقطة حـ موجودة على الدائرة الاصلية

ومن ذلك تنتج الطريقة الآتية وهي ان يمد من نقطة ز مستقيم ى ل موازيا للاتجاه المعلوم ويوصل المستقيم ل حـ ثم يرسم المستقيم هـ ط مماسا للدائرة الاصلية وموازيا الى المستقيم ل حـ ويرسم اخيرا من نقطة ط مستقيم مواز للاتجاه المعلوم فيكون هذا الموازى هو المماس المطلوب للقطع الناقص ونقطة تماسه تكون موجودة على الاحداثى هـ ى

وحيث انه يمكن رسم مستقيمين مماسين للدائرة الاصلية وموازيين للمستقيم ل حـ المعلوم فيكون حينئذ لهذه المسئلة حلان

ويشاهد بالسهولة ان نقطتى تماس كل مماسين متوازيين من مماسات القطع الناقص تكونان متماثلتى الوضع بالنسبة للمركز

وفى الواقع كذلك لاننا اذا تصورنا دوران الشكل فى مستويه دورانا رحويا بقدر ١٨٠ حول نقطة و شكل (٤٣) لصار المماس الذى هو س ط بعد الحركة موازيا الى ل ك وبناء على ذلك يلزم ان ياخذ وضع المماس طَ سَ وفى اثناء نفس هذه الحركة ينتقل نصف القطر و م ويصير على استقامته الاولى وعلى ذلك يكون المستقيمان و م ، و مَ على استقامة واحدة

وقد تقدم فى بند (٢٧) أن كل مستقيم منتهى الطرفين بمنحنى القطع الناقص ومار بالمركز يكون منصفا بالمركز المذكور أعنى مقسوما به الى قسمين متساويين

٦٣ (تنبيه) من المهم ان يلاحظ ان الطرق التى ذكرناها لحد الآن لرسم مماسات القطع الناقص لا يحتاج فيها الا ان يكون منحنى القطع الناقص مرسوما من قبل ولا شك أن هذه مزية عظيمة لانه من الضرورى عند رسم أى قطع ناقص نقطة فنقطة أن يبحث عن المماسات له فى النقط التى تتعين أولا فأولا لان هذه المماسات تبين للرسيم هيئة المنحنى وترشده عندما يريد جمع هذه النقط ببعضها بل وتجعله يكتفى بوجود القليل من نقط المنحنى لكن بشرط ان تكون معينة بالضبط الكلى ومن المشاهد أيضا ان الأفضل استعمال الطرق الاولى من المسائل المتقدمة فى حالة ما اذا كان جرى رسم المنحنى بطريقة رسمه الاولى المذكورة فى بند (٣١)

وأما الطرق الثانية فانها تكون أفضل عندما يكون المنحنى مرسوما بالطريقة المذكورة فى بند (٤٥)

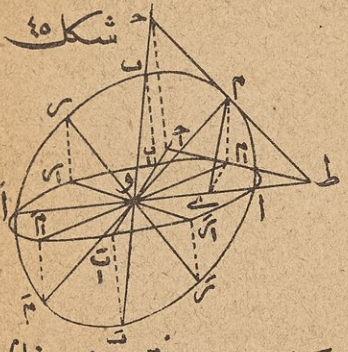
٦٤ نبذ (فى رسم العمودى على منحنى القطع الناقص) ما ذكرناه فى البنود (١٩) و (٢٠) و (٢١) بخصوص ذلك بالمقدمة فيه الكفاية ولا حاجة لاعادة الكلام على ذلك

فى أقطار القطع الناقص

٦٥ نبذ قد ذكرنا فيما تقدم ببند (٤١) انه يمكن اعتبار القطع الناقص مسقطا لدائرة على مستو مائل على مستويها فهذا الاعتبار الذى استنتجنا منه جملة قضايا مهمة يسمح لنا ان نستخرج أيضا منه بعض قضايا أخرى لها تطبيقات نستعملها فيما بعد

(النظرية العاشرة) كل مستقيم مار بمركز القطع الناقص يكون قطرا له

لاننا اذا اعتبرنا القطع الناقص ام أم شكل (٤٥) والدائرة ام أمَ التى هو مسقط لها لوجدنا ان كل مستقيم مثل م م مار بمركز القطع الناقص مسقط لقطر مثل م مَ من اقطار الدائرة


شكل ٤٥

وحيث ان هذا القطر منصف لجميع الاوتار العمودية عليه أعنى الموازية للقطر ر رَ فبناء على ذلك يكون المستقيم م مَ منصفا لمساقط هذه الاوتار أعنى لاوتار القطع الناقص الموازية الى المستقيم ر رَ الذى هو مسقط قطر ر رَ من الدائرة وعلى ذلك يكون كل مستقيم حيثما اتفق مثل م م مار بمركز القطع الناقص منصفا لجميع الاوتار الموازية لاتجاه معلوم وبمقتضى بند (٦) يكون قطرا من اقطار المنحنى المذكور

لكن يلزم ملاحظة صحة عكس هذه النظرية بمعنى انه حيث كان قطر ر رَ من الدائرة منصفا لجميع الاوتار الموازية الى قطر م مَ لزم ان يكون مسقطه وهو ر رَ منصفا بالمثل للاوتار الموازية الى م م

وعلى هذا يعلم ان اقطار القطع الناقص مرتبطة ببعضها مثنى بحيث أن كل قطر منها

منهما ينصف جميع الاوتار الموازية الى القطر الثانى وهذا هو ما يعبر عنه بالقول ان اتجاه احد هذين القطرين مزاوج لاتجاه الآخر كما فى بند (٦١)
ومن ذلك تنتج النظرية الآتية

(النظرية الحادية عشر) أقطار القطع الناقص مزدوجة مع بعضها مثنى

بند ٦٦ من المعلوم ان القطرين المزدوجين فى الدائرة اللذين تنسقط الزاوية الواقعة بينهما على حقيقتها هما القطران ا اَ ر ت ت لا غير وحينئذ يعلم من ذلك ان محورى القطع الناقص هما فقط قطراه المزدوجان اللذان تكون الزاوية الواقعة بينهما قائمة

المسئلة الاولى

بند ٦٧ المطلوب ايجاد القطر المزاوج لقطر معلوم

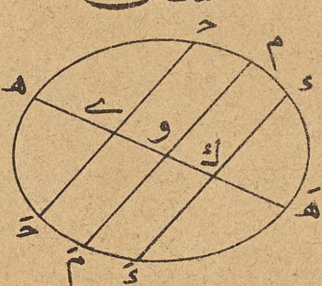
مثلا لنفرض ان م مَ شكل (٤٦) هو القطر المعلوم فيكفى لتعيين القطر المزاوج له ان يرسم الوتر ح حَ الموازى الى م مَ وينصف بنقطة مثل نقطة ى ثم نصل من هذه النقطة الى المركز فيكون المستقيم الموصول بهذه الكيفية هو القطر المطلوب

فاذا لم يكن القطع الناقص مرسوما يرسم المستقيم ح حَ موازيا الى م مَ ثم تعين نقطتا ح ، حَ بالطريقة الموضحة فى بند (٣١)

بند ٦٨ خاصية الاقطار المزدوجة المتقدمة توصلنا الى حل المسئلة الآتية أيضا التى تطرء كثيرا فى العمل

المسئلة الثانية

شكل ٤٦



المطلوب ايجاد مركز قطع ناقص مرسوم كله أو جزء منه فقط

لذلك يرسم الوتران ح حَ و ء ءَ المتوازيان فى اتجاه حيثما اتفق ونصل بين منتصفيهما وهما ى ، ك شكل (٤٦) بمستقيم فيكون هو القطر المزاوج لهذه الاوتار ويمر حينئذ بمركز القطع الناقص

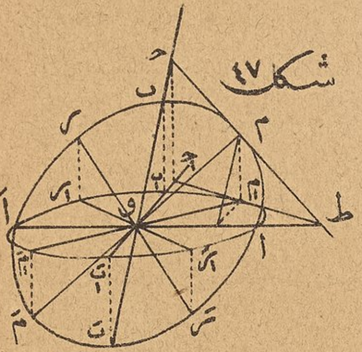
فاذا أجرينا هذه العملية مرة ثانية على وترين متوازيين لكنهما غير موازيين للوترين الاولين نحصل قطر جديد يتقاطع مع القطر الاول فى نقطة فتكون هى المركز المطلوب

٦٩ لا يخفى انه تقدم فى بند (١١) ان المماس لأى منحن يلزم ان يكون موازيا الى الاوتار المزدوجه الاتجاه مع القطر المار بنقطة التماس فاذا نظرنا الى ذلك رأينا أنه يمكن حل كل من المسئلة الاولى والثالثة من المسائل الثلاثة المتعلقة برسم مماسات منحن معلوم باستعمال خواص الاقطار المزدوجة لكن فضلا عن كون الاعمال الرسمية التى تستلزمها هذه الطريقة الجديدة ليست أسهل مما تستلزمه الطرق التى تقدمت فانه لا يمكن استعمالها مع السهولة الا اذا كان القطع الناقص مرسوما من قبل

ومع ذلك فانه يلزم الاعتراف بأن هذه الطريقة يكون لها أهمية فى حالة ما يراد رسم مماس لقطع ناقص مرسوم لكن بورتيه مجهولتان

٧٠ (النظرية الثانية عشر) نصف أى قطر من أقطار القطع الناقص وسط متناسب بين جزءى مماسه الموازى لهذا القطر المحصورين بين نقطة التماس وبين المحورين

فاذا فرض مثلا ان خطى ر رَ و م مَ شكل (٤٧) قطران متعامدان فى الدائرة كان مسقطاهما وهما م١ مَ١ ، ر١ رَ١ قطرين مزدوجين معا فى القطع الناقص كما فى بند (٤٩) فاذا اخذ مستقيم مثل م ط مماس للدائرة المذكورة وكان قاطعا لقطري ا اَ ، ب بَ فى نقطتى ط و حـ فيحدث من مثلث حـ و ط القائم الزاوية أن



شكل ٤٧

$$\overline{\text{وم}}^{2} = \text{م حـ} \times \text{م ط} \qquad (1)$$

أو يكون

$$\overline{\text{ور}}^{2} = \text{م حـ} \times \text{م ط}$$

لكن حيث ان اضلاع مثلثى ر ر١ و ، م م١ ط متوازية فهما متشابهان وينتج منهما أن

$$\frac{\text{و ر}}{\text{و ر}_1} = \frac{\text{م ط}}{\text{م}_1\text{ ط}} = \frac{\text{م حـ}}{\text{م}_1\text{ حـ}} = \text{ك}$$

وحرف ك فى هذا القانون رمز للمقدار المشترك لهذه النسب الثلاث فينتج من

من هذا القانون أن

و ر = ك × و ر١   و م ط = ك × م١ ط١   و م حـ = ك × م١ جـ١

وبوضع هذه المقادير فى معادلة (١) وقسمة الطرفين على ك^٢ يحدث

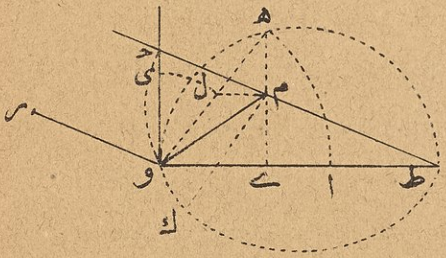
و ر١^٢ = م١ جـ١ × م١ ط١   وهذا هو ما اردنا بيانه

٧١ بند يمكن بواسطة هذه النظرية حل المسئلة الآتية

المسئلة الثالثة

المطلوب رسم القطع الناقص اذا كان معلوما منه قطران حيثما اتفق مزدوجان معا لذلك يقال من المعلوم ان هذه المسئلة تصير محلولة اذا امكن ايجاد المحورين فلذا يلزم الابتدا اولا بالبحث عن اتجاهيهما مع الاستعانة بالنظرية السابقة فنفرض أن هذه المسئلة الفرعية محلولة وان وم و ور شكل (٤٨) هما القطران المزدوجان المعلومان وان وط و وحـ اتجاها المحورين فمن حيث أن مستقيم حـ م ط الموازى الى و ر هو مماس للقطع الناقص المجهول فى نقطة م فبمقتضى ما تقدم فى بند (٧٠) يكون

شكل ٤٨



و ر^٢ = م حـ × م ط

ثم نرسم محيط دائرة على القطر حـ ط فيمر هذا المحيط بنقطة و لان زاوية حـ و ط قائمة واذا اقمنا م ك عموديا على حـ ط حدث أيضا

م ك^٢ = م حـ × م ط

وبنا على ذلك يكون

م ك = و ر

وحينئذ يكون المستقيم م ك معلوما وعليه يكون حل المسئلة هو كالآتى بان يرسم من نقطة م التى هى نهاية أحد القطرين المعلومين مستقيم مثل حـ م ط مواز للقطر الآخر ثم يقام من النقطة بعينها عمود مثل م ك = و ر ثم ترسم دائرة تمر بنقطتى و و ك مركزها على المستقيم حـ ط فيقطع محيطها المستقيم حـ ط فى نقطتين موجودتين بالضرورة على امتدادى المحورين المطلوبين فلم يبق حينئذ لتعيين اتجاهيهما سوى ان يوصل من هاتين النقطتين المعينتين الى نقطة و وبعد ذلك يلزم

البحث عن حقيقة طول كل من هذين المحورين وللتوصل الى ذلك نتذكر ان نصف المحور الاكبر وسط متناسب بين وى ، وط بمقتضى بند (٥٩) فليرسم حينئذ نصف دائرة على وط ويمد العمود م ى لحد نقطة ه التي يتقابل فيها مع نصف الدائرة فيكون وه هو الطول المطلوب الذى يلزم وضعه على المستقيم وط بجانبي نقطة و

وقد يمكن اعادة العملية بعينها على مستقيم وح للحصول على طول المحور الاصغر لكنه يمكن اختصار ذلك بملاحظة انه لداعى كون المستقيم وه مساويا الى نصف المحور الاكبر تكون نقطة ه نقطة من الدائرة الاصلية بحيث يحدث

م ى : ه ى :: ه : ه̄

وحيث ان وه = ه فحينئذ يكون ول = ه̄

وبنا على ذلك يكفى وضع البعد ول على اتجاه المستقيم وح بجانبي نقطة و

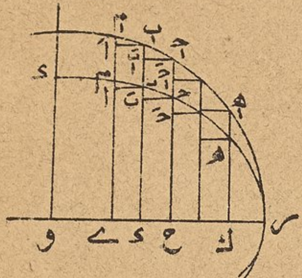
بند ٧٢ يشاهد مما ذكر انه يمكن ايجاد محورى القطع الناقص اذا علم منه قطران مزدوجان معا وان ليس لتلك المسئلة سوى حل واحد فتنتج حينئذ النظرية الآتية (النظرية الثالثة عشر) القطع الناقص يصير معلوما متى علم منه قطران مزدوجان معا

الفصل الثالث

في مساحة القطع الناقص وفي المجسم الناقصي وحجمه

بند ٧٣ القطع الناقص هو احد المنحنيات التي يمكن لحساب مساحاتها بالضبط وهذه هي المسئلة التي نريد ان نتصدى الآن لذكرها ولذلك نبحث أولا عن مساحة الجزء المحصور بين قوس من المنحنى وأحد محوريه وبين احداثيين عموديين على هذا المحور فنقول

شكل ٤٩



اذا كان القصد مثلا حساب المساحة م ه ك ى شكل (٤٩) المحصورة بين احداثيين عموديين على المحور الاكبر فنقسم المسافة ى ك الى اجزاء متساوية عددها اختيارى وتقام من نقط التقاسيم اعمدة وتمد الى ان تقابل الدائرة المرسومة على المحور

الاكبر ثم من النقط ب ، حـ ، .... الخ وكذا من النقط بَ ، حـَ ، .... الخ ترسم مستقيمات موازية الى المحور المذكور فتتكون جملتان من المستطيلات قواعدها متساوية وارتفاعات مستطيلات احداهما هي رأسيات القطع الناقص واما ارتفاعات مستطيلات الجملة الثانية فهي رأسيات الدائرة وبمقتضى بند (٤٢) يكون حينئذ

$$\frac{\text{٢ اب د}}{\text{٢ أَ بَ د}} = \frac{\text{د بَ حـ}}{\text{د بِ حـَ}} = \dots\dots = \frac{\text{هـَ}}{\text{هـ}}$$

فاذا رمز بحرف س لمجموع مساحات المستطيلات المرسومة داخل القطع الناقص وبحرف سَ لمجموع المستطيلات المرسومة داخل الدائرة حدث

س : سَ :: هـَ : هـ

وحيث ان هذا التناسب يبقى صحيحاً مهما كان عدد تقاسيم ٢ ك فاذا فرض حينئذ أن عدد التقاسيم يزداد الى ما لا نهاية قرب بالضرورة المجموع س شيأً فشيأً من مساحة القطعة الناقصية التي يرمز لها بحرف ص الجاري البحث عنها وأما المجموع سَ فانه يميل لأن يؤول الى مساحة القطعة الدائرية المناظرة لها التي يرمز اليها بحرف صَ وحينئذ اذا اخذت النهايات أعني حينما تصير نقط التقاسيم متقاربة جدا من بعضها يحدث

ص : صَ :: هـَ : هـ

ومن البديهي أنه اذا أخذت الاحداثيات عمودية على المحور الاصغر ورمز بحرف صِ لمساحة القطعة الناقصية وبحرف صِّ للقطعة الدائرية المناظرة لها التي هي جزء من الدائرة المرسومة على المحور الاصغر حدث تناسب مشابه الى التناسب الاول أعني يكون

صِ : صِّ :: هـ : هـَ

وهذا دليل على صحة النظرية الآتية فهو اثبات لها

(النظرية الرابعة عشر) نسبة مساحة القطعة المحصورة بين قوس من القطع الناقص واحد محوريه وبين احداثيين عموديين على المحور المذكور الى مساحة القطعة الدائرية المناظرة لها المرسومة على المحور بعينه كنسبة قطر القطع الناقص العمودي على المحور المشترك الى قطر الدائرة المناظر له أي العمودي ايضا على المحور المشترك المذكور

بند ٧٤ لنفرض الآن ان نقطتى ى ، ك بعدتا عن بعضهما الى ان انطبقت احداهما على نقطة م والاخرى على نقطة م فتؤل حينئذ القطعة الناقصية الى نصف القطع الناقص ويصير جزء الدائرة نصف دائرة فعلى هذا اذا رمز بحرف س لمساحة القطع الناقص كله كانت نسبه

$$\frac{1}{2}\text{س} : \frac{1}{2}\text{ط}\,\text{ب}^{2} :: \text{ب}' : \text{ب}$$

ومن هذا التناسب يكون

$$\text{س} = \text{ط}\,\text{ب}\,\text{ب}'$$

وحينئذ فنتج النتيجة الآتية

(نتيجة) مساحة القطع الناقص تساوى حاصل ضرب نصفى محوريه فى النسبة التقريبية

فى تكوين المجسم الناقصى وتعيين حجمه

بند ٧٥ اذا تصورنا أن نصف قطع ناقص قد دار حول أحد محوريه دورة كاملة تولد بالضرورة عن هذا الدوران جسم تحركى يسمى بالمجسم الناقصى التحركى ويكون المقطع الجانبى لهذا الجسم أعنى المقطع الحادث فيه بمستو مار بمحور الدوران هو بالضرورة نفس القطع الناقص الذى ولده

فاذا حصل الدوران حول محوره الاكبر سمى الجسم الحادث بالمجسم الناقصى المستطيل اما اذا كان محور الدوران هو المحور الاصغر سمى الجسم الحادث بالمجسم الناقصى المبطط ولنتصدى بالبحث عن حجم كلا هذين النوعين فنقول

بند ٧٦ (فى المجسم الناقصى المستطيل) ليكن م هـ ك ى شكل (٤٩) هو جزء من القطع الناقص فبدورانه حول المحور الاكبر تحدث قطعة من المجسم الناقصى محصورة بين مستويين عموديين على هذا المحور

فاذا اجرينا العمليات المشروحة ببند (٧٢) نشأ عن ذلك جملتان من المستطيلات التى يحدث من دورانها جملتان من الاسطوانات ولكون ان ارتفاع هذه الاسطوانات واحد فتكون النسبة بينها كالنسبة بين قواعدها أو كالنسبة بين مربعات الرأسيات المناظرة لها ويحدث حينئذ أن

$$\frac{\text{حجم ى ا ب د}}{\text{حجم ى اَ ب د}} = \frac{\text{حجم د بَ ح ح}}{\text{حجم د بَ ح ح}} = \ldots\ldots = \frac{\text{ب}'^{2}}{\text{ب}^{2}}$$

فاذا رمز بحرف ع لمجموع الاسطوانات المرسومة داخل قطعة المجسم الناقصى وبحرف عَ لمجموع الاسطوانات المرسومة داخل قطعة الكرة الحادثة من دوران قوس الدائرة حدث

ع : عَ :: هَ٢ : ه٢

ولاشك ان هذا التناسب يكون موجودا مهما أخذ الارتفاع المشترك للاسطوانات صغيرا جدا بل وفى حالة اخذ النهايات ايضا ولا يخفى انه اذا اصغر هذا الارتفاع الى ما لانهاية آل الجسم ع الى ع١ الذى هو حجم القطعة الناقصية والجسم عَ الى عَ١ الذى هو حجم القطعة الكروية المناظرة لها ويكون حينئذ

ع١ : عَ١ :: هَ٢ : ه٢

٧٧ ـ (فى المجسم الناقصى المبطط) اذا تصورنا نفس هذه التصورات والاجراآت بعينها مع استبدال المحور الاكبر بالمحور الاصغر والدائرة المرسومة فى شكل (٤٩) بالدائرة المرسومة على المحور الاصغر وكذلك مع تغيير الاحداثيين م ى ، هـ ك بالاحداثيين العموديين على المحور الاصغر توصلنا بمثل ما تقدم الى التناسب الآتى

ع : عَ :: ه٢ : هَ٢

٧٨ ـ فاذا جمعت هذه النتائج فى منطوق واحد امكن تشكيل النظرية الآتية (النظرية الخامسة عشر) اذا دور قطع ناقص مع الدائرة المرسومة على أحد محوريه دورة كاملة حول المحور المشترك بينهما كانت نسبة حجم القطعة الناقصية المحصورة بين مستويين عموديين على محور الدوران الى حجم القطعة الكروية المحصورة بين نفس المستويين المذكورين كالنسبة بين مربعى القطرين العموديين على محور الدوران المذكور

٧٩ ـ فاذا فرض ان المستويين المحددين لهاتين القطعتين قد بعدا عن بعضهما حتى صارا بنهايتى محور الدوران آل الحجمان الحادثان الى حجمى مجسم القطع الناقص الكلى والكرة بتمامها وحينئذ اذا كان المجسم المعلوم هو مجسم القطع الناقص المستطيل حدث

ع / (٤/٣ ط ه٣) = هَ٢ / ه٢

ومنه يكون

ع = ٤/٣ ط ه هَ٢ .... (١)

اما اذا كان المجسم المعلوم هو المجسم الناقصى المبطط حدث

$$\frac{ع_{١}}{\frac{٤}{٣}\,ط\,ه^{٣}} = \frac{هَ^{٢}}{ه^{٢}}$$

ومنه يكون

$$ع_{١} = \frac{٤}{٣}\,ط\,هَ^{٢}\,\bar{ه} \quad ....\ (٢)$$

ويمكن كتابة كل من مقدارى (١) ، (٢) بالصورة الآتيه

$$ع = ط\,ه\,\bar{ه} \times \frac{٤}{٣}\,\bar{ه} \qquad و$$

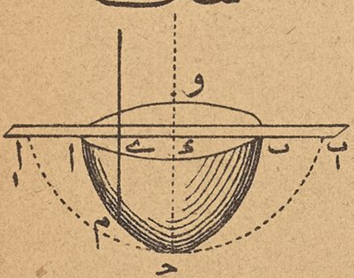
$$ع_{١} = ط\,ه\,\bar{ه} \times \frac{٤}{٣}\,ه$$

وهذا يوصلنا الى منطوق سهل التذكار وهو الآتى

حجم مجسم القطع الناقص يتحصل بضرب مساحة القطع الناقص الراسم له فى $\frac{٤}{٣}$ نصف المحور العمودى على محور الدوران

(بند فى تقدير حجم الجسم القرعى) الجزء الاسفل من قران الانبيق يعمل غالبا على شكل قطعة من مجسم ناقصى مستطيل ويعرف بقرعة الانبيق فلاجل تقدير حجم هذا الجزء القرعى توضع القرعة بحيث تكون حافتها المستديرة أفقية وبعد ذلك يوضع على تلك الحافة مسطرة مدرجة بحيث يكون حرفها مارًا من مركز فتحة القرعة ويحرك على حرف هذه المسطرة خيط شاقول بحيث يكون طرف الثقل المعلق به مماسا على الدوام للسطح الداخلى من القرعة

شكل ٥٠



فلنفرض مثلا ان الخيط موضوع فى الوضع م ى شكل (٥٠) ويقاس البعد ى ى بواسطة المسطرة ثم البعد م ى بخيط الشاقول المدرج وباعادة هذه العملية جملة مرات فى اوضاع مختلفة يمكن الحصول على جملة نقط من القطع الجانبى ا ح ب للقرعة فتوضع على الورق ويمر بها منحن فيكون هو جزء من القطع الناقص الراسم للقرعة وتعلم ايضا راسه وهى ح واتجاه محوره الاكبر وحيث ان جزءا من القطع الناقص معلوم فيسهل ايجاد مركزه وهو نقطة و وبمقتضى ما تقدم

فنجد

فى ش ٦٨ د وبنا يمكن رسم الدائرة الاصلية وحساب حجم الجسم الحادث من دوران قطعة الدائرة ا ح ب ثم نقول اذا رمزنا بحرف ح لحجم القرعة وبحرف ح_1 لحجم قطعة الكرة فيكون بمقتضى (ش ٦٨ د)

$$\frac{\text{ح}}{\text{ح}_1} = \frac{\text{ق}'}{\text{ق}'}$$

ثم نحسب النسبة $\frac{\text{ق}'}{\text{ق}}$ من الارتباط الآتى

$$\frac{\text{ق}'}{\text{ق}} = \frac{\text{ءا}}{\text{ءا}_1}$$

وحينئذ اذا لاحظنا ان حجم القطعة الكروية مساو الى

$$\text{ح}_1 = \frac{1}{2}\,\text{ط}\,\overline{\text{ءا}}_1^{\,2} \times \text{ءح} + \frac{1}{6}\,\text{ط}\,\overline{\text{ءح}}^{\,3}$$

فيكون الحجم المطلوب مساويا الى

$$\text{ح} = \frac{\overline{\text{ءا}}^{\,2}}{\overline{\text{ءا}}_1^{\,2}}\left(\frac{1}{2}\,\text{ط}\,\overline{\text{ءا}}_1^{\,2} \times \text{ءح} + \frac{1}{6}\,\text{ط}\,\overline{\text{ءح}}^{\,3}\right)$$

وبالاختصار يحدث

$$\text{ح} = \frac{1}{2}\,\text{ط}\,\overline{\text{ءا}}^{\,2} \times \text{ءح} + \frac{1}{6}\,\text{ط}\,\frac{\overline{\text{ءا}}^{\,2}}{\overline{\text{ءا}}_1^{\,2}} \times \overline{\text{ءح}}^{\,3}$$

وهو المطلوب

الباب الثالث

فى القطع الزائد وفيه فصول

الفصل الاول

فى تعريف القطع الزائد وطرق رسمه وخواصه الهندسيه

ش ٨١ د القطع الزائد هو منحنى مستوى الفرق بين البعدين الواصلين من اى نقطة منه الى نقطتين ثابتتين فى مستويه يكون ثابتا على الدوام

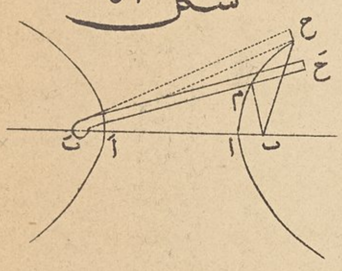
وهاتان النقطتان الثابتتان تسميان بورتى القطع الزائد والمستقيمات الواصلة

من هاتين البورتين الى اى نقطة من المنحنى تسمى انصاف اقطار بورية ومن المعلوم ان هذا المنحنى يمتد الى ما لا نهاية لانه اذا اضيف على نصفى قطرى البورتين كمية واحدة وفرض ان هذه الكمية تزداد شيئاً فشيئاً فان نصفى القطرين المذكورين يزدادان بقدر ما يراد لكن بدون ان يتغير الفرق بينهما

س ٨٢ فى طرق رسم القطع الزائد — اولا طريقة رسمه بالاستمرار

ينتج من التعريف المتقدم للقطع الزائد طريقة لرسمه بالاستمرار اذا عنى برسم جزء منه محدود وهى ان تؤخذ مسطرة طولها حيثما اتفق وثبت من احد طرفيها فى احدى البورتين وهى ت شكل (٥١) تثبيتا بحيث لا يمنع دوران المسطرة حول هذه النقطة بالسهولة ثم يؤخذ خيط ويثبت احد طرفيه فى الطرف الثانى من المسطرة وطرفه الثانى فى البورة الاخرى ب انما يلزم ان يكون طول هذا الخيط اقل من طول المسطرة بمقدار مساوٍ للفرق الثابت بين نصفى القطرين البوريين الذى يرمز له بالرمز ٢ د فبهذه الكيفية اذا حركت المسطرة الى ان تشد الخيط المثبت فيها باحد طرفيه شدا قويا صارت نقطة ح بالضرورة نقطة من القطع الزائد ثم يحرك سن القلم الرصاص بحيث يكون دائما متكئا على حافة المسطرة وشادا للخيط فيكون المنحنى المرسوم بسن القلم قوسا من القطع الزائد

شكل ٥١



وفى الواقع لانه اذا فرض ان نقطة م وضع من اوضاع سن القلم الرصاص شوهد ان بعدى ت ح ، ب ح قد نقصا فى آن واحد بقدر م حَ وان المسطرة انتقلت من الوضع ت ح الى الوضع ت حَ فحينئذ يكون باقى الطرح ت م – ب م مساويا ايضا الى ٢ د

ومن البديهى انه اذا نقلت المسطرة وثبت طرفها فى نقطة ب بدلا عن ت وثبت ايضا الخيط فى نقطة ت تحصل فرع آخر من القطع الزائد وهذه الطريقة هى اقل ضبطا من طريقة رسم القطع الناقص بالاستمرار فضلا عن

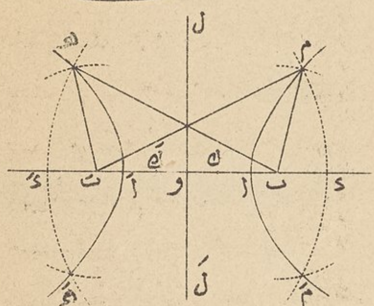
كونها

كونها تحتاج لمسطرة مخصوصة لا يمكن عملها بالضبط الا بمشقة زائدة

س ٨٣ ثانيا طريقة رسم نقطة فنقطة — احسن طريقة مضبوطة لرسم القطع الزائد هي ان تعين عدة نقط منه وتجمع بمنحن متصل

مثلاً ليكن ب ، ت (شكل ٥٢) بورتى القطع الزائد فنأخذ بعد ت ك = ٢ م ثم نجعل نقطة ت مركزاً وبنصف قطر حيثما اتفق يرسم محيط دائرة يقطع المستقيم ب ت فى نقطة مثل ء ثم تجعل نقطة ب مركزاً وبنصف قطر مساوٍ الى ء ك يرسم محيط آخر فيقطع المحيط الاول فى نقطتين مثل م ، مَ تكونان نقطتين من القطع الزائد

شكل ٥٢



فاذا غيرنا وضع نقطة ء عدة مرات نحصل على جملة نقط من القطع الزائد بقدر ما نريد

س ٨٤ فى كل وضع من اوضاع نقطة ء يمكن الحصول على اربع نقط من القطع الزائد ويكفى فى ذلك ان يبدل العمل على كل من البورتين ب ، ت

ومن الواضح انه يلزم لامكان تقاطع الدائرتين ان يكون بعد نقطة ء عن نقطة ب اكبر من بعد نقطة ا التى هى وسط بعد ك ب عن نقطة ب بعينها

ومما يشاهد بالسهولة هو ان القطع الزائد يتركب من فرعين لانهائيين ليس بينهما نقط مشتركة ابداً لان كل نقطة من نقطه الكائنة فى جهة البورة ب كنقطة م مثلاً يوجد فيها ان ت م > ب م اما النقط الكائنة فى جهة البورة ت يوجد فى كل منها بالعكس ان ت هـ < ب هـ

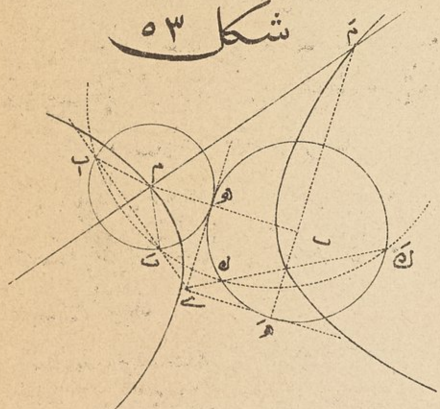
الخواص الهندسية للقطع الزائد

س ٨٥ النظرية الاولى — القطع الزائد هو منحن محدب

وبرهان هذه النظرية مشابه لبرهان النظرية المماثلة لها فى القطع الناقص فلاثباتها يكفى حينئذ ان نتصدى لشرح المسألة الآتية

المطلوب ايجاد نقط تقابل مستقيم بقطع زائد او بعبارة اخرى
يقال ان المعلوم مستقيم ونقطتان والمطلوب ايجاد نقطة على هذا المستقيم يكون
الفرق بين بعديها عن النقطتين المعلومتين مساويا لطول معلوم
ولذلك نفرض ان المسألة محلولة وان نقطتي ت ، تَ شكل (٥٣) هما
البورتان وان مستقيم م مَ هو
المستقيم المعلوم ونفرض ايضاً
ان نقطة م هي النقطة المطلوبة
ثم نصل المستقيم ت م ونأخذ
عليه البعد م هـ مساويا الى
بعد م تَ ونبحث عن النقطة
ب المماثلة لنقطة تَ بالنسبة
الى المستقيم المعلوم ثم نصل
مستقيمي م تَ ، م ب

شكل ٥٣



فمن الواضح ان تكون الثلاث مستقيمات م هـ ، م تَ ، م ب متساوية
وبناء عليه تكون نقطة م مركز الدائرة تمر بالثلاث نقط هـ ، تَ ، ب
فاما نقطتا تَ ، ب الاخيرتان فهما معلومتان واما النقطة هـ الاولى فيلزم
لايجادها ان يلاحظ انه اذا رسم محيط دائرة بجعل نقطة ت مركزا وبنصف
قطر مساوٍ الى الفرق المعلوم وهو ٢ د كان هذا المحيط مارّا بنقطة هـ ومماسا
للدائرة المتقدمة في نفس هذه النقطة وحينئذ تؤول المسألة الى المنطوق الآتي
وهو ان المطلوب رسم محيط دائرة مار بنقطتي تَ ، ب ومماس لمحيط دائرة معلوم
وحيث بينا حل هذه المسألة في بند (٣١) فلا حاجة حينئذ الى الرجوع اليها
هنا ولكونه اتضح فيما سبق ان هذه المسألة ليس لها الا حلين اثنين على الكثير
فبناء على ذلك يثبت ان المستقيم لا يمكنه ان يقابل منحنى القطع الزائد الا في نقطتين
وهذا هو ما اردنا بيانه

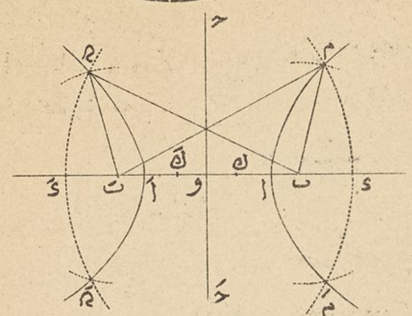
في المحاور والرؤوس

٨٦ بند النظرية الثانية — المستقيم الواصل بين بورتي القطع الزائد

والمستقيم

والمستقيم العمودى عليه من وسطه هما المحوران لهذا المنحنى وبرهان ذلك هو عين
البرهان المقرر في القطع الناقص بند (٤٢)
وانما يستعمل هنا شكل (٥٤) لاجل تطبيق البراهين المذكورة عليه

شكل ٥٤



ومما يشاهد بالسهولة هو ان المحور حـ حـ لا يقابل القطع الزائد ابدا لانه لما كانت نقط هذا المستقيم متساوية البعد عن البورتين فلا يتاتى ان تكون من نقط المنحنى
وينتج من ذلك ان منحنى القطع الزائد ليس له سوى راسين اثنين يمكن تعيينهما بالسهولة
وفي الواقع لان نقطة ا التي هي وسط بعد ب كَ شكل (٥٤) هي نقطة من المنحنى اذا ان

تَ ا - ب ا = تَ ا - اكَ = تَ كَ = ٢ م

فتكون حينئذ نقطة ا المذكورة احدى راسى المنحنى
ولاجل ايجاد الراس الثانية يوخذ بعد ب كَ مساويا الى بعد تَ كَ ثم ينصف بعد تَ كَ بنقطة مثل اَ فتكون هي الراس الثانية المطلوبة او يوخذ بعد تَ اَ مساويا لبعد ب ا
ولاجل تمييز هذين المحورين عن بعضهما سمي احدهما بالمحور القاطع والثاني بالمحور الغير قاطع
ومن البديهي ان اولهما يكون مساويا للفرق الثابت بين نصفي القطرين البورتين لنقطة حيثما اتفق من المنحنى وذلك لان

اَا = تَ كَ + اكَ - اَتَ

لكن كان اكَ = اَتَ = ب كَ / ٢

فحينئذ يكون اَا = تَ كَ = ٢ م

بند ٨٧ (في مركز القطع الزائد) النظرية الثالثة — نقطة تقابل محورى

القطع الزائد بعضهما هي مركز هذا المنحني
وبرهان ذلك هو عين البرهان المتقدم في القطع الناقص ببند (٤٧) مطبقا
على شكل (٥٤) المتقدم

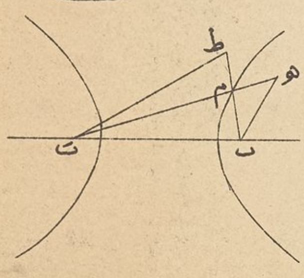
٨٨ بند الاختلاف المركزي — من المعلوم أن هيئة القطع الزائد تتعلق بالنسبة الكائنة بين بعد البورتين عن بعضهما وبين طول المحور القاطع وتسمى هذه النسبة بالاختلاف المركزي فاذا رمز بحرف ٢ ح للبعد بين البورتين وبحرف ٢ ء لطول المحور القاطع كان الاختلاف المركزي

$$ف = \frac{ح}{ء}$$

ومن هنا يشاهد أن الاختلاف المركزي يكون دائما أكبر من الواحد الصحيح وانه من البديهي أن القطع الزائد يكون معينا متى علم كل من اختلافه المركزي وطول محوره القاطع أعني المسافة الكائنة بين رأسيه

٨٩ بند النظرية الرابعة — منحني القطع الزائد يقسم مستويه الى قسمين بحيث يكون الفرق بين نصفي القطرين البورييين لأي نقطة من القسم الاول أصغر من طول المحور القاطع أما في القسم الثاني يكون هذا الفرق أكبر من طول المحور المذكور

شكل ٥٥



فاولا لتكن نقطة ط مثلا نقطة من القسم الاول وهو الخارجي بالنسبة للقطع الزائد كما في شكل (٥٥) بمعنى انها موضوعة في المسافة المنحصرة بين الفرعين فاذا وصل منها الى البورتين بنصفي قطرين بوريين كان من الواضح الجلي ان نصفي القطرين المذكورين قاطعان لمنحني القطع الزائد ولتكن نقطة م مثلا احدى نقطتي التقاطع فنصل مستقيم ت م ويحدث حينئذ من مثلث ط م ت أن

$$ط ت - ط م < م ت$$

وبطرح م ب من هذه المتباينة يحدث

$$ط ت - ط م - م ب < م ت - م ب$$

اويكون   طتَ - طب < ٢ ﻫ

وثانيا اذا اخذت نقطة داخل المنحنى كنقطة ﻫ مثلا ووصل نصفا قطريها البوريان اللذان يتلاقى احدهما مع المنحنى ثم فرض ان نقطة م هى نقطة تلاقى احدهما به ووصل منها الى البورة ب بمستقيم مثل ب م حدث من مثلث ﻫ م ب الارتباط الآتى

م ﻫ + م ب > ﻫ ب

فاذا اضفنا لكل من الطرفين م تَ حدث

م تَ + م ﻫ + م ب > ﻫ ب + م تَ

اويكون   ﻫ تَ +   م ب > ﻫ ب + م تَ

واخيرا يحدث   ﻫ تَ - ﻫ ب   > م تَ - م ب = ٢ ﻫ

وحينئذ اتضح انه على حسب وجود النقطة خارج المنحنى او عليه او داخله يكون الفرق بين نصفى قطريها البوريين اصغر او مساويا او اكبر من المحور القاطع

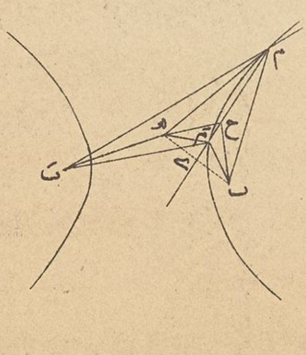
الفصل الثانى

فى المماس للقطع الزائد والعمودى عليه وخطيه التقريبين

٩٠ النظرية الخامسة — المستقيم المماس للقطع الزائد يصنع مع نصفى القطرين البوريين لنقطة التماس زاويتين متساويتين

وهذه الخاصية مشابهة لخاصية مماس القطع الناقص وبيانها كبيان خاصية المماس للقطع الناقص المذكور

شكل ٥٦



مثلا ليكن م مَ (شكل ٥٦) مستقيما قاطعا للقطع الزائد فى نقطتين متقاربتين من بعضهما جدا ثم تعين النقطة ﻫ المماثلة الى البورة ب بالنسبة الى مستقيم م مَ وتوصل المستقيمات ب م ب مَ ، تَ م ، تَ مَ ، ﻫ م ، ﻫ مَ

واخيرا نصل المستقيم تَ ﻫ فيتلاقى مع القاطع فى نقطة مثل ح ثم نصل

ايضا المستقيم ب ح ونقول من حيث ان خطى م ب ، م هـ مائلان متساويا
البعد عن موقع العمود م ى فيكونان متساويين
وبالمثل يكون خطا مَ ب ، مَ هـ متساويين وخطا ح ب ، ح هـ متساويين
أيضا ويحدث حينئذ أن

ثَ م - هـ م = ثَ م - ب م = ٢ ق ،

ثَ مَ - هـ مَ = ثَ مَ - ب مَ = ٢ ق ،

هـ ثَ = ثَ ح - ح هـ = ثَ ح - ح ب

وايضا يشاهد من مثلث هـ م ثَ أن

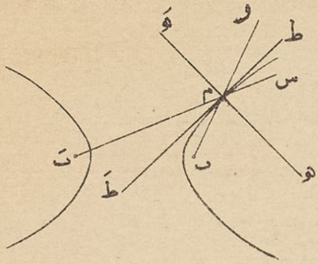
هـ ثَ > ثَ م - هـ م

ومن بعد الاستعواض يحدث ثَ ح - ح ب > ٢ ق

ومن هنا يعلم ان نقطة ح موجودة داخل القطع الزائد وموضوعة بين نقطتى
م ، مَ فحينئذ عندما تقرب هاتان النقطتان من بعضهما الى ان يتحدا تتحد نقطة ح
معهما ايضا وفى هذا الوقت يصير المستقيم القاطع مماسا وتصير نقطة ح نقطة
تماسه بالمنحنى
وحيث ان مثلث ب ح هـ لايزال متساوى الساقين مهما تغير وضع القاطع فلا
يزال العمود ح ى منصفا بالضرورة لزاوية ب ح ثَ وتبقى هذه الخاصية
موجودة ايضا عند النهاية أعنى عندما يصير هذا القاطع مماسا ويصير ضلعا
هذه الزاوية نصفى القطرين البوريين لنقطة التماس وهذا هو ما أردنا بيانه
ويلزم هنا ان ننبه على ان المستقيم المماس للقطع الزائد ليس كمماس القطع الناقص
منصفا للزاوية الواقعة بين أحد نصفى القطرين البوريين لنقطة التماس وبين
امتداد الآخر بل يكون منصفا للزاوية الواقعة بين نفس نصفى القطرين البوريين
لنقطة التماس
١٩١ د نتيجة أولى — المستقيم العمودى على منحنى القطع الزائد فى اى نقطة
من محيطه يكون متساوى الميل على كل من نصفى القطرين البوريين المارين
بهذه النقطة
مثلا اذا كان مستقيم ط طَ شكل (٥٧) مماسا للقطع الزائد فتكون
زاويتا ثَ م طَ ، طَ م ب بناء على ما تقدم فى النظرية السابقة متساويتين

وحيث ان المستقيم العمودى على هذا المنحنى فى نقطة التماس م الذى هو م هـ يلزم ان
يكون بمقتضى تعريفه عموديا على ط طَ

شكل ٥٧

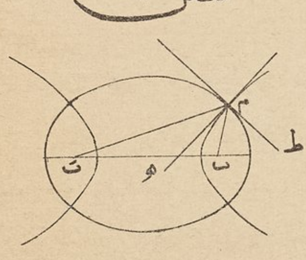


فيكون منصفا للزاوية س م ب الواقعة
بين نصف القطر البورى ب م وبين
امتداد نصف القطر الآخر وهو تَ م
وعلى ذلك تكون زاويتا ب م هـ ،
تَ م هـ متساويتين وهو المطلوب

بند ٩١ نتيجة ثانية — منحنيا القطع
الناقص والزائد المشتركان فى البورتين
يتقاطعان على زوايا قائمة

لانه لا يخفى اولا ان الزاوية التى يتقاطع عليها منحنيان حيثما اتفق ليست هى الا
الزاوية الواقعة بين المستقيمين المماسين لهذين المنحنيين فى نقطة تقاطعهما
فاذا تقرر هذا لنفرض ان نقطة م مثلا

شكل ٥٨



من شكل (٥٨) هى نقطة مشتركة
بين قطع ناقص وقطع زائد متحدى البورتين
فاذا وصل المستقيمان ب م ، تَ م
كان المستقيمان المماسان لمنحنيى القطع
الزائد والقطع الناقص فى نقطة تقاطعهما
هما المستقيمان المنصفان للزاوية ب م تَ
وللزاوية المكملة لها وحينئذ يكون
هذان المماسان متعامدين على بعضهما وهو المطلوب

بند ٩٢ فى المرايات الزائدية — القطع الزائد له خاصية مشابهة لخاصية القطع
الناقص المتقدمة فى بند (٥٢) بمعنى انه اذا فرض ان الفرع الايمن من القطع الزائد
المبين فى شكل (٥٧) مكون من صفيحة مصقولة من الداخل ومن الخارج ووضع
فى نقطة ب ينبوع ضوئى فجميع الاشعة الضوئية البازغة من هذه النقطة تأتى
الى العين بعد انعكاسها على سطح المنحنى من الداخل لكن بحيث يظنها الرائى بازغة من
البورة الاخرى تَ التى يتخيل ان فيها ينبوعا ضوئيا وبالعكس فان الاشعة الخارجة

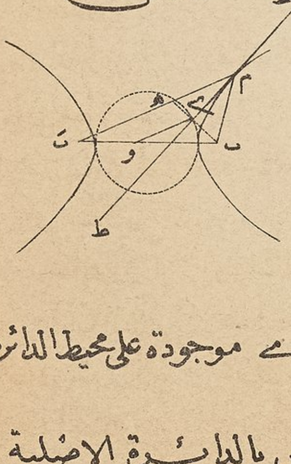
من ينبوع ضوئي موضوع في البورة الثانية ت والمنعكسة على السطح الخارجي من الصفيحة المصقولة تظهر انها آتية من نقطة ب ويظن ان النقطة الضوئية موجودة فيها وتحدث نفس هذه الظاهرة الطبيعية فيما اذا عوض الينبوع الضوئي بينبوع حراري أو بجسم رنان او الخ

انما يوجد فرق مهم بين خاصيتي منحنى القطع الزائد ومنحنى القطع الناقص تجب ملاحظته وهو ان الاشعة المنعكسة على منحنى القطع الناقص تمر بالبورة الثانية تحقيقا ولذا سميت هذه البورة بالحقيقية وأما في القطع الزائد فبالعكس بمعنى انه لا يمر بالبورة الثانية سوى امتدادات هذه الاشعة المنعكسة بحيث لا يكون تقاطع الاشعة هنا الا تخيليا فقط ولذا سميت البورة في هذه الحالة بالبورة التخيلية

٩٣ النظرية السادسة — المحل الهندسي لمساقط بورتي القطع الزائد على مماساته هو محيط دائرة قطرها محوره القاطع

مثلا اذا فرض ان ط ط شكل (٥٩) مماس لهذا المنحنى في نقطة م وانزل عليه من البورة ب العمود ب ى ثم مد حتى يتلاقى مع نصف القطر البوري ت م في نقطة كنقطة ه فبما ان المماس منصف لزاوية ت م ب يكون مثلث ب م ه متساوي الساقين

شكل ٥٩



ويكون

ت ه = ت م − م ه = ت م − ب م = ٢ا

وبناء على ذلك يكون المستقيم و ى الواصل بين وسطي الضلعين ب ه ب ت في المثلث ب ت ه موازيا الى قاعدته وهي ت ه ومساويا لنصف طولها أعني الى ا ويكون حينئذ مقداره ثابتا وهذا دليل على ان نقطة ى موجودة على محيط الدائرة التي قطرها هو المحور القاطع وهو المطلوب

والدائرة المذكورة تسمى كما في القطع الناقص بالدائرة الاصلية

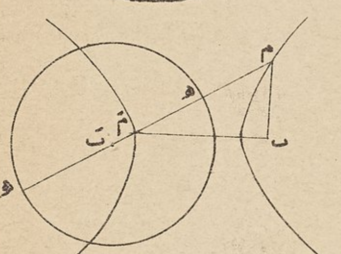
٩٤ في جازة الاستدلال — لننبه أيضا هنا على انه يجب معرفة دائرة اخرى مهمة وهي المرسومة بجعل احدى البورتين مركزا وبنصف قطر مساو الى المحور القاطع وتسمى

وتسمى دائرة الاستدلال

ومن المشاهد ان لكل قطع زائد دائرتي استدلال كما للقطع الناقص انما الفرق بين دائرتي استدلال القطع الناقص ودائرتي استدلال القطع الزائد هو ان دائرة استدلال القطع الناقص التي مركزها احدى البورتين تكون مشتملة على البورة الاخرى من داخلها وبالعكس اما في القطع الزائد فلا تكون دائرة استدلاله التي مركزها احدى البورتين مشتملة من داخلها على البورة الاخرى بل تكون تلك البورة خارجة عنها

نبذة ٩٥ تعريف آخر للقطع الزائد — اذا اخذت نقطة مثل م شكل (٦٠) من فرع القطع الزائد المشتمل على البورة ب ووصل نصفا قطريها البوريان وهما

شكل ٦٠



ب م ، ت م فان نصف القطر البوري ت م يقابل دائرة الاستدلال التي مركزها البورة ت في نقطة مثل نقطة هـ ويكون بالضرورة م هـ = م ب وحينئذ يمكن تعريف القطع الزائد بانه هو المحل الهندسي لجميع النقط المتساوية البعد عن محيط دائرة وعن نقطة موضوعتين خارجه

نبذة ٩٦ يمكن ان يؤخذ من هذا التعريف طريقة لرسم القطع الزائد نقطة فنقطة لكنها تكون صعبة الاجرى

نبذة ٩٧ في الخطين التقريبيين — اذا نظرنا الى التعاريف المتقدمة المتعلقة بالدائرة الاصلية وبدائرتي الاستدلال رأينا انه اذا تحركت نقطة م شكل (٥٩) على القطع الزائد فان نقطة ى ترسم الدائرة الاصلية واما نقطة هـ فانها ترسم دائرة الاستدلال التي مركزها البورة ت

لكن حيث ان مستقيمي ت هـ ، وى باقيان على الدوام متوازيين فزاويتا وى ب ، ت هـ ف لا تزالان متساويتين ويعلم من ذلك انه اذا صار المستقيم ب ى مماسا للدائرة الاصلية صار مماسا ايضا لدائرة الاستدلال لانه لما صارت زاوية و ى ب قائمة صارت زاوية ت هـ ف قائمة ايضا لكن في هذه الحالة ينطبق المماس م ط العمودي على وسط ب هـ على نصف القطر وى وتنتقل نقطة تماسه بالقطع الزائد التي هي نقطة تقابلهما بامتداد للمستقيم ت هـ الى بعد غير محدود اعني الى ما لا نهاية وذلك لان مستقيمي

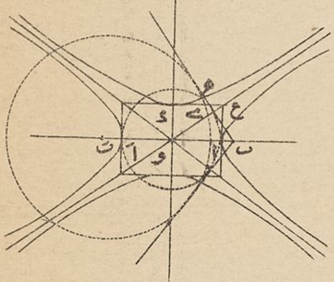
ت هـ ، و ى متوازيان دائما

وبهذه الكيفية يتحصل مستقيم مماس للقطع الزائد نقطة تماسه موضوعة على بعد لانهائى بمعنى ان نقطة التماس المذكورة لا وجود لها فى الحقيقة لكن المنحنى يقرب شيأ فشيأ من هذا المستقيم بدون ان يمسه ابدا ولذا سمى هذا المستقيم بالخط التقربى للقطع الزائد

وبمقتضى ذلك يرى انه للحصول على الخط التقربى يرسم مستقيم مماس للدائرة الاصلية من البورة ب

كما فى شكل (٦١)

شكل ٦١



فيكون مماسا ايضا للدائرة الاستدلال ثم نصل من المركز و الى نقطة تماس هذا المماس بالدائرة الاصلية فيكون هو الخط التقربى

ومن البديهى ان المماس الثانى للدائرة الاصلية المخرج من نقطة ب ايضا يعين لنا خطا تقربيا آخر للقطع الزائد وكذلك يشاهد من تماثل فرعى الشكل ان الخطين التقربيين للفرع الايسر هما امتدادا الخطين التقربيين للفرع الايمن وحينئذ يتضح ان لمنحنى القطع الزائد خطين تقربيين اثنين

س ٩٨ النظرية السابعة — الخطان التقربيان لمنحنى القطع الزائد هما قطران لمستطيل قاعدته المحور القاطع لهذا القطع الزائد وقطره مساويا للبعد بين البورتين

وللبرهنة على ذلك يقام من نقطة ا شكل (٦١) مستقيم عمودى على المحور القاطع ويمد على استقامته حتى يلاقى مع الخط التقربى فى نقطة مثل نقطة ع فيكون مثلثا و ب ى ، و ع ا القائما الزاوية متساويين لان فيهما زاوية حادة مشتركة وفيهما ضلع و ا مساو لضلع و ى لانهما نصفا قطرى دائرة واحدة وينتج منهما

منهما ان وع = وب وهذا هو ما أردنا بيانه

تعريف في القطعين الزائدين المتناظرين او المزدوجين — اذا اشترك قطعان زائدان في الخطين التقريبيين وكان البعد بين بؤرتي كل منهما واحدا لكن المحور القاطع لاحدهما موضوع على المحور الغير القاطع للمنحنى الثاني قيل لهما قطعان زائدان متناظران أو مزدوجان

وينتج من هذا التعريف ان القطعين الزائدين المتناظرين يلزم ان يكونا موضوعين في الزوايا المتضادة الكائنة بين خطيهما التقريبيين المشتركين وانهما فضلا عن ذلك غير متساويين لانه اذا فرض ان ه نصف المحور الغير القاطع للقطع الزائد الذي بؤرتاه هما ب ، ت شكل (٦١) كان نصف المحور القاطع للقطع الزائد المناظر له وهو ؤ مساويا بالبداهة الى $\sqrt{ح^2 - ه^2}$

تنبيه في القطع الزائد القائم — اذا فرض في المسئلة المتقدمة ان

$$ح^2 - ه^2 = ه^2$$

علم من ذلك ان

$$ح^2 = 2ه^2$$

ويكون هذان القطعان الزائدان المتناظران متساويين وفي هذه الحالة يكون مثلث واع متساوي الساقين وبناء عليه يكون الخطان التقريبيان صانعين مع المحورين زاوية مقدارها ٤٥° فيصيران حينئذ متعامدين على بعضهما والقطع الزائد الذي يكون بهذه الصورة اي الذي يكون خطاه التقريبيان متعامدين على بعضهما يسمى قطعا زائدا قائما

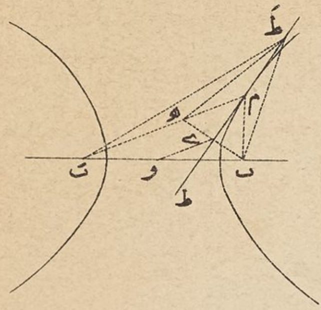
تنبيه في رسم مماسات القطع الزائد — من حيث ان خواص المستقيم المماس للقطع الزائد مشابهة بالكلية لخواص مماس القطع الناقص فهي توصلنا بالضرورة الى استخراج طرق لرسم مماسات هذا القطع الزائد مشابهة تقريبا لطرق رسم مماسات القطع الناقص بحيث يمكن حينئذ بسبب وجود هذه المشابهة الاختصار في التعبير عليها

المسئلة الأولى

المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الزائد من نقطة مفروضة عليه

مثلا لتكن نقطة م شكل (٦٢) النقطة المعلومة فيوصل خطي ب م ، ت م والخط الثاني منهما يتلاقى مع دائرة الاستدلال في نقطة مثل نقطة هـ فاذا وصل مستقيم ب هـ الذي يقطع الدائرة الاصلية في نقطة مثل نقطة ى

شكل ٦٢

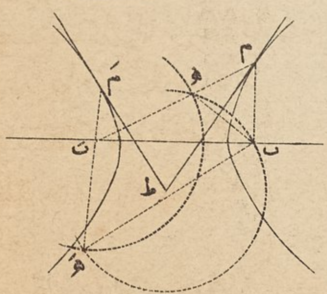


ثم وصل من نقطة التماس المعلومه
وهي م الى نقطة ى بمستقيم كان
هو المماس المطلوب
وفي حالة ما تكون هاتان الدائرتان
غير مرسومتين كما في نفس الشكل
المذكور يلزم اخذ بعد م هـ
مساويا الى م ب ثم ينزل من
نقطة م عمود على خط ب هـ
فيكون هو المماس المطلوب

المسئلة الثانية

١٠٢ المطلوب رسم مستقيم مماس لقطع زائد من نقطة خارجة عنه
لذلك يفرض ان المسئلة محلولة وان نقطة ط هي النقطة المعلومة كما في شكل
(٦٢) وان المستقيم ط م هو المماس المطلوب

شكل ٦٣



ويؤخذ البعد م هـ مساويا الى م ب
فتكون نقطة هـ موضوعة على دائرة
الاستدلال التي مركزها نقطة ت
وكذا من حيث ان بعدي ط ب , ط هـ
متساويان فتكون نقطة هـ موجودة
أيضا على الدائرة المرسومة بجعل نقطة
ط مركزا وبنصف قطر مساوٍ
الى ط ب وحينئذ تكون هي نقطة
تقاطع محيطي هاتين الدائرتين ومتى علمت نقطة هـ بهذه المسابة فلا يبقى علينا
سوى ان نصل المستقيم ب هـ وننزل من نقطة ط عمودا على هذا المستقيم فيكون
هو المماس المطلوب
وحينما تكون الدائرة الاصلية مرسومة فيكفي ان نصل من نقطة ط الى نقطة
تقابل المستقيم ب هـ بهذه الدائرة اما نقطة التماس فتتعين بوصل المستقيم

ت هـ

تَ هـ ثم يمد على استقامته حتى يتلاقى مع المماس في نقطة تكون هي نقطة التماس المطلوبة
ومن المشاهد ولا بالبداهة انه يوجد لهذه المسئلة حلان لان محيطى الدائرتين يتقاطعان
دائما في نقطتين فيكون المماس الثاني هو المستقيم ط مَ وثانيا يلزم لاجل امكان
حل هذه المسئلة ان يكون محيطا الدائرتين المذكورتان متقاطعين لكن من المعلوم ان
هذين المحيطين لا يمكن ان يكونا متداخلين لان احدهما مار بنقطة ب الكائنة خارج
المحيط الآخر فحينئذ يكفي ان يكون البعد بين مركزيهما أصغر من مجموع نصفي قطريهما
بمعنى ان يكون

ط تَ < تَ هـ + ط ب

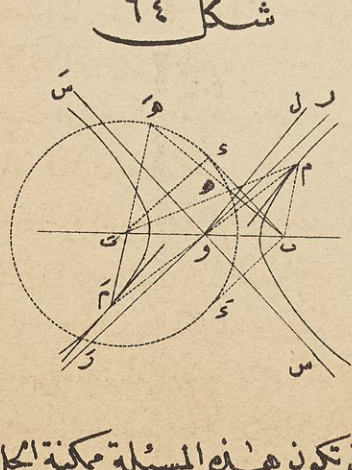
أو ط تَ ـ ط ب < تَ هـ = ٢ ح

وهذا يدل على انه يلزم ان تكون نقطة ط موجودة بين فرعي المنحنى كما في بند (٨٩)

المسئلة الثالثة

١٠٢ بند المطلوب رسم مستقيم مماس للقطع الزائد وموازٍ لاتجاه معلوم
مثلا ليكن ول شكل (٦٤) الاتجاه المعلوم فاذا انزلنا من البورة ب
عمودا على خط ول فهذا العمود يقابل دائرة الاستدلال المرسومة بجعل نقطة تَ
مركزا في نقطة مثل نقطة هـ
ويصير المستقيم المماس المطلوب
عموديا على وسط بعد ب هـ
أما نقطة تماسه بالمنحنى فهي
نقطة تلاقيه بامتداد المستقيم
تَ هـ
ومن المشاهد انه يوجد لهذه
المسئلة حلان لان مستقيم
ب هـ يتلاقى مع دائرة الاستدلال
في نقطة ثانية مثل نقطة هَ وانه لاجل أن تكون هذه المسئلة ممكنة الحل يلزم
أن يكون مستقيم ب هـ قاطعًا لدائرة الاستدلال أعني ان يكون محصورًا داخل
الزاوية ء ب ءَ المتكونة بين مماسي هذه الدائرة المخرجين من نقطة ب

شكل ٦٤



وحيث نعلم من بند (٩٧) ان الخطين التقربيين موازيان لنصفى القطرين ىَ ى ، ىَ ىَ فيؤول الشرط المتقدم حينئذ الى الشرط الآتى وهو انه يلزم ان يكون مستقيم ول محصورا فى زاوية روس المتكونة بين الخطين التقربيين

وليلاحظ كما فى القطع الناقص ان نقطتى م ، مَ اللتين هما نقطتا تماس مماسين متوازيين يلزم ان تكونا متماثلتى الوضع بالنسبة لمركز المنحنى (انظر فى بند ٦٣ الى المسئلة الثالثة)

بند ١٠٤ تنبيه — من الواضح انه يمكن اجراء هذه العمليات بدون احتياج لان يكون منحنى القطع الزائد مرسوما

بند ١٠٥ فى رسم العمودى على منحنى القطع الزائد — انظر الى بند (١٩) و (٢٠) و (٢١) فى مقدمة هذا الكتاب وهناك تجد الطرق العمومية لرسم عموديات اى منحنى والقطع الزائد بالجملة

الفصل الثالث

فى تعيين مساحة جزء من القطع الزائد وفى المجسم الزائدى

بند ١٠٦ من البديهى انه لا يمكن التصدى لتعيين مساحة سطح القطع الزائد باكمله لان هذا المنحنى ليس مقفلا ولا منتهيا بل يمكن التصدى لاخذ مساحة جزء محدود من سطح هذا المنحنى لكن حيث ان الطرق المعدة لذلك متوقفة على علوم عالية لم يكن وصل طالب دراسة المنحنيات الابتدائية اليها ولم يوجد طرق مضبوطة لهذا الخصوص فقد التزمنا باحالة ذلك على ما هو مذكور من الطرق التقريبية فى بندى (١٥) ، (١٦) من المقدمة

فى كيفية تولد المجسم الزائدى وفى تعيين حجمه

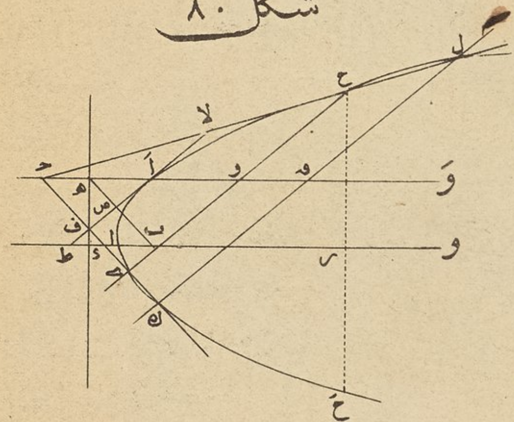
بند ١٠٧ اذا تصورنا ان منحنى القطع الزائد قد دار حول احد محوريه لرايناه انه يرسم سطحا متحركا يسمى بسطح المجسم الزائدى فاذا كان محور الدوران هو المحور الغير القاطع للمنحنى المتحرك كان بالضرورة السطح الحادث سطحا متصلا يسمى المجسم الزائدى ذا الطية وبالعكس اذا حصل الدوران حول المحور القاطع كان السطح الحادث مركبا من جزءين منفصلين عن بعضهما وسمى المجسم الحادث بالمجسم الزائدى ذى الطيتين

بند ١٠٨ حيث ان الطرق التى بها يتعين حجم مجسم القطع الزائد بالضبط مؤسسة على العلوم العالية فلا يمكن ذكرها هنا فى هذا المختصر الابتدائى انما يلزمنا هنا

ان نذكر

بند ١٣٢ المطلوب ايجاد كل من بورة ومحور قطع مكافى معلوم
لذلك يرسم وتران متوازيان كالوترين ب ح , ك ل شكل (٨٠)
ثم يوصل بين وسطيهما وهما و , ه بمستقيم فيكون المستقيم و ه
موازيا الى المحور وحينئذ اذا رسم وتر مثل ح حَ عمودى على و ه
ثم رسم من وسطه مستقيم ا ر موازيا الى و ه تحصل المحور المطلوب
وحينئذ يبقى علينا ايجاد البورة

شكل ٨٠



ولاجل الوصول الى ذلك
يرسم المماس للمنحنى فى نقطة أ
الذى يكون بالضرورة موازيا
الى وترى ب ح , ك ل
ثم نتذكر ان المثلث المتكون
من المحور والمماس ونصف
القطر البورى لنقطة التماس
يكون بمقتضى بند (١١٩)
متساوى الساقين
وحينئذ يقام من وسط أ ط عمود فيتقاطع مع المحور فى نقطة تكون هى
البورة ب ولتعيين نقطة من الدليل يؤخذ على هذا العمود البعد ص ه مساويا
الى البعد ص ب فاذا انزل من نقطة ه عمود على المحور كان هو الدليل المطلوب

بند ١٣٥ بناء على ما تقرر فى بند (١٢) من المقدمة يعلم انه اذا صار
القاطعان ل ح , ك ب مماسين للمنحنى فانهما لا يزالان متقاطعين على
القطر أ أَ المزدوج الاتجاه مع الوتر ح ب

بند ١٣٦ اذا رسم المستقيم المماس للمنحنى فى نقطة أ كان بالبداهة موازيا
الى الوترين ب ح , ك ل ومنقسما بقطر أ أَ الى قسمين متساويين
بحيث يكون

ف أ = أ لا

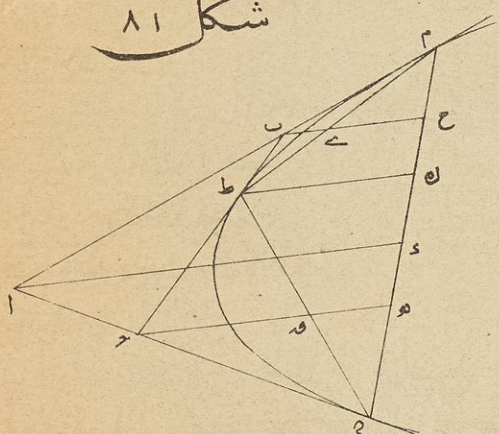
وحيث ان هذه المتساوية تبقى موجودة دائما مهما كان البعد بين الوترين
ب ح , ك ل فتكون موجودة ايضا عند النهاية وحينئذ يمكن ان يقال

النظرية التاسعة — اذا كان المعلوم مماسين لقطع مكافئ واخذ مماس ثالث موازٍ الى وتر تماس المماسين الاولين اقول ان جزء هذا المماس الثالث المحصور بين هذين المماسين يكون منقسماً بنقطة تماسه الى قسمين متساويين

١٢٧ بند هذه النظرية المتقدمة ليست الا حالة خصوصية من النظرية الآتية التي لها تطبيقات عديدة

النظرية العاشرة — اذا وجدت ثلاث مماسات لقطع مكافئ واحد فاقول ان كل واحد منها يحدد على الاثنين الاخرين اربعة اجزاء متناسبة تناسباً عكسياً

شكل ٨١



مثلا اذا فرض ان م ا ، ا ٥ ، ب ح شكل (٨١) هي ثلاث مماسات لقطع مكافئ وكان المطلوب الاثبات على صحة وقوع التناسب الآتي

٥ ح : ح ا :: ا ب : ب م

فلذلك ترسم الثلاثة اوتار المارة بنقط التماس وتعلم أوساطها بثلاثة نقط مثل ء ، ى ، ه وتوصل الثلاثة مستقيمات ا ء ، ب ى ، ح ه فتكون موازية لمحور القطع المكافئ وذلك هو بمقتضى بند (١٢٥) وبناءً عليه تكون هذه المستقيمات موازية ايضاً لبعضها بعضاً ويحدث حينئذ ان

٥ ح : ح ا :: ٥ ه : ه ء ...... [١]

وكذا ا ب : ب م :: ء ح : م ح ...... [٢]

لكن من المعلوم ان ه ء = ٥ ء − ٥ ه

كذا معلوم ان نقطة ء هي وسط بعد م ٥

وحيث ان المستقيم ه ه موازٍ الى ط ك الذى هو قاعدة مثلث

ب ط ك ومار بنقطة هـ وسط بعد ط ب
فينتج من ذلك ان نقطة هـ تكون هي وسط بعد ب ك
وحينئذ يكون

ب د = م د [٣] ,

ب هـ = هـ ك

وبناء عليه يحدث

هـ د = م د − هـ ك

أو

هـ د = م ك + ك د − (ك د + هـ د) = م ك − هـ د

واخيرا يكون

٢ هـ د = م ك

ومن جهة اخرى حيث ان المستقيم د ح الموازي الى ط ك الذي هو قاعدة مثلث م ط ك مار بوسط ط م فبناء على ذلك تكون نقطة ح وسطا للبعد م ك وحينئذ يكون

م ك = ٢ م ح

وتبعا لذلك يكون

هـ د = م ح [٤]

وأيضا من حيث أن

ب هـ = ب د − هـ د

فيحدث بناء على متساويتي [٣] , [٤] أن

ب هـ = ب د − م ح = د ح

وعلى مقتضى ذلك يحدث التناسب الآتي

ب هـ : هـ د :: د ح : م ح

وحيث انه بين تناسبي [١] , [٢] نسبة مشتركة فيتركب من النسبتين الاخيرتين تناسب بحيث يكون

جح : حا :: اب : بم

وهو المطلوب

وبمثل ذلك يبرهن على ان نسبة

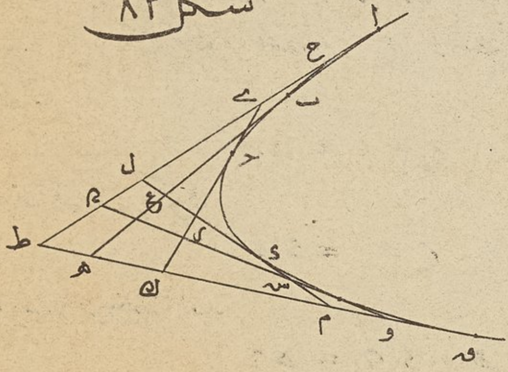
اط : اح :: حب : بط

وكذلك يبرهن على أن نسبة

ما : اب :: بح : حط

س ١٣٨ نتيجة — اذا وجدت جملة مستقيمات مماسة لقطع مكافى واحد فاقول ان كل اثنين اختياريين من هذه المماسات يكونان منقسمين بالمماسات الأخرى الى أجزاء متناسبة مثلاً اذا فرض أن المستقيمات اط ، حه ، ءك ، لم ، الخ مماسة لقطع مكافى كما فى شكل (٨٢) واعتبرنا منها الثلاثة مماسات اط ، طه ، حه فيحدث بناء على ما تقرر فى النظرية السابقة أن نسبة

شكل ٨٢



اح : حط :: طه : هه

وبتغيير الوسطين ببعضهما وملاحظة ان نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التاليين فى التناسب الجديد هى كنسبة أى مقدم الى تاليه يحدث

اح : طه :: حط : هه :: اط : طه

فاذا اعتبرنا المماس ءك يحدث أيضاً أن

اب : طك :: بط : كه :: اط : طه

وباعتبار المماس لم يحدث بالمثل أن

ال : طم :: لط : مه :: اط : طه

واخيرا باعتبار المماس دو يكون

اد : طو :: دط : وه :: اط : طه

وحيث انه يوجد بين جميع هذه التناسبات نسبة مشتركة فتكون جميع النسب الباقية متساوية ويحدث حينئذ هذا التناسب الآتى

اح : طه :: اب : طك :: ال : طم :: اد : طو :: اط : طه

فاذا طرح فى هذا التناسب من حدى كل نسبة حدا النسبة السابقة لها حدثت عدة نسب جديدة متساوية بحيث يكون

اح : طه :: بح : كه :: لب : كم :: دل : مو :: دط : وه

وبذلك يثبت المطلوب

فاذا اعتبرنا الآن مماسين اخرين كمماسى اط ، لم مثلا حدث أيضا

اح : لع :: بح : ع ر :: بل : ر ى :: دل : ى س :: دط : س م

وهلم جرا

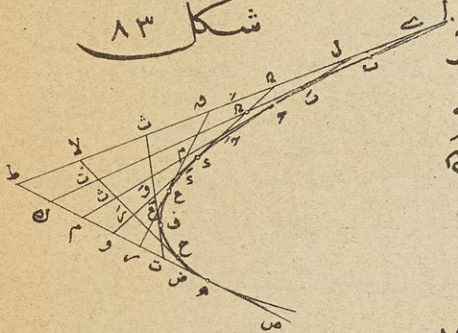
ويشاهد من ذلك انه اذا كان احد المماسات منقسما الى اقسام متساوية كانت المماسات الباقية كذلك

س ١٢٩ طريقة رسم قوس من قطع مكافى معلوم من بعد معرفة مماسين من مماساته

يؤخذ من النتيجة المتقدمة طريقة بسيطة لرسم قوس من القطع المكافى اذا علم مماسان من مماساته ونقطتا تماسهما به فلنفرض مثلا ان اط ، طه شكل (٨٣) هما المماسان المعلومان وان نقطتى ا ، ه هما نقطتا تماسهما فيقسم كل واحد من هذين المستقيمين الى اقسام متساوية عددها كعدد تقاسيم المستقيم الثانى ثم توصل المستقيمات بك ، لم ، دو ، ده ، والخ فتكون بمقتضى ما تقدم مماسة للقطع المكافى المطلوب بحيث لو كان عدد هذه المماسات كثيرا جدا لكفت لرسم المنحنى

لكن لاجل رسم هذا المنحنى بالضبط يلزم تعيين نقط التماس لهذه المماسات المختلفة - لانه يؤخذ من النتيجة المتقدمة ان هذه النقط تكون موجودة فى وسط المسافات الكائنة بين نقط تقاطع ثلاثة مماسات متتالية فنقطة ب مثلاً توجد فى منتصف المسافة

شكل ٨٣

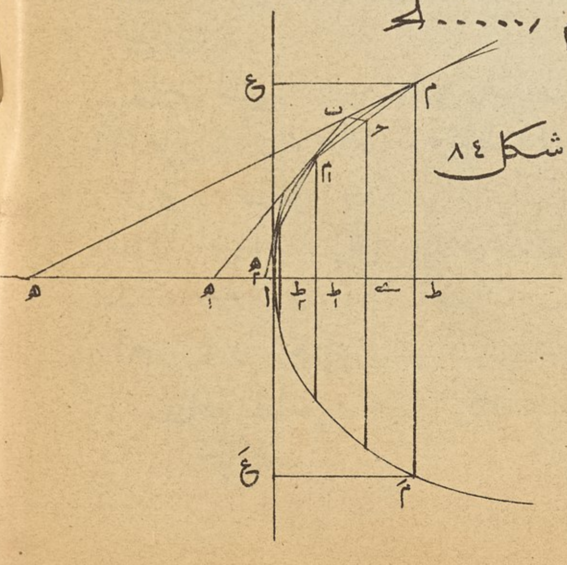


ى ت ونقطة ح توجد فى وسط المسافة ث خ وهكذا ويشاهد أيضا بغاية السهولة أن ت ب = ت ى ، ث ح = ل ث ، ح ى = خ ح وهكذا

الفصل الثالث

(فى مساحة القطع المكافى وفى المجسم المكافى وحجمه وفى طريقة توما اسمپسون)

١٤٠ - فى مساحة القطع المكافى - القطع المكافى هو احد المنحنيات التى يمكن تقدير مساحاتها بكل سهولة فلنعتبر مثلا القطعة المكافئة المحصورة بين المحور والراس وبين احداثى رأسى حيثما اتفق مثل م ط شكل (٨٤) ويرسم داخل القوس المكافى خط منكسر حيثما اتفق مثل ا م٢ م١ م وتنزل الاحداثيات الرأسية م ط ، م١ ط١ ، م٢ ط٢ واخيرا ترسم عدة مماسات من النقط م ، م١ ......الخ



شكل ٨٤

فاذا قورن بعد ذلك المثلث هـ ب هـ١ بشبيه المنحرف ط م م١ ط١ وجد بالسهولة ان ارتفاع المثلث المذكور مسا ولنصف مجموع قاعدتى شبيه المنحرف لانه اذا رسم من نقطة ب التى هى نقطة تقاطع المماسين مستقيم مواز

الى المحور فانه يقسم الوتر م م١ الى قسمين متساويين بمقتضى بند (١٢٥) وبناء على ذلك يكون العمود حـ ى المساوى لارتفاع المثلث مساويا أيضا لنصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف لكن حيث ان مساحة مثلث

هـ ب هـ١ = هـ هـ١ × حـ ى/٢ ،

شبه منحرف ط م م١ ط١ = ط ط١ × حـ ى

فحينئذ تكون نسبة شبه منحرف ط م م١ ط١ : مثلث هـ ب هـ١ :: ٢ ط ط١ : هـ هـ١

لكن من المعلوم بمقتضى بند (١٣٢) أن

ا ط = ا هـ

ا ط١ = ا هـ١

ومنهما يكون

ط ط١ = هـ هـ١

وبناءً على ذلك يكون

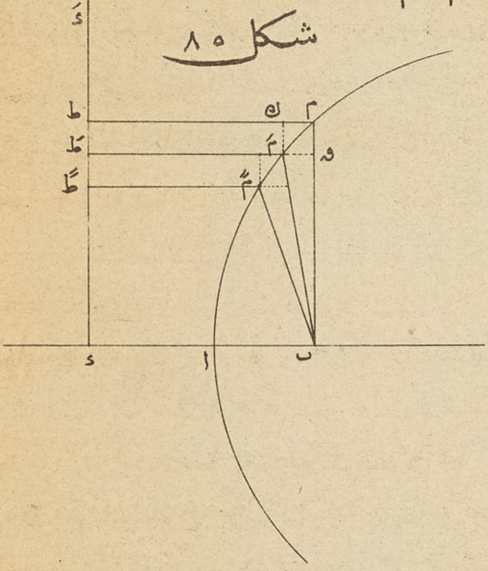
شبه منحرف ط م م١ ط١ = ٢ × مثلث هـ ب هـ

• وبمثل ذلك يبرهن على ان شبه المنحرف المجاور له مساو لضعف المثلث المناظر له وهلم جرا وحينئذ يكون مجموع الاشباه منحرف مساويا لضعف مجموع المثلثات فاذا زودنا عدد أضلاع الخط المنكسر زيادة لا نهائية كان نهاية مجموع الاشباه منحرف عبارة عن سطح القطعة م ا ط ونهاية مجموع المثلثات عبارة عن مساحة القطعة المثلثية هـ م ا وحينئذ تكون مساحة القطعة الأولى ضعف مساحة القطعة الثانية أعنى انها تكون مساوية لثلثى المثلث هـ م ط او المستطيل ا ع م ط المكافئ لهذا المثلث

فاذا مد الاحداثى م ط على استقامته حتى يتلاقى مع المنحنى فى نقطة مَ المماثلة لنقطة م تحصلت بالضرورة قطعة مكافية ضعف الأولى تكون بالمثل مساوية لثلثى المستطيل ع م مَ عَ وتنتج حينئذ النظرية الآتية

النظرية الحادية عشر — مساحة القطعة المكافية المحصورة بين رأس المنحنى ووتر عمودى على المحور تساوى لثلثى مساحة المستطيل

الذى قاعدته هذا الوتر وارتفاعه بعد هذا الوتر عن الرأس
وأما اذا كان المطلوب تعيين مساحة القطعة المحصورة بين وتر بن عمودي بين
على المحور كالقطعة م ه هَ مَ مثلا يلاحظ ان هذه القطعة هى الفرق
بين القطعتين ه ا هَ ، م ا مَ اللتين يمكن تعيين مساحتيهما بمقتضى
ماتقدم



شكل ٨٥

بند ١٤١ مساحة القطاع المكافى اسم المحصور بين نصفى القطرين البوريين ب ا ، ب م شكل (٨٥) المنطبق احدهما وهو ب ا على المحور ب ا ى تساوى ثلث مساحة شبه المنحرف م ب ى ط المنحصر بين المحور ب ى والدليل ى ط والافقى م ط المار بنهاية نصف القطر البورى م ب وبين نصف القطر المذكور

وللبرهنة على ذلك يقال اذا أخذت نقطة مثل مَ قريبة جدا من نقطة م ووصل منها الى البورة ب بنصف القطر البورى مَ ب ثم انزل منها المستقيم مَ طَ عموديا على الدليل ى ى َ تحدث مثلث م مَ ب المنحنى الضلع م مَ والشكل الرباعى م مَ طَ ط المنحنى الضلع م مَ أيضا فاذا تصورنا ان نقطة مَ أخذت فى الاقتراب من نقطة م شيأ فشيأ حتى وصلت حد النهاية فى القرب منها فعند ذلك يؤل المثلث م مَ ب الذى كان منحنى الضلع م مَ الى مثلث آخر مستقيم الاضلاع الثلاثة وصغير جدا وكذا يؤل الشكل الرباعى م مَ طَ ط الى شكل متوازى الاضلاع ومستقيمها بحيث تكون مساحة مثلث م مَ ب عند النهاية مساوية لنصف مساحة متوازى الاضلاع المذكور لانهما يكونان متحدين فى القاعدة والارتفاع

وذلك

وذلك لكون قاعدة المثلث وهى م ب مساوية من خاصيّة القطع المكافى الى م ط الذى هو قاعدة متوازى الاضلاع وكذا لكون ارتفاعاهما مَ ه ، مَ ك متساويين لان خط م مَ يعتبر جزء من المماس للمنحنى فى نقطة م ولا يخفى إن المماس منصف للزاوية ط م ب وعليه يكون العمودان مَ ه ، مَ ك النازلان من نقطة مَ على ضلعى هذه الزاوية متساويين

ويعلم من ذلك ان مساحة مثلث م مَ ب تساوى نصف مساحة متوازى الاضلاع م مَ طَ ط بمعنى انه

مثلث م مَ ب $= \frac{1}{2}$ م مَ طَ ط

وبمثل ذلك اذا اخذت نقطة مثل مً قريبة من مَ على المنحنى ورسم منها خطا مًب ، مًطً حدث بمقتضى ما تقدم آنفا ان

مثلث مَ مً ب $= \frac{1}{2}$ مَ مً طً طَ

وهكذا اذا أخذت عدة نقط اخرى على المنحنى قريبة من بعضها ووصل من كل منها الى البورة ثم انزل من كل منها عمود على الدليل انقسم القطاع المكافى الى جملة مثلثات كل مثلث منها مساو لنصف متوازى الاضلاع المناظر له

فاذا جمعت المثلثات على بعضها ومتوازيات الاضلاع على بعضها كان مجموع المثلثات الذى هو القطاع المكافى م ب ا مساويا لنصف مجموع متوازيات الاضلاع الذى هو الشكل م مَ مً ا ء ط أعنى ان قطاع

م ب ا $= \frac{1}{2}$ شكل م ا ء ط

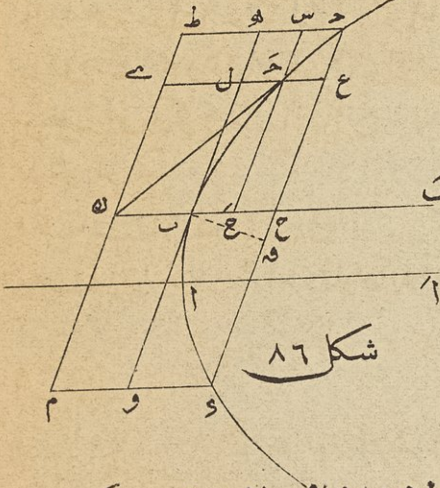
ومن ذلك يؤخذ ان

القطاع م ب ا $= \frac{1}{4}$ الشكل الرباعى م ب ء ط

وهو المطلوب

ند ١٤٢ مساحة القطعة المكافية حـ حَ ب ا ء حـ شكل (٨٦) المنحصرة بين قوس حيثما اتفق حـ حَ ب ا ء من القطع المكافى وبين الوتر حـ ء المار بطرفى ذلك القوس تساوى لثلثى متوازى

لاضلاع الذى احد ضلعيه هو الوتر حـ ء وضلعه الاخر حـ ب
الذى هو بعد هذا الوتر عن المماس
هـ ب و الموازى له محسوبًا
على اتجاه القطر ب ت الثانوى
مع الوتر حـ ء اعنى الذى يلزم ت
ان يمر بنقطة التماس ب
ويكون منصّفا للوتر حـ ء
بمعنى ان القطعة حـ حَ ب ا
ء حـ = $\frac{2}{3}$ متوازى الاضلاع
حـ هـ و ء



شكل ٨٦

ولاجل البرهنة على ذلك يبرهن اولا على ان الجزء العلوى حـ حَ ب ح
من القطعة المكافئة يساوى لثلثى متوازى الاضلاع حـ هـ ب ح
ثم يبرهن بعد ذلك على ان الجزء السّفلى ح ب ا ء ح = $\frac{2}{3}$ ح ب و ء
فلنبتدئ بالجزء الاول ونقول
اذا أخذت نقطة مثل حَ على المنحنى لكنها قريبة جدا من نقطة حـ بحيث
يعتبر الجزء الخطى حـ حَ كجزء من المماس حـ حَ ك للقطع المكافى فى
نقطة حَ الذى اذا مدّ حتى يتقاطع مع القطر ب ت فى نقطة ك كان
بالضرورة بعد ب ك = ب ح
فاذا رسم المستقيم ك ط موازيا الى ب هـ والمستقيم حـ ط موازيا الى
القطر ب ت حدث متوازى الاضلاع حـ ط ك ح وأيضا اذا رسم من
حَ مستقيم س حـ حَ موازيا للماس ومستقيم ع حَ ى موازيا
للقطر لحدث متوازيا الاضلاع س ط ى حَ , حَ ع ح حَ وكانا متكافئين
وذلك لانه حيث كان مثلث حـ ح ك مساويا لمثلث حـ ك ط من
خاصية متوازى الاضلاع الكلى بما ان حـ ك قطر له
وكذا من حيث ان مثلث حـ حَ ع = حـ حَ س ومثلث حَ ك خَ = حَ ك ى
فاذا جمعنا مثلثى حـ حَ ع , حَ ك خَ على بعضهما وطرح مجموعهما من

مثلث

مثلث ح ك ح كان الباقى هو متوازى الاضلاع ع حَ حَ ح
واذا جمع مثلثا ح حَ س ، حُ ك ى على بعضهما وطرح المجموع من مثلث
ح ك ط كان الباقى متوازى الاضلاع س ط ى حَ
وحينئذ فيكون متوازى الاضلاع المذكور مساويا الى متوازى الاضلاع
ع حَ حَ ح
لكن حيث ان بعد ب ك = ب حَ فيكون ل ى = ل حَ ويلزم
حينئذ أن يكون متوازى الاضلاع

هـ ل ى ط = هـ ل حَ س

أو يكون

هـ ل حَ س = ½ س ط ى حَ

وعليه فيكون متوازى الاضلاع

ع حَ حَ ح ٢ هـ ل حَ س

فاذا تصورنا ان نقطة حَ آخذة فى الاقتراب من نقطة ح
شيئا فشيئا فلا يزال الارتباط المتقدم موجودا حتى اذا بلغت نقطة
حَ نهاية قربها من نقطة ح آل متوازى الاضلاع ع حَ حَ ح
فى نهاية الامر الى الجزء ح حَ ح من القطعة المكافئة التى نحن بصددها
واما متوازى الاضلاع هـ ل حَ س فانه يؤل الى القطعة الخارجة
ح هـ ل حَ وعليه فيكون

ح حَ ح = ٢ ح حَ ل هـ

فاذا أخذت عدة نقط مثل حَ ، حً ، ...... الخ على القوس
حَ ب واجرى عليها العمل المتقدم انقسمت القطعة المكافئة ح حَ ب ح
الى جملة اجزا كل واحد منها يساوى لضعف الجزء المناظر له من اجزاء القطعة
الخارجة ح حَ ب هـ بحيث لو جمعت الاجزاء الأولى على بعضها والثانية
على بعضها لثبت ان القطعة المكافئة

ح حَ ب ح = ٢ ح حَ ب هـ

وعليه فتكون مساحة القطعة ح حَ ب ح تساوى لثلثى متوازى
الاضلاع ح هـ ب ح ح وهو المطلوب الاول

وبمثل ذلك يبرهن على ان مساحة القطعة ح ب ا ء ح تساوى لثلثى
مساحة متوازى الاضلاع ح ب و ء
وحينئذ اذا جمعت القطعتان المكافئتان على بعضهما كان مجموعهما
وهو القطعة الكلية الاصلية حَ ب ء حَ مساويًا فى المساحة
لثلثى مساحة متوازى الاضلاع الكلى حَ ه ء و وهو المطلوب
(تنبيه) من حيث انه اذا انزل العمود ب ه على ضلع حَ ء كان هو
ارتفاع متوازى الاضلاع حَ ه و ء فاذا رسم مستطيل قاعدته حَ ء
وارتفاعه ب ه لكان مكافئا لمتوازى الاضلاع حَ ه و ء واذن
فيمكن ان يقال
ان مساحة القطعة المكافيه حَ ب ء حَ تساوى لثلثى مساحة
المستطيل الذى قاعدته هو وترها حَ ء وارتفاعه البعد الحقيقى لهذا
الوتر عن نقطة التماس ب المقدر بالبعد ب ه

فى مجسم القطع المكافى

نمرة ١٤٢ اذا أدير القطع المكافى حول محوره دورة كاملة فانه يرسم
جسما تحركيا يسمى بالمجسم المكافى يمكن تعيين حجمه بالسهولة
ولذلك نرجع الى العمليات التى اجريت فى نمرة ١٤٠ ونقارن حجم
الجسم الحادث من دوران مثلث ه ب مٰ شكل (٨٤) بحجم الجسم
الحادث من دوران المستطيل الذى قاعدته هى حَ ى وارتفاعه
ط طٰ فنجد ان حجم الجسم الاول منهما مساوى الى

$\frac{1}{3}$ ه حَ ى^2 × ه مٰ

وحجم الجسم الثانى مساوى الى

طٰ × حَ ى^2 × ط ه

مع ملاحظة أن حرف ه المعلق رمز للنسبة التقريبية أما حرف ط العادى فهو
المعلوم بالشكل وحينئذ فيكون حجم الاول ثلث حجم الجسم الثانى ثم يبرهن
بمثل ذلك على أحجام الاجسام المماثلة لهذين الجسمين والمقابلة لجميع
أضلاع الخط المنكسر فيكون بناء على ذلك مجموع الاسطوانات

مساويا لثلاثة أمثال مجموع الاجسام الحادثة من دوران المثلثات لكن من المعلوم أن نهاية مجموع الاسطوانات عبارة عن قطعة المجسم المكافى ونهاية مجموع الاجسام الحادثة من دوران المثلثات عبارة عن الجسم الحادث من دوران الشكل هم١ وحينئذ فيكون مجموع الاول ثلاثة أمثال المجموع الثانى وتكون قطعة المجسم المكافى مساوية لثلاث أرباع المخروط م هم َ لكن من حيث ان حجم هذا المخروط هو

١/٣ × ط × هط × طمَ^٢ = ٢/٣ ط × اط × طمَ^٢

فحينئذ يكون حجم قطعة المجسم المكافى مساويا الى

٣/٤ × ٢/٣ ط × اط × طمَ^٢ = ١/٢ ط × اط × طمَ^٢

وبناء عليه تحدث النظرية الآتية

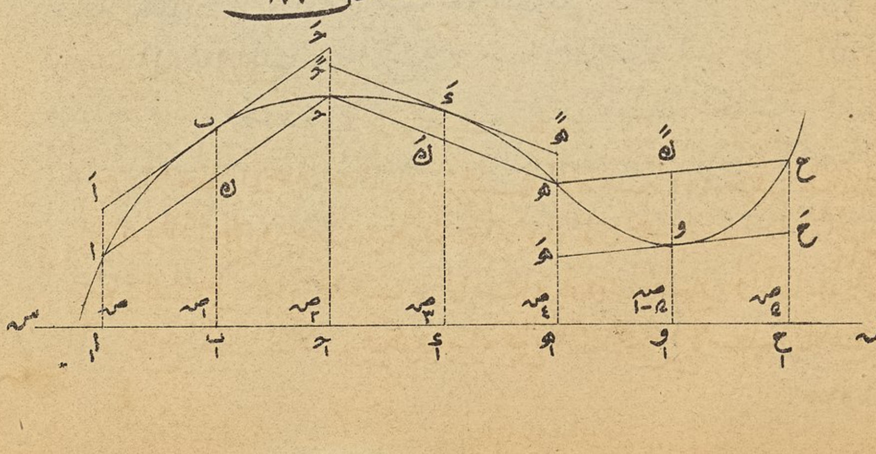
النظرية الثانية عشر — حجم قطعة المجسم المكافى المحصورة بين الرأس وبين مستو عمودى على المحور يساوى نصف حجم الاسطوانة التى قاعدتها وارتفاعها عين قاعدة وارتفاع هذه القطعة

ولاجل تعيين حجم قطعة من هذا المجسم محصورة بين مستويين عموديين على المحور يعتبر حجم هذه القطعة كالفرق بين قطعتين محسوبتين من الرأس

قانون توما سمپسون

١٤٤ — قد أوعدنا فى آخر بند (٥٧) بأن سنذكر طريقة أخذ مساحة الاشكال المنحنية بواسطة قانون المسيو توما سمپسون بعد الكلام على القطع المكافى لانها مبنية على احدى خواصه وحيث قد آن الاوان لذكر هذه الطريقة فلنذكرها هنا وفاء بما وعدنا به فنقول

شكل ٨٧



إذا أريد ايجاد مساحة الشكل المحدد من الأعلى بالمنحنى ا ب ح ء ه و ح شكل (٨٧) ومن الاسفل بالمستقيم س سَ ومن الجانبين بالراسيين ا اَ ، ح حَ العمودين على س سَ نبتدئ أولا بتقسيم البعد اَ حَ الى اقسام صغيرة جدا متساوية وزوجية العدد ولنرمز لنقط التقاسيم بالحروف اَ ، بَ ، حَ ، ءَ ، هَ .... الخ ونقيم منها أعمدة على س سَ ونرمز لها بحروف ص ، ص١ ، ص٢ ، ..... ص ن-١ ، ص ن فينقسم الشكل الاصلي الى جملة اشكال نبحث عن مساحة كل اثنين منها معا وبعد ايجاد مساحاتها نجمعها على بعضها فيكون مجموعها هو المساحة المطلوبة

ولنبتدئ أولا بالبحث عن مساحة ا ب ح حَ اَ المحدود من الاعلى بالقوس ا ب ح ومن الجانبين بالاحداثيين ص ، ص٢ ومن الاسفل بالمستقيم اَ حَ العمودي على الاحداثيين فنقول

اذا رمزنا أولا لكل قسم من اقسام القاعدة اَ حَ بحرف ع كانت القاعدة المذكورة مساوية الى ٢ع ثم يقال بما أن قوس ا ب ح صغير جدا فيمكن اعتباره تقريبا كانه قوس من القطع المكافي المار بالثلاث نقط ا ، ب ، ح الذي محوره موازي الى اَ ا ومن هذا الاعتبار يكون المستقيم بَ ب قطر من اقطار ذلك القطع المكافي بحيث لو وصلنا مستقيم ا ح ورسمنا من نقطة ب مستقيما موازيا له كالمستقيم كَ كَ كان هذا المستقيم مماسا للقطع المكافي لان المماس لأي منحن يكون موازيا للاوتار التي اتجاهها مزدوج وجامع القطر المار بنقطة التماس

اذا تقرر هذا يقال اذا رمزنا لمساحة الشكل ا ب ح حَ اَ بحرف م لوجدنا ان هذه المساحة مركبة من شبه المنحرف ا ح حَ اَ الذي مساحته تساوي ٢ع × بَ ك ومن القطعة المكافئة ا ب ح التي مساحتها بمقتضى بند ١٤٢ تساوي لثلثي مساحة متوازي الاضلاع ا ح كَ ك اعني تساوي ٢ع × ٢/٣ ك ب واذن فيكون مقدار المساحة م هو الآتي

م = ٢ع (بَ ك + ٢/٣ ك ب)

وحيث

وحيث ان $\text{ب}_1\text{ك} = \frac{\text{ص} + \text{ص}_2}{2}$ و $\text{ك ب} = \text{ب}_1\text{ب} - \text{ب}_1\text{ك}$ أعنى أن $\text{ك ب} = \text{ص}_1 - \frac{\text{ص} + \text{ص}_2}{2}$ فيكون

$$\text{ق} = 2\text{ع}\left[\frac{\text{ص} + \text{ص}_2}{2} + \frac{2}{3}\left(\text{ص}_1 - \frac{\text{ص} + \text{ص}_2}{2}\right)\right] = \frac{\text{ع}}{3}(\text{ص} + 4\text{ص}_1 + \text{ص}_2)$$

وبهذه الكيفيه نبحث عن مساحة الشكل الجزئى الثانى وهو $\text{ح ء هـ}_1\text{ح}_1$ بحيث لو رمزنا لمساحته بحرف قَ لوجدنا أن

$$\text{قَ} = 2\text{ع}\left[\frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_4}{2} + \frac{2}{3}\left(\text{ص}_3 - \frac{\text{ص}_2 + \text{ص}_4}{2}\right)\right] = \frac{\text{ع}}{3}(\text{ص}_2 + 4\text{ص}_3 + \text{ص}_4)$$

وهكذا يبحث عن مساحة بقية الاشكال الجزئية قً ، قٌ ، .... الخ حتى لو وجدنا أن احد هذه الاشكال الجزئية محدود من الاعلى بمنحن تحديبه موجه نحو القاعدة س سَ بضد المنحنيات الجزئية الاخرى كالشكل الثالث الجزئي وهو $\text{هـ و ح}\,\text{ح}_1\,\text{هـ}_1$ فلا تزال مساحته تتحدد بقانون مشابه لمقدار ق ، قَ ، ..... الخ

لاننا اذا رمزنا بحرف $\text{ق}_{ن}$ لهذا الشكل وجدنا بمقتضى ما تقدم أن

$$\text{ق}_{ن} = 2\text{ع}\left(\text{و}_1\text{كً} - \frac{2}{3}\,\text{و كً}\right)$$

فاذا لاحظنا أن $\text{و}_1\text{كً} = \frac{\text{ص}_{ن-2} + \text{ص}_{ن}}{2}$ وأن $\text{و كً} = \text{و}_1\text{كً} - \text{و}_1\text{و}$ أعنى أن $\text{و كً} = \frac{\text{ص}_{ن-2} + \text{ص}_{ن}}{2} - \text{ص}_{ن-1}$ فيحدث

$$\text{ق}_{ن} = 2\text{ع}\left[\frac{\text{ص}_{ن-2} + \text{ص}_{ن}}{2} - \frac{2}{3}\left(\frac{\text{ص}_{ن-2} + \text{ص}_{ن}}{2} - \text{ص}_{ن-1}\right)\right] = \frac{\text{ع}}{3}(\text{ص}_{ن-2} + 4\text{ص}_{ن-1} + \text{ص}_{ن})$$

فاذا بحثنا بهذه الكيفية عن مساحات جميع الاشكال الجزئية لغاية الشكل الأخير وجمعنا جميع هذه المساحات على بعضها تحصلت لنا مساحة الشكل الكلى بحيث لو رمزنا لها بحرف ط ولطول القاعدة الكلية بحرف ى ولاحظنا ان $\frac{\text{ع}}{3} = \frac{\text{ى}}{3\text{ن}}$ لكان

$$\text{ط} = \frac{\text{ى}}{3\text{ن}}\left[\text{ص} + \text{ص}_{ن} + 4(\text{ص}_1 + \text{ص}_3 + \text{ص}_5 \cdots + \text{ص}_{ن-1}) + 2(\text{ص}_2 + \text{ص}_4 + \cdots + \text{ص}_{ن-2})\right]$$

وترجمة هذا القانون هى أن مساحة الشكل الكلى الذى يراد أخذ مساحته تساوى حاصل ضرب ثلث المسافة الكائنة ما بين كل احداثيين متتاليين فى حاصل جمع الاحداثيين المتطرفين الذى هو ($\text{ص} + \text{ص}_{ن}$) زائدا اربعة أمثال مجموع الاحداثيات الفردية الرتبة الذى هو ($\text{ص}_1 + \text{ص}_3 + \text{ص}_5 + \cdots + \text{ص}_{ن-1}$) وزائدا ضعف مجموع الاحداثيات المتوسطه

الزوجية الرتبة الذى هو $(ص_2 + ص_4 + ص_6 + \dots\dots + ص_{ح-1})$
فاذا فرضنا مثلاً أن $ح = 8$ حدث

$$ط = \frac{ى}{3 \times 8}\left[ص + ص_8 + 4(ص_1 + ص_3 + ص_5 + ص_7) + 2(ص_2 + ص_4 + ص_6)\right]$$

(تنبيه) اذا كانت احدى نهايتى المنحنى وكلتاهما موجودتين على القاعدة س سَ لزم لتعيين المساحة ان يفرض فى القانون العمومى أن كلاً من الاحداثيين ص ، $ص_ح$ المناظرين للنقطتين من المنحنى الموجودتين على القاعدة مساوياً للصفر فتحدث المساحة المطلوبة أما اذا كان الشكل الذى يراد أخذ مساحته شكلاً محدوداً من جميع اطرافه بمنحنٍ مقفول لزم ان تؤخذ داخله قاعدة مستعارة تقسمه الى قسمين ثم يبحث عن مساحة كل قسم منهما على حدته بواسطة القانون العمومى وتجمع المساحتان على بعضهما
أو تعين مساحة الشكل الكلى دفعة واحدة بواسطة القانون العمومى ويكفى فى ذلك ان تؤخذ الاحداثيات مساوية لمجموع كل احداثيين متناظرين من احداثيات جزئى المنحنى العمومى

الباب الخامس

فى تتمة الثلاثة ابواب الماضية وفيه فصلان

الفصل الأول

فى القطاعات المخروطية

١٤٥ ــ اذا نظرنا الى المنحنيات الثلاثة المتقدمة وهى القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافى وتأملنا جيداً فى خواص كل منها على حدته فلابد أن تظهر لنا مشابهة كبيرة فى أغلب الخواص بحيث يظهر لكل من أمعن نظره فى تلك الخواص ان المنحنيات الثلاثة المذكورة اخوة لكثرة مشابهتها ببعضها وقلة الفرق الواقع بين خواصها

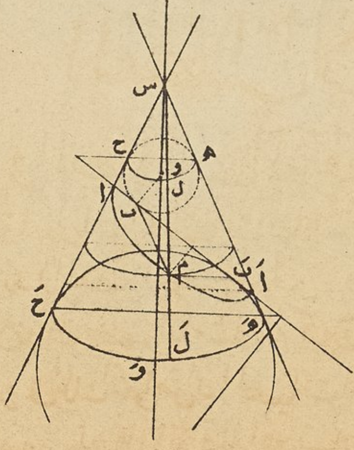
وفى الواقع

وفى الواقع لان كلاً من هذه الثلاثة منحنيات ناشئ عن قطع المخروط القائم الذى قاعدته دائرة بمستو واختلافها ناتج فقط من اختلاف وضع ذلك المستوى القاطع الذى هو بمنزلة ابوها بالنسبة لوضع المخروط المقطوع الذى هو بمنزلة أمها فهى على ذلك اخوة ابوها المستوى وأمها المخروط ولذا سميت بالقطاعات المخروطية ولنبين لك حقيقة ذلك فنقول .

١٤٦ نظرية — اذا قطع المخروط القائم الذى قاعدته دائرة بمستو كان خط تقاطعهما إما قطعا ناقصا واما قطعا زائدا واما قطعا مكافيا وذلك بحسب وضع المستوى القاطع بالنسبة لوضع المخروط فان كان المستوى قاطعا لجميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من رأسه كان خط التقاطع قطعا ناقصا وان كان قاطعا لجميعها أيضا لكنه قاطع لبعضها فى احدى الطيتين والبعض الاخر فى الطية الثانية أعنى فى جهتين متضادتين من رأس المخروط كان خط التقاطع قطعا زائدا وأما ان كان المستوى القاطع موازيا لاحد رواسم المخروط وقاطعا لباقى الرواسم كان خط التقاطع قطعا مكافيا ومن هنا يعلم ان لهذه النظرية البديعة ثلاث حالات

١٤٧ الحالة الاولى — لنفرض أن المستوى القاطع قاطع لجميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من رأسه مثلا ليكن س و وَ شكل (٨٨) هو محور المخروط ونفرض ان س ا س اَ هما خطا تقاطعه بمستوى الشكل وان ا اَ هو خط تقاطع المستوى القاطع بمستوى الشكل

شكل ٨٨



الذى فرضناه عموديا على ذلك المستوى القاطع
ثم نرسم الدائرتين هـ ب ح ، هـ َ بَ حَ المماستين لاضلاع المثلث
ا س اَ أولا امتداداتها من الداخل والخارج ونتصور دوران
جميع أجزاء الشكل [ما عدا خط اا] دورة كاملة حول المحور
س وَ فمستقيم س ا يولد سطح المخروط المعلوم ودائرتا
هـ ب ح ، هـَ بَ حَ ترسمان كرتين مماستين لهذا المخروط فى دائرتين
صغيرتين مثل هـ ح ، هـَ حَ ومماستين ايضا للمستوى القاطع
اا فى نقطتين مثل ب ، بَ

اذا تقرر هذا يقال اذا فرضنا ان خط تقاطع المستوى اا بالمخروط
هو منحنٍ كالمنحنى ام اَ واخذت عليه نقطة اختيارية مثل م
ثم وصل منها الى رأس المخروط س بمستقيم م س ومنها الى نقطتى
ب ، بَ بمستقيمى م ب ، م بَ لكان المستقيمان م ل ،
م ب متساويين . بما انهما مماسان لكرة واحدة وهى الكرة و
وخارجان من نقطة واحدة وهى م وبمثل ذلك يكون المستقيمان
م لَ ، م بَ المماسان للكرة وَ متساويين ايضا وحينئذ
يكون

$$م ب + م بَ = م ل + م لَ$$

لكن بما أن

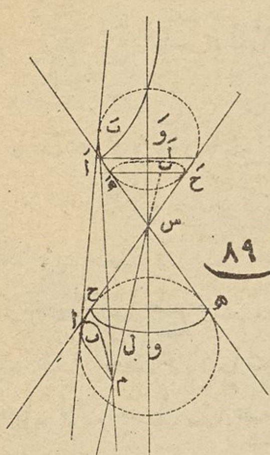
$$م ل + م لَ = ل لَ \quad فيكون$$

$$م ب + م بَ = ل لَ$$

وحيث أن ل لَ راسم من رواسم المخروط الناقص المحدود بمستويى
ح ل هـ ، حَ لَ هـَ العموديين على المحور فيكون طوله ثابتا مهما
تغير وضعه بتغير وضع النقطة م وبناء على ذلك يكون المنحنى ام اَ
الذى هو خط تقاطع المخروط بالمستوى اا قطعا ناقصا بؤرتاه
هما ب ، بَ لان مجموع البعدين الواصلين من اى نقطة منه
كنقطة م مثلا الى البؤرتين ب ، بَ مساو لكمية ثابتة

ند ١٤٨ الحالة الثانية – وهى الحالة التى يكون فيها المستوى القاطع قاطعا لجميع رواسم المخروط لكنه ملاق بعضها فى احدى جهتى رأس المخروط والبعض الآخر فى جهتها الأخرى

فلنفرض مثلا ان اس ح ، اَس هـ شكل (٨٩) هما راسما تقاطع المخروط المعلوم بمستوى الشكل وان خط ا اَ هو خط تقاطع المستوى القاطع مع مستوى الشكل المفروض أنه عمودى عليه



شكل ٨٩

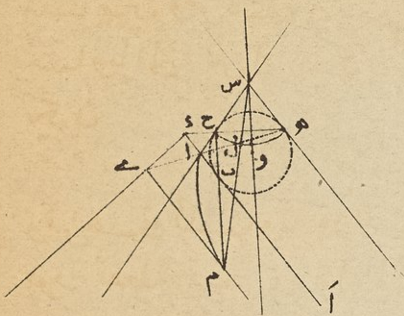
ثم نرسم الدائرتين هـ ح ب ، حَ هَ تَ المماستين لاضلاع المثلث س ا اَ من الخارج ونتوهم كما فى ند ١٤٧ دوران الجملة حول محور المخروط الذى هو وس وَ دورة كاملة فالدائرتان المتقدمتان ترسمان كرتين مماستين للمخروط فى جميع نقط الدائرتين الصغيرتين ح ل هـ ، حَ لَ هَ وللمستوى القاطع فى نقطتين مثل ب ، بَ فاذا فرض حينئذ أن نقطة م نقطة من منحنى التقاطع كان المستقيمان م ب ، م ل متساويين لكونهما مماسين للكرة و من نقطة م الخارجة عنها وكذلك يكون مستقيما م تَ ، م لَ المماسان للكرة وَ متساويين فيحدث

$$م تَ - م ب = م لَ - م ل = ل لَ$$

لكن من حيث أن المستقيم ل لَ ثابت الطول مهما تغير وضعه لكونه جزأ من راسم المخروط محصورا بين مستويين عموديين على المحور فيكون المنحنى قطعا زائدا بورتاه هما ب ، بَ وهو المطلوب

ند ١٤٩ الحالة الثالثة وهى التى يكون فيها المستوى القاطع موازيا

شكل ٩٠



لاحد رواسم المخروط
فلنفرض مثلاً أن ح س ه
شكل (٩٠) هو خط تقاطع
المخروط بمستوى الشكل وأن
ا اَ هو خط تقاطع مستوى
الشكل بالمستوى القاطع
العمودى عليه
ثم نرسم دائرة مماسة للثلاثة
مستقيمات س ح ، س ه
، ا اَ ونتوهم دوران الجملة
كما تقدم فالدائرة ترسم كرة مماسة للمستوى القاطع فى نقطة ب
وللمخروط فى نقط الدائرة ح ل ه ثم نفرض ان المستقيم ء ے
كناية عن خط تقاطع مستوى ح ب ه بالمستوى القاطع ويلزم
أن يكون هذا الخط عموديا على مستوى الشكل وعلى المستقيم
ا اَ بالجملة لانه خط تقاطع مستويين عموديين على مستوى الشكل
فى آن واحد

اذا تقرر هذا وفرض ان نقطة م نقطة من منحنى التقاطع الذى
يراد معرفة جنسه المجهول ثم وصل المستقيمان م ب ، م س
وانزل م ے عموديا على خط ء ے كان بمقتضى ما تقدم

م ب = م ل

ولنلاحظ الآن ان الثلاث نقط ه ، ل ، ے موجودة فى
المستوى ه ل ح لان المستقيم ء ے موجود فى نفس هذا
المستوى وغير ذلك فانها توجد أيضا داخل مستوى المستقيمين
س ه ، س م لان المستقيم م ے موازٍ الى ا اَ فيكون
حينئذ موازيا الى س ه وتكون حينئذ الثلاثة مستقيمات
س ه ، س م ، م ے موجودة فى مستوٍ واحد

ونتج

وينتج من ذلك ان الثلاث نقط هـ , ل , ى موجودة على استقامة واحدة واذن يكون مثلثا س هـ ل , م ى ل متشابهين ومن تشابههما يعلم انه حيث كان المستقيم س هـ مساويا الى س ل فيكون م ى مساويا الى م ل وعليه يكون

م ب = م ى

ومن هذه المتساوية قد اتضح ان منحنى التقاطع قطعا مكافيا بورته نقطة ب ودليله المستقيم ء ى وهو المطلوب

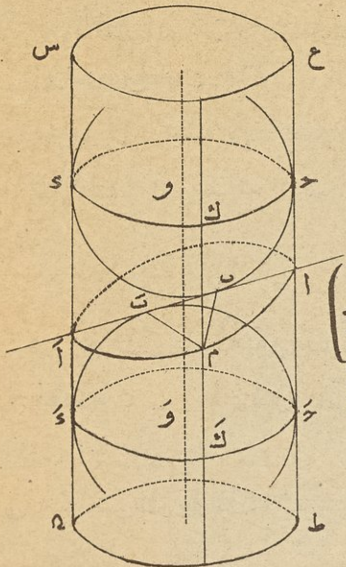
ن ١٥٠ قد ظهر حينئذ من النظرية المتقدمة باحوالها ان الثلاثة منحنيات المتقدمة اعنى القطع الناقص والقطع الزائد والقطع المكافى ناشئة كلها من تقاطع المستوى بالمخروط القائم ذى القاعدة المستديرة ولذلك نراها متشابهة فى أغلب الخواص وانما الفرق الكائن بينها ناشئ فقط من اختلاف وضع المستوى القاطع بالنسبة للمخروط المقطوع ولهذه الاسباب اشتهرت هذه المنحنيات باسم القطاعات المخروطيه

ن ١٥١ القطع الناقص ينشأ ايضا من تقاطع المستوى باسطوانة قائمة مستديرة القاعدة وذلك فى حالة ما يكون المستوى القاطع المذكور مائلا على محورها

نعم انه تمكن البرهنة على صحة هذه النظرية باعتبارها كنتيجة أو كحالة خصوصية من المسألة المتقدمة فى ن ١٤٧

اذ أن الاسطوانة يمكن اعتبارها كمخروط رأسه بعدت عن القاعدة حتى صارت على بعد منها لا نهاية له ولكن لزيادة الايضاح نبرهنها ببرهان مخصوص بها فنقول

لنفرض مثلا ان المستقيمين ع ط , س ح شكل (٩١) هما راسما تقاطع الاسطوانة المعلومة بمستوى الشكل واذن المستقيم ا اَ خط تقاطع مستوى الشكل بالمستوى القاطع للاسطوانة المذكورة وهذا المستوى معتبر عموديا



على مستوى الشكل ثم نرسم
الدائرتين ح ب ء ، حَ بَ ءَ
المماستين للراسمين ع ط ، س ه
وللمستقيم اا َ ونتوهم دوران
الجملة أعنى الدائرتين والراسمين
حول محور الاسطوانة وهو و وَ
دورة كاملة فيتولد من هذا
الدوران الاسطوانة ع ط ه س
والكرتان و ، وَ التي احداهما
وهي العليا مماسة للاسطوانة
في الدائرة ح ك ء وللمستوى
ا اَ في نقطة ب والاخرى
وهي السفلى مماسة للاسطوانة في الدائرة حَ كَ ءَ وللمستوى
ا اَ في نقطة بَ
اذا تقرر هذا وفرضنا ان منحنى تقاطع المستوى ا اَ بالاسطوانة
ع ط ه س هو المنحنى ا م اَ واخذت عليه نقطة اختيارية
ولتكن م مثلاً ثم وصل منها الى نقطتي ب ، بَ
بمستقيمي م ب ، م بَ ثم رسمنا الراسم ك م كَ المار بها
وجدنا بمقتضى ما تقدم ان

م ب = م ك

وذلك لكونهما مماسين للكرة و من نقطة م الخارجة
عنها وكذلك نجد بنفس هذا السبب ان

م بَ = م كَ

وبجمع هاتين المتساويتين على بعضهما طرفاً بطرف يحدث

م ب + م بَ = م ك + م كَ = ك كَ

لكن

لكن حيث ان البعد ك ك ثابت الطول بما انه هو جزء الراسم المحصور بين مستويى الدائرتين ح ك ء ، حَ كَ ءَ المتوازيتين لكونهما عموديتين على المحور فيثبت المطلوب حينئذ من ان المنحنى ا م آ قطع ناقص حيث ثبت ان مجموع البعدين م ب ، م ت الواصلين من اى نقطة منه كنقطة م المأخوذة بالاختيار الى نقطتى ب ، ت الثابتتين مساو لكمية ثابتة

الفصل الثانى

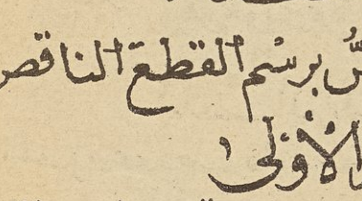
فى بعض مسائل تطبيقية على الثلاثة منحنيات المتقدمة

ش ١٥٢ مسائل تختص برسم القطع الناقص

المسألة الأولى

ما مقدار طول الحبل أو الخيط اللازم لرسم قطع ناقص على الارض بفرض ان المحور الاصغر لهذا القطع الناقص يساوى ١٠ متر والبعد بين بورتيه يساوى ١٥ متر ومفروض انه ستربط نهايتا الخيط فى مسمارين مغروسين فى البورتين وان قيمة ما يلف على المسمارين من الخيط لاجل ربطه بهما غير محسوب فى طول الحبل المطلوب

شكل ٩٢



لاجل حل هذه المسألة يقال من مثلث ب و ء شكل (٩٢) القائم الزاوية فى و يعلم بمقتضى ش ٥٧ أن

$$\overline{تء}^2 = \overline{بو}^2 + \overline{وء}^2$$

ومن هذا القانون المشتمل على الارتباط الواقع بين نصف المحور الأكبر للقطع الناقص ونصف محور الأصغر ونصف البعد الكائن بين البورتين يعلم أن

$$ب د = \sqrt{\overline{ب و}^{2} + \overline{و د}^{2}}$$

فاذا وضعنا بدل كل حد مقداره ورمزنا بحرف س لنصف المحور الأكبر المجهول يكون

$$س = \sqrt{\overline{٧،٥}^{2} + ٥^{2}}$$

أو $س = \sqrt{٥٦،٢٥ + ٢٥} = \sqrt{٨١،٢٥} = ٩،٠١٢$ متر تقريبا

وعلى ذلك يكون ٢س أعني المحور الأكبر مساويا الى ١٨،٠٢٦ متر وهو طول الجزء الخالص من الخيط المطلوب

المسألة الثانية

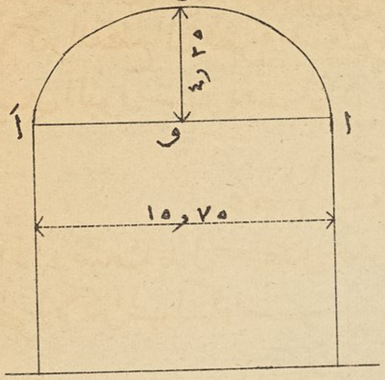
أخذ حبل وعقد طرفاه ببعضهما وكان طول محيطه بعد العقد مساويا الى ٢٢،٠٢٦ متر ورسم به قطع ناقص بطريقة الاستمرار المقررة في ... لكن مع جعل الخيط لافا على المسمارين المغروسين في البورتين لا مربوطا من طرفيه بهما كما في المسألة الأولى فوجد أن المحور الأصغر للقطع الناقص الحادث مساويا الى ١٠ متر فكم كان البعد بين المسمارين

الجواب — كان المسماران مغروسين على بعد ٦٥ متر من بعضهما

المسألة الثالثة

نحات يشتغل بنحت أحجار عقد ناقصي لقنطرة فتحة عينها أعني البعد أأَ = ١٥،٧٥ متر شكل (٩٤) وارتفاع تنفيخها أعني مقدار ارتفاع مفتاحها عن مستوى المبدأ وهو البعد د و = ٤،٢٥ متر

شكل ٩٣



فيلزمه بالضرورة ان يرسم هذا القطع الناقص على حائط مستو بواسطة المسطرة كما فى س ٤٧ ليرسم عليه تفاصيل العقد المطلوب فكيف يصنع النحات بالمسطرة لرسم القطع الناقص المذكور

الجواب :- يعلم على حرف المسطرة ثلاث نقط بحيث يكون بعد النقطتين المتطرفتين عن بعضهما يساوى ٧،٨٧٥ متر وبعد النقطة المتوسطة عن احدى هاتين النقطتين يساوى ٣،٦٢٥ متر ويجرى العمل كما فى س ٤٧

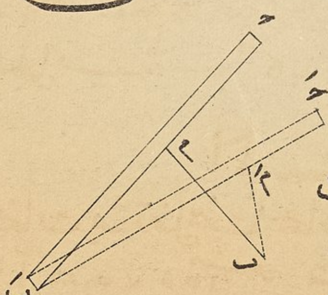
المسألة الرابعة

كيف يصنع هذا النحات بعينه فى المسطرة اذا اراد ان يرسم القطع الناقص المتقدم بالطريقة المبينة فى س ٤٩

الجواب - يعلم على المسطرة ثلاث نقط بحيث يكون بعد المتطرفتين عن بعضهما يساوى ١٢،١٢٥ متر وبعد النقطة المتوسطة عن احداهما يساوى ٤،٢٥ متر ويتم العمل طبقا لس ٤٩

المسألة الخامسة

شكل ٩٤



غرس فى نقطتى ب ، بَ شكل (٩٤) من الارض مسمارا ن متباعدا عن بعضهما بقدر ٥،٨ متر وأخذت مسطرة طولها ٨و٤٠ متر وخيط طوله كطول المسطرة ثم وضعت المسطرة فى وضع كالوضع بَ حَ بأن كان طرفها بَ مماسا للمسمار المغروس

فى هذه النقطة أما الخيط فقد ثبت أحد طرفيه فى المسمار ب وطرفه الآخر فى النهاية الأخرى من المسطرة وهى ت ثم شد الحبل بواسطة قلم الرسم بجانب المسطرة حتى أخذ الوضع ب م ت وبعد ذلك حركت المسطرة مع بقاء الخيط على الدوام مشدود ا بقلم الرسم فما يكون جنس المنحنى الذى يرسمه القلم فى أثناء الحركة وما مقدار أبعاده

الجواب — المنحنى المرسوم قطع ناقص محوره الأكبر ٤٠ر٨ مترا ومحوره الأصغر يساوى ٠٧٦ر٦ مترا (انظر بندى ٥٥ و ٥٦)

١٥٢ مسائل تتعلق بمساحة القطع الناقص

المسألة السادسة

مدرسة التجهيزية استعارت من جنينة مدرسة المبتديان خضارا لمؤنة تلامذتها لحين طلوع الخضار المزروع فى جنينة التجهيزية فتعوضه لها بكمية من نفس الخضار مساوية لما استعارته منها فأخذت التجهيزية جميع ما كان مزروعا فى حوض من الأرض شكله ناقص طول محوره الأكبر ٢٥ مترا وطول محوره الأصغر ١٤ مترا ولما طلع الخضار بجنينة التجهيزية حضر الباغشوانجى من المبتديان ليسترد ما أخذ من جنينته فانتخب له باغشوانجى التجهيزية حوضا ناقصيا أيضا لكن طول محوره الأكبر ٢٧ مترا وطول محوره الأصغر ١٢ وقال له ان مساحة هذا الحوض مثل مساحة الحوض الذى أخذناه منكم لأنه أطول من حوضكم بمترين وأقل منه فى العرض بمترين فهو حينئذ قدره فخذ ما فيه من الخضار فقبل ذلك منه مسلما وأخذ ما فى الحوض المذكور فأى الباغشوانجيين أمكر من أخيه

الجواب — باغشوانجى التجهيزية كان أمكر لأنه أعطى للثانى حوض خضار تنقص مساحته عن مساحة الحوض الذى أخذ من المبتديان بقدر ٤٠ر٢٠ مترا مسطحا

المسألة

المسألة السابعة

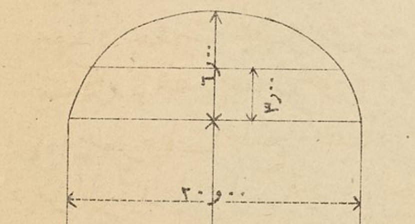
حوض ناقص من الارض مساحته نصف فدان وطول محوره الاصغر اربعون مترا فما يكون طول محوره الاكبر وما البعد بين البورتين وما مقدار طول الحبل الذى استعمله الجناينى لرسمه بواسطة الطريقة المقررة فى بند ٢٩ (طريقة ثانية)

الجواب — المحور الاكبر يساوى ٦٦,٨٦ مترا والبعد بين البورتين يساوى ٥٣,٥٦ مترا وطول الحبل الذى لزم لرسمه يساوى ١٢٠,٤٢ مترا

المسألة الثامنة

المعلوم قنطرة ذات عين واحدة شكل (٩٥) عرضها يساوى ٢٠,٠٠ متر وارتفاع كتفها ٨,٠٠ متر لحد مستوى مبدء عقدها المفروض انه نصف قطع ناقص محوره الراسى ١٢,٠٠ متر أعنى ان ارتفاع المفتاح عن مستوى المبدء يساوى ٦,٠٠ متر تمر منها مياه الترعة الموضوعة عليها هذه القنطرة فاذا فرضنا أن المياه فاضت الى ان ارتفع سطحها عن مستوى مبدء العقد بقدر ٣,٠٠ متر فما يكون مقدار سطح القطاع المغمور بالماء من عين القنطرة

شكل ٩٥



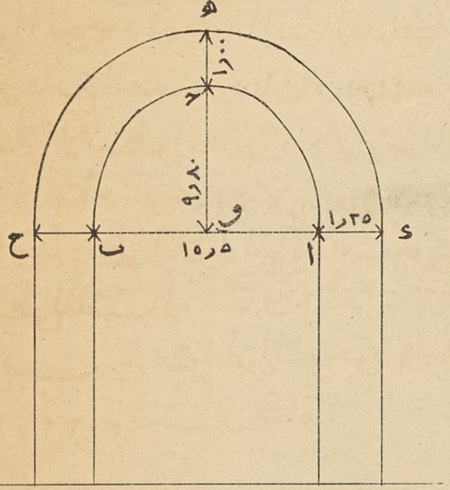
الجواب — القطاع المغمور بالماء يساوى ١٩٥,٤٥١٦ مترا مسطحا والحل يؤخذ من بند ٧٣

١٥٤ـ مسائل تتعلق بحجم المجسم الناقصى

المسألة التاسعة

المعلوم قبة ناقصية شكل (٩٦) كالقبة التي سطح تنفيخها أي سطحها الداخل كناية عن سطح مجسم القطع الناقصي التحرى الناشئ من دوران نصف القطع الناقص اح ب حول المحور الراسى وح الذى هو عبارة عن المحور الأكبر لهذا القطع الناقص وسطح تجريد القبة أي سطحها الخارج عبارة عن سطح مجسم القطع الناقص الناشئ من دوران ءهح حول نفس المحور هو الراسى

شكل ٩٦



والمطلوب معرفة حجم البنا الموجود فى هذه القبة من بعد معرفة ان المحور الاصغر اب للقطع الناقص الداخلى يساوى ٥٫٥ متر ونصف المحور الراسى وهو وح = ٩٫٨ متر ومفروض أن سمك العقد عند مبدئه وهو البعد اء = ١٫٢٥ متر وسمكه عند المفتاح وهو البعد حه = ١٫٠٠ متر

الجواب - حجم البنا الموجود فى هذه القبة وحدها من غير الأكتاف يساوى ٢٩٫٥٩٩ مترا مكعبا

(والحل مبنى على ما هو مقرر فى سـ ٧٩)

المسألة العاشرة

صالة كبيرة محاطة من جميع الجهات بحائط اسطوانى

قاعدتـ

قاعدته قطع ناقص مثل الصاله العمومية الموجوده بمحل ديوان المعارف ومعقودة من الاعلى بعقد ناقصى تحركى ناشئ من دوران نصف القطع الناقص الموجود فى مستوى مبدء العقد والذى هو كناية عن القاعدة العليا لاسطوانة حائط الصاله حول محوره الأكبر الذى هو كناية عن طول هذه الصاله والمطلوب معرفة مقدار فارغ هذه الصاله أو بعبارة أخرى ايجاد حجم الهوا الموجود فى هذه الصاله بمافيها من حجم فارغ الجزء الاسطوانى وحجم فارغ العقد وذلك من بعد معرفة ان المحور الاكبر لقطع ناقص قاعدة الاسطوانه المحدده لحائط الصاله من الداخل يساوى ٦ , ٢٩ متر ومحوره الاصغر يساوى ٥ , ٢٥ متر وارتفاع الصاله من ابتدا سطح البلاط لغاية مستوى مبدء العقد الناقصى المغطى للصاله يساوى ٥ , ٧٠ متر

الجواب - حجم الهوا الموجود فى هذه الصاله يساوى ٣٠٢٢,٣٢ مترا مكعبا

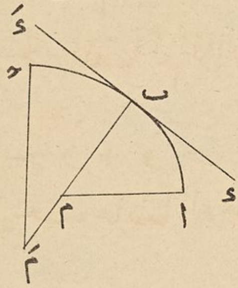
الباب السادس
فى المنحنيات الكثيرة المراكز المعروفة بالمرجونيه

الفصل الاول
فى المنحنيات المرجونيه ذوات الثلاثه مراكز

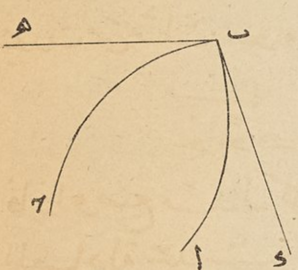
س ١٥٥ د - المنحنى المرجونى الثلاثى الذى يستعمل كثيرا فى فن العمارة وخصوصا فى القناطر ليس فى الحقيقة منحنيا خصوصيا بسيطا بل هو منحن مركب من ثلاثة اقواس دوائر متصلة مع بعضها بحيث يتكون عن مجموعها منحن واحد تقليد

القطع الناقص
ويقال ان القوسين المتصلين ببعضهما متفقين معًا اذا
كانا متماسين فى نقطة الاتصال بمعنى ان يكون المماس لكل منهما فى
النقطة المذكورة واحدا لانه ان لم يحصل هذا الشرط كان
المنحنيان المتصلان ببعضهما متقاطعين وصانعين بينهما زاوية
رأسها فى نقطة الاتصال او التقاطع
مثلًا القوسان ا ب ، ب ح شكل (٩٧) المتصلان
ببعضهما فى نقطة ب
ومركز أولهما فى نقطة م
ومركز الاخر فى نقطة
مَ هما متفقان معًا
لانهما متماسان فى نقطة
الاتصال ب بما أن
المماس لكل منهما فى تلك
النقطة واحد وهو
المستقيم ء ب ءَ

شكل ٩٧

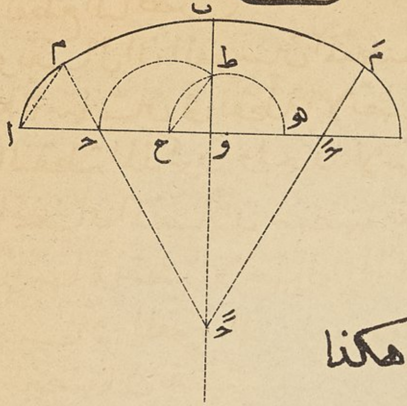


شكل ٩٨



وأما قوسا ا ب ، ب ح شكل (٩٨) فلا يقال لهما متفقان
فى نقطة ب ولو انهما متصلان ببعضهما فيها لانهما ليسا
متماسين فى تلك النقطة لكون المماسين لهما فيها وهما ب ء
، ب هـ متميزين
١٥٦ فى طرق رسم المنحنى المرجونى — قد علم من تعريف
المنحنى المرجونى المقرر فى البند السابق أن هذا المنحنى يتركب
كما فى شكل (٩٩) من ثلاثة أقواس دوائر مثل ا م
، مَ ب مَ ، مَ ء متماسة مع بعضها مثنى ومراكزها
ينبغى ان تكون موضوعة على المحورين ا و ، و ب المعلومين من رأس
المسالة لكى يكون المماسان للمنحنى فى نقطتى ا ، ء اللتين
هما مبدأ المنحنى رأسيين والمماس له فى نقطة ب أفقيا
لان

شكل ٩٩



لأن هذا الشرط يكون ضروريًا
في حالة ما يستعمل المنحني المرجوني
لعقد عيون القناطر وغيرها
فمن ثم يعلم أنه اذا رمز بحرف
ا الى البعد وا وبالرمز ب
الى وب وبالرمزين نعَ ، نع
لنصفي القطرين حا ، حَب
ولسهولة فهم هذه الرموز توضع هكذا

$$\text{وا} = \text{ا} \ ، \ \text{وب} = \text{ب} \ ، \ \text{حا} = \text{نعَ} \ ، \ \text{حَب} = \text{نع}$$

يحدث من مثلث حوحَ القائم الزاوية في و أن

$$\overline{\text{ححَ}}^{2} = \overline{\text{حَو}}^{2} + \overline{\text{وح}}^{2}$$

فاذا وضع بدل كل حد ما ساواه من الرموز المتقدمة في هذه المعادلة يحدث

$$(\text{نع} - \text{نعَ})^{2} = (\text{نع} - \text{ب})^{2} + (\text{ا} - \text{نعَ})^{2} \qquad (1)$$

وهذا هو الارتباط الوحيد الواقع بين المجهولين نع ، نعَ
فاذا حللنا جميع الحدود المربعة الداخلة في هذا القانون
وحذفنا الحدود المشتركة في طرفي المعادلة التي تحدث من بعد
التحليل ثم استخرجنا نع من المعادلة التي تتبقى بعد الحذف
يحدث

$$\text{نع} = \frac{\text{ا}^{2} + \text{ب}^{2} - 2\,\text{ا}\,\text{نعَ}}{2\,(\text{ب} - \text{نعَ})}$$

فاذا أعطي في هذه المتساوية الى نصف القطر نعَ مقدار
اختياري أمكن بواسطتها ايجاد مقدار نصف القطر الثاني
نع الموافق له وعلى هذا يعلم أنه يمكن بواسطة هذه المعادلة

الحصول على عدة حلول غير متناهية أعنى أنه يمكن رسم عدة منحنيات مرجونية كلها موفقة للشروط المفروضة فى راس المسالة لكنها تختلف عن بعضها فى الهيئة والمنظر واللياقة للاستعمال فى العقود بمعنى انه لا يصح اخذ أى واحد منها بطريقة اختيارية واستعماله فى العقود لانه ربما كانت هيئته ومنظره وقابليته لاتساعد على ذلك ولهذا قد لزمت التجارب بوضع بعض شروط لانتخاب الاليق منها حتى يكون منظره لطيفا وشكله موافقا ولتنوع هذه الشروط بحسب الاحتياجات قد تنوعت طرق رسم المنحنى المرجونى وها نحن شارعون فى ذكر الكثير الاستعمال منها على الترتيب فنقول

س ١٥٧ الطريقة الأولى قد جرت العادة فى الغالب ان يجعل القوس ام شكل (٩٩) السابق ٦٠° فينبنى على ذلك صيرورة المثلث حـ حَ حـَ المتساوى الساقين مثلثا متساوى الاضلاع ويصير القوس م ب مَ مساويًا الى ٦٠° كذلك وحينئذ فلو رمز بحرف س الى البعد و حـ المجهول

لكان $لعَ = ا - س$ ، $لع = ا + س$

وتؤول معادلة (١) السابقة من بعد كل اختصار الى

$$س^{٢} - (ا - ب)\,س = \frac{(ا - ب)^{٢}}{٢}$$

التى يؤخذ منها أن

$$س = \frac{ا - ب}{٢} + \frac{ا - ب}{٢}\sqrt{٣} \quad ......\ (٢)$$

وقد صرفنا النظر هنا عن المقدار السالب للمجهول س للاسباب المعلومة

وأما مقدار س المبين بنمرة (٢) فيمكن بيانه بالطريقة الرسمية كما سيأتى

وهو

وهوان يؤخذ البعد وهـ = ا - ب ، وح = ½ وهـ
ثم يرسم على البعد هـح نصف دائرة يكون هو قطرها فهنا
النصف دائرة يقطع المحور الراسي في نقطة مثل ط فاذا نقل
الوتر ح ط من ح الى حـ كان البعد وحـ هو مقدار
س المبين بمعادلة (٢)
فيرسم اذ ذاك على البعد احـ مثلث متساوي الاضلاع
مثل امحـ الذي اذا مد ضلعه محـ على استقامته حتى
يقطع امتداد المحور الرأسي في نقطة مثل حَ كانت هي مركز
القوس م ب مَ وكان البعد حَم نصف قطره
ولاجل البرهنة على ان وحـ يساوي لمقدار س المبين
في معادلة (٢) يقال من الشكل ظاهر ان

$$\text{وحـ} = \text{وح} + \text{حـح} \quad \ldots\ldots \quad (٧)$$

لكن كان

$$\text{وح} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} \quad \text{بالعمل}$$

وكذا معلوم بمقتضى احدى نظريات الهندسة العادية ان الوتر
ح ط وسط متناسب بين ح هـ ، ح و فيكون

$$\overline{\text{ح ط}}^{\,2} = \left[(\text{ا} - \text{ب}) + \left(\frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}\right) \right] \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}$$

وباجراء عملية الضرب واختصار الناتج يكون

$$\overline{\text{ح ط}}^{\,2} = ٣ \, \frac{(\text{ا} - \text{ب})^{2}}{٤}$$

وبأخذ الجذر يحدث

$$\text{ح ط} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} \sqrt{٣}$$

فاذا وضعنا بدلا عن كل من وح ، حـح المساوي الى
ح ط مقداريهما في معادلة (٧) لكان

$$\text{وح} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} + \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}\sqrt{٣}$$

وهذا هو ما اردنا بيانه

١٥٨ سند الطريقة الثانية — قد أعطى بعض المؤلفين قاعدة مختصرة لبيان مقدار س بالرسم لكنها تقريبية ويمكن استعمالها مع النجاح في رسم العقود ذوات الابعاد الصغيرة جدا أو في رسم زخارف العمارات وما أشبه ذلك

وغاية هذه الطريقة ان يؤخذ البعد وه مساويا الى $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}$ ويضاف عليه بعد مثل هـ ح مساو لثلث وه فتكون نقطة ح هي المركز الاول المطلوب ويكون وح مساويا بالتقريب الى مقدار س الموجود بمعادلة (٢)

ولبيان ذلك يكفي أن نبرهن على أن البعد وح $= \frac{٤}{٣}(\text{ا} - \text{ب})$ تقريبا وهذا هو الواقع لأن

$$\sqrt{٣} = \sqrt{\frac{٢٧}{٩}} = \frac{٥}{٣}$$ مقربا من ٠٦ ٪

فاذا نظرنا الى مقدار س المبين في معادلة (٢) نجد أن

$$\text{س} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} + \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}\sqrt{٣}$$

وبأخذ $\frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}$ مضروبا مشتركا في الطرف الثاني يحدث

$$\text{س} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}\left(١ + \sqrt{٣}\right)$$

أو يكون

$$\text{س} = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢}\left(١ + \frac{٥}{٣}\right) = \frac{\text{ا} - \text{ب}}{٢} \times \frac{٨}{٣}$$

أو

$$\text{س} = \frac{٨}{٦}\left(\text{ا} - \text{ب}\right) = \frac{٤}{٣}\left(\text{ا} - \text{ب}\right)$$ تقريبا

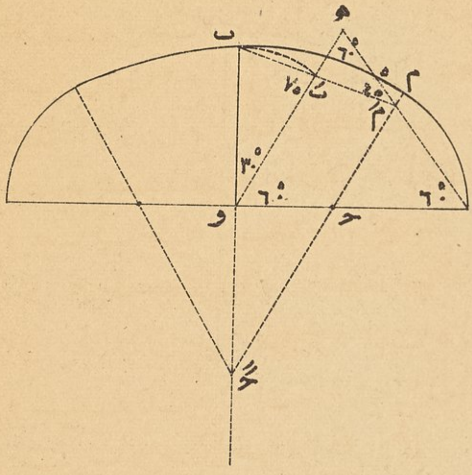
وهو المطلوب

ويكون مقدار س المستخرج بهذه الكيفية أصغر من حقيقته بقدر

بقدر ٠٣ ٠/٠ من الفرق (ا - ب) تقريباً

س ١٥٩ ا د الطريقة الثالثة — غاية هذه الطريقة أن يرسم على نصف المحور الأكبر و ا مثلث متساوي الأضلاع كالمثلث و هـ ا التي تكون جميع زواياه مساوية الى ٦٠ كما هو مبين فى الشكل (١٠٠)

شكل ١٠٠



ثم نجعل نقطة و مركزا وبنصف القطر و ب نرسم قوس الدائرة ب ت ونصل من نقطة ب الى نقطة تقاطع ذلك القوس بالضلع و هـ وهى نقطة ت بمستقيم ونمده حتى يتقاطع مع الضلع هـ ا فى نقطة مثل نقطة م فيرسم منها م حـ حـَ موازيا الى هـ و فيقطع المحورين فى نقطتى حـ ، حـَ تكونان مركزين للمنحنى المجهول وإذن يكفى لرسمه ان تجعل نقطة حـ مركزا وبنصف القطر حـ ا يرسم القوس ام ثم نجعل حـَ مركزا وبنصف القطر حـَ ب يرسم القوس م ب وأما النصف الايسر فيرسم بالتماثل مع النصف الايمن

ولاجل البرهنة على صحة هذه العملية يكفى أن نثبت على ان البعد و حـ يساوى لمقدار س المبين فى المعادلة (٢) المتقدمة فى البعدين السابقين أو الى المقدار المساوى له وهو

$$س = \left(\frac{ا - ب}{٢}\right) \left(١ + \sqrt{٣}\right)$$

ولذلك يقال ظاهر من الشكل بناء على الاجراآت التي عملت أن

$$\text{وح} = \text{مَ هـ}$$

ومن مثلث مَ هـ بَ يمكن ان يستخرج مقدار مَ هـ

فنجد أن

$$\text{مَ هـ} = \text{بَ هـ} \times \frac{\text{حا } ٧٥^\circ}{\text{حا } ٤٥^\circ}$$

وعليه يكون

$$\text{وح} = \text{بَ هـ} \times \frac{\text{حا } ٧٥^\circ}{\text{حا } ٤٥^\circ} \quad \ldots\ldots \quad (\text{هـ})$$

ولكن معلوم أن $\text{بَ هـ} = (\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١})$

وان $\text{حا } ٧٥^\circ = \text{حا } (٣٠^\circ + ٤٥^\circ) = \text{حا } ٣٠^\circ \text{ حتا } ٤٥^\circ + \text{حا } ٤٥^\circ \text{ حتا } ٣٠^\circ$

فاذا لاحظنا ان $\text{حا } ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$ و $\text{حتا } ٣٠^\circ = \sqrt{\frac{٣}{٤}}$

وان

$\text{حا } ٤٥^\circ = \sqrt{\frac{١}{٢}}$ و $\text{حتا } ٤٥^\circ = \sqrt{\frac{١}{٢}}$ أيضا

اتضح لنا أن

$$\text{حا } ٧٥^\circ = \frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} \times \sqrt{\frac{٣}{٤}}$$

وحينئذ اذا وضع بدلا عن كل حد مقداره في معادلة (هـ) حدث

$$\text{وح} = (\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١}) \frac{\frac{١}{٢}\sqrt{\frac{١}{٢}} + \sqrt{\frac{١}{٢}} \times \sqrt{\frac{٣}{٤}}}{\sqrt{\frac{١}{٢}}} = (\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١}) \frac{\sqrt{\frac{١}{٢}}\left(\frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٤}}\right)}{\sqrt{\frac{١}{٢}}}$$

أو يكون

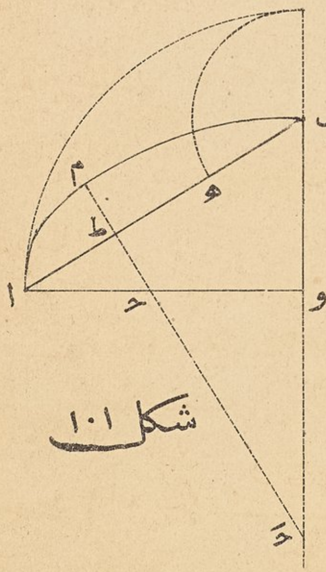
$$\text{وح} = (\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١})\left(\frac{١}{٢} + \sqrt{\frac{٣}{٤}}\right) = (\text{أ}_{١} - \text{ب}_{١})\left(\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}\sqrt{٣}\right)$$

أو يكون

$$وح = (ا - ب) \times \tfrac{1}{2}(١ + \sqrt{٣}) = \frac{ا - ب}{٢}(١ + \sqrt{٣})$$

وحيث ظهر من سياق البرهان أن البعد وح مساوٍ للمقدار س السابق فهذا كاف لاثبات المطلوب

بند ١٦٠ الطريقة الرابعة هذه الطريقة التي سنقتصر فيها على شرح كيفية العمل بها بدون أن نورد اثباتها لعلوه وبُعد فهمه على تلامذة التجهيزيه الذين قد اعددت كتابي هذا لهم ولمن في درجة معارفهم هي الطريقة التي يجب استعمالها في حالة ما يراد رسم منحنى مرجوني تكون النسبة الواقعة بين نصفي قطريه بعد بعد أصغر جميع النسب الممكن وقوعها بين نصفي القطرين المذكورين أعني هي اقرب تلك النسب الى الواحد الصحيح

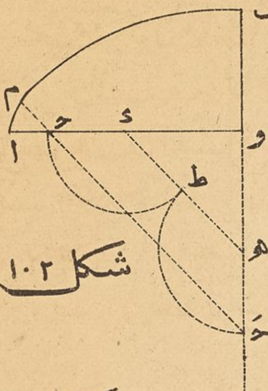


شكل ١٠١

وغاية هذه الطريقة هي أن نصل أولا الوتر ا ب شكل (١٠١) ثم يطرح منه البعد ب ه المساوى الى الفرق (ا - ب) الواقع بين نصفي المحورين ثم يقام من نقطة ط التي هي منتصف الجزء الباقي من الوتر عمود مثل ط ح حَ عليه فهذا العمود يقطع المحورين في نقطتين مثل ح حَ تكونان مركزي القوسين ام َ م ب ويكمل رسم النصف الايمن من المنحنى بالتماثل مع النصف الايسر الذي رسم

بند ١٦١ الطريقة الخامسة هذه الطريقة التي لم نذكر اثباتها لنفس السبب الذي أوردناه في البند السابق يلزم استعمالها في حالة ما يراد رسم المنحنى المرجوني بحيث يكون الفرق

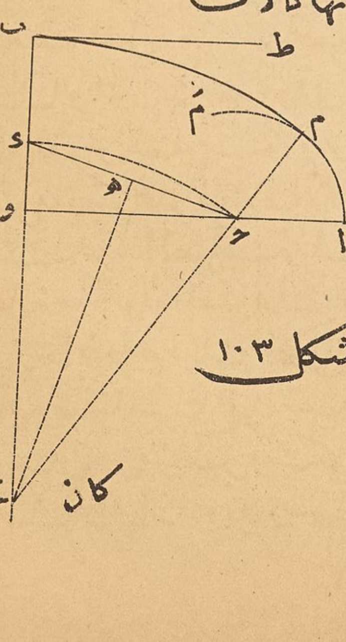
بين نصفي قطريه ـه ، لعد أصغرها يمكن
وهي ان يؤخذ البعدان و ء
، و ه شكل (١٠٢)
متساويين وكل منهما مساو
الى الفرق (أ – ب)
الكائن بين نصفي المحورين
ثم نصل المستقيم ء ه
وينصف بنقطة مثل ط
وينقل البعد ء ط على المحور



شكل ١٠٢

الافقي من ابتدا نقطة ء لحد نقطة مثل ح وكذا ينقل البعد
ه ط بالابتدا من نقطة ه لحد نقطة مثل حَ على المحور الراسي
فتكون نقطتا ح ، حَ هما مركزا القوسين ا م ، م ب
ويرسم النصف الايمن بالتماثل كما مر

١٦٤ الطريقة السادسة — هذه الطريقة تستعمل
في حالة ما يراد رسم القوس الاسفل أعني المجاور للمبدأ المنحني بكيفية
اختيارية حسب ما تقتضيه استعمالات المنحني المرجوني الذي
يراد انشاؤه ثم يرسم القوس الثاني الاكبر مماساً له وللمستقيم
الافقي المار بالرأس العليا للمنحني وبيانها كالآتي
مثلا اذا أريد رسم منحني
مرجوني ذي ثلاثة مراكز
على نصفي المحورين و ا ، و ب
شكل (١٠٣) يبتدأ أولا
برسم القوس ا م مَ الغير
محدود ويؤخذ نصف قطره
وهو ح ا اختياريا بحسب
ما يرام اعطاؤه الى ذلك القوس
من التحديب والارتفاع كثيرا كان



شكل ١٠٣

كان أو قليلاً فتؤول المسئلة بعد ذلك الى رسم قوس كالقوس م ب بحيث يكون مماساً للقوس الغير المحدود ا م مَ فى نقطة مثل م وللمستقيم الافقى ب ط فى نقطة ب

ولاجل حل هذه المسألة الفرعية نفرضها محلولة وأن القوس المطلوب هو م ب الذى مركزه نقطة حَ ثم جعلنا هذه النقطة مركزا وبنصف القطر ح حَ رسمنا قوس دائرة فيقطع المحور و ب فى نقطة مثل ء ويكون

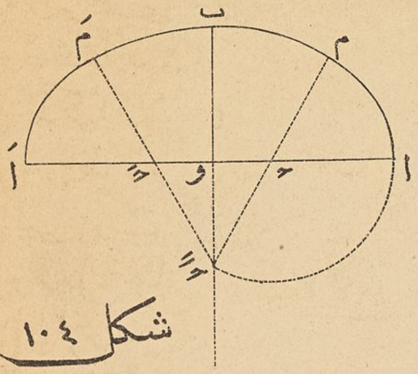
ب ء = ح م = ح ا

وبناءً على ذلك يمكن تعيين نقطة ء من أول الأمر بأن يؤخذ من ابتدا نقطة ب بعد ب ء على المحور الراسى مساويا لنصف القطر ح ا الذى أخذ بالاختيار ولما كان المركز حَ المجهول متساوى البعد عن نقطتى ح ، ء فيمكن حينئذ تعيينه بأن يوصل المستقيم ح ء ويقام على منتصفه عمود مثل هـ حَ ويمد حتى يتقابل مع المحور الراسى فى نقطة حَ فتكون هى المركز الثانى المطلوب وبعد ذلك نصل منها الى ح بمستقيم حَ ح ويمد حتى يحدد القوس الذى رسم فى مبدء الامر غير محدود بنقطة مثل م ثم نجعل نقطة حَ مركزا وبنصف قطر مساو الى حَ م أو الى حَ ب يرسم القوس م ب فيكون هو القوس المطلوب ويرسم النصف الثانى من المنحنى المرجونى بمثل ما رسم هذا النصف الاول

١٦٢ — الطريقة السابعة — هذه الطريقة تستعمل فى حالة ما يكون المعلوم المحور الاكبر للمنحنى المرجونى فقط ويراد رسم ذلك المنحنى المرجونى بحيث يكون محوره الثانى المجهول مناسبا للمحور المعلوم وان يكون منظره وشكله قريبين من منظر وشكل القطع الناقص

مثلا اذا اريد رسم المنحنى المرجونى ا م ب مَ اَ

شكل (١٠٤) على المحور
اَ ا المعلوم يقسم المحور المذكور
الى ثلاثة اجزاء متساوية
اح ، حح ، حَ ا
ويقام من منتصف الجزء
المتوسط وهى نقطة و عمود
مثل وحً على المحور ا اَ
ثم تجعل نقطة ح مركزا
وبنصف القطر ح ا يرسم
القوس ام الذى يقطع



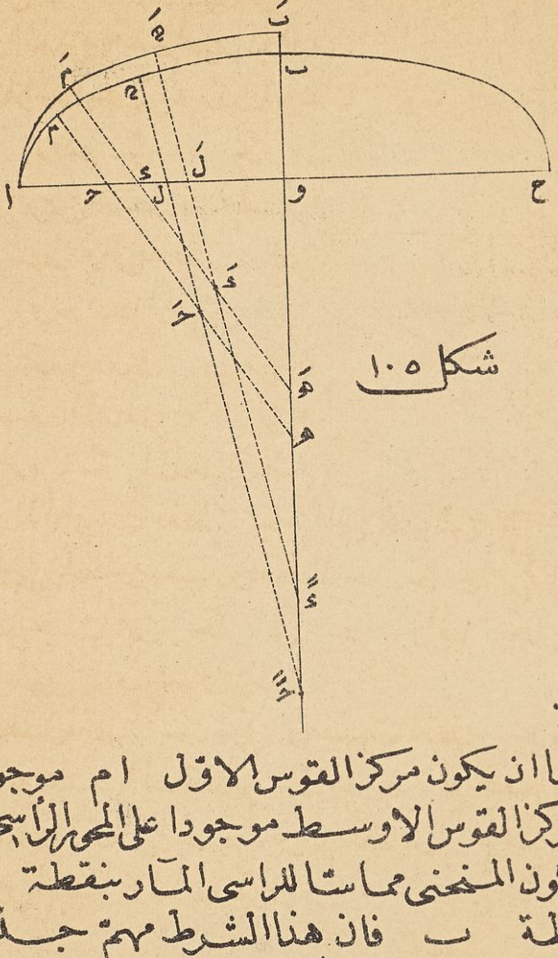
شكل ١٠٤

المحور الرأسى فى نقطة حً التى تكون هى مركز القوس الاوسط
من المنحنى المطلوب ونقطتا ح ، حَ هما مركزا القوسين المتطرفين
فنصل حينئذ من حً الى ح والى حَ بمستقيمى حً ح
، حً حَ الغير محدودين
ثم تجعل نقطة ح مركزا وبنصف القطر ح ا يرسم القوس
ام ويحدد بالمستقيم حً ح م ثم تجعل نقطة حً مركزا
وبنصف القطر حً م يرسم القوس م ب مَ ويتمم رسم
القوس الباقى كالمناظر له

الفصل الثانى

فى المنحنيات المرجونية ذات الخمسة مراكز فما فوقها

١٦٤ ـ حينما يكون نصف المحور الرأسى و ب شكل (١٠٥)
من المنحنى المرجونى أقل من ثلث الفتحة ا و اَ ينبغى ان يستعمل
لرسم ذلك المنحنى خمسة مراكز لكى لا يحصل تغيير انحنا
فجئى عند نقط الاتصال بل يكون تغيير الانحنا تدريجيا



شكل ١٠٥

وغير محسوس
وقبل ان نشرح
كيفيّة رسم المنحنى
المرجونى ذى الخمسة
مراكز نذكر اولا
بعض شروط قد
دلت التجارب
على لزوم مراعاتها
لاجل أن يكون
المنحنى الحادث ذا
هيئة وشكل
مناسبين
وملائمين للاحوال
التى يستعمل فيها
وهى الشروط الاتية

أولاً يشترط دائما ان يكون مركز القوس الاول ام موجودا
على المحور الافقي ومركز القوس الاوسط موجودا على المحور الراسى
وذلك لاجل أن يكون المنحنى مماسا للراسى المار بنقطة ا
وللافقى المار بنقطة ب فان هذا الشرط مهم جدا
خصوصا حينما يستعمل المنحنى المرجونى فى عمل العقود
ثانيا اذا فرضنا ان المنحنى المطلوب هو المنحنى ام ع ب ح
واعتبرنا نصفه الايسر ا م ع ب المركب من القوس
ا م الذى مركزه نقطة حـ ونصف قطره حـ ا مرموز
له بحرف نه ثم من القوس م ع الذى مركزه
حَ ونصف قطره حَ م = حَ ع مرموز له بحرف
نَه وأخيرا من القوس ع ب الذى مركزه نقطة حً
ونصف قطره حً ع = حً ب مرموز له بحرف نهً

ومرموز أيضا لنصف المحور و ا بحرف ا ولنصف المحور الآخر و ب بحرف ب لزم دائما مراعاة الثلاثة شروط الآتية

أولا أن يكون البعد وحً = ٣٠. و حـ أعنى أن

ىعـ - ب = ٣ (ا - ىد)

وثانيا أن تكون نقطة هـ التي يتلاقى فيها نصف القطر م حـ حً مع المحور الراسي موجودة في منتصف البعد وحً أعنى ان يكون

و هـ = ١/٢ . وحً

وثالثا أن تكون نقطة ل التي يتلاقى فيها نصف القطر ٥ حـ حً بالمحور الافقي موضوعة في ثلث البعد و حـ أعنى أن يكون البعد حـ ل = ١/٣ . حـ و

وبناء على ذلك اذا بقينا هذه الثلاثة شروط بدلالة ىد ، ىد ، ىعـ أمكن أن يستنبط منها معادلة ذات درجة ثانية مجهولها ىعـ بواسطتها يمكن تعيين مقدار هذا المجهول ومن بعد معرفته يعلم بالضرورة نصفا القطرين الآخران ىعـ ، ىد لكن بما أن هذه المعادلة تكون دائما كثيرة التركيب بحيث يصعب استعمالها قد جرت العادة بترك الحل بهذه الصورة واستعواضه بما سيأتى

شكل ١٦٥ وهو أنه ينتخب بالاختيار نصف قطر ابتدائي مثل ا ٤ ويؤخذ بمقتضى الشرط الاول من الثلاثة شروط المتقدمة البعد و ٤ً = ٢ و ٤ ونوصل من نقطة ٤ الى نقطة هـً وسط البعد و ٤ً فيتحدد بذلك القوس الاول ا مً ثم يؤخذ البعد ٤ لً = ١/٣ . و ٤ ويوصل المستقيم لً ٤ً فيقطع ٤ هـً في نقطة مثل نقطة ٤ً تكون هي مركز القوس الثاني مً ٥ً ثم يوصل هذا القوس بالقوس الثالث ٥ً تً

الذى

الذى يرسم بجعل نقطة ءً مركزا والبعد ءًءَ نصف قطر له

انما بواسطة هذه العملية لا يكون ارتفاع المنحنى المساعد المتحصل وهو البعد وتَ عين الارتفاع المعلوم من راس المسئلة لكن مع ذلك حيث كان المضلع و ء ءً مشابها بالبداهة الى المضلع المجهول وحـحً

فاذا وضعت الرموز الآتية

$$\text{و ح} = \text{س} \ ، \ \text{و حً} = \text{ص} \ ، \ \text{ح حَ} + \text{حَ حً} = \text{ع} \quad \text{و}$$

$$\text{و ء} = \text{ه} \ ، \ \text{و ءً} = \text{ك} \ ، \ \text{ء ءَ} + \text{ءَ ءً} = \text{ف}$$

تحصلت الارتباطات الآتية ذات الدرجة الأولى

$$\frac{\text{س}}{\text{ه}} = \frac{\text{ص}}{\text{ك}} \ ، \ \frac{\text{س}}{\text{ه}} = \frac{\text{ع}}{\text{ف}} \ ، \ \text{ع} + \text{ا}_{1} - \text{س} = \text{ص} + \text{ب}_{1}$$

التى يستنتج منها بعد حذف ع أن

$$\text{س} = \frac{(\text{ا}_{1} - \text{ب}_{1})\,\text{ه}}{\text{ه} + \text{ك} - \text{ف}} \ ، \ \text{ص} = \frac{(\text{ا}_{1} - \text{ب}_{1})\,\text{ك}}{\text{ه} + \text{ك} - \text{ف}} \ \ldots\ldots \ (٢)$$

وهذه هى مقادير يسهل حسابها أو إجراها بالرسم لان مقادير الخطوط ه ، ك ، ف علمت من التجربة التى عملت مقدما فضلا عن كونه معلوما ان ك = ٢ ه لكننا أردنا ان نكتب قانونى نمرة (٢) هنا على صورة يمكن تطبيقها على اى نسبة فرض وقوعها بين البعد وحـ ، وحً ولو أن النسبة ١ الى ٢ هى النسبة التى ظهر انها هى الاكثر لياقة لذلك من غيرها

مسـ ١٦٦ في المنحني المرجوني الكثير المراكز — يمكن تطبيق الطريقة السابقة على رسم أي منحني مرجوني مركب من جملة أقواس دوائر عددها اختياري كالعدد ٢ ﻫ + ١ مثلا بفرض أن ﻫ عدد حيثما اتفق

ويلزم لذلك أن يؤخذ كما في شكل (١٠٦) البعد وحﻫ مساويا على الدوام الى ٣ . وح وأن يقسم البعد وحﻫ الى أقسام متساوية عددها ﻫ والبعد حو الى أقسام عددها ﻫ لكن بشرط أن تكون نسبة تلك الأقسام الى بعضها كنسبة الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ..... ﻫ ، الى بعضها

فمثلا اذا فرض أن ﻫ = ٥ كان المنحني المرجوني الذي يراد الحصول عليه مركبا من احدى عشر قوس دائرة لأنه اذا وضع عدد (٥) بدلا عن ﻫ في الكمية ٢ﻫ + ١ لكانت تساوي ١١

ولأجل تعيين مراكز وانصاف أقطار هذه الأقواس يؤخذ ابتداء نصف القطر أ ح للقوس الأول بالاختيار ثم يؤخذ البعد وحﻫ = ٣ . وح ويقسم البعد وحﻫ الى خمسة أقسام متساوية كما هو مبين في الشكل

وكذا يقسم البعد وح الى خمسة أقسام أيضا

شكل ١٠٦

لكن

لكن بشرط ان تكون نسبة

حءَ : ءً ءً : ءً : ءً : ءً و : : ١ : ٢ : ٣ : ٤ : ٥

وبعد ذلك اذا وصل من ح الى هَ ومن ءَ الى هً ومن ءً الى هً والخ تكون المضلع ححَحًحًحً الذى رؤسه هى مراكز الستة أقواس المكونة لنصف المنحنى

لكن حيث ان ارتفاع المنحنى المتحصل وهو وب لم يكن فى جميع الاوقات عين ارتفاع المنحنى المطلوب فيعتبر المضلع المتقدم كمنحنى تجزئ مساعد ثم من بعد الرمز بحرفى س , ص للبعدين وح , وحً الحقيقيين والموافقين للمنحنى الاصلى الذى ارتفاعه ب يمكن الحصول أيضا على ارتباطات مشابهة للارتباطات المقررة فى نـد ١٦٥ ويستنبط منها أخيرا المقدارين الآتيين

$$\text{س} = \frac{(\text{ا} - \text{ب}_{١})\,\text{ه}}{٤\,\text{ه} - \text{ف}} \quad , \quad \text{ص} = ٢\,\text{س}$$

وفى هذين الارتباطين ف رمز لمجموع أضلاع المضلع ححَحًحًحً الذى وجد فى اثناء اجراء العملية التحضيرية

وقس على هذا فى رسم ذى السبعة مراكز وذى التسعة وذى الثلاثة عشر وهكذا

نـد ١٦٧ فى المماس والعمودى للمنحنى المرجونى — من حيث ان المنحنى المرجونى لم يكن مركبا سوى من جملة اقواس دوائر فالمماس له او العمودى عليه فى أى نقطة منه ليس هو الا المماس او العمودى لقوس الدائرة الذى توجد عليه هذه النقطة

ولما كان الامر كما ذكر فهذا التاشير كاف

الباب السابع

في المنحنى المسمى بحلزون ارشميد

بند ١٦٨ يطلق اسم منحنى حلزونى عموما على كل منحن متولد من تحرك نقطة تدور الى ما لا نهاية حول نقطة ثابتة تسمى قطبا حالة كونها آخذة فى التباعد عن هذه النقطة الثابتة شيا فشيا

وهذه المنحنيات تتركب من لفات غير متناهية واللفة هى كناية عن جزء المنحنى الذى ترسمه النقطة المتحركة فى مدة دورانها دورة كاملة

ولاجل سهولة تصور كيفية تولد هذه المنحنيات يمكننا ان نتوهم ان النقطة الراسمة للمنحنى الحلزونى تتحرك على مستقيم حالة كون هذا المستقيم يدور حول القطب وأبسط هذه المنحنيات هو المنحنى المعروف بحلزون أرشميد وهو الذى سنقتصر على ذكره هنا لكثرة لزومه واحتياجاته فى الاعمال فنقول

بند ١٦٩ حلزون ارشميد هو المنحنى المستوى المتولد من حركة نقطة على مستقيم تحركا منتظما حالة كون هذا المستقيم يتحرك هو الآخر بانتظام أيضا حول نقطة ثابتة

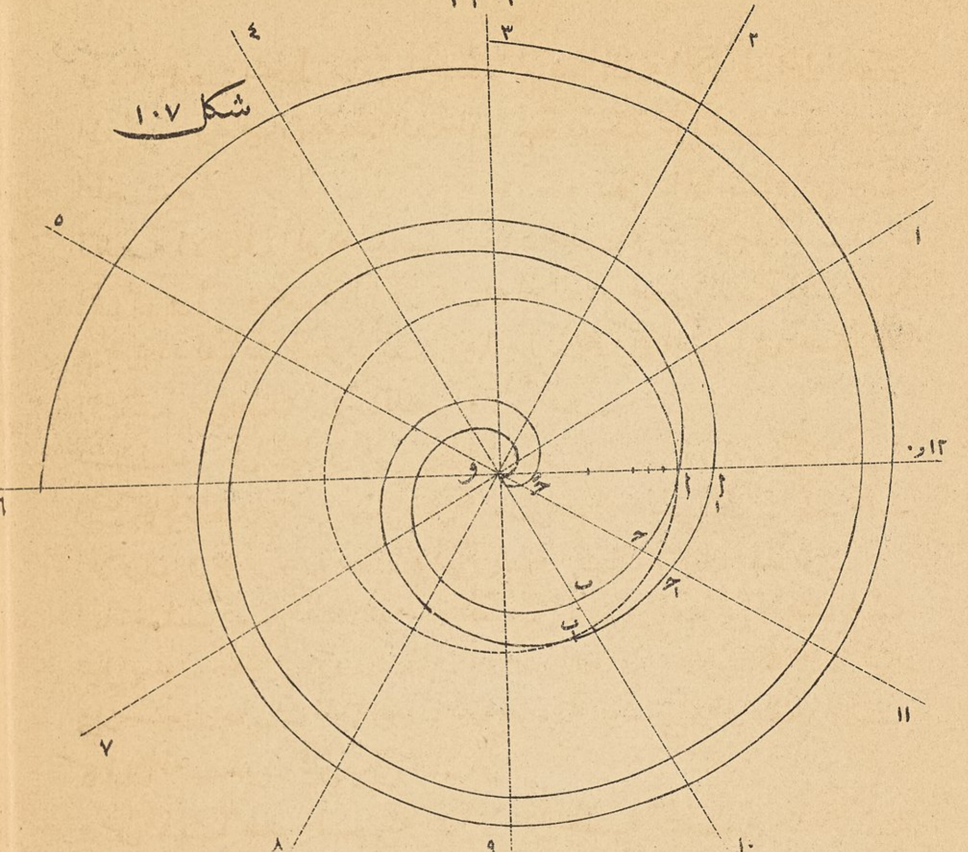
ويفهم من هذا التعريف انه اذا اعتبرت نقطة ثابتة على المستقيم المتحرك غير النقطة الراسمة فانها وان كانت ثابتة الوضع بالنسبة للمستقيم تتحرك معه حول القطب وترسم فى أثناء حركتها محيط دائرة بحيث تكون المسافات التى تقطعها هذه النقطة على محيط الدائرة هذا مناسبة للمسافات التى تقطعها

النقطة الراسمة الأصلية على المستقيم المتحرك
ولاجل السهولة يمكننا ان نأخذ محيط دائرة نصف قطرها الوحده
وحينئذ فتكون النسبة الثابتة التى قلنا انها موجودة بين المسافات
المقطوعة على محيط الدائرة وعلى المستقيم المتحرك هى النسبة المخصصة
لكل حلزون عنماد ونه وبها تتميز الحلزونات المختلفة عن بعضها
ومن الواضح الجلى انه كلما دار نصف القطر القطبى (وهو جزء
المستقيم المتحرك المحصور بين نقطة من الحلزون والقطب)
دورة كاملة زاد طوله بمقدار ثابت بحيث ان الاجزاء من
أنصاف اقطار البورية المنحصرة بين أى لفتين متتاليتين
من الحلزون تكون كلها متساوية ويطلق على كل واحد منها
اسم خطوة الحلزون او وتر اللفة
ومتى علم وتر اللفه لحلزون مجهول أو متى علمت النسبة الثابتة
الكائنة بين المسافات المقطوعة صار الحلزون معينا ومحددا
لاننا اذا رمزنا بحرف ل لوتر اللفه وبحرف ك لنسبة
المسافات كان بناء على تعريف المنحنى

$$\frac{ل}{٢ط} = ك$$

ولا يخفى انه من السهل تعيين احدى الكميتين ل ، ك من هذه
المتساوية متى علمت الأخرى وحرف ط الداخل فى مقام
الطرف الاول رمز للنسبة التقريبية
١٧٠ـ فى رسم حلزون ارشميد ــــ حلزون ارشميد
يمكن رسمه نقطة فنقطة بطريقة سهلة جدا غايتها أن يرسم
حول قطبه (و) شكل (١٠٧) محيط دائرة بنصف قطر حيثما
اتفق ويقسم الى عدد اختيارى من الاقسام المتساوية
ولتكن اثنى عشر قسما متساوية مثلا

شكل ١٠٧



ثم نصل من نقط التقاسيم الى القطب بمستقيمات غير محدودة
نمرها بالمرور عليها فى جهة واحدة بالنمر صفر ، ١ ، ٢
، ٣ ، ٤ ، ...... ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ والخ وبعد
ذلك نأخذ على الوضع الاول لنصف القطر القطبى بعدا مثل
و ا مساويا الى وتر اللفه المعلوم من راس المسئلة
ثم نقسم هذا البعد الى اثنى عشر قسما متساوية ونضع من هذه
الاقسام قسما واحدا على المستقيم المنمر بنمرة ١ وقسمين
على المنمر بنمرة ٢ وثلاثه على المستقيم ٣ وهكذا
الى أن يوضع على المستقيمات ١١ ، ١٢ أبعاد مساوية الى
١١ ، ١٢ قسما من اقسام وتر اللفة و ا المفروض وبهذه
الكيفية تتعين لنا ثلاثة عشر نقطة من المنحنى الحلزونى

فاذا

فاذا جمعت بخط متصل كان هو اللفة الأولى من المنحنى المذكور ولتعيين نقط اللفة الثانية يؤخذ على المستقيمات المنمرة ٠ ، ١ ، ٢ ، ...... الخ بالابتداء من نقط اللفة الاولى التي تعينت أبعاد متساوية كل منها يساوى $\frac{١}{١٢}$ الى وا ويجمع أطراف هذه الابعاد بمنحنى اللفة الثانية ولايجاد لفات أخرى بقدر ما يراد يعمل كما عمل فى تعيين اللفة الثانية من بعد معرفة اللفة الأولى

١٧١ — فى الحلزونين الرفيقين — اذا رسم كما فى الشكل المتقدم منحنٍ حلزونى آخر حول نفس قطب الحلزون الاول وبوتر لفة مساوٍ لوتر لفة المنحنى الاول المذكور انما يختلف عنه فقط بوضع نصف القطر القطبى الابتدائى قيل لهذين الحلزونين رفيقان أو مترافقان ويستعملان كثيرا فى رسم زخارف العمارة التى تعمل للزينة وتسمى آذان جمع أذن كما فى العمود اليونيكى مثلاً

ومن المشاهد بالسهولة ان الاجزاء الخطية المنحصرة ما بين حلزونين مترافقين من انصاف الاقطار القطبية تكون كلها متساوية

وفى الواقع لأننا اذا فرضنا أن المستقيم (و ١٠) هو الوضع الابتدائى لنصف القطر البورى من الحلزون الثانى كان البعد و ب مساويا الى $\frac{١}{١٢}$ من الوتر وا وحيث انه لزم عند رسم الحلزون الثانى ان أخذ على نصف القطر القطبى (و ١١) بعد و حَ مساويا الى $\frac{١}{١٢}$ من و ا

وكان و ح = $\frac{١١}{١٢}$ من و ا

فيكون حينئذ ح حَ = $\frac{١٠}{١٢}$ و ا

لكن كان و ب = $\frac{١}{١٢}$ و ا

فيكون حينئذ

ح حَ = و ب

وبما أن

حَ ج$_1$ = و ب$_1$

لان كلاً منهما يساوى لوترا للفة المشترك فيكون

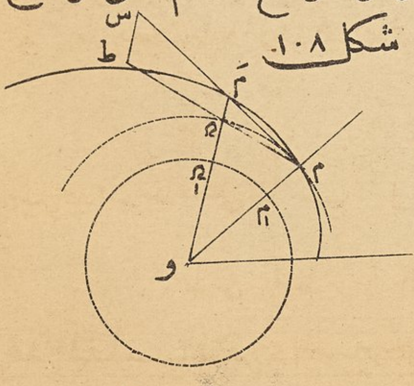
حَ ج$_1$ − ح حَ = و ب$_1$ − و ب

أو

ب ب$_1$ = ح ج$_1$

وبمثل ذلك يبرهن على ان البعد ح ج$_1$ = ا ا$_1$ وهلم جرا فيثبت المطلوب

بند ١٧٢ المماس للحلزون وتحت مماسه — اذا فرض أن نقطتى م ، مَ شكل (١٠٨) متقاربتان جدا من بعضهما على حلزون ارشميد ووصل القاطع م مَ ونصفا القطرين و م ، و مَ فلا شك ان هذا القاطع يصير مماسًا للمنحنى عند ما تتحد نقطتا م ، مَ ببعضهما وتصيران نقطة واحدة ثم تجعل نقطة و القطب مركزا ونرسم قوس الدائرة م ن بنصف القطر و م فيقطع نصف القطر و مَ فى نقطة مثل ن ويكون البعد ن مَ عبارة عن مقدار الزيادة التى زاد بها نصف القطر عندما مر من الوضع و م الى الوضع و مَ



شكل ١٠٨

اذا تقرر هذا ورسم من نقطة مأخوذة بالاختيار على القاطع كنقطة س مستقيم مثل س ط موازٍ الى مَ ن حدث من مثلثى م مَ ن ، مَ س ط المتشابهين أن

طس : م ط :: مَ م : م ع [١]

ومن جهة أخرى اذا رسم محيط دائرة اخر بنصف قطر مساوٍ للوحدة فانه يقطع ضلعى الزاوية م و ع فى نقطتى م١ ، ع١ ويجد بينهما قوس م١ ع١ ويكون

قوس م ع : قوس م١ ع١ :: و م : و م١ :: و م : ١ [٢]

فاذا رمزنا بحرف ه الى المسافة الكلية التى قطعتها نقطة م١ فى اثناء ما سارت النقطة الراسمة للحلزون من القطب الى ان وصلت لنقطة م (وليعلم ان المسافة ه تكون مشتملة على المحيط مرارا اذا لم تكن نقطة م من اللفة الاولى) وبناء على تعريف المنحنى يكون

مَ ع : قوس م١ ع١ :: و م : ه

وبناء على تناسب [٢] يكون

مَ ع : قوس م ع :: ١ : ه

فاذا لاحظنا الآن أنه لداعى كون القوس م ع صغيرا جدا فيكاد ان يتحد مع وتره وحينئذ فالخطأ الذى يوجد عندما يعوض هذا القوس بوتره يقل شيأ فشيأ كلما قربت نقطتا م ، مَ من بعضهما واذن فيحدث هذا التناسب التقريبى

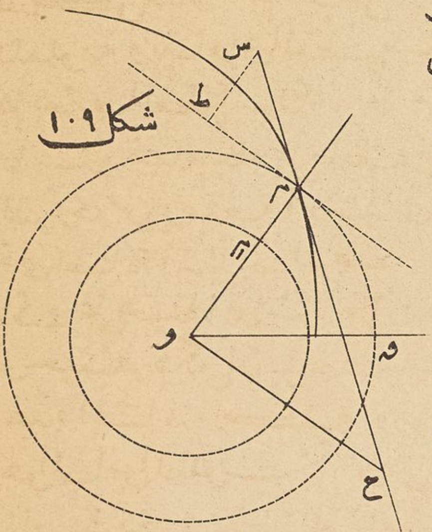
مَ ع : م ع :: مَ ع : قوس م ع :: ١ : ه

ومنه يحدث بناء على تناسب [١]

طس : م ط :: ١ : ه [٣]

وهذا التناسب التقريبى يصير حقيقيا بالضبط عند النهاية

أعنى عندما يتحد نصفا القطرين وم ، وم بعضهما لكن يصير اذ ذاك المستقيم م ط مماساً للدائرة ويكون بالضرورة عموديا على وم ويصير مثلث م ط س قائم الزاوية فى ط ويكون مستقيم م س هو المماس للمنحنى المطلوب



شكل ١٠٩

اذا تقرر هذا يمد المماس الى ان يتلاقى فى نقطة مثل ح شكل (١٠٩) مع المستقيم وح المقام من القطب عموديا على نصف القطر و م فالبعد وح هو الذى يقال له تحت المماس ويحدث اذن من مثلثى ط س م ، وم ح المتشابهين ان نسبة

وم : وح :: ط س : م ط :: ١ : هـ

ومنه يكون

وح = وم × هـ

وحيث ان اثناء ما ترسم نقطة م المسافة هـ فنقطة م اذا اعتبرت ثابتة على نصف القطر البورى المتحرك تقطع على محيط دائرة متحد المركز مع المحيط و م مسافة مقدار طولها هو بالضبط عبارة عن وم × هـ فحينئذ يمكن تقرير النظرية الآتية

نظرية — تحت المماس فى حلزون ارشميد يساوى لطول القوس الذى كانت تقطعه النقطة الراسمة للمنحنى بفرض ثباتها على نصف القطر البورى فى مدة ما يمر هذا النصف

قطر

قطر من وضعه الابتدائى الى الوضع المار بنقطة التماس

١٧٢ بند في رسم المماس والعمودى للحلزون الارشميدى

— النظرية المتقدمة تعطي الينا الطريقة اللازمة لرسم المماس لحلزون ارشميد فى نقطة مفروضة عليه

فلتكن مثلا م شكل (١٠٩١) هى نقطة التماس المعلومة ويقام من القطب مستقيم مثل و ح عمودى على نصف القطر البورى و م ونرسم بنصف القطر و م دائرة فيفهم بناء على ما تقدم انه فى مدة انتقال نصف القطر البورى من وضعه الابتدائى لغاية ما يمر بنقطة التماس أى لغاية انه يأخذ الوضع و م تكون نقطة م قد لفت على هذه الدائرة مرارا معلومة زائدا القوس ى م وحينئذ يكفى ان يؤخذ البعد و ح مساويا لطول هذه المسافة الكلية ويوصل المستقيم ح م فيكون هو المماس المطلوب ومتى علم المماس كان الحصول على العمودى فى نقطة التماس سهلا جدا لانه هو العمود المقام منها على المستقيم المماس

تنبيه — اذا لم يراد تعيين طول قوس الدائرة اللازم أخذه على المستقيم و ح بواسطة الطريقة الحسابية المضبوطة مراعاة للاختصار فى العمل فهناك طريقة عملية يمكن بها تعيين طول انفراد ذلك القوس

وهى انه يقسم القوس الذى يراد فرده الى جملة أقواس جزئية صغيرة جدا بحيث لا يفترق الواحد منها عن وتره فرقا محسوسا وتنقل هذه الاوتار عقب بعضها بعضا على المستقيم و ح وفى هذه الطريقة كلما كانت الاقواس الجزئية المأخوذة صغيرة جدا كلما قرب طول الانفراد المتحصل من الحقيقة

تنبيه آخر — التناسنن [٢] يورى ان

النسبة $\frac{ط س}{م ط}$ تصغر كلما كبرت المسافة هـ
ويؤخذ من ذلك ان الزاوية س م ط شكل (١٠٩)
تصغر أيضا بحيث كلما تقدمت نقطة التماس على الحلزون
الارشميدى بالتباعد عن قطبه قرب المماس له فيها شيأ فشيأ
من ان يكون عموديا على نصف قطرها البورى

ثانيا يؤخذ من النظرية المتعلقة بتحت المماس ان المماس للمنحنى
الحلزوني في نقطة قطبه هو نفس الوضع الابتدائى لنصف
القطر القطبى لان فى هذه النقطة المسافة هـ معدومة
أعنى ان

$$هـ = ٠$$

وبناء على ذلك يكون

$$و ح = ٠$$

ويمكن اثبات ذلك أيضا مباشرة بان يعتبر نصف قطر بورى
قريب جدا من الوضع الابتدائى فهذا النصف قطر يقطع
المنحنى فى نقطة القطب وفى نقطة ثانية قريبة جدا منه
فيعد حينئذ قاطعا من قواطع المنحنى لكن من حيث ان هذه
النقطة الثانية تتحد مع القطب عندما ينطبق نصف القطر
البورى الثانى على النصف قطر الابتدائى فيصير هذا النصف
قطر الابتدائى اذ ذاك مماسا للمنحنى فى قطبه وهو المطلوب

الباب الثامن

فى بعض منحنيات مختلفة كثيرة الاستعمال

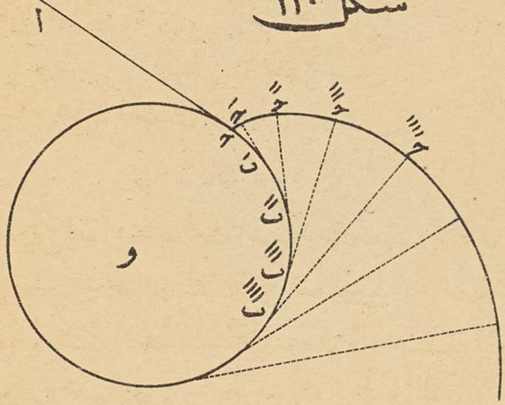
الفصل الاول

فى

في الباسط والمبسوط ونصف قطر الانحنا

بند ١٧٤ باسط اى منحن كمحيط الدائرة ح ت تَ تً شكل (١١٠)
مثلاً هو المنحنى ح حَ حً حٌ ...... المرسوم بنقطة ح
التى تنفصل دائماً ثابتة على المماس ح ا للمنحنى حالة كون نقطة التماس
ح متغيرة على الدوام والاستمرار لكن بشرط ان البعد الكائن
بين النقطة الثابتة
ونقطة التماس يكون
دائماً مساوياً الى
المسافة التى قطعتها
نقطة التماس على المنحنى
فمثلاً اذا فرض ان
ت حَ ، تَ حً ..... الخ
أوضاع من اوضاع
المماس يلزم ان
يكون

شكل ١١٠



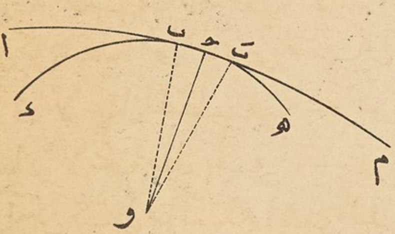
ت حَ = ت ح ، تَ حً = تَ ح ، تً حٌ = تً ح ..... والخ
ويقال للمنحنى ح ت تَ ..... الخ المفروض هنا انه محيط دائرة
الذى يلف حوله المماس مبسوط المنحنى ح حَ حً ...... الخ
الذى اطلق عليه اسم الباسط فى اول البند
أما نقطة ح التى يتقابل فيها المبسوط مع باسطه فانها تسمى بنقطة
المبدأ

بند ١٧٥ فى رسم باسط محيط الدائرة نقطة فنقطة — اذا فرض
كما فى شكل (١١٠) المتقدم ان نقطة ح هى نقطة
المبدأ ثم رسم من جملة نقط مختلفة مثل ت ، تَ ، تً ..... الخ
عدة مماسات لمحيط الدائرة وأخذ بعد ذلك على المماسات

المذكورة بالتناظر بعد ب ح = قوس ب ح ، بً حً = قوس بً حً ،..... والخ كانت النقط ح ، حً ، حًً ،.... الخ المتحصلة بهذه الصورة من نقط الباسط المطلوب ومن ثم يفهم انه يمكن الحصول على ما يلزم من النقط القريبة من بعضها بقدر ما يراد وانه متى جمعت هذه النقط ببعضها فالمنحنى المتحصل بهذه الصورة يكون هو الباسط

ب ١٧٦ د في طريقة رسم الباسط بواسطة نصف قطر الانحنا — قبل الشروع في ذكر هذه الطريقة يلزمنا أولا ان نعرف ما هو نصف قطر الانحنا فنقول

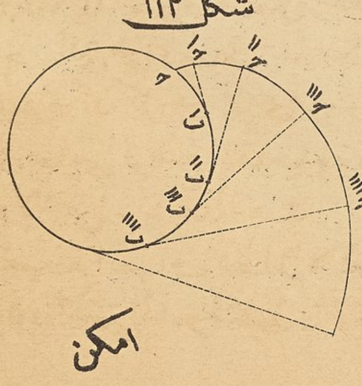
شكل ١١١



نصف قطر انحنا اى منحنى معلوم كالمنحنى ا ح م شكل (١١١) في نقطة مفروضة عليه كنقطة ح مثلا هو نصف قطر قوس الدائرة د ب ح ب هـ المشترك مع المنحنى ا ح م المعلوم في العنصرين الخطيين ب ح ، ح ب الصغيرين جدا المجاورين للنقطة ح المعلومة التي يبحث عن نصف قطر الانحنا فيها

ويفهم من هذا التعريف ان نصف قطر انحنا أى منحنى يختلف من نقطة الى نقطة وان للمنحنى الواحد انصاف اقطار انحنا كثيرة بقدر عدد نقطه

شكل ١١٢



ولنرجع الآن لشرح طريقة رسم باسط الدائرة بواسطة نصف قطر الانحنا فنقول

اذا اعتبرنا ان النقط ح ، ب ، بً ،.... الخ قريبه جدا من بعضها كما في شكل (١١٢)

امكن

أمكن اعتبار الاقواس الصغيرة حبَ ، بَ بً ، ... الخ
كمستقيمات وكان بَ حَ = بَ ح ومن ذلك يمكن اعتبار
القوس ححَ كقوس دائرة مركزها بَ ونصف قطرها
بَ ح وبنفس هذا السبب يمكن ان يفرض ان بً حً = بً حَ
= بً بَ + بَ ح فيترتب على ذلك امكان اعتبار القوس
حَ حً كقوس دائرة مركزه نقطة بً ونصف قطره
بً حَ = بً ح وهلم جرا بحيث يمكن حينئذ اعتبار الباسط
مركبا من تتابع عدة اقواس دوائر مراكزها وأنصاف أقطارها
معينة فيمكن رسمه حينئذ بالسهولة

ومن المشاهد ان طريقة الرسم بهذه الكيفية لا يمكن ان تكون
تامة الضبط بالكلية الا اذا تغير مقدار نصف قطر الانحنا
فى كل نقطة من المنحنى تغييرا مستمرا

وفى الاعمال التطبيقية مع كونه يستحيل الحصول على تغيير نصف
قطر الانحنا بطريقة مستمرة بواسطة آلات الرسم الاعتيادية
ولكن كثيرا ما تستعمل هذه الطريقة فى رسم الباسط

ولاجل زيادة الضبط فى رسم المنحنى بواسطة نصف قطر الانحنا
يؤخذ البعد الاول حبَ نصف الابعاد التالية له وهى
بَ بً ، بً بٌ ، ... الخ ويمد القوس المرسوم
بجعل نقطة بَ مركزا وبعد بَ ح نصف قطر لغاية
نقطة وسط القوس حَ حً التى نرمز لها بحرف حَ
وكذا يمد القوس المرسوم بجعل بً مركزا من ابتدا حَ لغاية
حَ التى هى وسط حً حٌ وهلم جرا وبهذه الواسطة
يرى أن كل جزء قوسى مرسوم بنصف قطر انحنا واحد يمتد بالتساوى
فى جانبى الوضع المقابل لمقدار هذا النصف قطر

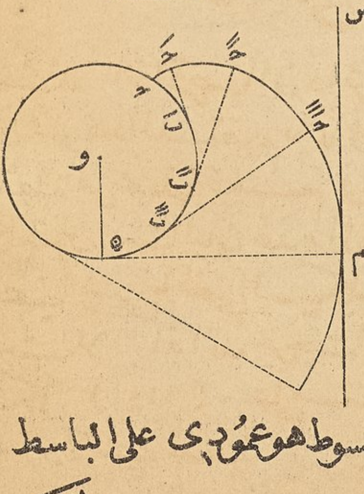
ولا يخفى انه باخذ البعد بَ بً = بً بٌ = ... الخ
تصنع انصاف اقطار الانحنا مع بعضها زوايا متساوية حينما
يكون المنحنى المبسوط محيط دائرة وتساوى الزوايا هذا هو فى

المعادة الوضع الموافق ما لم ينبنى على اشتراطه عدم حصول
التساوى بين ت ث ، ث ث ، ..... الخ كما يتأتى
ذلك فى حالة ما لم يكن المبسوط محيط دائرة

ســد ١٧٧ فى رسم الباسط بالحركة المستمرة — لنفرض ان
فتلة من الخيط ملفوفة على المنحنى حـ ث شكل (١١٢)
المتقدم وانه موضوع فى الطرف حـ من هذه الفتلة قلم
رصاص أو خلافه مما يستعمل الرسم فاذا حلت الفتلة الملفوفة
تدريجيا مع شدها دائما بواسطة قلم رصاص أو اى قلم آخر
موضوعا فى نقطة حـ فلا شك ان هذا القلم يرسم المنحنى
الباسط للمنحنى الذى كانت الفتلة ملفوفة عليه قبل حلها وهو
الذى يسمى اذ ذاك بالمنحنى المبسوط أو بالمبسوط فقط
ومن المشاهد ان أى نقطة أخرى من نقط الفتلة ترسم عند
حلها باسطا ثانيا متساوى البعد من جميع الجهات عن الباسط
الاول بل ويكون مساويا له فى حالة ما يكون المبسوط محيط
دائرة

ســد ١٧٨ رسم العمودى على الباسط والمماس له —
اذا رسم من أى نقطة كنقطة
ء شكل (١١٢) مثلا مستقيم م ء
مماس للمبسوط كان بالضرورة
هذا المماس عموديا على
الباسط فى نقطة تقابله به
وهى نقطة م وحينئذ
اذا أقيم من تلك النقطة
عمود مثل م س على
م ء كان هذا العمود مماسا
للباسط وهو المطلوب

شكل ١١٣



ومن ذلك يرى ان كل مماس للمبسوط هو عمودى على الباسط
والعكس

والعكس للعكس وأن المماس م س للباسط والعمودى
ى و على المبسوط المرسومين من نهايتى نصف قطر ابحنا واحد
يكونان متوازيين

بند ١٧٩ ايجاد المبسوط من بعد معلومية الباسط — اذا
علم منحن مثل ح م كما فى شكل (١١٢) المتقدم وكان
المطلوب ايجاد مبسوط هذا المنحنى يؤخذ على المنحنى ح م المعلوم
عدة نقط متتابعة مثل ح ، ح َ ، ح ً ، ..... الخ ويقام
من تلك النقط العموديات ح ت ، ح َ ت َ ، ح ً ت ً ، ... الخ
وبما ان هذه العموديات تكون بناء على ما تقدم فى بند (١٧٨)
مماسة للباسط المطلوب فنرسم حينئذ داخل المضلع الذى
يتكون من تقاطعات هذه العموديات منحنيا مماسا لاضلاعه
فيكون ذلك المنحنى بالضرورة عبارة عن مبسوط الباسط ح م
المعلوم وهو المطلوب

الفصل الثانى

فى المنحنى السيكلويدى

بند ١٨٠ اذا فرضنا ان دائرة تتدحرج على مستقيم بشرط
أن تمس هذا المستقيم دائما فى نقط محيطها على التوالى فكل
نقطة من محيطها ترسم فى اثناء المدة التى تمضى ما بين كل
تماسين متتاليين لهذه الدائرة بالمستقيم فى النقطة المفروضة
منحنيا يسمى بالمنحنى السيكلويدى

مثلا اذا تدحرجت الدائرة التى مركزها و
شكل (١١٤) على مستقيم مثل ا اَ وكانت مماسة
له اولا فى نقطة ا من محيطها فانه عندما تبتدىء الدائرة

في المدحرج ترتفع نقطة ا شيأً فشيأً لحد مخصوص ثم تهبط تدريجيا الى ان تمس المستقيم ا اَ في نقطة ثانية مثل اَ وفي مدة هذه الدورة الكاملة تكون نقطة ا المتحركة رسمت في مستوى الدائرة المتدحرجة منحنيا كالمنحنى ا ب اَ هو المنحنى المعروف بالسيكلويدي

بند ١٨١ والمستقيم ا اَ المحصور ما بين تماسين متتاليين مثل ا،اَ لنقطة واحدة مثل ا يسمى قاعدة السيكلويد ا ب اَ المرسوم بنقطة ا وهذه القاعدة تساوي لمحيط الدائرة الراسمة بحيث لو رمزنا بحرف ق لقطر هذه الدائرة تكون القاعدة ا اَ = ط ق والعمود ب ء المار بوسط القاعدة هو محور السيكلويد وهو يساوي الى القطر ق وبناء عليه يكون

$$\frac{\text{ا اَ}}{\text{ب ء}} = \frac{\text{ط ق}}{\text{ق}} = \text{ط} = ٣،١٤١٦ = \frac{٢٢}{٧} \text{ تقريبا}$$

ومنه يكون

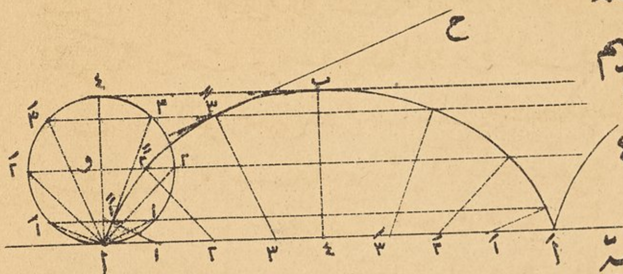
$$\text{ا اَ} = ٣،١٤١٦ \times \text{ق} = \frac{٢٢}{٧}\text{ق} \quad ، \quad \text{ق} = \frac{\text{ا اَ}}{٣،١٤١٦} = \frac{٧}{٢٢}\text{ا اَ}$$

بند ١٨٢ رسم السيكلويد نقطة فنقطة — اذا اريد رسم المنحنى السيكلويدي المتولد من تحرك نقطة ا الكائنة على محيط دائرة قطرها ق كما في شكل (١١٤) يرسم أولاً مستقيم مثل ا اَ مساو لقاعدة السيكلويد المقدرة بحاصل ضرب ٣،١٤١٦ × ق ثم ترسم الدائرة و بالقطر ق بحيث تكون مماسة للمستقيم ا اَ في نقطة ا ثم تقسم كلا من القاعدة ا اَ ومحيط الدائرة الراسمة الى اقسام متساوية عددها واحد كثمانية أقسام مثلاً وتميز بنمر كالمبينة في الشكل ثم يرسم من نقط تقاسيم

الدائرة

الدائرة مستقيمات
موازية للقاعدة ا اَ
وبعد ذلك يرسم
من نقط تقاسيم
القاعدة وهى ا
ا ، ٢ ، ٣ ، ٤
، .... الخ
مستقيمات موازية
للمستقيمات ا اَ ، ا ٢
ا ٣ ، .... الخ

شكل ١١٤



الواصلة من نقطة ا الى نقط تقاسيم الدائرة و فهذه
الموازيات تتقاطع مع موازيات القاعدة ا اَ فى نقط مثل
اَ ، ٢َ ، ٣َ ، .... الخ تكون هى نقط من السيكلويد
لاننا اذا اعتبرنا اى واحدة من هذه النقط كنقطة ٢َ مثلا
نجد انه حينما تصير نقطة التماس فى نقطة ٢ من القاعدة
يصير القطر ٢ ٤َ رأسيا وتصير النقطة الراسمة ٢َ
شاغلة بالنسبة لهذا القطر وضعا كوضع نقطة ٢ بالنسبة
للقطر ا ٤ كما فى الشكل وحيث ان الوضع الذى
يكون بهذه الصورة ليس هو الا نقطة ٢َ فتكون حينئذ
هذه النقطة من نقط السيكلويد
وبمثل ذلك يبرهن على ان النقط اَ ، ٢َ ، ٣َ ، .... الخ
من السيكلويد وحيث انه يمكن تقسيم القاعدة ا اَ
الى اقسام متساوية عددها حيثما اتفق فيمكن بناء على
ذلك تعيين النقط الكافية بقدر ما يراد من السيكلويد
فاذا جمعت هذه النقط بخط متصل تحصل المنحنى
السيكلويدى
فاذا فرضنا ان المعلوم القاعدة ا اَ للسيكلويد بدل

ان كان المعلوم قطر الدائرة الراسمة وهو د أمكن دائما تعيين القطر المذكور هكذا

$$د = \frac{أ أَ}{٣٫١٤١٦} = \frac{٧}{٢٢} \; أ أَ \text{ تقريبا}$$

وبعد تعيين القطر د نجري العمل كما في الحالة المتقدمة وفي اثناء حركة الدائرة وا ترسم نقطة ا السيكلويد ا ب أَ والمركز و يرسم المستقيم و ٫ ٧ الموازي للقاعدة ا أَ وكل نقطة من التي بين و ٫ ا ترسم سيكلويدا قصيرا اما كل نقطة موضوعة على استقامة و ا فانها ترسم سيكلويدا مستطيلا وليس في رسم هذه السيكلويدات قصيرة كانت أو طويلة ادنى صعوبة

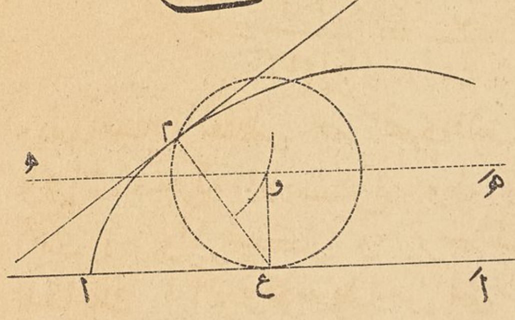
سند ١٨٣ رسم السيكلويد بالاستمرار — اذا عملت الدائرة و على هيئة قرص مستدير وثبت على محيطها سن مدبب أو قمة القلم الرصاص في نقطة ا كما في شكل (١١٤) ثم دحرج هذا القرص بطول مسطرة مطبق حرفها على ا أَ لكن بدون حصول أدنى انزلاق من الدائرة على حرف المسطرة فان القلم الرصاص أو السن المثبت في نقطة ا يرسم السيكلويد بحركة مستمرة

سند ١٨٤ رسم العمودي على السيكلويد ثم المماس له — متى شغلت النقطة الراسمة للسيكلويد وهي ا وضعا حيثما اتفق كالوضع ع مثلا شكل (١١٤) المتقدم صارت نقطة التماس هي ء وحينئذ فيمكن اعتبار العنصر الخطي ع من السيكلويد كانه منطبق ومتحد مع عنصر قوس الدائرة التي مركزها نقطة ء ونصف قطرها ء ع وبناء على ذلك يكون المستقيم ء ع العمودي على قوس تلك الدائرة عموديا أيضا على منحنى السيكلويد

ويكون

ويكون حينئذ العمود م″ ح المقام على نهاية م م″
مماسًا للسيكلويد

شكل ١١٥



وينتج من ذلك طريقة
لرسم العمودى والمماس
للمنحنى السيكلويدى
فى نقطة مثل نقطة م
شكل (١١٥) مفروضة
عليه او على قوس منه
ولذلك يكفى ان نعين نقطة
تماس الدائرة الراسمة بالقاعدة حينما تمر تلك الدائرة بنقطة م
وحيث انه اذا رسم المستقيم هـ هـَ موازيا للقاعدة ا اَ للمنحنى
السيكلويدى المعلوم ومرتفعا عنها بقدر نصف القطر
ق للدائرة الراسمة كانت جميع الاوضاع التى يشغلها مركز هذه
الدائرة فى اثناء الحركة موجودة كلها على هذا المستقيم الموازى
وكذا بما انه عندما تصير النقطة الراسمة ا فى الوضع م
يكون مركز الدائرة متباعدا عن نقطة م بقدر $\frac{1}{2}$ ق
فحينئذ اذا رسم قوس دائرة بجعل نقطة م مركزا
وبعد مساو الى $\frac{1}{2}$ ق نصف قطر فانه يقطع الموازى
هـ هـَ فى نقطة مثل و تكون هى المركز المطلوب
فلو انزلنا منها العمود و ع على ا اَ لكانت نقطة
ع هى نقطة التماس وعلى ذلك فسواء رسمت الدائرة
الراسمة او لم ترسم يكون المستقيم م ع هو العمودى
على السيكلويد فى نقطة م والعمودى المقام على
م ع وهو م ح هو المماس له فيها

الفصل الثالث

في المنحنى الابيسيكلويدى

بند ١٨٥ اذا فرضنا ان الدائرة و شكل (١١٦) الراسمة تتدحرج على محيط دائرة كالدائرة ح بدل ان كانت تتدحرج على مستقيم كما فى بند ١٨٠ فان كل نقطة من محيطها كنقطة ا مثلا ترسم فى المدة التى تمضى ما بين كل تماسين متتاليين مثل ا ، اَ منحنيا مثل ا ب اَ يسمى المنحنى الابيسيكلويدى او الابيسيكلويد فقط وحينما تدور الدائرة و داخل الدائرة ح فان كل نقطة من محيطها ترسم ايضا أبيسيكلويدا لكنه يكون داخليا ويمكن ان يطبق عليه جميع ما سيذكر بخصوص الابيسيكلويد الخارجى

بند ١٨٦ والقوس ا اَ من الدائرة ح المنحصر بين التماسين ا ، اَ المتتاليين لنقطة ا الابتدائيه هو ما يسمى بقاعدة الابيسيكلويد وهذه القاعدة تساوى محيط الدائرة الراسمه و الذى يقدر بالكميه ط ه أعنى بحاصل ضرب النسبة التقريبيه ط فى قطرها ه

والمستقيم ح ب الواصل من المركز ح الى وسط هذه القاعدة هو محور الابيسيكلويد ويكون البعد ب ٤ = ه

وعلى ذلك فكما تقدم فى السيكلويد المندرج فى بند ١٨١ نجد هنا ان

$$\frac{\text{اَا}}{\text{ب ٤}} = \frac{\text{ط ه}}{\text{ه}} = \text{ط} = ٣{,}١٤١٦ = \frac{٢٢}{٧}\ \text{تقريبا}$$

ومنه

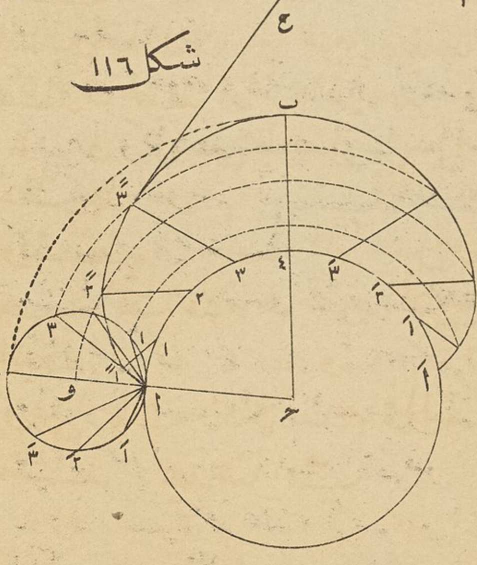
ومنه يحدث

اأ = ١٤١٦ر٣ × ق = ٢٢/٧ ق ر ق = اأ/١٤١٦ر٣ = ٧/٢٢ اأ

ونقطة ب التي يتقابل فيها المحور مع المنحنى هي ما تسمى برأس ذلك المنحنى

بند ١٨٧ رسم الايپيسيكلويد نقطة فنقطة

طريقة رسم هذا المنحنى نقطة فنقطة تشابه بالكلية لطريقة رسم السيكلويد المذكوره في بند ١٨٢ وهي أن تؤخذ أولا القاعده اأ = ١٤١٦ر٣ × ق ويرسم محيط الدائرة و بالقطر ق المعلوم بحيث يكون مماساً للدائرة ح في نقطة ا ثم يقسم كل من القاعدة اأ ومحيط الدائرة و الى عدد واحد من الاقسام المتساوية كثمانية اقسام مثلا وتنمر بالنمر الموضحة في شكل (١١٦)



شكل ١١٦

ثم تجعل نقطة ح مركزا وترسم جملة دوائر متحدة المركز مع الدائرة ح بانصاف أقطار تساوى للابعاد الواصلة من نقطة ح الى نقط تقاسيم محيط الدائرة و وبعد ذلك تجعل نقط تقاسيم القاعدة اأ وهي ١ ر ٢ ر ٣ ر ...... الخ مراكزا وترسم اقواس بانصاف أقطار مساوية

على التناظر لابعاد نقطة ا عن نقط اَ ، ٢ ، ٢َ ، ...... الخ التى هى تقاسيم الدائرة الراسمة و فتقطع الدوائر الموازية الى القاعدة ا اَ فى نقط تكون هى من نقط المنحنى الايپيسيكلويدى ويمكن بواسطة براهين مشابهة للبراهين المتقدمة فى سند ١٨٢ ان نثبت على أن أى نقطة من تلك النقط كنقطة ٢َ مثلا هى من الايپيسيكلويد وانه يمكن تعيين النقط الكافية لرسم ذلك المنحنى ثم تجميعها بخط فيكون هو المنحنى المطلوب واذا فرض ان المعلوم هو القاعدة ا اَ لا القطر ده أمكن تعيين هذا القطر هكذا

$$ده = \frac{ا اَ}{٣،١٤١٦} = \frac{٧}{٢٢} \quad ا ا$$

وبعد ذلك يجرى العمل كما فى الحالة السابقة حيث القطر ده معلوما

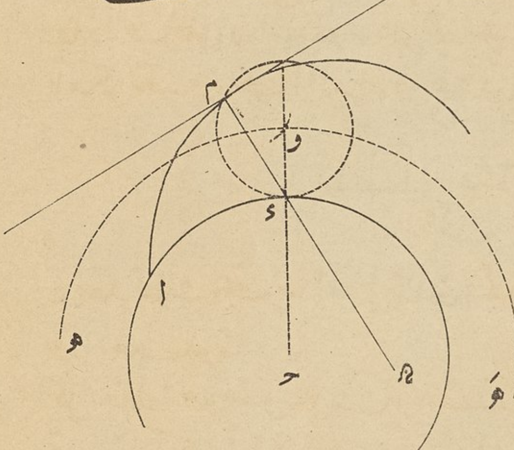
كل نقطة موضوعة بين نقطتى و ، ا ترسم ايپيسيكلويدا قصيرا وكل نقطة موضوعة على استقامة البعد وا المذكور ترسم ايپيسيكلويدا مستطيلا وذلك كما تقدم فى سند ١٨٢

سند ١٨٨ رسم الايپيسكلويد بالاستمرار — اذا فرض أن ح ، و شكل (١١٦) قرصان مستديران وان ا سن القلم الرصاص المثبت فى محيط الدائرة و فمن الواضح انه اذا ادير القرص و على محيط القرص ح بدون انزلاق عليه لرسم سن القلم الرصاص المنحنى الايپيسيكلويدى ا ب اَ بحركة مستمرة وهو المطلوب

سند ١٨٩ — رسم العمودى على الايپيسيكلويد

والمماس له ـــ يمكن بمقتضى براهين كالبراهين التى
ذكرت فى بند ١٨٤ الاثبات على ان المستقيم ء ءَ شكل
(١١٦) الواصل بين نقطة اختيارية مثل ءً من
الايپيسيكلويد الى نقطة التماس ء للدائرة الراسمة
المقابلة لنقطة ءً هو العمود على الايپيسيكلويد
فى نقطة ءً المذكورة

شكل ١١٧



وان العمود ءً ح
المقام على نهاية ء ءً
هو المماس للايپيسيكلويد
ومن ذلك تنتج أيضا
طريقة لرسم العمودى
والمماس للايپيسيكلويد
فى نقطة مثل م
شكل (١١٧)
ويكفى فى ذلك ان
تعيين نقطة التماس
المقابلة لنقطة م

وحيث اننا لو رسمنا قوس دائرة مثل هـ هَ موازيا الى
اَ ومتباعدا عنه ببعد يساوى لنصف القطر ه للدائرة
و الراسمة لكان القوس هـ هَ مشتملا على
جميع الاوضاع التى يأخذ مركز هذه الدائرة اثناء حركتها
وكذا من حيث انه عند وجود النقطة الراسمة ا
فى نقطة م يكون مركز الدائرة الراسمة متباعدا
عن نقطة م ببعد يساوى $\frac{1}{2}$ ه وحينئذ
لو رسمنا قوس دائرة بجعل نقطة م مركزا وبعد
$\frac{1}{2}$ ه نصف قطر لقطع هـ هَ فى نقطة و
التى هى المركز المطلوب فاذا وصل بين المركزين

و ر ح بمستقيم تحصلت نقطة التماس وهى ء وحينئذ فسواء رسمت الدائرة و اولم ترسم يكون المستقيم م ء ى هو العمودى المطلوب فاذا اقمنا المستقيم م ح عموديا عليه كان هو المماس للمنحنى الايپيسيكلويدى فى نقطة م وهو المطلوب

وكان تمام طبع هذا الكتاب بعون
الملك الوهاب فى غرة صفر سنة ١٢٥٠
بعد الهجرة النبوية على صاحبها
أفضل الصلاة
وازكى
التحية
م