

PRINCETON UNIVERSITY LIBRARY

PAIR



32101 009070275

PRINCETON UNIVERSITY LIBRARY

*This book is due on the latest date
stamped below. Please return or renew
by this date.*

--	--

وجيه القديسي

استاذ الرياضيات التطبيقية في جامعة دمشق

مُوجِبَز

الميكانيكا

لطب

كليتي العلوم والهندسة

الجزء الثاني

حركة وسكون الجسم الصلب

الطبعة الأولى



W. al-Qudsi

وجيه القيسي

أستاذ الرياضيات التطبيقية في جامعة دمشق

مُوجَز

الميكانيكا

للمطب

كليتي العلوم والهندسة

الجزء الثاني

حركة وسكون الجسم الصلب

الطبعة الأولى

١٣٨٢ هـ - ١٩٦٢ م

مطبعة جامعة دمشق

2272

.886

.366

juz 2



الباب الأول

مجموعات الأضلاع

الفصل الأول

مركز الأبعاد المتناسبة لمجموعة نقاط

مركز مجموعة نقاط :

١ - تعريف : لتكن M_1 و M_2 و ... و M_n نقطاً في الفراغ . لنسند الى كل من هذه النقط عدداً جبرياً معيناً ، ولنرمز بـ λ_i للعدد المسند الى النقطة M_i . فاذا فرضنا ان :

$$(1) \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0 \\ \sum \lambda_i \neq 0 \end{cases} \quad \text{أو يرمز مختصر}$$

واعتبرنا O نقطة ما في الفراغ ، فالنقطة C المعينة بالمساواة :

$$(2) \quad \begin{cases} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) OC = \lambda_1 OM_1 + \lambda_2 OM_2 + \dots + \lambda_n OM_n \\ (\sum \lambda_i) OC = \sum \lambda_i OM_i \end{cases} \quad \text{أو}$$

نسميها بمركز الأبعاد المتناسبة ^(١) لمجموعة النقط M_i ، أو مركز ^(٢) مجموعة النقط M_i ، ذات الامثال λ_i .

هذا وسنبين ، تحقيقاً لصحة هذا التعريف ، أن المركز C مستقل عن النقطة O ، بمعنى أنه لا يتقيد بموضع O في الفراغ ، ولا يتغير بتغيرها .

فلو فرضنا نقطة ثانية O' ، لكان :

$$OC = OO' + O'C$$

$$OM_i = OO' + O'M_i$$

وبعد التعويض في المساواة (2) نجد :

$$(\sum \lambda_i) (OO' + O'C) = \sum \lambda_i (OO' + O'M_i)$$

وتكتب هذه المساواة بالشكل التالي :

$$(\sum \lambda_i) OO' + (\sum \lambda_i) O'C = (\sum \lambda_i) OO' + \sum \lambda_i O'M_i$$

وبعد الاختصار نجد :

$$(\sum \lambda_i) O'C = \sum \lambda_i O'M_i$$

وهو المطلوب .

ملاحظة ١ : إذا اعتبرنا O مبدأً للاحداثيات ، ورمزنا بـ (x, y, z) لاحداثيات C ، وبـ (x_i, y_i, z_i) لاحداثيات M_i ، فمن العلاقة (2) التي تكتب :

$$(3) \quad OC = \frac{\sum \lambda_i OM_i}{\sum \lambda_i}$$

يمكن تعيين احداثيات C بدلالة احداثيات نقط المجموعة ، فنجد :

$$(4) \quad x = \frac{\sum \lambda_i x_i}{\sum \lambda_i} \quad y = \frac{\sum \lambda_i y_i}{\sum \lambda_i} \quad z = \frac{\sum \lambda_i z_i}{\sum \lambda_i}$$

ملاحظة ٢ : لو انطبقت O على المركز C لغدت العلاقة (2) من الشكل :

$$(5) \quad \sum \lambda_i CM_i = 0$$

٢ — خاصية أساسية : لا يتغير مركز مجموعة نقط عند تعويض

فئة منها مركزها ، على ان نسند الى هذا المركز عدداً يساوي مجموع الأمثال المسندة الى نقط هذه الفئة .

ليكن M_1 و M_2 و M_3 ثلاث نقط من مجموعة مؤلفة من نقط عددها n .
فمركز النقط الثلاث ، وليكن C' ، يتعين بالعلاقة :

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) OC' = \lambda_1 OM_1 + \lambda_2 OM_2 + \lambda_3 OM_3$$

هذا ونعلم أن المركز C لمجموعة النقط يتعين بالعلاقة :

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) OC = \lambda_1 OM_1 + \dots + \lambda_n OM_n$$

فمن العلاقتين السابقتين نجد :

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) OC = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) OC' + \lambda_4 OM_4 + \dots + \lambda_n OM_n$$

وتدل هذه العلاقة على أن مركز مجموعة النقط C هو أيضاً مركز النقطة

C' (وقد أسند إليها العدد $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$ والنقط M_4 و $\dots$ و M_n ، وهو المطلوب .

٣ — مائة خاصة لمجموعة النقط : لقد فرضنا ، حين عرفنا مركز مجموعة نقط ، أن يكون :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n \neq 0$$

أما اذا انعدم هذا المجموع $\sum \lambda_i = 0$ ، لانعدم وجود المركز ، كما يتضح ذلك من العلاقة (2) .

نرى في هذه الحالة ، أن شعاع المجموع $\sum \lambda_i OM_i$ ، ولنرمز له بـ V :

$$V = \sum \lambda_i OM_i$$

هو مستقل عن النقطة O : فهو يساوي ابداً شعاعاً ثابتاً مهما تغير موضع O .

بالحقيقة ، لو فرضنا نقطة ثانية O' ، لكان :

$$\sum \lambda_i OM_i = \sum \lambda_i (OO' + O'M_i)$$

$$= (\sum \lambda_i) OO' + \sum \lambda_i O'M_i$$

واذا لاحظنا ان $\sum \lambda_i = 0$

$$\sum \lambda_i \mathbf{OM}_i = \sum \lambda_i \mathbf{O'M}_i$$

لوجدنا أن

وهو المطلوب .

٤ — نتيجة : ينتج مما تقدم :

(١) إذا $\sum \lambda_i \neq 0$ ، فشعاع المجموع $\mathbf{v} = \sum \lambda_i \mathbf{OM}_i$ يمر أبداً من نقطة ثابتة مستقلة عن O ، هي مركز النقط C ، وذلك لأن هذا الشعاع يساوي أيضاً OC ($\sum \lambda_i$) ، اعتماداً على العلاقة (2) .

(٢) إذا $\sum \lambda_i = 0$ ، فالشعاع $\mathbf{v}$ يغدو مساوياً لشعاع ثابت مستقل عن O . أما المركز C فينعدم وجوده . أو نقول ان C يبتعد الى اللانهاية باستقامة الشعاع $\mathbf{v}$ (كما يتضح ذلك من العلاقة 2) .

ملاحظة ١ : نرى أنه إذا انعدم الشعاع $\mathbf{v}$ من أجل وضع معين للنقطة O :

(١) فإذا $\sum \lambda_i \neq 0$ ، فالنقطة C تغدو هي نفسها مركز مجموعة النقط (اعتماداً على العلاقة 5) .

(٢) وإذا $\sum \lambda_i = 0$ ، فالمركز C يصبح غير معين في الفراغ (كما يتضح ذلك من العلاقة 2) . ففي هذه الحالة ، يمكن اعتبار أية نقطة في الفراغ مركزاً لمجموعة النقط .

ملاحظة ٢ : نلاحظ أن تعيين المركز C لمجموعة نقط مفروضة ، أو

تعيين الشعاع OC ، يؤول لحل ومناقشة معادلة من الدرجة الأولى وذات مجهول واحد ، وهي العلاقة (2) .

٥ — تطبيقات مركز نقط : سنذكر بعض التطبيقات الشهيرة لمركز نقط :

في الميكانيك : لو فرضنا ان الأمثال λ_i المسندة الى النقط M_i هي كتل هذه النقط ، أو أثقالها ، لأضحى المركز C هو مركز كتل هذه النقط ، أو مركز أثقالها (كما سنرى ذلك فيما بعد) . وفي هذه الحالة تكون الأمثال λ_i

أعداداً حسابية ويغدو المجموع $\sum \lambda_i \neq 0$ (إذ يصبح هذا المجموع موجباً) ،
وبالتالي يكون المركز C موجوداً ابداً وعلى بُعد محدود من نقط المجموعة .
في الهندسة : يمكن تعيين مستقيم ، او مستو ، او أية نقطة في الفراغ
بطريقة وسيطة ، وذلك اعتماداً على مركز نقطتين او ثلاث نقط او اربع ، كما
سنرى ذلك في مراكز المجموعات الخاصة التالية :

٦ — مراكز بعض المجموعات الخاصة : سنذكر بعض المجموعات الخاصة

الشهيرة ، وهي :

(١) مجموعة نقط ذات أمثال متساوية : لنفرض ان الامثال λ_i المسندة
الى النقط λ_i متساوية :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n$$

نسمي المركز C ، في هذه الحالة ، بمركز الأبعاد الوسطى للنقط المفروضة .
ويتعين هذا المركز بالعلاقة (3) التي تكتب :

$$OC = \frac{OM_1 + OM_2 + \dots + OM_n}{n}$$

اما احداثيات هذا المركز فهي :

$$x = \frac{\sum x_i}{n} \quad y = \frac{\sum y_i}{n} \quad z = \frac{\sum z_i}{n}$$

هذا ويلاحظ انه اذا تساوت كتل مجموعة نقط مادية لانطبق مركز
كتل او اثنال هذه النقط على مركز الابعاد الوسطى لها .

(٢) المجموعة مؤلفة من نقطتين : ان مركز نقطتين M_1 و M_2 يقع على
المستقيم المار من هاتين النقطتين . ويتضح ذلك من العلاقة (5) التي تكتب :

$$\lambda_1 CM_1 + \lambda_2 CM_2 = 0$$

ونلاحظ ان المركز C يقسم الشعاع $M_1 M_2$ بنسبة $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$:

$$\frac{CM_1}{CM_2} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

وبالمقابل ، يمكن اعتبار أية نقطة من المستقيم $M_1 M_2$ مركزاً للنقطتين M_1 و M_2 على أن نسند الى هاتين النقطتين قيمتين مناسبتين للعددين λ_1 و λ_2 . هذا ولو رمزنا للنسبة $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ بـ λ ، فنلاحظ انه عندما تأخذ λ قيماً متغيرة ينتقل C على المستقيم $M_1 M_2$.

ينتج من ذلك ان العلاقة الشعاعية :

$$OC = \frac{\lambda_1 OM_1 + \lambda_2 OM_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$OC = \frac{OM_1 + \lambda OM_2}{1 + \lambda} \quad \text{او}$$

هي المعادلة الشعاعية الوسيطة للمستقيم المار من النقطتين M_1 و M_2 : فهي تعين موضع أية نقطة C من هذا المستقيم حسب القيمة المعطاة للوسيط λ (او حسب قيمتي الوسيطين المتجانسين λ_1 و λ_2) . كما ينتج ايضاً ان العلاقات :

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda} \quad \text{او}$$

هي المعادلات الوسيطة للمستقيم $M_1 M_2$. وهذا ما وجدناه في الهندسة التحليلية ^(١) .

والخلاصة ، ان أية نقطة C من المستقيم المار من النقطتين M_1 و M_2 يمكن اعتبارها مركزاً لهاتين النقطتين وقد أسند اليهما عدداً مناسبان λ_1 و λ_2 . لذا فانا نسمي هذين العددين بالاحداثيين المركزيين للنقطة C . ونلاحظ ان كل نقطة C من المستقيم $M_1 M_2$ يقابلها قيمة واحدة للنسبة

$$\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

(٣) المجموعة مؤلفة من ثلاث نقط : ان مركز ثلاث نقط M_1 و M_2

(١) في الجزء الاول من كتاب الهندسة التحليلية (ص ٨٦) .

و M_3 (ليست على استقامة واحدة) هو نقطة كائنة في مستوي هذه النقط .
ويتضح ذلك بالرجوع الى العلاقة (5) التي تكتب :

$$\lambda_1 \mathbf{CM}_1 + \lambda_2 \mathbf{CM}_2 + \lambda_3 \mathbf{CM}_3 = 0$$

وبالمقابل ، يمكن اعتبار أية نقطة من مستوي النقط M_1 و M_2 و M_3 مركزاً للنقط على ان نسند الى هذه النقط امثلاً مناسبة .

بالحقيقة ، اذا فرضنا C نقطة ما من مستوي النقط المفروضة ، فالمستقيم الواصل بين C واحد رؤوس المثلث $M_1 M_2 M_3$ ، وليكن M_3 مثلاً ، يلاقي المستقيم $M_1 M_2$ في نقطة C' . فيمكننا اذن أن نجد (اعتماداً على الحالة السابقة) عددين λ_1 و λ_2 لو أسندا الى النقطتين M_1 و M_2 لكان C' مركزاً لهما ، اي لكان :

$$\lambda_1 \mathbf{C'M}_1 + \lambda_2 \mathbf{C'M}_2 = 0$$

وان نجد عدداً λ_3 بحيث يكون C مركزاً للنقطتين : M_3 (وقد اسند اليها العدد λ_3) ، و C' (وقد أسند اليها العدد $(\lambda_1 + \lambda_2)$) ، اي ان يكون :

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{CC'} + \lambda_3 \mathbf{CM}_3 = 0$$

وبذلك أمكن إيجاد ثلاثة اعداد λ_1 و λ_2 و λ_3 لو اسندت الى النقط M_1 و M_2 و M_3 لغدت النقطة C مركزاً لهذه النقط ، وهو المطلوب .

هذا وينتج مما سبق ان العلاقة الشعاعية :

$$\mathbf{OC} = \frac{\lambda_1 \mathbf{OM}_1 + \lambda_2 \mathbf{OM}_2 + \lambda_3 \mathbf{OM}_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}$$

$$\mathbf{OC} = \frac{\mathbf{OM}_1 + \lambda \mathbf{OM}_2 + \lambda' \mathbf{OM}_3}{1 + \lambda + \lambda'} \quad \text{او العلاقة}$$

الناتجة من العلاقة السابقة بفرض $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ و $\lambda' = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ ، هي المعادلة الشعاعية الوسيطية للمستوي المار من النقط M_1 و M_2 و M_3 ، لانها تعين موضع أية نقطة

C من هذا المستوي حسب القيم المعطاة لموسطاء المتجانسة λ_1 و λ_2 و λ_3 ، او حسب قيمتي الوسيطين λ و λ' .
كما ينتج ايضاً ان العلاقات :

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \\ y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \\ z = \frac{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \end{cases}$$

او العلاقات :

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + \lambda x_2 + \lambda' x_3}{1 + \lambda + \lambda'} \\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2 + \lambda' y_3}{1 + \lambda + \lambda'} \\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2 + \lambda' z_3}{1 + \lambda + \lambda'} \end{cases}$$

هي المعادلات الوسيطة للمستوي $M_1 M_2 M_3$. وهذا ما وجدناه في الهندسة التحليلية ^(١) .

والخلاصة ، ان اية نقطة C من مستوي النقط M_1 و M_2 و M_3 يمكن اعتبارها مركزاً لهذه النقط وقد اسند اليها امثال مناسبة λ_1 و λ_2 و λ_3 . نسمي هذه الامثال بالاحداثيات المركزية للنقطة C .
ونلاحظ ان كل نقطة C من المستوي المفروض يقابلها قيمة وحيدة لكل من النسبتين $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ و $\lambda' = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$.

مثال ١ : يمكن ان نعتبر مجموعة الاعداد (1 , 1 , 1) هي احداثيات مركزية لنقطة تلاقي اقطار مثلث ما ABC .

(١) في الجزء الاول من كتاب الهندسة التحليلية (ص ٨٠) .

بالحقيقة ان مركز النقط $A(1)$ و $B(1)$ و $C(1)$ ، وليكن G ،
يحقق العلاقة :

$$GA + GB + GC = 0$$

أو يحقق العلاقة :

$$GA + 2 GA' = 0$$

بفرض ان A' هو منتصف BC (وهو مركز النقطتين B و C) . فالمرکز G ينطبق اذن على نقطة تلاقي أقطار المثلث .

مثال ٢ : لتكن G نقطة ما من مستوي مثلث مفروض ABC ، و A' و B' و C' نقط تلاقي المستقيمت GA و GB و GC مع أضلاع المثلث المقابلة لرؤوسه A و B و C . فاذا فرضنا ان G هو مركز النقط A و B و C ، وقد اسند الى هذه النقط الامثال α و β و γ على الترتيب ، لكانت النقطة B' مركزاً للنقطتين $A(x)$ و $C(\gamma)$ ، والنقطة C' مركزاً للنقطتين $A(x)$ و $B(\beta)$ ، ولكان لدينا بالتالي العلاقتان :

$$\alpha B'A + \gamma B'C = 0$$

$$\alpha C'A + \beta C'B = 0$$

أو العلاقتان :

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{C'A}{C'B} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{B'A}{B'C}$$

فاذا فرضنا ان G هي مركز الدائرة المرسومة داخل المثلث ABC ، ورمزنا بـ a و b و c لأضلاع المثلث المقابلة لرؤوسه A و B و C ، لوجدنا (اعتماداً على خواص منصفات مثلث) أن :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{a} \quad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \quad \text{أو}$$

وإذا لاحظنا ان الاحداثيات المركزية لنقطة G هي (α, β, γ) لأدركنا انه يمكن اعتبار مجموعة الاطوال (a, b, c) هي احداثيات مركزية لنقطة G .
والخلاصة ، يمكن اعتبار مجموعة أطوال اضلاع مثلث احداثيات مركزية لمركز الدائرة المرسومة داخل المثلث .

٤ - المجموعة مؤلفة من أربع نقط : كل نقطة في الفراغ يمكن اعتبارها مركزاً لأربع نقط ، على ان تؤلف هذه النقط رباعي وجوه ، وان يسند اليها اربعة أمثال مناسبة .

تبرهن هذه الخاصة كسابقتها .
وينبج من هذه الخاصة أن العلاقة الشعاعية :

$$OC = \frac{\lambda_1 OM_1 + \lambda_2 OM_2 + \lambda_3 OM_3 + \lambda_4 OM_4}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$$

أو العلاقة الشعاعية :

$$OC = \frac{OM_1 + \lambda OM_2 + \lambda' OM_3 + \lambda'' OM_4}{1 + \lambda + \lambda' + \lambda''}$$

الناجمة من العلاقة السابقة بفرض $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ و $\lambda' = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$ و $\lambda'' = \frac{\lambda_4}{\lambda_1}$

تعين أية نقطة C في الفراغ حسب القيم المعطاة للوسطاء المتجانسة λ_1 و λ_2 و λ_3 و λ_4 ، او للوسطاء λ و λ' و λ'' .

ويلاحظ أن كل نقطة C في الفراغ يقابلها قيمة وحيدة لكل من الوسطاء λ و λ' و λ'' .

والخلاصة ، ان أية نقطة C يمكن اعتبارها مركزاً لرؤوس رباعي وجوه ما ، وقد أسند الى هذه الرؤوس أربعة اعداد مناسبة . نسمي هذه الاعداد بالاحداثيات المركزية للنقطة C .

تمارين

١ - A و B و C هي نقط تلاقي المحاور الاحداثية ox و oy و oz مع المستوي :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

a و b و c اعداد موجبة معلومة . أوجد مركز النقط A و B و C و O المسند اليها الاعداد 1 و 1 و 1 - على الترتيب ، ثم مركز النقط A و B و C .
برهن أن المستقيم الواصل بين المراكز يمر من O .

٢ - عين مركز ثقل كتلتين متساويتين موضوعتين في نقطتين مفروضتين .

٣ - A و B نقطتان مفروضتان ، و a و b عددان جبريان معلومان .
أوجد بالرسم الاشعة V المعينة بالعلاقة :

$$V = a \text{ OA} + b \text{ OB}$$

والموافقة لمواقع مختلفة للنقطة O وذلك :

$$a = b = 1 \quad (١) \quad \text{عندما يكون}$$

$$a = -b = 1 \quad (٢) \quad \text{ـ ـ ـ}$$

٤ - عين مركز ثلاث كتل متساوية موضوعة في رؤوس مثلث مفروض ،

ثم استنتج الخواص الهندسية المتعلقة بهذا المركز .

٥ - A و B و C ثلاث نقط مفروضة ، و a و b و c ثلاثة أعداد جبرية

معلومة . أوجد بالرسم الاشعة V المعينة بالعلاقة :

$$V = a \text{ OA} + b \text{ OB} + c \text{ OC}$$

والموافقة لمواقع مختلفة للنقطة O وذلك :

$$(١) \text{ عندما يكون } a = b = c = 1$$

$$(٢) \quad a = b = 1 \quad c = -2 \quad - \quad -$$

كيف يصبح V حين تقع C في منتصف القطعة المستقيمة AB ؟

٦ - عين مركز ثقل أربع كتل متساوية موضوعة في رؤوس رباعي وجوه مفروض ، ثم استنتج الخواص الهندسية المتعلقة بهذا المركز .

٧ - يمكن اعتبار أية نقطة G من مستوي مثلث مفروض ABC مركزاً لرؤوس المثلث ، على أن نسند الى هذه الرؤوس أمثلاً مناسبة . عين هذه الامثال بدلالة زوايا المثلث اذا فرض ان المركز G ينطبق على احدى النقط التالية :

(١) مركز الدائرة المماسية لاضلاع المثلث .

(٢) مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث .

(٣) نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث .

٨ - برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تتلاقى أو تتوازي ثلاثة مستقيمية مارة بالرؤوس A و B و C لمثلث مفروض ، هو ان تلاقي هذه المستقيميات على التوالي الاضلاع BC و CA و AB بالنقط A' و B' و C' بحيث تتحقق العلاقة :

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{B'C}{B'A} \cdot \frac{C'A}{C'B} = -1$$

٩ - أوجد المحل الهندسي للنقط M التي تحقق العلاقة :

$$\lambda_1 MA_1^2 + \lambda_2 MA_2^2 + \dots + \lambda_n MA_n^2 = K$$

بفرض أن A_1 و A_2 و ... و A_n هي نقطة مفروضة في الفراغ ، وان λ_1 و λ_2 و ... و λ_n و K اعداد جبرية معلومة .

الفصل الثاني

عناصر مجموعة أشعة منزلة

الحاصلة العامة والعزم الحاصل :

V — تعريف : لنفرض مجموعة أشعة منزلة V_1 و V_2 و ... و V_n ، مبادؤها A_1 و A_2 و ... و A_n . نسمي المجموع الهندسي V لهذه الاشعة ، المنشأ من نقطة ما O في الفراغ ، بالحاصلة العامة أو الحاصلة الانسحابية لمجموعة الاشعة :

$$(6) \quad V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \Sigma V_i$$

واذا أنشأنا عزوم هذه الاشعة في O ، وأشرنا ب G_i لعزم V_i في O :

$$G_i = (V_i, O) = OA_i \wedge V_i$$

فانا نسمي حاصلة هذه العزوم في O ، ولتكن G ، بالعزم الحاصل لمجموعة الاشعة في O :

$$(7) \quad G = G_1 + G_2 + \dots + G_n = \Sigma G_i$$

٨ — تغير العزم الحاصل : نعلم أن الحاصلة العامة لمجموعة أشعة لا تتغير في أية نقطة في الفراغ : فهي شعاع طليق ثابت .

سندرس تغير العزم الحاصل لمجموعة أشعة ^(١) ، وسنبحث عن العلاقة بين العزمين الحاصلين G و G' لمجموعة الاشعة بالنسبة لنقطتين O و O' .

لقد رأينا ^(٢) أن العلاقة بين عزمي شعاع V_i بالنسبة لنقطتين O و O' هي :

$$(V_i, O') = (V_i, O) + (OV_i, O')$$

(١) ان كلمة أشعة الواردة في هذا الفصل تعني أشعة منزلة .

(٢) في الجزء الاول من كتاب الميكانيك (بند ٥٤ ، ص ٣٨ وبند ٥٥ ، ص ٣٩) .

$$O'A_i \wedge V_i = OA_i \wedge V_i + O'O \wedge V_i \quad \text{أو}$$

ولما كان :

$$G' = \sum (V_i, O') = \sum O'A_i \wedge V_i$$

فيكون إذن :

$$G' = \sum OA_i \wedge V_i + \sum O'O \wedge V_i$$

أو

$$G' = G + O'O \wedge \sum V_i$$

وإذا رمزنا بـ V للحاصلة العامة للمجموعة ، فالعلاقة السابقة تكتب :

$$(8) \quad G' = G + O'O \wedge V$$

وهي العلاقة المطلوبة .

وإذا لاحظنا أن $O'O \wedge V$ هو العزم في O' لشعاع مبدؤه O ويساوي الحاصلة العامة V ، أي :

$$O'O \wedge V = (OV, O')$$

فالعلاقة (8) تكتب بالشكل التالي :

$$(9) \quad G' = G + (OV, O')$$

وينتج من هذه العلاقة أنه يمكن الحصول على العزم الحاصل لمجموعة أشعة بالنسبة لنقطة ما O' من العزم الحاصل للمجموعة ذاتها بالنسبة لنقطة معينة O . فالعزم الحاصل لمجموعة في O' يساوي حاصلة عزمين : أحدهما العزم الحاصل للمجموعة في O ، والثاني العزم في O' لشعاع مبدؤه في O ويساوي الحاصلة العامة لمجموعة الأشعة المفروضة .

هذا ويلاحظ في العلاقة (8) أن العزمين الحاصلين لمجموعة في نقطتين O و O' لا يكونان بوجه عام متساويين . ويتم التساوي (حين ينعدم الجداء $O'O \wedge V$) في حالتين :

(١) اذا انعدمت الحاصلة العامة للمجموعة :

$$V = \sum V_i = 0$$

ففي هذه الحالة ، تصبح العزوم الحاصلة للمجموعة ، بالنسبة لجميع نقاط الفراغ ، متساوية .

نسمي هذه المجموعة الخاصة بالمزدوجة . أبسط المزدوجات المجموعة المؤلفة من شعاعين متعاكسين ، وتدعى بالمزدوجة البسيطة ^(١) .
(٢) إذا وازى المستقيم OO' الحاصلة العامة V .

ففي هذه الحالة ، تكون العزوم الحاصلة لمجموعة ما بالنسبة لنقط مستقيم مواز للحاصلة العامة متساوية فيما بينها .

فالعزوم الحاصلة لمجموعة ما لا تكون اذن متساوية فيما بينها إلا في حالة واحدة : حين تقع مراكز العزوم على مستقيم مواز للحاصلة العامة للمجموعة المفروضة .

والخلاصة : ان العزم الحاصل لمجموعة ما هو شعاع يتغير في الفراغ مع مركز العزم ، ولا يبقى ثابتاً (أي مساوياً لنفسه) إلا اذا تنقل مركز العزم على مستقيم مواز للحاصلة العامة للمجموعة .

نتيجة : نستخلص مما تقدم أنه لدرس تغيرات العزم الحاصل لمجموعة ما حين يتغير مركز العزم في الفراغ ، يكفي درس هذه التغيرات بالنسبة لنقط مستو عمودي على الحاصلة العامة للمجموعة .

٩ — الثابت الجبري : رأينا ان الحاصلة العامة لمجموعة أشعة ما هي شعاع ثابت في أية نقطة في الفراغ ، وان العزم الحاصل لها هو شعاع متغير . لكن هناك كمية ثابتة ، وهي جبرية ، تنشأ من العلاقة (٨) :

$$G' = G + OO' \wedge V$$

(١) خواص المزدوجة البسيطة في الجزء الاول من كتاب الميكانيك (بند ٥٨ ، ص ٣٩) .

فاذا ضربنا طرفي هذه العلاقة الشعاعية ، داخلياً ، بالشعاع V ، ولاحظنا

$$V \cdot (O'O \wedge V) = (V, O'O, V) = 0 \quad \text{أن}$$

لوجدنا أن :

$$(10) \quad V \cdot G' = V \cdot G$$

فالجداء الداخلي للحاصلة العامة لمجموعة أشعة ما بعزمها الحاصل هو ثابت في أية نقطة في الفراغ (أي مهما تغير مركز العزم في الفراغ) .

ولما كانت إشارة الجداء $V \cdot G$ تدل على نوع الزاوية السكائية بين الشعاعين V و G (ان كانت حادة او قائمة او منفرجة) ، فمن العلاقة السابقة ينتج اذن : ان الزاوية بين الحاصلة العامة والعزم الحاصل لمجموعة أشعة ما تحافظ على نوعها مهما تغير مركز العزم في الفراغ .

هذا واذا رمزنا بـ G_V لمسقط G على V (باعتبار V محوراً) ولاحظنا أن :

$$V \cdot G = |V| \cdot G_V$$

لأدركنا ان الجداء $|V| \cdot G_V$ هو ثابت ايضاً في أية نقطة في الفراغ .

ولما كان $|V|$ ثابتاً فيكون G_V ثابتاً ايضاً ويساوي :

$$(11) \quad G_V = \frac{V \cdot G}{|V|}$$

اذن مسقط العزم الحاصل G لمجموعة أشعة ما على حاصلتها العامة V (باعتبار V محوراً) هو ثابت في أية نقطة في الفراغ ، فلا يتغير مهما تغير مركز العزم .

نتيجة : نرى ان لكل مجموعة أشعة (باستثناء المزدوجة) عنصرين ثابتين في أية نقطة في الفراغ : أحدهما شعاعي وهو الحاصلة العامة للمجموعة ، والثاني جبري وهو مسقط العزم الحاصل للمجموعة على حاصلتها العامة (باعتبار الحاصلة العامة محوراً) .

أو نقول بتعبير آخر : ان الحاصلة العامة لمجموعة أشعة ومسقط عزمها الحاصل على حامل حاصلتها العامة هما شعاعان ثابتان في الفراغ .

١٠ - العزم الحاصل حول محور : العزم الحاصل حول محور لمجموعة أشعة هو مجموع عزوم الاشعة حول المحور .

ليكن Δ المحور ، و V_1 و V_2 و ... و V_n أشعة المجموعة ، فالعزم الحاصل لهذه الاشعة حول Δ ، ولنرمز له بـ G_Δ ، يكون :

$$G_\Delta = \Sigma (V_i , \Delta)$$

وقد رأينا ان عزم شعاع حول محور^(١) هو المسقط على المحور لعزم الشعاع حول نقطة ما من المحور : فالعزم الحاصل حول محور لمجموعة الاشعة يكون اذن المسقط على المحور للعزم الحاصل للمجموعة حول نقطة ما من المحور .
فاذا رمزنا بـ u لشعاع واحدة المحور Δ ، وبـ G'_i لعزم V_i حول نقطة ما O' من Δ ، لكان :

$$(V_i , \Delta) = G'_i \cdot u$$

واذا أشرنا بـ G' للعزم الحاصل للمجموعة حول O' لكان :

$$G_\Delta = \Sigma G'_i \cdot u = G' \cdot u$$

هذا واذا فرضنا O نقطة ما في الفراغ (نعتبرها مبدأً للاحداثيات) ورمزنا بـ V للحاصلة العامة للاشعة المفروضة ، فمن العلاقة (8) وهي :

$$G' = G + O'O \wedge V$$

نجد (بعد ان نضرب طرفيها داخلياً بـ u) :

$$G' \cdot u = G \cdot u + (O'O, V, u)$$

(١) في الجزء الاول من الميكانيك (بند ٦٣ ، ص ٤٧) .

وإذا لاحظنا أن :

$$(O'O, V, u) = (OO' \wedge u) \cdot V = (u, O) \cdot V$$

لوجدنا أن :

$$(12) \quad G_{\Delta} = G \cdot u + (u, O) \cdot V$$

١١ — العزم الحاصل حول مستقيم : إذا فرضنا مستقيماً D ونقطة ما

A من هذا المستقيم ، فالمسقط على D للعزم الحاصل G في A لمجموعة أشعة ، هو المجموع الهندسي لعزوم أشعة المجموعة حول D .

نسمي هذا العزم الذي لا يتقيد بموضع A على D ، بالعزم الحاصل لمجموعة الأشعة حول D ، ولنرمز له بـ G_D .

هذا وإذا فرضنا محوراً Δ حامله D وشعاع واحدته u ، لكان بين العزمين الحاصلين للمجموعة حول D و Δ ، العلاقة الآتية :

$$G_{\Delta} = G_D \cdot u$$

١٢ — امكانيات مجموعة أشعة : لتكن O نقطة ما ثابتة في الفراغ

نعتبرها مبدأً للاحداثيات ، و $V(X, Y, Z)$ الحاصلة العامة لمجموعة أشعة مفروضة ، و $G(L, M, N)$ العزم الحاصل في O لهذه المجموعة .

نرى أن المركبات (L', M', N') للعزم الحاصل G' في نقطة ما $O'(x', y', z')$ تتعين اعتماداً على العلاقة (8) كما يلي :

$$(13) \quad \begin{cases} L' = L - y'Z + z'Y \\ M' = M - z'X + x'Z \\ N' = N - x'Y + y'X \end{cases}$$

وإذا فرضنا محوراً Δ شعاع واحدته $u(x, y, z)$ ، ورمزنا للمركبات

عزم u على المحاور الاحداثية بـ (l, m, n) لوجدنا ، اعتماداً على العلاقة (12) ،

أن قيمة العزم الحاصل لمجموعة الأشعة حول د هي :

$$(14) \quad G_{\Delta} = \alpha L + \beta M + \gamma N + \epsilon X + m Y + n Z$$

نلاحظ أن مركبات العزم الحاصل لمجموعة أشعة حول نقطة ما في الفراغ ، والعزم الحاصل لهذه المجموعة حول محور ما ، هي جميعها توابع خطية للكميات الست (X, Y, Z, L, M, N) : فهي لانهوي أشعة المجموعة فرادى ، بل بمجموعة ومثلة بحاصلتها العامة (X, Y, Z) وعزمها الحاصل (L, M, N) في O . لذا نسمي هذه الكميات الست باحداثيات مجموعة الأشعة بالنسبة للمجاور الاحداثية (ox, oy, oz) .

هذا ، ونرى ان الثابت الجبري $G \cdot V$ يتعين بدلالة هذه الاحداثيات كما يلي :

$$(15) \quad G \cdot V = L X + M Y + N Z$$

كما يتعين ايضاً G_v ، مسقط G على V (اعتماداً على العلاقة 11) :

$$(16) \quad G_v = \frac{L X + M Y + N Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

المحور المركزي :

١٣ - تعريف : لنفرض مجموعة اشعة ، حاصلتها العامة هي

$V (V \neq 0)$ ، وعزمها الحاصل في نقطة ما O هو G .

فقد رأينا ان مسقط G على حامل V ، في اية نقطة في الفراغ ، هو شعاع ثابت (وقد يساوي هذا الشعاع الصفر) .

لنبحث الآن عن نقط تكون فيها العزوم الحاصلة لمجموعة الاشعة موازية لحاصلتها العامة (او مساوية للصفر) . ثم لنعين المحل الهندسي لهذه النقط .

لنفرض نقطة ثانية O' ، ولنرمز بـ G' للعزم الحاصل للمجموعة في O' .

نعلم انه يوجد بين G و G' العلاقة (8) :

$$G' = G + O'O \wedge V$$

فاذا رمزنا G_v و G'_v لمسقطي G و G' على حامل V ، وب G_n و G'_n لمركبتي G و G' العموديتين على V ، لكان :

$$G = G_v + G_n$$

$$G' = G'_v + G'_n$$

وقد رأينا (بند ٩) ان :

$$G_v = G'_v$$

فالعلاقة (8) تصبح اذن :

$$G'_n = G_n + O'O \wedge V$$

وتكتب ايضاً بالشكل التالي :

$$G'_n = G_n - OO' \wedge V$$

فالبحث عن النقط المطلوبة (وبالتالي عن المحل الهندسي لهذه النقط) يرد الى البحث عن نقط O' يكون فيها :

$$G'_n = 0$$

$$OO' \wedge V = G_n \quad \text{او}$$

فالامر يؤل اذن الى تقسيم الشعاع المثبت G_n على الشعاع الطليق V .

نرى ان عملية التقسيم ممكنة (لان $V \neq 0$ ، و G_n عمودي على V او يساوي الصفر) ، وان المحل الهندسي لنقطة O' هو مستقيم يوازي V .
نسمي هذا المستقيم بالمحور المركزي لمجموعة الاشعة المفروضة .

١٤ — تعيين المحور المركزي تحليلياً : كي نعين المحور المركزي لمجموعة اشعة بطريقة تحليلية ، يكفي كتابة شروط توازي العزم الحاصل في O' والحاصلة العامة V .

فإذا فرضنا مجموعة محاور احداثية $oxyz$ (قائمة ومباشرة) ، ورمزنا بـ (x, y, z) لاحداثيات o' ، وبـ (X, Y, Z) لمركبات V ، وبـ (L, M, N) لمركبات G (العزم الحاصل في o) لغدت شروط التوازي :

$$(17) \quad \frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}$$

نرى (اعتماداً على خواص سلسلة نسب) ان النسب السابقة تساوي ايضاً النسبة :

$$\frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\frac{G \cdot V}{|V|^2} \quad \text{او} \quad \frac{G_V}{|V|}$$

فالعلاقات السابقة ، وهي المعادلات التي تعين الاحداثيات (x, y, z) لنقطة o' ، تكتب اذن بالشكل التالي :

$$(18) \quad \begin{cases} D \equiv yZ - zY - l = 0 \\ D' \equiv zX - xZ - m = 0 \\ D'' \equiv xY - yX - n = 0 \end{cases}$$

بفرض ان :

$$l = L - X \frac{G_V}{|V|} \quad m = M - Y \frac{G_V}{|V|} \quad n = N - Z \frac{G_V}{|V|}$$

ان مجموعة المعادلات (18) تمثل ثلاثة مستويات . ونرى أن هذه المستويات هي متلاقية في مستقيم واحد مواز للحاصلة العامة ، وذلك لان كل مستو منها يوازي الحاصلة العامة ولا يوازي ايأاً من المستويين الآخرين ، وان معادلات هذه المستويات ليست مستقلة ، بل مرتبطة بالمطابقة :

$$XD + YD' + ZD'' = 0$$

فالمستقيم الذي تمثله المجموعة (17) او (18) هو المحل الهندسي لنقطة o' ، فهو المحور الاساسي المطلوب .

ويجدر الاشارة هنا الى ان الاعداد (X, Y, Z, l, m, n) المرتبطة بالعلاقة :

$$lX + mY + nZ = 0$$

تمثل مجموعة الاحداثيات البلوكرية ^(١) لهذا المستقيم .

١٥ — ملاحظة : لما كان لمسقط العزم الحاصل على الحاصلة العامة قياس ثابت ، فالعزم الحاصل اذن قياس قيمته الصغرى تساوي هذا الثابت .

واذا لاحظنا ان هذا القياس يبلغ قيمته الصغرى من اجل نقط المحور المركزي ، لا دركنا ان المحور المركزي هو أيضاً المحل الهندسي للنقط التي يكون فيها العزم الحاصل أصغرياً .

نلاحظ ان العزم الاصغري لمجموعة مؤلفة من شعاع واحد هو الصفر : فالمحور المركزي لشعاع هو حامل الشعاع .

ساحة العزوم :

١٦ — تعريف : لقد رأينا ^(٢) انه اذا امكن ان يوافق اية نقطة P من منطقة في الفراغ شعاع PP' ، فعندها نقول ان هنالك ساحة اشعة .

فلو فرضنا مجموعة اشعة ، فانه يوافق كل نقطة P في الفراغ شعاع $PP' = G$ هو العزم الحاصل في P لمجموعة الاشعة . فالساحة المؤلفة من الاشعة G هي ساحة عزوم .

تعيّن ساحة العزوم بالاعداد الستة (X, Y, Z, L, M, N) التي سبق أن سميناها باحداثيات المجموعة .

في الحالة الخاصة ، عندما تنعدم الحاصلة العامة لمجموعة اشعة ، فالعزوم

(١) Coordonnées pluckériennes .

(٢) في الجزء الاول من كتاب الميكانيك (بند ١٢٦ ، ص ٨٧) .

الحاصلة في جميع نقط الفراغ تكون متساوية فيما بينها. ففي هذه الحالة ، نقول ان ساحة العزوم ثابتة او منتظمة .

١٧ — الصفة المميزة لساحة العزوم : نفرض مجموعة اشعة منزلقة ، ونقطتين ما P و Q في الفراغ .

نعلم ان المستقيين على المستقيم PQ للعزمين الحاصلين في P و Q للمجموعة المفروضة هما شعاعان متساويان .

ان هذه الخاصة هي صفة مميزة لساحة العزوم . ونتحقق من صحة ذلك اذا برهننا النظرية الآتية :

نظرية : اذا فرضنا ساحة اشعة وكان مسقطا شعاعين اختياريين منها على المستقيم الواصل بين مبديئيهما متساويين ، فساحة الاشعة تكون ساحة عزوم . لننشئ في الساحة المفروضة رباعي وجوه ما ABCD ، ولتكن AA' و BB' و CC' و DD' هي اشعة الساحة الموافقة لرؤوس الشكل A و B و C و D على الترتيب (شكل ١) .

لنفرض شعاعاً منزلقاً على احد احرف الشكل ، وليكن الحرف CD ، ولنعين هذا الشعاع بحيث يكون عزمه حول الحرف CD مساوياً مسقط AA' على هذا الحرف (او مسقط BB' على الحرف نفسه حسب الفرض) ، ولنرمز لهذا الشعاع بـ U_{AB} . ثم لنفرض اشعة مماثلة منزلفة على الاحرف الباقية للشكل ، ولنعين هذه الاشعة كما عينا U_{AB} . فنحصل بذلك على مجموعة الاشعة المنزلفة على الاحرف AB و AC و AD و BC و CD و DB . لنرمز لهذه المجموعة بـ $S(U)$.

نرى ان العزم الحاصل لهذه المجموعة بالنسبة لاحد احرف الشكل ، وليكن AB مثلاً ، هو عزم الشعاع U_{AB} حول هذا الحرف (لأن عزوم الاشعة الباقية حول هذا الحرف معدومة) . فالعزوم الحاصلة للمجموعة $S(U)$

حول المستقيمت AB و AC و AD هي اذن مساقط الشعاع AA' على هذه المستقيمت على الترتيب .

ينتج من ذلك ان العزم الحاصل لهذه المجموعة بالنسبة لنقطة A ينطبق على AA' . وهكذا تنطبق العزوم الحاصلة لـ S بالنسبة للنقط B و C و D على الاشعة BB' و CC' و DD' على التوالي .

لنفرض الآن شعاعاً ما من الساحة ، وليكن PP' ، ولنبه ان العزم

الحاصل في P للمجموعة S ينطبق على شعاع الساحة في P (وهو PP') .

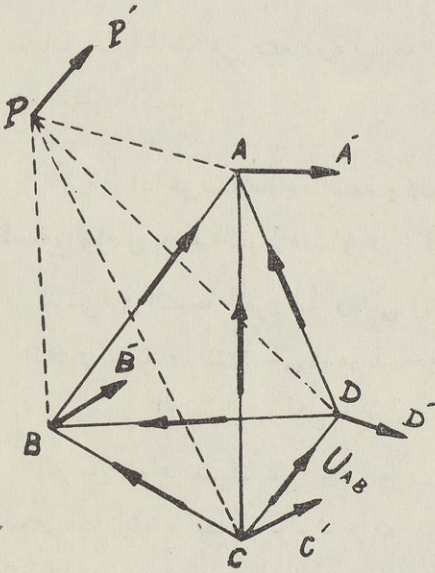
نصل بين P ورؤوس الشكل . فالعزم الحاصل لـ S حول PA هو مسقط AA' (العزم الحاصل في A) على المستقيم PA ، او مسقط PP' على المستقيم نفسه (حسب الفرض) .

وهكذا نجد ان العزوم

الحاصلة لـ S حول PB و PC

و PD هي مساقط PP' على

هذه المستقيمت . واذا لاحظنا ان هنالك ثلاثة من المستقيمت الواصلة بين P ورؤوس الشكل لا تقع في مستو واحد ، وان مساقط العزم الحاصل في P على هذه المستقيمت تنطبق على مساقط PP' على المستقيمت نفسها ، لا أدركنا ان العزم الحاصل في P ينطبق على PP' ، وان الساحة المفروضة تنطبق بالتالي على ساحة عزوم المجموعة S وهو المطلوب .



(شكل ١)

نتيجة : ينتج مما تقدم ، انه اذا انطبق العزمان الحاصلان لمجموعتي اشعة بالنسبة لكل من احرف رباعي وجوه ، لانطبق العزمان الحاصلان لهما بالنسبة لأية نقطة في الفراغ .

١٨ — توزيع العزوم الحاصلة في الفراغ : لنفرض مجموعة اشعة حاصلتها العامة V وعزمها الحاصل الاصغري G_v .

فقد رأينا (بند ١٦) أنه اذا $V = 0$ فالعزوم الحاصلة للمجموعة تصبح متساوية في جميع نقط الفراغ ، والساحة تغدو ثابتة او منتظمة .

لندرس الآن كيف توزع العزوم الحاصلة لمجموعة الاشعة عندما يكون :

$$V \neq 0$$

فاذا $G_v = 0$ فالعزوم الحاصلة تؤول كما لو كانت المجموعة مؤلفة من شعاع واحد مركباته (X, Y, Z) ومحمول على المحور المركزي الذي تصبح معادلاته (بعد فرض $G_v = 0$ في المعادلات 18) :

$$\begin{cases} yZ - zY - L = 0 \\ zX - xZ - M = 0 \\ xY - yX - N = 0 \end{cases}$$

نسمي هذا الشعاع بحاصلة الأشعة . وسنرى في بحث مجموعات الاشعة المتكافئة ان هذا الشعاع يكافئ مجموعة الاشعة المفروضة .

لنفرض الآن ان $V \neq 0$ و $G_v \neq 0$.

لنرمز للكمية $\frac{G_v}{|V|}$ (التي لا تساوي الصفر ولا اللانهاية) بـ f :

$$\frac{G_v}{|V|} = f$$

ليكن Δ المحور المركزي للمجموعة . لنعين (بدلالة V و G_v) العزم

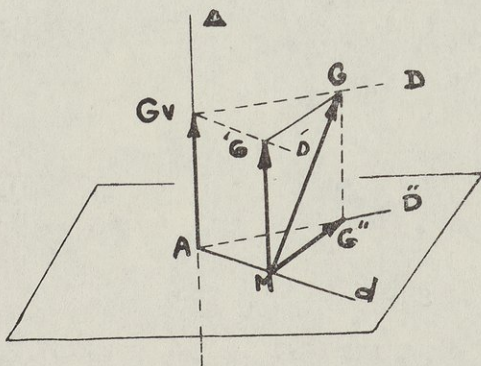
ينتج من ذلك انه لا يمكن ايجاد اية نقطة على بُعد محدود يكون فيها العزم الحاصل عمودياً على الحاصلة العامة .

(٤) ان المحل الهندسي للنقط التي تكون فيها العزوم الحاصلة موازية لاستقامة مفروضة (غير عمودية على Δ) او متساوية فيما بينها ، هو مستقيم مواز للمحور المركزي .

(٥) ان العزم الحاصل في المنطقة M هو مماس للولب دائري خطوته $2 f \pi$ مرسوم على الاسطوانة S .

نستخلص من ذلك : أن خطوط قوى ساحة العزوم المفروضة هي لولاب متساوية الخطى (خطوة كل منها $2 f \pi$) مرسومة على أسطوانات دورانية محاورها منطبقة على المحور المركزي لمجموعة الأشعة المفروضة .

(٦) انه عندما ترسم M مستقيماً d (شكل ٣) عمودياً على Δ في نقطة



(شکل ۳)

نری ان المحل الهندسی

لحامل العزم الحاصل G هو مجسم المكافئ الزائدي المتساوي السابقين ، لأن

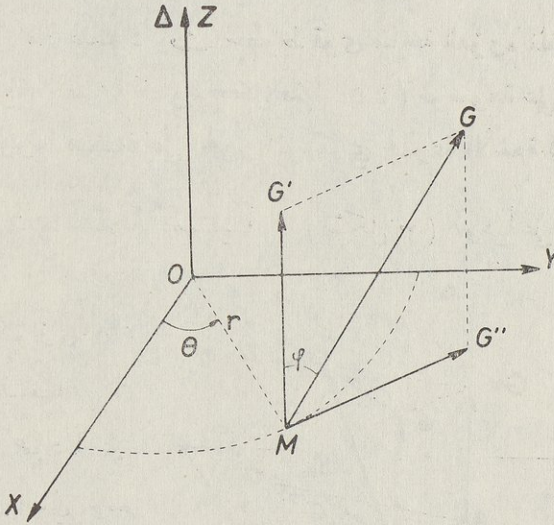
هذا الحامل يوازي مستوياً ثابتاً (هو المستوي العمودي على المستقيم الثابت d)
ويلاقي مستقيمين ثابتين (هما d و D) .

١٩ - توزيع العزوم الحاصلة تحليلياً : يمكن درس توزيع العزوم
الحاصلة في الفراغ بطريقة تحليلية .

نختار ، اختصاراً للعمل ، المحاور الاحداثية $oxyz$ بحيث ينطبق المحور oz
على المحور المركزي Δ ، فتصبح احداثيات المجموعة هي $(0, 0, V, 0, 0, fV)$ ،
وتصبح مركبات العزم الحاصل G في النقطة $M(x, y, z)$ هي :

$$L = -yV \quad M = xV \quad N = fV$$

نرى ان اي انسحاب نجره على النقطة M بصورة موازية للمحور oz لا يغير



(شكل ٤)

العزم الحاصل (وهذا ما وجدناه سابقاً) . لذلك يكفي درس توزيع العزوم
الحاصلة حول نقط المستوي xoy .

واذا رمزنا بـ (r, θ) للاحداثيين القطبيين للنقطة M في المستوي xoy ،

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

لكان

ولكان بالتالي :

$$L = - V r \sin \theta$$

$$M = V r \cos \theta$$

$$N = f V$$

نرى ان للعزم الحاصل G مركبتين ، احدهما G' توازي oz ، وهي تساوي G_v ، والثانية G'' في المستوي xoy ، وهي مماسة للدائرة (o, r) وقياسها rv (شكل ٤) . فقياس G يتعين اذن من العلاقة :

$$G^2 = V^2 (r^2 + f^2)$$

واذا رمزنا بـ φ للزاوية الكائنة بين الشعاع G والمحور oz لكان :

$$\lg \varphi = \frac{r}{f}$$

وهكذا نجد الخواص الخمس التي اوردها سابقاً . أما الخاصة السادسة فنعينها كما يلي :

نعتبر ان d منطبق على ox ، اي ان M ترسم المحور ox . فاحداثيات M تكون (x, o, o) ، ومركبات G تصبح :

$$L = o$$

$$M = x V$$

$$N = f V$$

واحداثيات نهاية الشعاع G تكون :

$$\xi = x + L = x$$

$$\eta = M = v x$$

$$\zeta = N = f v$$

فنهاية G نرسم مستقيماً معادلته :

$$\eta = V \xi$$

$$\zeta = f V$$

وهو المستقيم D .

أما حامل G فيتعين بالمعادلتين :

$$\frac{X - x}{L} = \frac{Y}{M} = \frac{Z}{N}$$

بفرض ان (X, Y, Z) هي احداثيات نقطة ما من حامل G . وبعد تعويض L و M و N بقيهها نحصل على المعادلتين :

$$X = x \quad \frac{Y}{x} = \frac{Z}{f}$$

فالمحل الهندسي لحامل الشعاع G هو مجسم المكافئ الزائدي المتساوي الساقين :

$$XZ = fY$$

وهذا ما وجدناه سابقاً .

المستقيمات الفارقة للعزوم :

تمهيد : - لقد درسنا توزيع العزوم الحاصلة لمجموعة أشعة مفروضة بالنسبة لنقط الفراغ . سنبحث الآن في العزوم الحاصلة لمجموعة الأشعة بالنسبة لمستقيمات في الفراغ . وسنخصص بالدرس المستقيمات الفارقة للعزوم ، اي المستقيمات التي تنعدم حولها العزوم الحاصلة .

٢٠ - القطب والمستوي القطبي : لنبحث ، اولاً ، عن المحل الهندسي للمستقيمات D التي تمر من نقطة مفروضة P ويكون للعزوم الحاصلة حول هذه المستقيمات قياس ثابت قيمته h .

ليكن G العزم الحاصل للمجموعة في P ، و α الزاوية الحادة الكائنة بين الشعاع G واحد مستقيمات D ، فيكون :

$$G \cos \alpha = h$$

وبما ان G و h ثابتان ، فالزاوية α ثابتة ، والمحل الهندسي للمستقيمات

D هو مخروط دوراني محوره حامل G ورأسه P .

وإذا فرضنا $h = 0$ تصبح الزاوية α قائمة : فالمحل الهندسي للمستقيمت
الفاقدة للعزوم والمارة من نقطة P هو مستوي π عمودي على G في P .
نسمي النقطة P ببؤرة المستوي π أو قطبه ، ونسمي π بالمستوي
البؤري أو القطبي للنقطة P .

نلاحظ ان المستوي القطبي لا يوازي ابداً المحور المركزي Δ للمجموعة
(لان مسقط G على Δ ثابت ولا يساوي الصفر) . كما نلاحظ ايضاً ان هذا
المستوي هو المستوي الناظم في P للولب دائري يمر من P (هذا الولب هو
احد خطوط قوى ساحة العزوم المفروضة) .

نرى ان معادلة المستوي القطبي للنقطة $P(a, b, c)$ هي :

$$L(x - a) + M(y - b) + N(z - c) = 0$$

وإذا نسبنا الساحة الى مجموعة المحاور الاحداثية التي اخترناها سابقاً ، فمعادلة
هذا المستوي تصبح :

$$bx - ay - f(z - c) = 0$$

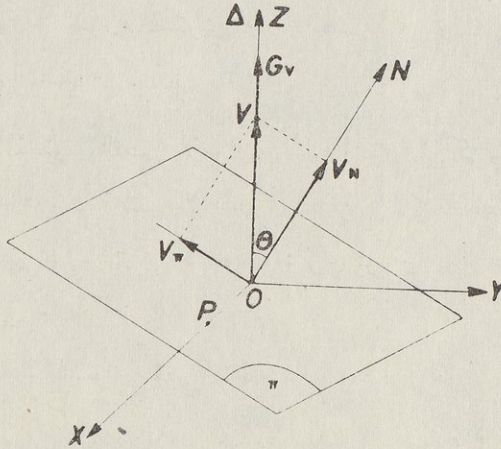
نرى ان مستويين قطبيين ما لا يكونان متوازيين إلا اذا كان قطباهما على
مستقيم يوازي oz (او Δ) .

لنفرض الآن مستويًا π في الفراغ . ولنبرهن ان لهذا المستوي قطعاً
وحيداً شريطة ألا يكون المستوي π والمحور المركزي Δ متوازيين (إذ
لو توازي π و Δ لكان المسقط على π للعزم الحاصل في اية نقطة من π هو
شعاع ثابت لا يساوي الصفر) .

ليكن o نقطة تلاقي Δ مع π . لنبحث في المستوي π عن نقطة P ،
بحيث يكون العزم الحاصل في P ، وليكن G ، عمودياً على π (شكل ٥) .

نعلم أن :

$$G = G_v + PO \wedge V$$



(شكل ٥)

ليكن V_n مسقط الحاصلة العامة V على الناظم للمستوي . فالنقطة المطلوبة يجب ان تحقق العلاقة :

$$G \wedge V_n = 0$$

او العلاقة :

$$G_v \wedge V_n + (PO \wedge V) \wedge V_n = 0$$

واذا لاحظنا ان :

$$(PO \wedge V) \wedge V_n = (PO \cdot V_n) V - (V \cdot V_n) PO$$

وأن $PO \cdot V_n = 0$ (PO في المستوي π العمودي على V_n)

$$V \cdot V_n = V_n^2$$

و

لأصبحت العلاقة التي يجب أن تحققها النقطة P هي اذن :

$$OP = \frac{\mathbf{V}_n \wedge \mathbf{G}_v}{V_n^2}$$

وتدل هذه العلاقة انه توجد نقطة وحيدة P تحقق الطلب .

ونرى ان الشعاع OP يقع في المستوي π ، ويتعامد مع مستوي الشعاعين $\mathbf{G}_v$ و $\mathbf{V}_n$ ، ويتجه بحيث تكون الثلاثية $(\mathbf{V}_n, \mathbf{G}_v, OP)$ مباشرة ، ويتعين قياسه كما يلي :

$$|OP| = \frac{|\mathbf{V}_n| \cdot |\mathbf{G}_v| \sin \theta}{V_n^2} = \left| \frac{\mathbf{G}_v}{V_n} \right| \sin \theta$$

بفرض ان θ هي الزاوية الحادة الكائنة بين المحور المركزي والناظم للمستوي π .

$$|\mathbf{V}_n| = |\mathbf{V}| \cos \theta \quad \text{واذا لاحظنا ان}$$

$$|OP| = \left| \frac{\mathbf{G}_v}{V} \right| \sin \theta = f \sin \theta \quad \text{لكان}$$

والخلاصة ، توجد نقطة وحيدة P يكون فيها العزم الحاصل $\mathbf{G}$ عمودياً على المستوي π . فللمستوي π اذن قطب وحيد هو P .

هذا ويمكن اثبات وجود القطب الوحيد P بطريقة تحليلية : لنختار المحاور الاحداثية بحيث ينطبق oz على المحور المركزي د ، وينطبق ox على المستوي π نفسه ، ويضع الناظم الموجّه N للمستوي π مع oz الزاوية θ ومع oy الزاوية المتممة لـ θ . فمعادلة هذا المستوي تصبح :

$$\pi \equiv y \sin \theta + z \cos \theta = 0$$

فلنكن يكون العزم الحاصل $\mathbf{G}(L, M, N)$ في النقطة $P(x, y, z)$ عمودياً على المستوي π ، يجب ان يكون :

$$\frac{O}{L} = \frac{\sin \theta}{M} = \frac{\cos \theta}{N}$$

وإذا لاحظنا ان :

$$L = -yV \quad M = xV \quad N = fV$$

لوجدنا ان المجموعة السابقة تكتب :

$$\frac{O}{-y} = \frac{\sin \theta}{x} = \frac{\cos \theta}{f}$$

وأن حل هذه المجموعة هو :

$$x = f \operatorname{tg} \theta \quad y = 0$$

فالنقطة P تقع في المستوي xoz . وبما ان P هي نقطة من المستوي π ، فهي تقع اذن على المحور ox ، وتكون احداثياتها :

$$x = f \operatorname{tg} \theta \quad y = 0 \quad z = 0$$

فالنقطة $P(f \operatorname{tg} \theta, 0, 0)$ هي اذن محرق المستوي π ، وهي وحيدة .

ملاحظة : لنبحث عن العلاقات بين الاقطاب والمستويات القطبية للمجموعة أشعة .

لقد رأينا ان لكل نقطة في الفراغ مستوياً قطبياً لا يوازي المحور المركزي للمجموعة ، وأن لكل مستو غير مواز للمحور المركزي قطباً وحيداً .

ليكن π المستوي القطبي لنقطة P . فاذا فرضنا P_1 نقطة ما من π فمستويها القطبي π_1 يمر من P .

بالحقيقة ، أن π و π_1 هما مستويان غير متوازيين (لأن PP_1 لا يوازي المحور المركزي Δ) ففصلهما المشترك ، وهو مستقيم فاقد للعزوم (لأنه يمر من P_1) ، يجب ان يمر من P .

وهكذا ، فانا نجد ايضاً انه لو مرّ مستو ، غير مواز للمحور المركزي ، من النقطة P ، فمحرق هذا المستوي يقع في المستوي القطبي لنقطة P .

٢١ — المستقيمات المترافقة : لنفرض في الفراغ مستقيماً D ونقطة P

تتنقل على هذا المستقيم .

فإذا كان D يوازي المحور المركزي Δ ، فالمستوي القطبي للنقطة P ينتقل موازياً لنفسه . والعكس صحيح .

لنفرض ، بوجه عام ، ان D لا يوازي Δ . فان كان D فاقداً للعزوم فالمستويات القطبية لنقط D تمر جميعها من D (لأن المستوي القطبي لنقطة هو المحل الهندسي للمستقيمات الفاقدة للعزوم المارة من تلك النقطة) .

لنفرض الآن ان D غير فاقدة للعزوم . فالمستويان القطبيان لنقطتين منه لا يحويان D ولا يكونان متوازيين : فهما متقاطعان بفصل مشترك d غير منطبق على D .

نرى ان كل مستو يمر من D يقع محرقه على d (لان هذا المحرق واقع في كل من المستويين السابقين) . ونرى بالمقابل ان اي مستو يمر من d يقع محرقه على D (لان هذا المحرق واقع في اي مستو يمر من D) .

ندرك اذن ان هناك تقابلاً بين المستقيمين D و d اللذين نسميهما بالمستقيمين المترافقين . فكل مستو يمر من احد هذين المستقيمين يقع محرقه المستقيم الآخر . وكل نقطة ترسم احد هذين المستقيمين يمر مستويها القطبي من المستقيم الآخر .

هذا ونرى ان المستقيمين المترافقين لا يتلاقيان (لو تلاقيا لكان المستوي القطبي لنقطة التلاقي حاوياً للمستقيمين معاً ، واصبح بالتالي المستقيمان فاقدين للعزوم ، وهذا يخالف الفرض) ، ولا يكونان متوازيين .

كما نرى ايضاً ، ان المستقيم الفاقدة للعزوم ينطبق على مرافقه ، وان العكس صحيح .

ينتج من ذلك ان اي مستقيم ϵ يلاقي مستقيمين مترافقين هو فاقدة للعزوم (لأن المستويين القطبيين لنقطتي التلاقي يتقاطعان في ϵ) .

تمارين

١ - لدينا المستويان :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

اوجد الاحداثيات البلوكزية لفصلهما المشترك .

(الاحداثيات البلوكزية لمستقيم ، او احداثيات مستقيم ، هي احداثيات شعاع ما محمول على المستقيم) .

٢ - برهن ان اي مستو عمودي على الحاصلة الانسحابية لشعاعين مفروضين يلاقي الشعاعين ومحورهما الاساسي بثلاث نقط على استقامة واحدة .

ثم برهن ان العمود المشترك لحاملي الشعاعين المفروضين يلاقي محورهما الاساسي ويكون عمودياً عليه .

٣ - اوجد المحور الاساسي لشعاعين مفروضين .

٤ - لدينا مكعب احرفه الثلاثة المتلاقية في احد رؤوسه O هي OA و OB و OC ، ونظائر هذه الاحرف بالنسبة لمركز المكعب هي O'A' و O'B' و O'C' على الترتيب . فاذا فرضنا ان a هو طول حرف المكعب ، وان M و N و P هي مراكز الأوجه O'A'BC و O'ABC و O'ABC على الترتيب ، فالمطلوب تعيين المحور المركزي للأشعة :

MO و NC' و BP'

• - ABCD هو رباعي وجوه منتظم . اوجد المحور المركزي لمجموعة الأشعة .

CD , BC , AB

٦ - ادرس تغيرات القيمة الجبرية لمساحة مسقط مضلع يساري مفروض على مستوٍ موجّه حينما يتنقل هذا المستوي في الفراغ .

٧ - لدينا مجموعة اشعة احداثياتها هي $(0, 0, v, 0, 0, fV)$.
فالمطلوب :

(١) إيجاد المحل الهندسي لنقطة M في الفراغ بحيث يكون حامل العزم الحاصل لمجموعة الاشعة في M ماراً من نقطة مفروضة A .

(٢) إيجاد المحل الهندسي لهذه الحوامل.

٨ - لدينا مجموعة اشعة حاصلتها العامة V . ليكن π المستوي القطبي للمجموعة الموافق لنقطة مفروضة P . فاذا فرضنا ان π لا يوازي V ، فالمطلوب :

(١) ان تعين في المستوي π مستقيماً D بحيث يكون للعزم الحاصل حول D لمجموعة الاشعة المفروضة قياس معلوم .

(٢) ان تعين مغلف المستقيم ١) حين يكون هذا القياس ثابتاً .

(٣) كيف يصبح هذا المغلف حين يغدو القياس الثابت مساوياً للصفر .



الفصل الثالث

مجموعات الأشعة المتطابقة

تطابق مجموعتي أشعة :

٢٢ — تعريف : نقول عن مجموعتي أشعة ^(١) أنهما متكافئتان إذا كان لهما حاصلة انسحابية واحدة وعزم حاصل واحد في أية نقطة في الفراغ .

ولما كانت الحاصلة العامة ثابتة في الفراغ ، فاعتماداً على العلاقة (8) ، نرى أنه يكفي لتكافؤ مجموعتي أشعة أن يكون لهما حاصلة انسحابية واحدة وعزم حاصل واحد في نقطة خاصة في الفراغ .

فإذا رمزنا بـ S لمجموعة الأشعة V_1 و V_2 و ... و V_n ، وبـ S' للمجموعة V'_1 و V'_2 و ... و V'_p وبـ V و V' للحاصلتين الانسحابيتين لهاتين المجموعتين لكان :

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n = \sum V_i$$

$$V' = V'_1 + V'_2 + \dots + V'_p = \sum V_j$$

وإذا اشرنا بـ G و G' للعزمين الحاصلين في نقطة ما O لـ S و S' لكان :

$$G = \sum (V_i , O)$$

$$G' = \sum (V'_j , O)$$

(١) ان كلمة أشعة الواردة في هذا الفصل تعني . كما في الفصل السابق ، أشعة منزقة .

فشروط تكافؤ S و S' تكون اذن :

$$(19) \quad \begin{cases} V = V' \\ G = G' \end{cases}$$

٢٣ — شروط التكافؤ تحليلاً : لنعتبر o مبدأً للاحداثيات ، ولنفرض مجموعة محاور احداثية $oxyz$ (قائمة ومباشرة) .

فاذا رمزنا بـ (X, Y, Z, L, M, N) لاحداثيات مجموعة الاشعة S ، وبـ (X', Y', Z', L', M', N') لاحداثيات المجموعة S' ، فانه يمكن التعبير عن شروط تكافؤ المجموعتين S و S' بالعلاقات الست :

$$(20) \quad \begin{cases} X = X' & Y = Y' & Z = Z' \\ L = L' & M = M' & N = N' \end{cases}$$

٢٤ — المجموعة المظلمة للصفر : نقول عن مجموعة أشعة انها مكافئة للصفر اذا كان كل من شعاعي الحاصلة الانسحابية لهذه المجموعة والعزم الحاصل لها في أية نقطة في الفراغ مساوياً للصفر .

واذا رمزنا بـ V للحاصلة العامة للمجموعة ، وبـ G لعزمها الحاصل في نقطة خاصة ، ولتكن o ، فنرى (اعتماداً على ما سبق) أنه يكفي لكي تكافئ هذه المجموعة الصفر أن يكون :

$$(21) \quad V = 0 \quad G = 0$$

او ان يكون :

$$(22) \quad \begin{cases} X = 0 & L = 0 \\ Y = 0 & M = 0 \\ Z = 0 & N = 0 \end{cases}$$

وذلك بفرض ان (X, Y, Z) و (L, M, N) هي مركبات V و G (وهي احداثيات مجموعة الاشعة المفروضة) .

٢٥ - **المزدوجة** : رأينا أن المزدوجة هي مجموعة أشعة حاصلتها العامة V تساوي الصفر وعزمها الحاصل G في نقطة ما لا يساوي الصفر :

$$V = 0 \quad G \neq 0$$

ورأينا أن G هو شعاع ثابت لا يتغير بالنسبة لأية نقطة في الفراغ . وقد سمينا هذا الشعاع بمحور المزدوجة .

نرى أنه يكفي لتكافؤ مزدوجتين أن يتساوى محاورهما . فالمزدوجة تبقى مكافئة لنفسها عندما يطرأ عليها تحويلات تغيير في أشعتها وتحافظ على محورها .
لنأخذ مثلاً مزدوجة بسيطة مؤلفة من شعاعين V_1 و V_2 . فإذا أجرينا على شعاعها انسحاباً ما أو دوراناً في مستويها حول نقطة ما من هذا المستوي ، أو زلقنا شعاعها على حاملها ، فالمزدوجة تبقى مكافئة لنفسها (لأن عناصر محورها تبقى ثابتة : فالمنحى يبقى عمودياً على مستوي شعاعي المزدوجة ، والاتجاه الذي يتعين من اتجاه دوران المزدوجة يبقى ثابتاً ، والقياس الذي يقدر بجداء قياس احد شعاعي المزدوجة بذراعها أو بسطح متوازي الاضلاع المنشأ على شعاعها يبقى ثابتاً ايضاً) .

نلاحظ ان مجموعة مزدوجات تكافؤ مزدوجة وحيدة محورها هو حاصلة محاور المزدوجات المفروضة . نسمي هذه المزدوجة الوحيدة بالمزدوجة الحاصلة ، والمزدوجات المفروضة بالمزدوجات المركبة ، والعملية ذاتها بتراكيب المزدوجات .

رد مجموعة أشعة :

٢٦ - **تعريف** : رد (او اختزال) مجموعة أشعة هو تعويض هذه المجموعة بمجموعة مكافئة لها وأبسط منها .

ليكن $V(X, Y, Z)$ الحاصلة العامة للمجموعة المفروضة ، و $G(L, M, N)$ عزمها الحاصل في ٥ (نعتبر ٥ مبدأ للاحداثيات) ، و G_v عزمها الحاصل الاصغري .

سنبدأ في دراسة بعض الحالات الخاصة ثم ندرس الحالة العامة :
الحالة الأولى : نفرض ان الثابت الجبري للمجموعة المفروضة يساوي الصفر ، وأن الحاصلة العامة لا تساوي الصفر :

$$V \cdot G = 0 \quad V \neq 0$$

أو بتعبير آخر ، نفرض ان :

$$G_v = 0 \quad V \neq 0$$

فقد رأينا انه يوجد شعاع منزلق وحيد احداثياته هي (X, Y, Z, L, M, N) احداثيات المجموعة المفروضة .

هذا الشعاع الذي ينزلق على المستقيم :

$$OA \wedge V - G = 0$$

يكافئ المجموعة المفروضة ، ونسميه بحاصلة الأشعة ، ونرمز اليه بـ R .

نرى ان حامل هذا الشعاع هو المحور المركزي للمجموعة .

هذا ونستخلص بما تقدم النظرية التالية :

٢٧ - نظرية : الشرط اللازم والكافي لكي تكون مجموعة أشعة مكافئة

لشعاع وحيد هو أن يكون العزم الحاصل الاصغري للمجموعة مساوياً للصفر والحاصلة العامة غير مساوية للصفر :

$$G_v = 0 \quad \text{و} \quad V \neq 0$$

الحالة الثانية : نفرض ان الحاصلة العامة تساوي الصفر ، وأن العزم

الحاصل في ٠ لا يساوي الصفر :

$$G \neq 0$$

$$V = 0$$

فقد رأينا ان المجموعة هي مزدوجة .

يمكن تعويض هذه المزدوجة بمزدوجة بسيطة . ويتم ذلك بأشكال عديدة . فنشئ مثلاً من نقطة ٠ مستويًا عمودياً على G . ثم نبحث في هذا المستوي

عن شعاع V_1 (شكل ٦) عزمه

في ٠ يساوي G (هنالك أشعة

عديدة) .

فاذا انشأنا من ٠ شعاعاً V_2

يعاكس V_1 :

$$V_2 = -V_1$$

لكانت المزدوجة المؤلفة من الشعاعين

V_1 و V_2 مكافئة للمزدوجة المفروضة (لان عزمها في ٠ هو G) .

نستخلص بما تقدم النظرية التالية :

٢٨- نظرية : الشرط اللازم والكافي لتكون مجموعة اشعة مكافئة لمزدوجة

هو ان تكون الحاصلة العامة للمجموعة مساوية للصفر ويكون عزمها الحاصل في

نقطة ما غير مساوٍ للصفر .

الحالة الثالثة : نفرض ان $V = 0$ و $G = 0$.

فقد رأينا أن المجموعة تكافئ الصفر .

الحالة العامة : نفرض ان $V \cdot G \neq 0$.

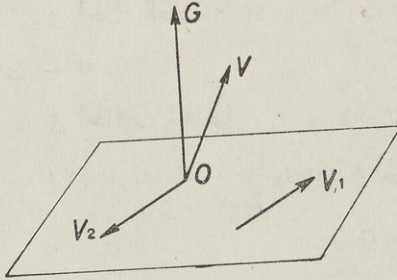
في هذه الحالة يكون :

$$V \neq 0 \quad \text{و} \quad G \neq 0 \quad \text{و} \quad (\widehat{V, G}) \neq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{او} \quad V \neq 0 \quad \text{و} \quad G_v \neq 0$$

نرى أنه يمكن رد مجموعة الاشعة المفروضة الى مجموعة بسيطة مؤلفة من شعاع هو V ومزدوجة محورها G . ويتم ذلك بأشكال عديدة .

لننشئ مثلاً من نقطة O (وهي نقطة اختيارية) مستويًا عمودياً على G



(شكل ٧)

ونبحث في هذا المستوي عن شعاع V_1 (شكل ٧) بحيث يكون عزمه في O مساوياً G (هنالك اشعة عديدة) . فاذا انشأنا من O شعاعاً V_2 يعاكس الشعاع V_1 :

$$V_2 = - V_1$$

فالمجموعة المؤلفة من الاشعة الثلاثة

OV و V_1 و V_2 تكافئ المجموعة المفروضة (لان لكل من المجموعتين حاصلة عامة واحدة هي V ، وعزماً حاصلًا واحدًا في O هو G) .

هذا واذا استبدلنا بالشعاعين المتلاقين OV و OV_2 حاصلتهما ، ولنرمز

لها بـ OV' ، نكون بذلك قد رددنا المجموعة المفروضة الى شعاعين فقط هما OV' و V_1 .

والخلاصة ، يمكن رد مجموعة اشعة في الحالة العامة الى شعاع ومزدوجة او

الى شعاعين .

ملاحظة : لقد فرضنا في الحالة العامة ان الثابت الجبري $V \cdot G$ لا يساوي

الصفر . ونلاحظ ، في جميع الحالات الخاصة ، ان الثابت الجبري هذا يساوي الصفر .

اذن يمكن القول انه في الحالة العامة يكون :

$$V \cdot G \neq 0$$

وان الحالات الخاصة ترتبط جميعها بالعلاقة :

$$V \cdot G = 0$$

٢٩- نتيجة : نستخلص مما تقدم انه يمكن رد مجموعة أشعة بوجه عام كما يلي :

في الحالة العامة : $V \cdot G \neq 0$ ، فالمجموعة ترد الى شعاع ومزدوجة او الى شعاعين .

في الحالات الخاصة : $V \cdot G = 0$ ، نميز ثلاث حالات :

(١) $V \neq 0$ ، فالمجموعة ترد الى شعاع وحيد ينزلق على المستقيم :

$$OA \wedge V - G = 0$$

وهذا المستقيم هو المحور المركزي للمجموعة .

(٢) $V = 0$ و $G \neq 0$ ، فالمجموعة ترد الى مزدوجة بسيطة محورها G .

(٣) $V = 0$ و $G = 0$ ، المجموعة تكافئ الصفر .

٣٠ — المجموعة القبلية : لقد رأينا انه يمكن رد مجموعة أشعة في الحالة العامة

الى شعاع مبدؤه نقطة اختيارية O (وهو الحاصلة العامة OV) ومزدوجة (محورها OG) .

هذا ولو اخترنا النقطة O على المحور المركزي للمجموعة ، ورمزنا

لهذه النقطة بـ O' ، لكان العزم الحاصل للمجموعة في O' هو العزم الاصغري

$$O'G_v$$

ففي هذه الحالة يكون شعاعا الحاصلة العامة $O'V$ والعزم الحاصل في O'

محولين على المحور المركزي . وبذلك يمكن رد المجموعة الى شعاع $O'V$

ومزدوجة مستويها (اي مستوي شعاعها) عمودي على $O'V$.

نسمي المجموعة المؤلفة من الشعاع $O'V$ والمزدوجة التي مستويها عمودي

على $O'V$ بالمجموعة القبلية^(١) او بالقتل . ونسمي نقطة تطبيق ، ومنحى ،

وقياس الشعاع $0^\circ V$ بنقطة تطبيق ، ومنحى ، وقياس القتل .
واذا رمزنا للقيمة الجبرية للنسبة $\frac{G_v}{V}$ ، او للنسبة $\frac{G_v}{|V|}$ (الواردة في البند
١٨) بـ f :

$$f = \frac{G_v}{V} = \frac{G_v}{|V|}$$

فالكمية f نسميها بسهم القتل .
نرى ان مجموعة ما من الاشعة المنزلة تكافىء في الحالة العامة (أي حين
يكون $V \neq 0$ و $G_v \neq 0$) فتلاً حامله هو المحور المركزي ، وقياسه
واتجاهه هما قياس واتجاه الحاصلة العامة ، وسهمه هو f :

$$f = \frac{G \cdot V}{V^2} = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

وفي الحالة الخاصة ، حين يكون قياس الحاصلة العامة مساوياً الواحدة ،
تصبح قيمة السهم مساوية لـ G_v . واذا رمزنا لهذه القيمة بـ k يكون :

$$k = G \cdot V = LX + MY + NZ$$

نسمي المجموعة القليلة في هذه الحالة بالبرمية ^(١) (او البزال) ،
ونسمي الكمية k بوسيط البرمة أو خطوتها .
هذا وسنرى تطبيقات البرمة في ميكانيك الجسم الصلب .

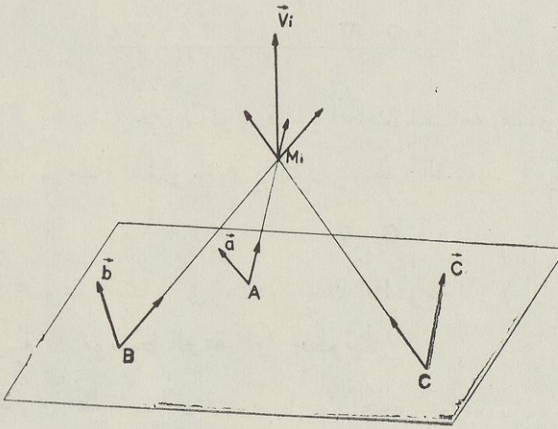
العمليات البسيطة :

٣١ — تعريف : نقول بأننا نجري عملية بسيطة على مجموعة أشعة منزلة
عندما :

(١) نضيف الى المجموعة ، او نحذف منها ، شعاعين منزلتين متعاكسين
مباشرة .

(٢) نستبدل بأشعة متلاقية من المجموعة حاصله هذه الاشعة ، او نستبدل بشعاع من المجموعة أشعة متلاقية حاصلتها الشعاع المفروض .
 فاذا أجرينا هذه العمليات على مجموعة أشعة حصلنا على مجموعة مكافئة للأولى ،
 لان هذه العمليات لا تغير الحاصل الانسحابية كما لا تغير العزم الحاصل في أية نقطة في الفراغ .

٣٢ — نظرية : يمكن ، بوساطة العمليات البسيطة ، رد مجموعة أشعة الى ثلاثة اشعة مبادؤها نقط اختيارية غير واقعة على استقامة واحدة .
 لتكن A و B و C النقط المفروضة ، و V_i أحد أشعة المجموعة .



(شكل ٨)

لنفرض ان هذا الشعاع غير واقع في المستوي ABC ، وأن مبدؤه ، وليكن M_i ، غير واقع ايضاً في هذا المستوي (وان كان M_i في المستوي نزلق الشعاع على حاملة ليصبح مبدؤه خارج المستوي) . وبذلك يمكن تفريق V_i الى ثلاثة اشعة محمولة على المستقيمت AM_i و BM_i و CM_i ، ثم نزلق هذه المركبات على حواملها حتى تقع مبادؤها في النقط A و B و C (شكل ٨) .

وقد يتفق ان يكون الشعاع V_i في المستوي ABC ، فيمكن تفرقة الى شعاعين يمر حاملهما من نقطتين من النقط المفروضة ، ثم نزلق هاتين المر كبتين على حامليهما حتى يقع مبدآهما على هاتين النقطتين .

فاذا فرقنا على هذا النحو جميع اشعة المجموعة واستبدلنا بكل واحد منها ثلاثة اشعة مبادؤها النقط A و B و C ، نكون بذلك قد استبدلنا بمجموعة الاشعة مجموعة مكافئة لها مؤلفة من اشعة متلاقية في A ، وليكن a حاصلتها ، واشعة متلاقية في B ، وليكن b حاصلتها ، واشعة متلاقية في C ، وليكن c حاصلتها . او نكون قد رددنا مجموعة الاشعة المفروضة الى الاشعة a و b و c المطبقة في النقط المفروضة A و B و C على الترتيب .

٣٣ — نظرية : يمكن ، بوساطة العمليات البسيطة ، رد مجموعة اشعة الى شعاعين مبدآ احدهما نقطة اختيارية .

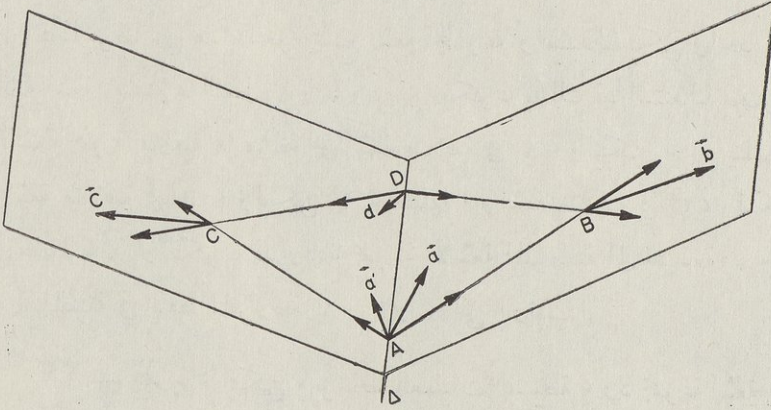
لتكن A النقطة الاختيارية المفروضة ، و B و C نقطتين ما غير واقعتين مع A على استقامة واحدة .

لنرد اشعة المجموعة المفروضة الى ثلاثة اشعة a و b و c مبادؤها النقط A و B و C على الترتيب (اعتماداً على النظرية السابقة) .

ليكن β مستويًا معينًا بالنقطة A والشعاع b ، و γ مستويًا معينًا بالنقطة A ذاتها والشعاع c (شكل q) . هذا المستويان يتقاطعان بوجه عام (وقد ينطبقان على بعضهما) . ليكن Δ فصلهما المشترك ، و D نقطة ما من Δ (وان انطبق المستويان على بعضهما تكون D نقطة ما من هذين المستويين) .

لنفرض ان الشعاع b غير منطبق على Δ ، وان مبدآه B غير واقع على Δ (وان كان B على Δ نزلق الشعاع على حامله ليصبح مبدؤه خارج Δ) . فيمكن حينئذ تفريق b الى شعاعين محمولين على المستقيمين AB و DB ، ثم نزلق هاتين المر كبتين على حامليهما حتى يقع مبدآهما في النقطتين A و D .

وان كان الشعاع b محمولاً على d ، نزلقه على حامله حتى يقع مبدؤه في
احدى النقطتين A او D .



(شكل ٩)

نفرِّق على هذا النحو الشعاع c الى شعاعين مبدأهما النقطتان A و D ، ثم
نستبدل بالاشعة الثلاثة المطبقة في A حاصلتها ، ولتكن a' ، وبالشعاعين
المطبقيين في D حاصلتهما ، ولتكن d . فبذلك نكون قد استبدلنا بمجموعة
الاشعة المفروضة مجموعة مكافئة لها مؤلفة من الشعاعين a' و d ، او نكون قد
رددنا مجموعة الاشعة الى شعاعين مبدأ احدهما النقطة المفروضة A .

٣٤- نتائج: — نستخلص من النظرية الاخيرة النتائج التالية :

(١) اذا اضفنا الى الشعاعين الناتجين Aa' و Dd الشعاعين المتعاكسين مباشرة :

$$Ad' = Dd$$

$$Ad'' = - Dd$$

فالمزدوجة المعينة بالشعاعين Dd و Ad'' تؤلف مع حاصلة الشعاعين
 Aa' و Ad' مجموعة مكافئة لمجموعة الاشعة المفروضة .

اذن يمكن ، بوساطة العمليات البسيطة ، رد مجموعة اشعة الى شعاع مبدؤه
نقطة اختيارية ومزدوجة .

(٢) اذا كانت مجموعة الأشعة المفروضة مكافئة للصفر ، فالشعاعان Dd , Aa' يؤلفان مجموعة مكافئة للصفر .

ففي هذه الحالة ، يصبح Dd , Aa' متعاكسين مباشرة (لان حاصلتهما الانسحابية تساوي الصفر وعزمهما الحاصل في نقطة ما يساوي ايضاً الصفر) ويمكن حذفهما (اعتماداً على احدى العمليات البسيطة) .

اذن عندما تكافئ مجموعة اشعة الصفر ، يمكن بوساطة العمليات البسيطة حذف جميع اشعة المجموعة ، أو كما يقال ، رد المجموعة الى الصفر .

(٣) ليكن S و S' مجموعتي أشعة متكافئتين و S_1 مجموعة أشعتها تعاكس مباشرة أشعة S' . فالحاصلة العامة والعزم الحاصل في نقطة ما o للمجموعة S_1 هما شعاعان يعاكسان مباشرة شعاعي الحاصلة العامة والعزم الحاصل في o للمجموعة S' أو المجموعة S .

فاذا أضفنا الى المجموعة S المجموعتين S' و S_1 ولاحظنا انه يمكن (اعتماداً على النتيجة السابقة) حذف المجموعة المؤلفة من S و S_1 (لأنها تكافئ الصفر) ، لا ذكرنا أنه يمكن بوساطة العمليات البسيطة الانتقال من المجموعة S الى المجموعة المكافئة لها S' .

اذن يمكن بوساطة العمليات البسيطة الانتقال بوجه عام من مجموعة أشعة الى مجموعة مكافئة لها .

تمارين

- ١ - ما هي الشروط اللازمة والكافية :
 - (١) لكي يتكافأ شعاعان مفروضان .
 - (٢) لكي تكافئ مجموعة مؤلفة من شعاعين مفروضين الصفر .
- ٢ - عين الشروط لتكون مجموعة أشعة مفروضة مكافئة لشعاع وحيد :
 - (١) مار من نقطة مفروضة .
 - (٢) او محمول على مستقيم معلوم .
 - (٣) أو يلاقي مستقيماً معلوماً ويكون عموداً عليه .
- ٣ - أوجد مجموعة مؤلفة من شعاعين على أن تكون هذه المجموعة مكافئة لمجموعة مفروضة ، وأن يكون أحد شعاعها محمولاً على مستقيم معلوم .
- ٤ - يطالب رد مجموعة أشعة الى شعاعين على ان يكون أحدهما في مستو معلوم والآخر عمودياً على هذا المستوي .
- ٥ - كيف تُرد مجموعة أشعة اذا علم ان عزومها الحاصلة :
 - (١) بالنسبة لأضلاع مثلث معلوم مساوية للصفر .
 - (٢) أو بالنسبة لرؤوس مثلث معلوم متساوية فيما بينها .
- ٦ - لدينا رباعي وجوه ABCD ومجموعة الأشعة :

$$a = \alpha AB \quad b = \beta BC \quad c = \gamma CD \quad d = \delta DA$$

ما هي الشروط لكي تُرد هذه المجموعة :

 - (١) الى شعاع وحيد
 - (٢) الى مزدوجة .

٧ - برهن أن المسقطين القائمين على مستو لمجموعتين متكافئتين هما مجموعتان متكافئتان .

٨ - كيف ترد مجموعة اذا علم أن مسقطها القائم على مستو يكافئ الصفر .

٩ - برهن أنه يمكن ، بواسطة العمليات البسيطة ، رد مجموعة أشعة الى ستة أشعة محمولة على أحرف رباعي وجوه مفروض .

ثم برهن أنه لا يوجد إلا مجموعة واحدة اشعتها محمولة على احرف رباعي الوجوه المفروض ومكافئة للمجموعة المفروضة .

١٠ - برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تكافئ مجموعة أشعة الصفر ، هو أن تكون العزوم الحاصلة للمجموعة بالنسبة لأحرف رباعي وجوه ما مساوية للصفر .

١١ - برهن أن الشرط اللازم والكافي لتكافؤ مجموعتي أشعة هو أن يكون للمجموعتين عزوم حاصلة واحدة بالنسبة للمستقيمات الحاملة لأحرف رباعي وجوه ما .

١٢ - برهن أن الشرط اللازم والكافي لكي تكافئ مجموعة اشعة الصفر هو أن تكون العزوم الحاصلة للمجموعة بالنسبة لثلاث نقط (غير واقعة على استقامة واحدة) مساوية للصفر .

١٣ - برهن أن الشرط اللازم والكافي لتكافؤ مجموعتي أشعة هو أن يكون للمجموعتين عزوم حاصلة واحدة بالنسبة لثلاث نقط (على غير استقامة واحدة) .

١٤ - لدينا مجموعة الأشعة AB و BC و CD و DA . ما هو الشرط لكي تكافئ هذه المجموعة الصفر .

الفصل الرابع

رد بعض المجموعات الخاصة

تمهيد : رأينا في الفصل السابق أن أية مجموعة من الأشعة المنزلقة ترد في الحالة العامة (أي حين يكون $V.G \neq 0$) الى شعاع ومزدوجة ، وترد في الحالات الخاصة (حين يكون $V.G = 0$) الى شعاع أو مزدوجة أو الصفر . سنبحث الآن في رد بعض مجموعات خاصة وشهيرة ، وهي :
مجموعة الأشعة المتلاقية ، ومجموعة الأشعة الواقعة في مستو واحد ، ومجموعة الأشعة المتوازية .
وسنرى أن هذه المجموعات تدخل في نطاق الحالات الخاصة فحسب .
فيمكن رد كل منها الى شعاع أو مزدوجة أو الصفر .

مجموعة الرؤسة المتلاقية :

٣٥ — رد المجموعة : لنفرض مجموعة أشعة متلاقية في نقطة A . لننشئ في A حاصلة هذه الأشعة ، ولنرمز لهذه الحاصلة بـ R .
نعلم أن الحاصلة العامة V لهذه المجموعة هو شعاع يساوي R . وإذا لاحظنا أن العزوم في نقطة التلاقي A لأشعة المجموعة هي مساوية للصفر ، وأن عزم الحاصلة في النقطة ذاتها يساوي ايضاً الصفر ، لا دركنا أن الثابت الجبري يساوي الصفر وأن الحاصلة R هي الشعاع الوحيد الذي يكافئ المجموعة المفروضة .

ونرى أنه إذا كان $R \neq 0$ ، فالمجموعة ترد الى الحاصلة R (الحالة الخاصة الأولى) .

وان كان $R = 0$ ، فالمجموعة ترد الى الصفر (الحالة الخاصة الثالثة) .

مجموعة الأشعة الواقعة في مستو واحد :

٣٦ - رد المجموعة : لتكن V_1 و V_2 و ... و V_n مجموعة أشعة

واقعة في مستو واحد ، وليكن π هذا المستوي .

لننشئ من نقطة ما o من هذا المستوي الحاصلة العامة V . فنجد أن هذا الشعاع هو واقع في المستوي π ، أو يساوي الصفر .

ثم ننشئ عزوم الاشعة في o ، فنجد أن هذه الاشعة عمودية على المستوي π . فالعزم الحاصل في o للمجموعة يكون اذن عمودياً على π أو يساوي الصفر .

ينتج من ذلك أن الثابت الجبري للمجموعة يساوي الصفر :

$$V \cdot G = 0$$

فحالات رد مجموعة أشعة ، باستثناء الحالة العامة ، تكون اذن ممكنة جميعها .
او نقول ان رد مجموعة اشعة واقعة في مستو واحد يدخل في نطاق الحالات الخاصة فحسب .

واذا فرضنا مجموعة محاور احداثية (قائمة ومباشرة) $oxyz$ ، واختونا المحورين ox و oy في المستوي π ، لكانت مركبات V هي (Z, Y, O) ومركبات العزم الحاصل G في مبدأ الاحداثيات o هي (O, O, N) .
فالمجموعة اذن ثلاث احداثيات هي X و Y و N .

$$V \neq 0 \quad \text{فإذا كان}$$

$$X^2 + Y^2 \neq 0 \quad \text{اي}$$

فالمجموعة ترد الى شعاع وحيد (هو الحاصلة R) ، مركباته هي (X, Y, O) .
هذا الشعاع ينزلق على المستقيم :

$$xY - yX - N = 0$$

$$G \neq 0 \quad \text{و} \quad V = 0 \quad \text{واذا كان}$$

أي اذا كان $Y = 0$ و $X = 0$

وكان $N \neq 0$

فالمجموعة ترد الى مزدوجة بسيطة محورها عمودي على المستوي π (شعاعها في المستوي π او في مستويوازيه) .

أما اذا كان $G = 0$ و $V = 0$

اي اذا كان $X = 0$ و $X = 0$

وكان $N = 0$

فالمجموعة تكافئ الصفر .

٣٧ - رد المجموعة بالعمليات البسيطة : يمكن بوساطة العمليات البسيطة

رد الاشعة الواقعة في مستو واحد الى شعاع او مزدوجة أو الصفر .

نفرض الآن شعاعين V_1 و V_2 واقعين في مستو π ومحمولين على المستقيمين

D_1 و D_2 .

فان كان المستقيمان D_1 و D_2 متلاقين في نقطة A ، نزلق الشعاعين على

حامليهما حتى يقع مبدآهما في A ، ثم نستبدل بهما حاصلتهما R .

وان كان D_1 و D_2 متوازيين وكان الشعاعان V_1 و V_2 غير متعاكسين

(أي لا يؤلفان مزدوجة) ، نردهما الى شعاعين واقعين على مستقيمين متلاقين ،

وذلك بأن نضيف اليهما شعاعين متعاكسين مباشرة (القياس المشترك لهما

اختياري ومبدآهما مبدآ الشعاعين المفروضين) .

واذا فرضنا عدة أشعة في المستوي π ، نبدأ برد شعاعين منها ، ثم نتابع

الرد الجزئي على التوالي حتى الشعاع الاخير .

هذا وهناك طريقة تخطيطية لرد الاشعة الواقعة في مستو واحد ،

سنوردها في مبحث توازن المجموعات المادية .

مجموعة الأشعة المتوازية :

٣٨ - رد المجموعة : لنفرض مجموعة أشعة متوازية V_1 و V_2 و ... و V_n

مبادؤها A_1 و A_2 و ... و A_n على الترتيب .

ليكن Δ محوراً موازياً للمنحنى المشترك لهذه الأشعة . فاذا أنشأنا من نقطة ما O في الفراغ ، الحاصلة العامة V لهذه الأشعة ، لوجدنا ان V يوازي Δ أو يساوي الصفر .

وإذا لاحظنا أن عزوم الأشعة في O تقع في المستوي العمودي في O على Δ ، وان العزم الحاصل G في O يقع بالتالي في هذا المستوي أو يساوي الصفر ، لوجدنا أن الثابت الجبري للمجموعة يساوي الصفر :

$$V \cdot G = 0$$

وأن حالات الاختزال الممكنة هي الحالات الخاصة فحسب .

هذا وإذا رمزنا بـ u لشعاع واحدة المحور Δ ، وبـ V_1 و V_2 و ... و V_n للقيم الجبرية للأشعة المفروضة (مقدرة على Δ) لكانت الحاصلة العامة لهذه الأشعة :

$$V = \sum V_i = \sum (V_i \cdot u)$$

$$V = (\sum V_i) u \quad \text{أو}$$

وكان العزم الحاصل للمجموعة في O :

$$G = \sum OA_i \wedge V_i = \sum OA_i \wedge V_i u$$

$$G = \sum (V_i \cdot OA_i) \wedge u \quad \text{أو}$$

وهنا نميز عدة حالات :

الحالة الأولى : $\sum V_i \neq 0$ أو $V \neq 0$

نرى ، اعتماداً على مركز نقط ، أنه توجد نقطة وحيدة C تحقق العلاقة :

$$\sum V_i \cdot OA_i = (\sum V_i) OC$$

هي مركز النقط A_1 و A_2 و ... و A_n ، وقد أسند الى هذه النقط الامثال V_1 و V_2 و ... و V_n .

فالعزم الحاصل في o يصبح اذن :

$$G = (\sum V_i) OC \wedge u = OC \wedge (\sum V_i) u$$

$$G = OC \wedge V \quad \text{او}$$

فمجموعة الأشعة المفروضة تكافئ اذن شعاعاً وحيداً R (وهو حاصلة الأشعة) ينزلق على المستقيم :

$$OC \wedge R - G = 0$$

أما النقطة C التي تتعين من العلاقة :

$$(23) \quad OC = \frac{\sum V_i \cdot OA_i}{\sum V_i}$$

فتدعى بمركز الأشعة المتوازية .

ملاحظة : رأينا في تكافؤ مجموعات الاشعة واختزالها ، أنه يمكن زلق هذه الاشعة على حواملها ، وأن نتائج التكافؤ والاختزال لا تتوقف على مواضع مبادئ الاشعة على هذه الحوامل .

لكننا نلاحظ هنا أن مركز الأشعة المتوازية يتوقف تعيينه على مواضع مبادئ هذه الاشعة .

ولتعيين المركز C لأشعة متوازية نعتبر هذه الاشعة مثبتة ، وعندئذ نردها الى شعاع وحيد مثبت مبدؤه C . نسمي هذا الشعاع بحاصلة الأشعة المتوازية المثبتة .

نتيجة : ينتج من العلاقة (23) أن موضع C ، مركز الأشعة المتوازية ، هو تابع لمواضع مبادئ الأشعة ، كما هو تابع أيضاً للقيم الجبرية لهذه الأشعة . فهو لا يتقيد مثلاً بالمنحى المشترك للأشعة . فلو دارت الأشعة جملة حول مبادئ بحيث تبقى متوازية فيما بينها ومحافطة على قيمها الجبرية ، فإن مركزها يبقى ثابتاً في موضعه . ونرى أن المركز يبقى ثابتاً أيضاً حين نضرب كلاً من أشعة المجموعة بعدد واحد .

الحالة الثانية : $\Sigma V_i = 0$ أو $V = 0$

$$\Sigma V_i \cdot OA_i \neq 0 \quad \text{و}$$

نلاحظ في هذه الحالة أنه لا يوجد مركز للنقط A_1 و A_2 و ... و A_n . كما نلاحظ أيضاً أن المجموع الهندسي $\Sigma V_i \cdot OA_i$ يبقى مساوياً لشعاع ثابت مهما تنقلت النقطة O في الفراغ . فإذا رمزنا لهذا الشعاع الثابت بـ H ، لا أصبح العزم الحاصل للأشعة المفروضة :

$$G = H \wedge u$$

فالعزم الحاصل G يغدو في هذه الحالة ثابتاً مهما تغير مركز العزم . فإذا كان H لا يوازي u ، فالمجموعة تكافئ مزدوجة (لأن $G \neq 0$) ، وترد الى مزدوجة بسيطة محورها G .

أما إذا كان H يوازي u ، يصبح $G = 0$ ، فالمجموعة تكافئ الصفر .

الحالة الثالثة : $\Sigma V_i = 0$ و $\Sigma V_i \cdot OA_i = 0$

$$G = 0 \quad \text{و} \quad V = 0 \quad \text{أو}$$

فالمجموعة تكافئ الصفر مهما كان اتجاه المنحى المشترك للأشعة المفروضة .

ملاحظة : رأينا في الحالتين الاخيرتين أن مجموعة الاشعة المتوازية تغدو مكافئة للصفر حين يكون

$$V = 0$$

ويكون أيضاً $H // u$ أو $H = 0$

هذا ويمكن ايضاح هذه النتيجة اذا عمدنا الى الانشاء التالي :

نستبدل ، في المجموعة المفروضة ، بالاشعة المتوازية والمتحدة بالاتجاه حاصلتها . فنجد حاصلتين باتجاهين متعاكسين ، احدهما V' ، وليكن C' مركزها ، والثانية V'' ، وليكن C'' مركزها . وبما أن $V = 0$ ، فيكون :

$$V'' = -V'$$

فالمجموعة المفروضة تكافئ مزدوجة ، وتزد (بفرض أن اشعة المجموعة مثبتة) الى المزدوجة البسيطة المؤلفة من الشعاعين V' و V'' .

نرى أنه حين تدور أشعة المجموعة حول مبادئها ، يدور الشعاعان V' و V'' حول مبدئيها C' و C'' ، وتبقى المجموعة في جميع أوضاعها أثناء الدوران مكافئة لمزدوجة إلا في وضع واحد تكون فيه الأشعة موازية للمستقيم $C'C''$ (ويكون بالتالي H موازياً u) . ففي هذا الوضع تغدو المجموعة مكافئة للصفر .

فهناك إذن منحنى واحد للأشعة المفروضة تصبح فيه المجموعة مكافئة للصفر ، بينما تكون في جميع الاوضاع الباقية مكافئة لمزدوجة .

هذا ولو اتفق أن انطبق المبدأ C' على C'' (وهو ما يوافق $H = 0$) ، لغدت المجموعة آنئذٍ مكافئة للصفر مهما كان منحنى الأشعة المشترك .

نماذج

- ١ - اذا كافات ثلاثة اشعة الصفر لكانت هذه الاشعة في مستو واحد .
- ٢ - اذا كان شعاعين حاصلة فان هذين الشعاعين يقعان في مستو واحد .
- ٣ - لدينا شعاعان متوازيان V_1 و V_2 مبدآهما A_1 و A_2 . فاذا فرض ان C هو مركز هذين الشعاعين و V حاصلتهما ، فالمطلوب اثبات ان :

$$\frac{V_1}{r_1} = \frac{V_2}{r_2} = \frac{V}{r}$$

- بفرض ان r_1 و r_2 و r هي الاشعة A_2C و CA_1 و A_2A_1 على التوالي .
- ٤ - لدينا ثلاثة اشعة متوازية V_1 و V_2 و V_3 ، مبادؤها A_1 و A_2 و A_3 غير واقعة على استقامة واحدة . فاذا فرض ان V هو حاصلة هذه المجموعة ، و C مركزها ، فالمطلوب اثبات ان :

$$\frac{V_1}{S_1} = \frac{V_2}{S_2} = \frac{V_3}{S_3} = \frac{V}{S}$$

- بفرض ان S_1 و S_2 و S_3 و S هي القيم الجبرية لسطوح المثلثات CA_2A_3 و CA_3A_1 و CA_1A_2 و $A_1A_2A_3$ على التوالي .

٥ - كيف تصبح المسألة السابقة لو كان لدينا أربعة اشعة مبادؤها رؤوس رباعي وجوه معلوم .

٦ - فرق شعاعاً معلوماً الى شعاعين متوازيين اذا علم مبدآهما او قياس كل منهما او علم احدهما .

٧ - فرق شعاعاً الى ثلاثة اشعة متوازية مبادؤها رؤوس مثلث مفروض .

٨ - فرق شعاعاً الى أربعة اشعة متوازية مبادؤها رؤوس رباعي

وجوه معلوم .

الباب الثاني

علم الحركة

الفصل الأول

الحركات البسيطة لمجموعة متماسكة

معلومات أولية :

٣٩ — تعريف : يقال عن نقط مادية انها تؤلف مجموعة متماسكة او جسماً صلباً اذا كانت ابعادها المتبادلة ثابتة لا تتغير مع الزمن .

٤٠ — تعيين وضع جسم : اذا فرضنا ان نقط جسم ليست واقعة جميعها على استقامة واحدة ، فانه يكفي معرفة مواضع ثلاث نقط من الجسم (غير كائنة على مستقيم واحد) لتعيين موضع أية نقطة من الجسم .

و اذا تصورنا فراغاً متماسكاً مع جسم متحرك مفروض ، ورمزنا بـ S لمجموعة محاور احداثية $oxyz$ (قائمة ومباشرة) متماسكة مع هذا الفراغ ، ورمزنا بـ S_1 لمجموعة محاور احداثية $o_1x_1y_1z_1$ (قائمة ومباشرة) متماسكة مع الفراغ الثابت ، لرأينا ان حركة الجسم في الفراغ الثابت تتعين تماماً حين تعلم حركة S بالنسبة لـ S_1 .

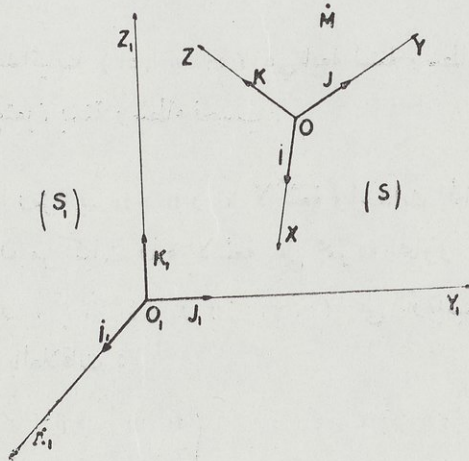
ونرى ان تعيين وضع S بالنسبة لـ S_1 يستلزم معرفة ستة وسطاء مستقلة . بالحقيقة ، لنرمز بـ (x_0, y_0, z_0) لاحداثيات O ، وبـ (x, y, z)

و (x_1, y_1, z_1) لاحداثيات نقطة ما M من الجسم بالنسبة لـ S_1 و S على الترتيب ، وبـ $i(x, \beta, \gamma)$ و $j(x', \beta', \gamma')$ و $k(x'', \beta'', \gamma'')$ لاشعة واحداث المحاور ox و oy و oz على التوالي (شكل ١٠) . فاذا اسقطنا العلاقة :

$$\begin{aligned} O_1 M &= O_1 O + O M \\ (24) \quad O_1 M &= O_1 O + x i + y j + z k \end{aligned} \quad \text{او}$$

على محاور المجموعة S_1 ، لوجدنا :

$$(25) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + x x + x' y + x'' z \\ y_1 = y_0 + \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ z_1 = z_0 + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{cases}$$



(شكل ١٠)

وهذه المعادلات هي العلاقات المعروفة في الهندسة التحليلية ^(١) بدساتير نقل المحاور .

نرى ان (x, y, z) ، وهي احداثيات M بالنسبة لـ S ، هي مقادير ثابتة

(١) الجزء الاول من كتاب الهندسة التحليلية (ص ٥٦) .

لا تتغير مع الزمن . اما (x_0, y_0, z_0) ، وهي احداثيات O ، و (x, β, γ) و (x', β', γ') و (x'', β'', γ'') ، وهي مركبات اشعة الواحدات i و j و k على الترتيب ، فهي مقادير متغيرة تابعة للزمن .

ينتج من ذلك ان (x_1, y_1, z_1) ، وهي احداثيات M بالنسبة لـ S_1 ، هي تابعة اذن لوسطاء متغيرة عددها ١٢ .

واذا لاحظنا ان مركبات اشعة الواحدة i و j و k هي مرتبطة بالعلاقات الست :

$$(26) \quad \begin{cases} i^2 = x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \\ j^2 = x'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1 \\ k^2 = x''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} i \cdot j = x x' + \beta \beta' + \gamma \gamma' = 0 \\ j \cdot k = x' x'' + \beta' \beta'' + \gamma' \gamma'' = 0 \\ k \cdot i = x'' x + \beta'' \beta + \gamma'' \gamma = 0 \end{cases}$$

لاؤر كنا ان الاحداثيات (x_1, y_1, z_1) هي تابعة لسته وسطاء مستقلة فقط .
او ان الجسم S يتعين بستة وسطاء فحسب .

ملاحظة : اذا رمزنا بـ i_1 و j_1 و k_1 لاشعة واحداث المحاور ox_1 و oy_1 و oz_1 ، لرأينا ان مركبات هذه الاشعة على مجموعة المحاور ox و oy و oz هي (x, x', x'') و (β, β', β'') و $(\gamma, \gamma', \gamma'')$ على الترتيب ، وان هذه المركبات مرتبطة بالعلاقات :

$$(27) \quad \begin{cases} i_1^2 = x^2 + x'^2 + x''^2 = 1 \\ j_1^2 = \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\ k_1^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} i_1 \cdot j_1 = x \beta + x' \beta' + x'' \beta'' = 0 \\ j_1 \cdot k_1 = \beta \gamma + \beta' \gamma' + \beta'' \gamma'' = 0 \\ k_1 \cdot i_1 = \gamma x + \gamma' x' + \gamma'' x'' = 0 \end{cases}$$

وهي علاقات مكافئة للعلاقات (26) .

فاذا اسقطنا العلاقة :

$$OM = O_1 M - O_1 O$$

$$(28) \quad OM = (x_1 - x_0) i_1 + (y_1 - y_0) j_1 + (z_1 - z_0) k_1 \quad \text{او}$$

على المحاور ox و oy و oz لحصلنا على دساتير النقل من المجموعة S_1 الى المجموعة S ، وهي :

$$(29) \quad \begin{cases} x = (x_1 - x_0) \alpha + (y_1 - y_0) \beta + (z_1 - z_0) \gamma \\ y = (x_1 - x_0) \alpha' + (y_1 - y_0) \beta' + (z_1 - z_0) \gamma' \\ z = (x_1 - x_0) \alpha'' + (y_1 - y_0) \beta'' + (z_1 - z_0) \gamma'' \end{cases}$$

٤١ -- نظرية : الشرط اللازم والكافي لكي تتحرك مجموعة نقط كمجموعة متماسكة هو ان يكون مسقطا سرعتي نقطتين اختياريتين A و B من المجموعة على المستقيم الواصل بين هاتين النقطتين متساويين .

لزوم الشرط : لتكن A و B نقطتين من المجموعة . نعلم ان :

$$(AB)^2 = AB \cdot AB$$

وبما ان قياس AB ثابت (حسب الفرض) ولنرمز له بـ ℓ ، فيكون :

$$(AB)^2 = \ell^2$$

واذا اشتققنا بالنسبة للزمن يكون :

$$2 AB \cdot \frac{dAB}{dt} = 0$$

هذا واذا اعتبرنا O نقطة ما ثابتة في الفراغ ، يكون :

$$AB = OB - OA$$

$$AB = B - A$$

او

وبالتالي يكون :

$$\frac{dAB}{dt} = \frac{dB}{dt} - \frac{dA}{dt}$$

وإذا لاحظنا ان $\frac{dB}{dt}$ و $\frac{dA}{dt}$ هما سرعتا النقطتين A و B ، ولنرمز لهما بـ V_A و V_B ، لكان :

$$\frac{dAB}{dt} = V_B - V_A$$

ولأصبحت بالتالي العلاقة السابقة :

$$AB (V_B - V_A) = 0$$

$$AB \cdot V_B = AB \cdot V_A \quad \text{او}$$

وإذا رمزنا بـ a و b لمسقطي سرعتي A و B على AB (باعتبار AB محوراً موجهاً) ، فالعلاقة الاخيرة تكتب :

$$|AB| \cdot b = |AB| \cdot a$$

$$b = a \quad \text{او}$$

وبعد الاختصار على e نجد :

$$b = a$$

وهو المطلوب .

كفاية الشرط : تبرهن بالعلاقات السابقة بعد عكس التسلسل في ترتيبها .

نتيجة : نستخلص من النظرية السابقة أن ساحة السرعة لجسم متحرك هي ساحة عزوم . بمعنى أن سرعة نقط جسم تنطبق على العزوم الحاصلة في تلك النقط لمجموعة من الاشعة المنزلة .

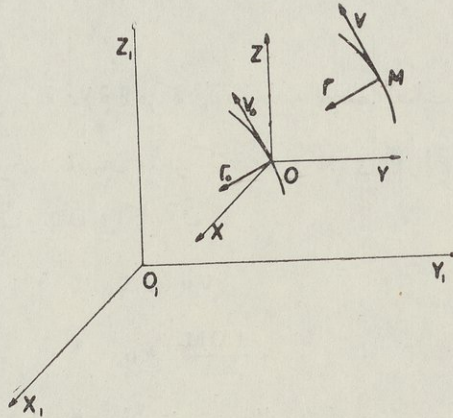
الحركة الانسحابية :

٤٢ — تعريف : نقول إن حركة جسم هي انسحابية اذا بقي شعاع ما من الفراغ المتحرك (أي الفراغ المتماك مع الجسم) مساوياً لنفسه أثناء الحركة .

يتضح من هذا التعريف أن حركة الجسم تتعين تماماً حين تعلم حركة إحدى نقطة .

فإذا فرضنا نقطتين اختياريتين o و M من الجسم (o نعتبرها مبدأ للاحداثيات و M نقطة ما من الجسم) ، فالشعاع OM يبقى مساوياً لنفسه أثناء الحركة . فمسار M ينتج اذن من مسار o بانسحاب هيندي معين بالشعاع OM .

٤٣ - تعيين وضع الجسم : نرى ، اعتماداً على تعريف الحركة الانسحابية ، أنه يمكن اختيار مجموعة المحاور المتحركة xyz (شكل ١١) موازية لمحاور



(الشكل ١١)

المجموعة الثابتة $o_1 x_1 y_1 z_1$ ومتعدة معها بالاتجاه (لان هذه المحاور تبقى موازية لنفسها أثناء الحركة) . فالعلاقات (25) التي تعين موضع M تصبح :

$$(30) \quad \begin{cases} x_1 = x_0 + x \\ y_1 = y_0 + y \\ z_1 = z_0 + z \end{cases}$$

٤٤ - السرعة : بما أن الشعاع OM يبقى ثابتاً أثناء الحركة (حسب التعريف) ، فيكون :

$$\frac{d OM}{dt} = 0$$

وقد رأينا أن :

$$\frac{d OM}{dt} = V_M - V_o$$

فيكون إذن :

$$V_M = V_o$$

ففي الحركة الانسحابية لجسم صلب تكون سرع نقط الجسم في لحظة ما متساوية فيما بينها .

هذه الخاصة هي صفة مميزة للحركة الانسحابية للجسم الصلب .

بالحقيقة ، إذا فرضنا نقطتين متحركتين O و M في الفراغ ، وكان لهما تين النقطتين سرعتان متساويتان في كل آن :

$$V_M = V_o$$

$$\frac{d OM}{dt} = 0$$

لكان

وكان بالتالي OM شعاعاً ثابتاً لا يتغير مع الزمن .

نستخلص من ذلك انه لو تحركت مجموعة نقط بحيث تبقى اشعة سرعها في أية لحظة متساوية فيما بينها ، فالمجموعة تكون متماسكة من جهة ، وتكون حركتها انسحابية من جهة ثانية .

ملاحظة : لقد رأينا في نتيجة سابقة (ص ٦٤) ، أن ساحة السرعة لجسم متحرك هي ساحة عزوم .

ونرى هنا في الحركة الانسحابية أن ساحة السرعة هي ساحة عزوم منتظمة .
 فسرعة اية نقطة من الجسم تنطبق على العزم الحاصل في تلك النقطة لمجموعة
 أشعة مكافئة لمزدوجة . فهي تنطبق اذن على محور هذه المزدوجة .

٤٥ — التسارعات : لقد رأينا ان :

$$V_M = V_o$$

فاذا اشتققنا بالنسبة للزمن نجد :

$$\Gamma_M = \Gamma_o$$

ففي الحركة الانسحابية لجسم صلب تكون تسارعات نقط الجسم في لحظة ما
 متساوية فيما بينها .

هذه الخاصة ليست كسابقتها صفة مميزة للحركة الانسحابية لجسم صلب .
 فاذا فرضنا نقطتين o و M في الفراغ ، وكان :

$$\Gamma_M = \Gamma_o$$

$$\frac{d V_M}{d t} = \frac{d V_o}{d t} \quad \text{او}$$

فانا نجد (بعد التكامل) :

$$V_M = V_o + a$$

بفرض ان a هو شعاع طليق ثابت ، وهو ثابت التكامل .

$$V_M \neq V_o \quad \text{نرى ان}$$

فالحركة اذن ليست بوجه عام انسحابية .

واذا لاحظنا ان العلاقة السابقة يمكن كتابتها :

$$\frac{d M}{d t} = \frac{d o}{d t} + a$$

لوجدنا (بعد التكامل) :

$$M = o + a t + b \quad (b \text{ ثابت التكامل})$$

$$OM = a t + b$$

او

نرى ان الشعاع OM يتغير مع الزمن . فالنقط المتحركة اذن ليست متماسكة . هذا واذا فرضنا ان النقطتين o و M متماسكتان (اي نقطتان من جسم صلب) ، يكون $|OM|$ ثابتاً ، ويكون بالتالي $a = 0$ (اعتماداً على العلاقة الاخيرة) . وعندئذ يصبح الشعاع OM ثابتاً وتعدو الحركة انسيابية . نستخلص من ذلك انه اذا تحركت مجموعة نقط وكانت تسارعات هذه النقط في لحظة ما متساوية فحركة المجموعة تعدو انسيابية ان كانت هذه المجموعة متماسكة .

الحركة الدورانية :

٤٦ - تعريف : نقول ان حركة جسم هي دورانية ، اذا بقيت نقطتان من الفراغ المتحرك ثابتتين اثناء الحركة . نرى أن نقط المستقيم الواصل بين النقطتين الثابتتين تكون هي ايضاً ثابتة . نسمي هذا المستقيم بمحور الدوران .

٤٧ - تعيين وضع الجسم : لتعيين وضع الجسم الدائر يكفي معرفة موضع نقطة ما من الجسم غير واقعة على محور الدوران ، أو معرفة وضع نصف المستوي المار من هذه النقطة ومحور الدوران . ويتعين هذا الوضع بالزاوية θ الكائنة بين نصف المستوي المتحرك ونصف مستوي ثابت مار من محور الدوران .

لنفرض الآن مجموعة محاور احداثية $oxyz$ متماسكة مع الجسم ومجموعة محاور $o_1 x_1 y_1 z_1$ ثابتة ، ولنختار هاتين المجموعتين بحيث ينطبق المحوران

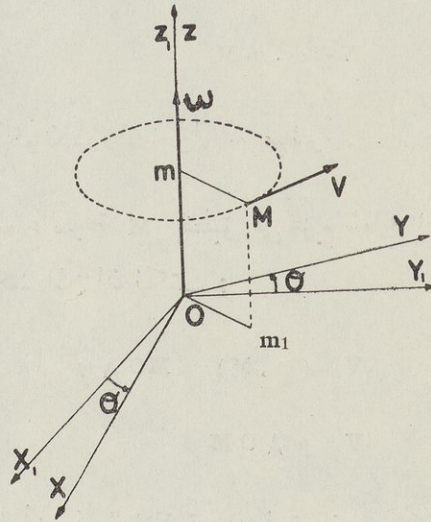
oz و $o_1 z_1$ على محور الدوران (شكل ١٢) . فاذا رمزنا بـ θ الزاوية
الكائنة بين المحورين ox و $o_1 x_1$:

$$\theta = (o_1 x_1 , ox)$$

لغدت العلاقات (25) ، وهي العلاقات بين احداثيات نقطة ما M من الجسم
بالنسبة لمجموعتي المحاور الاحداثية :

$$(31) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z_1 = z \end{cases}$$

نرى ان مسار اية نقطة M من الجسم هو دائرة مستويها عمودي على محور
الدوران ومركزها m هو مسقط M على هذا المحور .



(شكل ١٢)

٤٨ - توزيع السرعة في الجسم : لدرس توزيع السرعة في الجسم نفرض

شعاعاً ω حامله محور الدوران oz وقياسه الجبري (على هذا المحور) :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

نسمي هذا الشعاع بشعاع الدوران في اللحظة t .

يلاحظ ان اتجاه الشعاع ω يعين اتجاه الحركة :

فان كان $\omega > 0$ فالجسم يدور من اليمين الى اليسار .

وان كان $\omega < 0$ فالجسم يدور في الاتجاه المعاكس .

ليكن V هو شعاع سرعة M . ان هذا الشعاع عمودي على المستوي المعين بالنقطة M ومحور الدوران oz ، وان قياسه :

$$V = \omega \cdot m M$$

وانه يتجه بحيث يكون دورانه حول ω مباشراً .

نرى أن شعاع سرعة M ينطبق على عزم شعاع الدوران ω بالنسبة لنقطة M . فيمكننا اذن ان نكتب :

$$V = (\omega , M) = MO \wedge \omega$$

(32)

$$V = \omega \wedge OM$$

او

هذا ونلاحظ أن هذه العلاقة تساعد في تعيين مركبات السرعة على أية مجموعة من المحاور الاحداثية (سواء كانت هذه المجموعة ثابتة او متحركة مع الجسم او متحركة بالنسبة للجسم) .

فاذا عيناً مثلاً مركبات V على المحاور $ox_1 y_1 z_1$ الثابتة ، لوجدنا :

$$(33) \quad \begin{cases} V_{x1} = x'_1 = -\omega y_1 \\ V_{y1} = y'_1 = \omega x_1 \\ V_{z1} = z'_1 = 0 \end{cases}$$

واذا عيناً مركبات V على المحاور xyz المتحركة مع الجسم ، لوجدنا :

$$(34) \quad \begin{cases} V_x = -\omega y \\ V_y = \omega x \\ V_z = 0 \end{cases}$$

ملاحظة : لقد رأينا في الحركة العامة لجسم (ص ٦٤) ان ساحة السرعة هي ساحة عزوم ، ولاحظنا في الحركة الانسحابية (ص ٦٨) أن ساحة السرعة هي ساحة عزوم منتظمة وان سرعة اية نقطة من الجسم هي محور مزدوجة . ونرى الآن في الحركة الدورانية ان سرعة اية نقطة من الجسم تنطبق على العزم الحاصل في تلك النقطة لمجموعة أشعة مكافئة لشعاع وحيد هو شعاع الدوران ω .

٤٩ — توزيع التسارعات في الجسم : نعلم ان تسارع نقطة ما هو :

$$\Gamma = \frac{dV}{dt}$$

وقد رأينا فيما سبق ان سرعة نقطة M من الجسم هي :

$$V = \omega \wedge OM$$

فيكون اذن :

$$\Gamma = \omega' \wedge OM + \omega \wedge OM'$$

$$\Gamma = \omega' \wedge OM + \omega \wedge V$$

او

$$\omega \wedge \mathbf{V} = \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{OM}) \quad \text{وبما أن}$$

$$\omega \wedge \mathbf{V} = \omega \wedge (\omega \wedge m \mathbf{M}) \quad \text{أو}$$

باعتبار m هي مسقط M على محور الدوران ، فيكون :

$$\omega \wedge \mathbf{V} = (\omega \cdot m \mathbf{M}) \omega - (\omega \cdot \omega) m \mathbf{M}$$

$$\omega \cdot m \mathbf{M} = 0 \quad \text{وبما أن (الشعاعان متعامدان)}$$

فنجد أخيراً :

$$(35) \quad \Gamma = \omega' \wedge \mathbf{OM} - \omega^2 \cdot m \mathbf{M}$$

هذا وإذا فرقنا Γ الى مركبة مماسية Γ_T ومركبة ناظمية Γ_N لكان :

$$\Gamma_T = \omega' \wedge \mathbf{OM}$$

$$\Gamma_N = - \omega^2 \cdot m \mathbf{M}$$

الحركة اللولبية :

٥٠ — تعريف : نقول إن حركة جسم هي لولبية ، إذا انتقل الجسم

بحيث ينزلق مستقيماً D من الفراغ المتحرك S على مستقيم D_1 من الفراغ الثابت S_1 وترسم نقطة ما M من S (غير واقعة على D) لولباً دائرياً من S_1 .

نسمي المستقيم D_1 بمحور الحركة اللولبية .

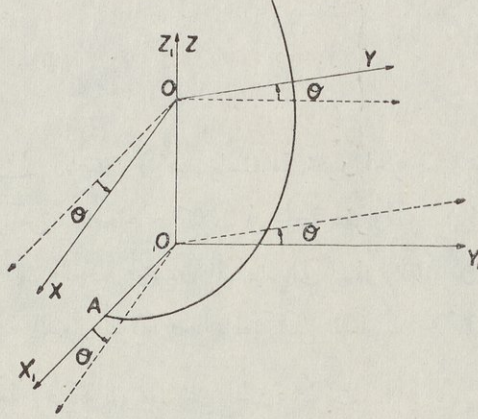
٥١ — نعين وضع الجسم : لتعين وضع الجسم ، نختار مجموعتي المحاور

الاحداثية ، $oxyz$ (المتماصة مع الجسم) و $o_1x_1y_1z_1$ (الثابتة) ، بحيث ينطبق D على oz و D_1 على o_1z_1 .

فان انتقلت نقطة ما من الجسم من الموضع M_0 الى الموضع M ، لدار

الجسم حول oz بزاوية θ تساوي زاوية المستويين (oz, M_0) و (oz, M)

وانزلق باستقامة oz بطول ℓ يساوي الفرق بين رافعي M_0 و M ، ولدارت بالتالي جميع نقط الجسم بقدر θ وانزلت بقدر ℓ .



(شكل ١٣)

واذا رمزنا ب b للخطوة المختزلة لحركة M لكان :

$$\ell = b \theta$$

نسمي الطول B الذي يحقق العلاقة :

$$B = 2 \pi b$$

بخطوة الحركة اللولبية ، و b بخطوتها المختزلة .

ففي الحركة اللولبية مسارات جميع نقط الجسم هي لوالب دائرية متساوية الخطى مرسومة على اسطوانات دورانية مجاورها منطبقة على محور الحركة .

هذا واذا اعتبرنا θ هي الزاوية السكائنة بين المحورين Ox و O_1x_1 :

$$\theta = (O_1x_1, Ox)$$

وفرضا ان الثلاثية المتحركة $Oxyz$ تنطبق على الثلاثية الثابتة $O_1x_1y_1z_1$ حين

الميكانيك العام ج ٢ (١٠)

تندعم الزاوية θ ، لكان راقم o هو $b \theta$ ولعدت بالتالي العلاقات (25) بين احداثيات نقطة ما M من الجسم بالنسبة لمجموعتي المحاور الاحداثية هي :

$$(36) \quad \begin{cases} x_1 = x \cos \theta - y \sin \theta \\ y_1 = x \sin \theta + y \cos \theta \\ z_1 = z + b \theta \end{cases}$$

لنتصور الآن راصداً واقفاً باستقامة محور الحركة ومتجهاً (الاتجاه من القدمين الى الرأس) باتجاه حركة o في لحظة مفروضة . فاذا اتفق أن كان دوران الجسم في تلك اللحظة من يمين الراصد الى يساره لقلنا ان الحركة اللولبية مباشرة ، وان كان الدوران بالاتجاه المعاكس لقلنا ان الحركة رجعية .

نرى ان طبيعة الحركة تتوقف على اشارة الثابت b :

فان كان $b > 0$ فالحركة مباشرة .

وان كان $b < 0$ فالحركة رجعية .

أما اذا كان $b = 0$ فالحركة اللولبية تغدو دورانية .

٥٢ -- توزيع السرعة في الجسم : لتعيين سرعة نقطة ما من الجسم المتحرك

يكفي البحث عن مركبتي هذا الشعاع على محور الدوران $o_1 z_1$ وعلى المستوي $x_1 o_1 y_1$ العمودي على هذا المحور . ويؤول ذلك الى البحث عن سرعتي مسقطي M على المحور $o_1 z_1$ والمستوي $x_1 o_1 y_1$.

ليكن V هو سرعة M ، و v هو سرعة m (مسقط M على المحور

$o_1 z_1$) ، و v_1 هو سرعة m_1 (مسقط M على المستوي $x_1 o_1 y_1$) .

فعندما يتحرك الجسم بحركة لولبية ، ترسم النقطة M لولباً وتكون سرعتها

V ، وتتحرك m على المحور $o_1 z_1$ ويكون القياس الجبري لسرعتها هو :

$$v = z' = b \theta'$$

وترسم النقطة m_1 في المستوي $x_1 o_1 y_1$ دائرة مركزها o_1 وسرعتها الزاوية :

$$\omega = \theta'$$

ويكون القياس الجبري لسرعتها هو :

$$v_1 = o_1 m_1 \cdot \theta' = m M \cdot \theta'$$

وإذا أخذنا على المحور $o_1 z_1$ شعاعاً منزلقاً ω قياسه الجبري θ' لكان :

$$v = b \omega$$

$$v_1 = \omega \wedge OM$$

و

نسمي ω بشعاع الدوران في اللحظة t .

نرى ان v هو سرعة M في حركة الجسم الانسحابية الموازية للمحور

$o_1 z_1$ ، و v_1 هو سرعة M في حركة الجسم الدورانية حول $o_1 z_1$.

فالسرعة V للنقطة M تكون اذن :

$$(37) \quad V = v + v_1 = b \omega + \omega \wedge OM$$

هذه العلاقة تساعد في تعيين مركبات السرعة على أية مجموعة من المحاور

الاحداثية .

فمركبات V على مجموعة المحاور الثابتة $o_1 x_1 y_1 z_1$ مثلاً هي :

$$(38) \quad \begin{cases} V_{x1} = x'_1 = - \omega y_1 \\ V_{y1} = y'_1 = \omega x_1 \\ V_{z1} = z'_1 = b \omega \end{cases}$$

ومركبات V على المحاور $oxyz$ المتماسكة مع الجسم هي :

$$(39) \quad \begin{cases} V_x = - \omega y \\ V_y = \omega x \\ V_z = b \omega \end{cases}$$

ملاحظة : لقد سبق ان رأينا في الحركة العامة لجسم (ص ٦٤) ان ساحة السرعة هي ساحة عزوم ، ولاحظنا في الحركتين الانسحابية والدورانية أن سرعة أية نقطة من الجسم هي العزم الحاصل في تلك النقطة لمجموعة أشعة ، وان هذه المجموعة تكون مكافئة لمزدوجة في الحركة الانسحابية (ص ٦٦) ، ومكافئة لشعاع وحيد في الحركة الدورانية (ص ٧١) .

ونرى الآن في الحركة اللولبية ان سرعة أية نقطة من الجسم تنطبق على العزم الحاصل في تلك النقطة لمجموعة اشعة Σ : الحاصلة العامة لهذه المجموعة هي ω والعزم الحاصل لها في O هو Γ .
هذا ونلاحظ ان المحور المركزي لمجموعة الاشعة Σ هو محور الحركة اللولبية نفسه .

٥٣ — توزيع التسارعات في الجسم : لاختلاف طريقة تعيين التسارعات في الجسم عن الطريقة التي اتبعناها في تعيين السرعة .

فلتعيين تسارع نقطة ما من الجسم المتحرك يكفي البحث عن مركبتي هذا الشعاع على محور الدوران $O_1 Z_1$ وعلى المستوي $x_1 O_1 y_1$ ، أو البحث عن سرعتي مسقطي M على المحور $O_1 Z_1$ والمستوي $x_1 O_1 y_1$.

فعندما يتحرك الجسم بحركة لولبية ترسم النقطة M لولباً ويكون تسارعها Γ ، وتتحرك النقطة m على المحور $O_1 Z_1$ ويكون تسارعها هو $b \omega'$ (وهو تسارع M في حركة الجسم الانسحابية الموازية لمحور الدوران) ، وتتحرك النقطة m_1 في المستوي $x_1 O_1 y_1$ على دائرة ويكون تسارعها هو $\omega^2 \cdot m M - \omega' \wedge O M$ (وهو تسارع M في حركة الجسم الدورانية) .

فتسارع M ، وهو Γ ، يكون اذن :

$$\Gamma = b \omega' + \omega' \wedge O M - \omega^2 \cdot m M \quad (40)$$

حالة خاصة : حين يكون ω ثابتاً ، تصبح الحركة منتظمة ، ويغدو التسارع :

$$\Gamma = - \omega^2 \cdot m M$$

وهو شعاع قياسه ثابت ومنحاه عمودي على المحور .

الحركة العامة للجسم :

تمهيد : بعد أن أوردنا بعض الحركات الخاصة لجسم ، وهي الحركات الانسحابية والدورانية واللولبية ، سنذكر الآن الحركة العامة .

وسنبداً في دراسة توزع السرعة في الجسم . أما وضع الجسم في الفراغ الثابت ، فقد سبق ان أوردنا طريقة تعيينه حين بحثنا في تعيين وضع جسم بشكل عام (بند ٤٠) ، وكتبنا العلاقات (25) ، وهي العلاقات بين احداثيات نقطة ما M من الجسم بالنسبة لمجموعتي المحاور الثابتة والمتحركة مع الجسم .

٥٤ — توزع السرعة في الجسم : نعلم ان سرعة نقطة ما M من الجسم

$$\mathbf{V} = \frac{d \mathbf{O}_1 M}{d t} \quad \text{هي :}$$

وقد رأينا (بند ٤٠) أن :

$$\mathbf{O}_1 M = \mathbf{O}_1 O + O M$$

$$\mathbf{O}_1 M = \mathbf{O}_1 O + x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \quad \text{أو} \quad (24)$$

فاذا اشتققنا بالنسبة للزمن لكان :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + x \mathbf{i}' + y \mathbf{j}' + z \mathbf{k}' \quad (41)$$

لنحسب $\mathbf{i}'$ و $\mathbf{j}'$ و $\mathbf{k}'$ بدلالة $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$:

أن i' عمودي على i (لا تقياس i ثابت) ، فيقع اذن في المستوي $yo z$ ، وتكون مركباته الجبريتان على المحورين oy و oz هما $i' \cdot j$ و $i' \cdot k$ على الترتيب .

اذن يمكننا ان نكتب :

$$(42) \quad i' = (i' \cdot j) j + (i' \cdot k) k$$

وهذه العلاقة يمكن كتابتها ايضاً :

$$(43) \quad i' = [(i' \cdot j) k + (j' \cdot k) i + (k' \cdot i) j] \wedge i$$

لا ت الحد الاول من العلاقة (43) ، وهو $(i' \cdot j) k \wedge i$ ، يساوي الحد الاول من (42) ، وهو $(i' \cdot j) j$.

والحد الثاني من (43) ، وهو $(j' \cdot k) i \wedge i$ ، يساوي الصفر . وقد أضيف هذا الحد ليقوم المتناظر في الحدود بالنسبة للأشعة i و j و k . أما الحد الاخير ، وهو $(k' \cdot i) j \wedge i$ ، فيساوي $(i' \cdot k) k$. ويتضح ذلك اذا لاحظنا أن :

$$i \cdot k = 0$$

$$i' k + k' \cdot i = 0$$

وان

هذا ونرى أن الكمية الواقعة ضمن [] من العلاقة (43) هي تابع شعاعي متناظر بالنسبة للأشعة i و j و k . فاذا رمزنا لهذه الكمية بـ ω :

$$(44) \quad \omega = (i' \cdot j) k + (j' \cdot k) i + (k' \cdot i) j$$

وحسبنا j و k لوجدنا ان :

$$(45) \quad \begin{cases} i' = \omega \wedge i \\ j' = \omega \wedge j \\ k' = \omega \wedge k \end{cases}$$

وإذا رجعنا الى العلاقة (41) لوجدنا أن سرعة M :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \omega \wedge (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k})$$

واعتماداً على العلاقة (24) تصبح سرعة M :

$$(46) \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \omega \wedge \mathbf{OM}$$

نرى أن العلاقة (46) تساعد في تعيين مركبات السرعة على أية مجموعة من المحاور الاحداثية .

لتعين مثلاً مركبات $\mathbf{V}$ على المحاور $oxyz$ المتناسكة مع الجسم . انرمز بـ (ξ, η, ζ) و (p, q, r) لمركبات $\mathbf{V}_0$ و ω على هذه المحاور فنجد :

$$(47) \quad \begin{cases} V_x = \xi + qz - ry \\ V_y = \eta + rx - pz \\ V_z = \zeta + py - qx \end{cases}$$

ملاحظة ١ : نرى ، اعتماداً على العلاقة (44) ، أن الشعاع ω لا يتعلق إلا بمناحي المحاور المتحركة . فهو لا يتقيد بمبدأ هذه المحاور . فلو أخذنا مبدأ آخر o' لكان أيضاً :

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{0'} + \omega \wedge \mathbf{O'M}$$

فشعاع الدوران ω والسرعة $\mathbf{V}_0$ لنقطة ما o من الجسم يعينان تماماً توزيع السرعة في الفراغ المتحرك في أية لحظة مفروضة .

ملاحظة ٢ : لقد بينّا في نتيجة سابقة (ص ٦٤) أن ساحة السرعة هي ساحة عزوم ، ولاحظنا في بعض الحركات الخاصة أن سرعة أية نقطة من الجسم هي العزم الحاصل في تلك النقطة لمجموعة أشعة . ووجدنا ان هذه المجموعة تكافئ مزدوجة في الحركة الانسحابية (ص ٦٦) ، وتكافئ شعاعاً وحيداً في الحركة

الدورانية (ص ٧١) ، وتكافئ شعاعاً ومزدوجة (محور المزدوجة منطبق على حامل الشعاع) في الحركة اللولبية (ص ٧٦) .

ونرى الآن في الحركة العامة ، اعتماداً على العلاقة (46) ، أن سرعة أية من الجسم تنطبق على العزم الحاصل في تلك النقطة لمجموعة أشعة ، الحاصلة الانسحابية لهذه المجموعة هي ω والعزم الحاصل لها في O هو V_0 .

٥٥ — الحركات المماسية : بعد أن بينا كيف توزع السرعة في الجسم بوجه عام ، سنوضح الآن كيف يمكن رد الحركة العامة لجسم في لحظة ما الى إحدى الحركات البسيطة التالية : الحركة الانسحابية ، او الحركة الدورانية ، أو الحركة اللولبية .

١ — لنفرض ان $\omega = 0$ في لحظة معينة t . ففي هذه اللحظة يكون :

$$V_M = V_0$$

فالسرعة توزع في هذه اللحظة كما لو كانت حركة الجسم انسحابية .

نقول في هذه الحالة ان حركة الجسم هي مماسة في اللحظة t لحركة انسحابية .

٢ — نفرض ان $V_0 = 0$ في لحظة t . ففي هذه اللحظة يكون :

$$V_M = \omega \wedge OM_1$$

فالسرعة توزع في هذه اللحظة كما لو كانت الحركة دورانية حول محور مار من O .

نقول في هذه الحالة ان حركة الجسم هي مماسة في اللحظة t لحركة دورانية .

٣ — نفرض في الحالة العامة أنه في لحظة معينة t :

$$\omega \neq 0 \quad V_0 \neq 0$$

فنرى ، اعتماداً على العلاقة (46) ، أن توزع السرعة في الجسم مرتبط في هذه

اللحظة بمجموعة أشعة Σ ، الحاصلة العامة لهذه المجموعة هي ω والعزم الحاصل لها في O هو V_O .

ولما كان $\omega \neq 0$ و $V_O \neq 0$ ، فالمجموعة Σ محور مركزي Δ ، وهو مستقيم يكون العزم الحاصل للمجموعة Σ في نقطة ما A من هذا المستقيم ، وليكن V_A ، موازياً للشعاع ω (بند ١٣) . وقد رأينا أن هذا المستقيم يوازي هو أيضاً ω .

نسمي هذا المستقيم ، بال محور الآني للدوران في اللحظة t .

نرى أن العلاقة (46) التي تكتب (بفرض أن A هو المبدأ) :

$$V_M = V_A + \omega \wedge AM$$

تدل (باعتبار A نقطة من Δ ، و V_A يوازي ω) على أن سرعة نقط الجسم توزع في اللحظة t كما لو كانت حركة الجسم لولبية ، محورها Δ وسرعتها الانسحابية V_A وشعاع دورانها ω .

نسمي هذه الحركة بالحركة اللولبية المماسية في اللحظة t للحركة المفروضة .

نلاحظ أن V_A (وهو شعاع سرعة A ، والعزم الحاصل الأصغري للمجموعة Σ) ينطبق على مسقط V_O (وهو شعاع سرعة O ، والعزم الحاصل لـ Δ في O) على ω (وهو شعاع الدوران ، والحاصلة الانسحابية للمجموعة Σ) .

هذا ونجد بسهولة أن معادلات المحور الآني للدوران (وهو المحور المركزي للمجموعة Σ) بالنسبة لمجموعة المحاور $oxyz$ المتماسكة مع الجسم (بند ١٤) هي :

$$(48) \quad \frac{\xi + qz - ry}{p} = \frac{\eta + rx - pz}{q} = \frac{z + py - qx}{r}$$

تتكون b القيمة المشتركة لهذه النسب .

نرى (اعتماداً على خواص سلسلة نسب) ان النسب السابقة تساوي ايضاً النسبة :

$$\frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{p^2 + q^2 + r^2}$$

فيكون اذن :

$$b = \frac{p\xi + q\eta + r\zeta}{p^2 + q^2 + r^2} = \frac{\omega \cdot V_0}{\omega^2}$$

$$(49) \quad b = \frac{\omega \cdot V_A}{\omega^2} = \frac{V_A}{|\omega|} \quad \text{او}$$

بفرض ان V_A هي القيمة الجبرية لمسقط V_0 على ω (باعتبار ω محوراً) .
تدل العلاقة (49) على أن المقدار b هو ثابت ، فلا تتغير قيمته باختلاف مواضع النقط في الجسم .

ونرى ان العلاقة الاخيرة تكتب ايضاً :

$$(50) \quad V_A = b \omega$$

فالمقدار b هو اذن الخطوة المختزلة للحركة اللولبية المماسية .
المقداران b و ω التابعان للزمن هما العنصران الاساسيان في تعيين الحركة اللولبية المماسية . فاذا ما علمت نقطة A من المحور المركزي ، فانه يكفي لمعرفة توزع السرعة في الجسم في لحظة ما t ، ان يتعين الشعاع ω والعدد b :
هذا ونلاحظ أنه عندما يكون :

$$V_A = 0$$

ترد الحركة المماسية الى حركة دورانية .

والخلاصة : اذا فرضنا في لحظة معينة t :

(١) ان كان $\omega = 0$ و $V_0 \neq 0$ ، فالمجموعة Σ ترد الى مزدوجة محورها V_0 ، والحركة المماسية ترد الى حركة انسحابية .

(٢) وان كان $\omega \neq 0$ و $v_0 = 0$ ، أو كان $\omega \neq 0$ و $v_0 \neq 0$ ،
و $\omega \perp v_0$ ، أو نقول باختصار إن كان $\omega \neq 0$ و $b = 0$ ، فالجموعة Σ ترد الى شعاع وحيد هو ω ، والحركة المماسية ترد الى حركة دورانية .
(٣) أما اذا كان $\omega = 0$ و $v_0 = 0$ ، فالجموعة Σ ترد الى الصفر ،
والحركة المماسية ترد الى سكون .

ففي هذه الحالة تكون سرع جميع نقط الجسم في تلك اللحظة مساوية للصفر .

ملاحظة ١ : لنبحث إن كان ثمة نقط من الجسم المتحرك يكون سرعها معدومة في لحظة مفروضة t .

نرى في الحالة العامة ، أنه إذا كان $\omega \neq 0$ و $b \neq 0$ فلا نجد أيّاً من النقط المطلوبة في اللحظة المفروضة ، لأن مسقط سرعة أية نقطة من الجسم على حامل الشعاع ω هو $b\omega$ ، وهو مقدار لا يساوي الصفر .

وإذا كان $\omega = 0$ و $v_0 \neq 0$ ، فالحركة المماسية تكون حركة انسحابية وسرع نقط الجسم تصبح متساوية في اللحظة t وغير مساوية للصفر .

أما اذا كان $b = 0$ و $\omega \neq 0$ ، فالحركة المماسية تصبح حركة دورانية ، وسرع نقط المحور الآني للدوران تغدو ، هي وحدها ، مساوية للصفر في اللحظة t .

ملاحظة ٢ : بعد ان بحثنا في الحركات المماسية في لحظة معينة لحركات مفروضة ، سنبحث الآن في حالتين خاصتين شهيرتين :

الحالة الأولى : لنفرض أن هنالك نقطة واحدة من الجسم المتحرك تبقى ثابتة أثناء الحركة .

نرى أن سرعة هذه النقطة تكون مساوية للصفر . ونرى اعتماداً على الملاحظة السابقة أن هذه الحركة لا تتم إلا اذا كان المحور الآني للدوران ماراً

أبدأ من هذه النقطة ، وكانت بالتالي الحركة الآنية هي ، في كل لحظة ، حركة دورانية .

الحالة الثانية : نفرض أن مستقيماً من الجسم المتحرك يبقى موازياً لنفسه أثناء الحركة .

لنعتبر أن هذا المستقيم يوازي المحور oz من مجموعة المحاور المتحركة $oxyz$. فشعاع الواحدة k لهذا المحور يكون ثابتاً ، ويكون بالتالي :

$$\frac{d k}{d t} = 0$$

$$\frac{d k}{d t} = \omega \wedge k \quad \text{وبما أن}$$

فإما أن يكون $\omega = 0$ ، والحركة تغدو انسحابية . أو أن يكون ω موازياً k ، فالمحور الآني يبقى موازياً للمحور oz .

٥٦ - نوزع التسارعات في الجسم : نعلم أن تسارع نقطة ما هو :

$$\Gamma = \frac{d V}{d t}$$

وقد رأينا فيما سبق (بند ٥٤) أن سرعة نقطة M من الجسم هي :

$$(46) \quad V_M = V_o + \omega \wedge OM$$

فيكون اذن (بعد أخذ المشتق) :

$$\Gamma_M = \Gamma_o + \frac{d \omega}{d t} \wedge OM + \omega \wedge \frac{d OM}{d t}$$

هذا ونعلم أن :

$$\frac{d OM}{d t} = \frac{d}{d t} (M - O) = V_M - V_o$$

واعتدأ على العلاقة (46) يكون :

$$\frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \omega \wedge \mathbf{OM}$$

فالتسارع يصبح اذن :

$$\Gamma = \Gamma_0 + \omega' \wedge \mathbf{OM} + \omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{OM})$$

واذا رمزنا بـ m لمسقط M على المستقيم $o\omega$ ولاحظنا أن :

$$\omega \wedge \mathbf{OM} = \omega \wedge m\mathbf{M}$$

$$\omega \cdot m\mathbf{M} = 0 \quad \text{وان}$$

لسكان (بند ٤٩ ، ص ٧٢) :

$$\omega \wedge (\omega \wedge \mathbf{OM}) = -\omega^2 \cdot m\mathbf{M}$$

وكان بالتالي تسارع M هو :

$$(51) \quad \Gamma = \Gamma_0 + \omega' \wedge \mathbf{OM} - \omega^2 \cdot m\mathbf{M}$$

وهو المطلوب .

★ ★ ★

نمازين

١ - لدينا في مستو مفروض دائرتان متساويتان ، مركزا احدهما o والثانية o' ، ونصف قطر كل منهما a ، والبعد بين مركزيهما يساوي ℓ .
نفرض مستوياً π يتحرك بجرعة انسحابية في مستوي الدائرتين بحيث ترسم نقطة ما M من هذا المستوي ، الدائرة o بسرعة زاوية ثابتة ω .
لتكن M' نقطة تتحرك على الدائرة o' بسرعة زاوية ثابتة تساوي ω .
في لحظة البدء مرت M من نقطة A واقعة على خط المراكزين ، ومرت M' من نقطة A' من الدائرة o' . فاذا علم أن الزاوية :

$$(\angle OA, O'A') = \alpha$$

فالمطلوب :

- (١) حساب الطول MM' في لحظة ما t .
- (٢) تعيين الشروط التي يجب أن تقوم بين ℓ و a و α ليتم اللقاء بين النقطتين M و M' . ثم تعيين الازمنة التي تتلاقى فيها النقطتان .
- (٣) برهن أن النقطة M' تتحرك بالنسبة للمستوي π بجرعة منتظمة وان مسارها دائرة .

٢ - يدور مستو حول محور عمودي على المستوي . A و B نقطتان معلومتان من هذا المستوي . بيّن إذا كان من الممكن تعيين محور الدوران وسرعة الدوران في كل من الحالات التالية :

- (١) اذا علم شعاعا سرعتي النقطتين A و B في لحظة مفروضة t .
- (٢) اذا علم شعاع سرعة A وحامل شعاع سرعة B .
- (٣) اذا علم شعاع سرعة A وطول شعاع سرعة B .

٣ - ماهي السرعة الزاوية ، مقدرة براديان/ثانية ، للأرض الدائرة حول خط قطبيها ؟ .

استنتج من ذلك سرعة نقطة على سطح كرة الأرض عرضها الجغرافي ٥٦° .

٤ - OA ذراع طوله l يدور في مستو ثابت بدوران منتظم حول نهايته الثابتة O . AB يد طولها $3l$ مرتبطة مفصلياً بنهاية الذراع A ، تنزلق نهايتها B على مستقيم ثابت ox . فإذا فرضنا أن الذراع يدور في الثانية الواحدة دورتين ، فالمطلوب تعيين سرعة وتسارع B في الحالات التي تصبح فيها الزاوية OAB مساوية الصفر أو ٣٠° أو ٥٦° .

٥ - $oxyz$ مجموعة محاور قائمة ومباشرة . OA قضيب (نعتبره قطعة مستقيمة) يدور حول النقطة O . فالمطلوب إيجاد :

- (١) الوسطاء التي تعين موضع القضيب .
- (٢) مركبات شعاع الدوران على المحاور الاحداثية .
- (٣) سرعة نقطة M من القضيب تبعد عن O بقدر l .

٦ - $OABC$ صفيحة بشكل مستطيل تدور حول رأسها الثابت O بحيث أن ضلعها OA يبقى ملازماً للمستوي الثابت xoy . المطلوب إيجاد :

- (١) الوسطاء التي تعين موضع المستطيل .

- (٢) مركبات شعاع الدوران على المحاور الاحداثية $oxyz$.
- (٣) سرعة الرأس C اذا علم أن ضلعي المستطيل OA و OB يقدران بالطولين a و b .

٧ - صفيحة دائرية مركزها ثابت O ، يستند محيطها الى مستو ثابت مفروض . المطلوب إيجاد :

- (١) الوسطاء التي تعين موضع الصفيحة .
- (٢) سرعة نقطة ما من الشكل بدلالة الوسطاء ومشتقاتها بالنسبة للزمن .

٨ - جسم يدور بسرعة ٥٠ دورة في الثانية حول المستقيم :

$$x = y = z$$

أوجد سرعة نقطة من الجسم احداثياتها $(2, 2, -1)$.

٩ - صفيحة بشكل مثلث OAM تدور حول الضلع الثابت OA بسرعة زاوية ثابتة ω . أوجد مركبات سرعة M على محاور احداثية مفروضة .

. OXYZ

تطبيق : نفرض أن احداثيات A هي $(1, 4, 8)$ وأن المثلث OAM يدور ٣٧ دورة في الدقيقة حول OA في الاتجاه الموجب . فاذا اعتبرنا السنتمتر هو واحدة للطول والثانية واحدة للزمن ، فالمطلوب حساب مركبات سرعة النقطة M في اللحظة التي تصبح احداثياتها $(81, 14, 11)$.

١٠ - قضيب AB طوله $2l$ يتحرك في المستوي xoy . النقطة A تتحرك على ox بسرعة ثابتة تساوي v ، والنهاية B تتحرك بحركة منتظمة سرعتها تساوي ايضاً v . في لحظة البدء القضيب AB ينطبق على المحور oy .

(١) أوجد مسار نقطة B .

(٢) لتكن I نقطة تلاقي الناظرين في اللحظة t لمساري A و B . أوجد

الحل الهندسي لنقطة I .

(٣) M نقطة ما من المستوي المماسك على القضيب AB . برهن أن راسم

خطي حركة M هو دائرة .

١١ - صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB ، رأسها o ثابت .

تتحرك الصفيحة في الفراغ بحركة ما . ليكن $V(A)$ و $V(B)$ شعاعي سرعتي A و B في لحظة ما t . برهن ان قياسي مسقط $V(A)$ على OB ومسقط $V(B)$ على OA متساويان ، ثم برهن أنه حين تكون إحدى الزاويتين $[V(A) و OB]$ و $[V(B) و OA]$ حادة فالثانية تكون منفرجة .

١٢ - ABCDA'B'C'D' مكعب متحرك . سرعة النقطة A في لحظة مفروضة t تمثل بالشعاع AB ، وسرعة C' محمولة على المستقيم CC' ، وسرعة D' واقعة في المستوي A'B'CD' .

برهن أن حركة الجسم هي مماسة في اللحظة المفروضة لحركة دورانية . ثم عين شعاع الدوران في تلك اللحظة .

١٣ - A و B و C ثلاث نقط من جسم متحرك . نفرض في لحظة مفروضة t أن احداثيات هذه النقط بالنسبة لمجموعة محاور ثابتة Oxyz هي :

$$A(0, 0, 0), \quad B(1, 1, 0), \quad C(1, 1, 1)$$

وان مركبات سرع هذه النقط على المحاور الاحداثية هي :

$$V_A(2, 1, -3), \quad V_B(0, 3, -1), \quad V_C(-1, 2, -1)$$

عين عناصر الحركة اللولبية المماسية في اللحظة t للحركة المفروضة .

١٤ - مضلع السرع : نفرض مستويًا π ينزلق على مستو ثابت π_1 . من نقطة ثابتة o ننشئ أشعة oa و ob و oc و ... مساوية على التوالي لسرع نقط A و B و C و ... من المستوي π .

برهن أن الشكل abc ... يشابه الشكل ABC ... وأن نسبة التشابه تقدر بالسرعة الزاوية ω للمستوي المتحرك π . ثم برهن أن زاوية الشكلين المتشابهين تساوي قائمة .

١٥ - OA و O'A' قضيبان يدوران في مستو مفروض حول النقطتين الثابتتين O و O' . AA' قضيب مرتبط مفصلياً بالقضيبين OA و O'A' . ارسم مضلع السرع للقضبان الثلاثة في لحظة ما t .

١٦ - OA قضيب يدور في مستو ثابت π حول النقطة الثابتة O . AB قضيب ترتبط نهايته A مفصلياً بالقضيب OA وتنزلق نهايته B على مستقيم OD من المستوي π . BC قضيب مرتبط مفصلياً مع القضيب AB ، ينزلق على المستقيم OD . عين في لحظة مفروضة t مضلع السرع للقضبان الثلاثة .

الفصل الثاني

تركيب الحركات

تمهيد : لتتصور باخرة تتحرك على سطح البحر ، وراكباً يتحرك على هذه الباخرة . فنرى أن هنالك ثلاث حركات :

حركة الراكب بالنسبة للباخرة ، وحركة الباخرة بالنسبة للشاطئ ، ثم حركة ناتجة من تركيب هاتين الحركتين ، وهي حركة الراكب بالنسبة للشاطئ .

٥٧ - تعريف : لنفرض S_1 مجموعة متاسكة ثابتة (أو يمكن اعتبارها كأنها ثابتة) . ولتكن M نقطة تتحرك بالنسبة لمجموعة متاسكة S ، بينما تتحرك S بالنسبة للمجموعة الثابتة S_1 . فمسألة تركيب الحركات تتوضح كما يلي :

إذا علمت حركة M بالنسبة لـ S ، وحركة S بالنسبة لـ S_1 ، فانه يطلب تعيين حركة M بالنسبة لـ S_1 .

يُرمز عادة لحركة S بالنسبة لـ S_1 بـ $(\frac{S}{S_1})$.

لتكن P نقطة من S تنطبق عليها M في اللحظة t . فانا نسمي حركة M بالنسبة لـ S بالحركة النسبية ، وحركة P في اللحظة t بالنسبة لـ S_1 بالحركة الجرية ، وحركة M بالنسبة لـ S_1 بالحركة المطلقة .

وكذا نسمي المسار النسبي والمسار الجري والمسار المطلق .

ونسمي أيضاً السرعة النسبية والتسارع النسبي وهكذا ...

هذا ونسمي الحركتين النسبية والجريية بالحركتين المركبتين ، والحركة المطلقة بالحركة الحاصلة .

٥٨ — تركيب السرعة : لتكن $oxyz$ مجموعة محاور احداثية متماسكة مع S ، و $O_1 x_1 y_1 z_1$ مجموعة محاور متماسكة مع S_1 .

لنرمز بـ (x, y, z) لاحداثيات M بالنسبة للمجموعة المتحركة $oxyz$.
فقد رأينا (بند ٤٠ ، ص ٦١) ان موضع M يتعين بالعلاقة :

$$(24) \quad O_1 M = O_1 O + x i + y j + z k$$

ونلاحظ هنا أن الاحداثيات (x, y, z) هي توابع للزمن (لأنها احداثيات النقطة M المتحركة بالنسبة لـ S) .

فاذا اشتققنا العلاقة (24) بالنسبة للزمن لكان :

$$(24)' \quad \frac{d O_1 M}{dt} = V_o + x i' + y j' + z k' + x' i + y' j + z' k$$

نرى أن الشعاع $V_o + x i' + y j' + z k'$ هو سرعة نقطة P من الجسم (بند ٥٤ ، ص ٧٧) انطبقت عليها M في اللحظة t . فهي اذن سرعة M الجريية ، ولنرمز لها بـ V_e :

$$V_e = V_o + x i' + y j' + z k'$$

أما $x' i + y' j + z' k$ فهو شعاع مركباته على المحاور المتحركة ox و oy و oz هي على الترتيب x' و y' و z' . فهو اذن شعاع سرعة M النسبية ، ولنرمز له بـ V_r :

$$V_r = x' i + y' j + z' k$$

ولما كان الشعاع $\frac{d O_1 M}{dt}$ هو سرعة M المطلقة ، فالعلاقة الاخيرة تكتب :

$$(52) \quad V_a = V_e + V_r$$

هذا ولتعيين مركبات V_a على أية مجموعة من المحاور الاحداثية يكفي أن نلاحظ (بند ٥٤) أن العلاقة (52) يمكن كتابتها كما يلي :

$$(53) \quad V_a = V_o + \omega \wedge OM + V_r$$

فاذا أسقطنا هذه العلاقة على المحاور المتحركة $oxyz$ مثلاً ، ورمزنا بـ (ξ, η, ζ) وبـ (p, q, r) لمركبات V_o و ω على هذه المحاور لوجدنا :

$$(54) \quad \begin{cases} (V_a)_x = \xi + qz - ry + x' \\ (V_a)_y = \eta + rx - pz + y' \\ (V_a)_z = \zeta + py - qx + z' \end{cases}$$

٥٩ — تركيب التسارعات : اذا اشتققنا العلاقة (24) بالنسبة للزمن ،

فانا نجد :

$$\frac{dV_a}{dt} = \left(\frac{dV_o}{dt} + xi'' + yj'' + zk'' \right) + \left(x''i + y''j + z''k \right) + 2(x'i' + y'j' + z'k')$$

نرى أن $\frac{dV_o}{dt}$ هو تسارع o ، وقد سبق أن رمزنا اليه بـ Γ_o . ثم ان $\Gamma_o + xi'' + yj'' + zk''$ هو تسارع p في اللحظة t ، فهو اذن تسارع M الجري ، ولنرمز له بـ Γ_e :

$$\Gamma_e = \Gamma_o + xi'' + yj'' + zk''$$

كما نرى أن $x''i + y''j + z''k$ هو شعاع ، مركباته على المحاور المتحركة ox و oy و oz هي على التوالي x'' و y'' و z'' . فهو اذن تسارع M النسبي . أما الشعاع الاخير ، وهو $2(x'i' + y'j' + z'k')$ ، ولنرمز له بـ Γ_c ، فيتعين كما يلي :

لقد رأينا (بند ٥٤ ، ص ٧٨) أن :

$$i' = \omega \wedge i \quad j' = \omega \wedge j \quad k' = \omega \wedge k$$

فيكون :

$$\Gamma_c = 2 \omega \wedge (x'i + y'j + z'k)$$

وقد رأينا (بند ٥٨) أن الشعاع $x'i + y'j + z'k$ هو السرعة النسبية لنقطة M ، وقد رمزنا اليه بـ V_e . فيكون إذن :

$$(55) \quad \Gamma_c = 2 \omega \wedge V_r$$

نسمي الشعاع Γ_c بالتسارع المتمم أو تسارع كوريوليس .
هذا وإذا لاحظنا أن الشعاع $\frac{dV_a}{dt}$ هو التسارع المطلق لنقطة M ،
لأدر كننا أن العلاقة السابقة تكتب :

$$(56) \quad \Gamma_a = \Gamma_e + \Gamma_r + \Gamma_c$$

ملاحظة ١ : نرى ، اعتماداً على العلاقة (55) ، أن التسارع المتمم يصبح مساوياً للصفر حين يكون :

$$2 \omega \wedge V_r = 0$$

ويتم ذلك في إحدى الحالات التالية :

- (١) إذا $\omega = 0$ ، أي إذا كانت الحركة الجريبة هي حركة انسيابية .
- (٢) إذا $V_r = 0$ ، أي في حالة التوازن النسبي ، كما سنرى ذلك في علم التجريبك .

(٣) إذا توازى الشعاعان ω و V_r .

ملاحظة ٢ : لتعيين مركبات Γ_a على مجموعة من المحاور الاحداثية ، ولتكن المجموعة المتحركة $oxyz$ مثلاً ، يكفي اسقاط العلاقة (56) على محاور هذه المجموعة .

لكن هناك طريقة مباشرة نعين بها هذه المركبات اعتماداً على دساتير بور .
منوضح هذه الطريقة فيما يلي :

٦٠ — دساتير بور : لنشئ من نقطة ما من المجموعة الثابتة $o_1 x_1 y_1 z_1$ ،

ولتكن النقطة o_1 مثلاً ، شعاعاً $o_1 m$ يساوي شعاع السرعة المطلقة لنقطة M :

$$o_1 m = V_a$$

فالتسارع المطلق لنقطة M هو المشتق بالنسبة للزمن للشعاع V_a ، أو هو السرعة المطلقة لنقطة m (أي سرعة m بالنسبة للمجموعة $o_1 x_1 y_1 z_1$) .

ولما كانت مركبات هذه السرعة على محاور المجموعة $oxyz$ لا تتقيد بمبدأ هذه المجموعة ، فإذا أنشأنا من o_1 مجموعة محاور $o_1 XYZ$ موازية لمحاور $oxyz$ ومتحدة معها بالاتجاه ، فتكون إحداثيات m بالنسبة لهذه المجموعة ، أو مركبات V_a على المحاور ox و oy و oz هي على التوالي $(V_a)_x$ و $(V_a)_y$ و $(V_a)_z$.

وبما أن مبدأ هذه المجموعة ثابت ، وأن شعاع دوران هذه المجموعة هو شعاع الدوران ω للمجموعة $oxyz$ ، فإذا رمزنا بـ $(\Gamma_a)_x$ و $(\Gamma_a)_y$ و $(\Gamma_a)_z$ لمركبات Γ على المحاور ox و oy و oz ، لوجدنا ، اعتماداً على العلاقات (54) ، الدساتير الآتية :

$$(57) \quad \begin{cases} (\Gamma_a)_x = \frac{d(V_a)_x}{dt} + q \cdot (V_a)_z - r \cdot (V_a)_y \\ (\Gamma_a)_y = \frac{d(V_a)_y}{dt} + r \cdot (V_a)_x - p \cdot (V_a)_z \\ (\Gamma_a)_z = \frac{d(V_a)_z}{dt} + p \cdot (V_a)_y - q \cdot (V_a)_x \end{cases}$$

نسمي هذه الدساتير بدساتير بور^(١) .

هذا وإذا عوضنا في هذه الدساتير المقادير $(V_a)_x$ و $(V_a)_y$ و $(V_a)_z$ بقيمها الواردة في العلاقات (54) ، ثم رتبنا الحدود بالنسبة إلى مشتقات x و y و z لوجدنا :

$$(\Gamma_a)_x = [\xi' + q'z - r'y + q(\xi + py - qx) - r(\eta + rx - pz)] \\ + 2[qz' - ry'] + [x'']$$

وهكذا نجد أيضاً الدستورين الموافقين لـ $(\Gamma_a)_y$ و $(\Gamma_a)_z$.
ونرى في هذه الدساتير وقد ظهرت بوضوح مركبات Γ_e و Γ_c و Γ_r .

٦١ -- تركيب عدة سرعات : لتكن S_1 مجموعة متماسكة ثابتة (أو

نعتبرها ثابتة) ، و S_2 و S_3 و ... و S_n مجموعات متحركة .

لنفرض أن الحركات $(\frac{S_2}{S_1})$ و $(\frac{S_3}{S_2})$ و ... و $(\frac{S_n}{S_{n-1}})$ ، التي نسميها بالحركات المركبة ، هي معلومة . لنبحث عن الحركة $(\frac{S_n}{S_1})$ والتي نسميها بالحركة الحاصلة .

لتكن M نقطة متماسكة مع المجموعة S_i . ولنفرض ان المجموعة S_i متحركة بالنسبة للمجموعة S_j . لنرمز لسرعة M في هذه الحركة بـ $V_{i,j}$.
لتعين السرعة $V_{n,1}$.

نعلم ، اعتماداً على تركيب حركتين ، أن :

$$V_{3,1} = V_{3,2} + V_{2,1}$$

$$V_{4,1} = V_{4,3} + V_{3,1}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$V_{n,1} = V_{n,n-1} + V_{n-1,1}$$

فاذا جمعنا هذه العلاقات طرفاً الى طرف ، لوجدنا بعد الاختصار :

$$(58) \quad V_{n,1} = V_{n,n-1} + \dots + V_{3,2} + V_{2,1}$$

وهي العلاقة التي تعين السرعة الحاصلة بدلالة السرع المركبة .

تطبيقات :

١ — تعيين مركبات السرعة والتسارع : يمكن ان نجد مباشرة ، اعتماداً على تركيب الحركات ، مركبات سرعة نقطة في اية مجموعة من الاحداثيات ، كما ويمكن إيجاد مركبتي تسارع نقطة في الاحداثيات المستوية .
ففي الاحداثيات القطبية المستوية مثلاً ، يمكن اعتبار حركة نقطة $M(r, \theta)$ في المستوي الثابت xoy كأنها ناتجة من الحركة النسبية لـ M على المحور OX المعين بالزاوية القطبية θ ، ومن حركة جرية ، وهي حركة دورانية للمجموعة $OXYZ$ (منطقة على O) حول المحور OZ العمودي على مستوي الحركة ، سرعة دورانها θ' . فاذا اسقطنا العلاقة :

$$V_a = V_r + V_e$$

على المحورين OX و OY لوجدنا مركبتي سرعتي M على هذين المحورين .

OY	OX	
o	r'	فمركبتنا V_r
$r \theta'$	o	ومركبتنا V_e
$r \theta'$	r'	اذن مركبتنا V_a

هذا ولتعيين مركبتي تسارع M على OX و OY يكفي ان نسقط على هذين المحورين العلاقة :

$$\Gamma_a = \Gamma_r + \Gamma_e + \Gamma_c$$

نعلم ان :

$$\Gamma_c = 2 \omega \wedge V_r$$

ونلاحظ ان الشعاع ω محمول على OZ ، وان قيمته الجبرية θ' .

OY	OX	
o	r''	مر كبتا Γ_r
r θ''	- r θ'^2	ومر كبتا Γ_c
2 r' θ'	o	ومر كبتا Γ_c
r $\theta'' + 2 r' \theta'$	r'' - r θ'^2	اذن مر كبتا Γ_a

هذا ويمكن ان نجد ، بالطريقة ذاتها ، مركبات سرعة نقطة في الفراغ في الاحداثيات الديكارتية والاسطوانية والقطبية .

٦٣ — الحركتان المتعاكستان : لتكن S_1 و S_2 مجموعتين متماثلتين متحركتين بالنسبة لبعضهما .

فانا نسمي الحركتين $(\frac{S_1}{S_2})$ و $(\frac{S_2}{S_1})$ بالحركتين المتعاكستين .
 لنفرض في لحظة ما t نقطة M . لنرمز بـ $V_{2,1}$ لسرعة M باعتبارها نقطة من S_2 ، وبـ $V_{1,2}$ لسرعة M باعتبارها نقطة من S_1 .
 ان حركة S_1 بالنسبة لـ S_2 يمكن اعتبارها كأنها ناتجة من الحركتين $(\frac{S_1}{S_2})$ و $(\frac{S_2}{S_1})$. وبما ان المجموعة S_1 هي ساكنة بالنسبة للمجموعة S_1 ذاتها ، فسرعة أية نقطة من S_1 بالنسبة لـ S_1 تكون مساوية للصفر . فاذا طبقنا نظرية تركيب السرعة لوجدنا :

$$0 = V_{1,2} + V_{2,1}$$

$$V_{1,2} = - V_{2,1} \quad \text{او}$$

اي ان سرعتي اية نقطة في الحركتين المتعاكستين هما شعاعان متعاكسان مباشرة .

لتكن O نقطة ثانية . لنرمز بـ $\omega_{2,1}$ لشعاع دوران S_2 بالنسبة لـ S_1 ، وبـ $\omega_{1,2}$ لشعاع دوران S_1 بالنسبة لـ S_2 . نعلم ان :

$$V(M)_{2,1} = V(O)_{2,1} + \omega_{2,1} \wedge OM$$

$$\mathbf{V}(M)_{1,2} = \mathbf{V}(O)_{1,2} + \omega_{1,2} \wedge \mathbf{OM} \quad \text{و}$$

$$\mathbf{V}(M)_{2,1} = -\mathbf{V}(M)_{1,2} \quad \text{وبما ان}$$

$$\mathbf{V}(O)_{2,1} = -\mathbf{V}(O)_{1,2} \quad \text{وان}$$

$$\omega_{2,1} \wedge \mathbf{OM} = -\omega_{1,2} \wedge \mathbf{OM} \quad \text{فيكون}$$

$$(\omega_{2,1} + \omega_{1,2}) \wedge \mathbf{OM} = 0 \quad \text{أو}$$

ولما كانت هذه العلاقة محققة مهما كانت M ، فيكون :

$$\omega_{2,1} + \omega_{1,2} = 0$$

نستخلص من ذلك أن المحورين الآنيين للحركتين المتعاكستين $(\frac{S_2}{S_1})$ و $(\frac{S_1}{S_2})$ هما مستقيمان منطبقان على بعضهما .

هذا وإذا فرضنا A نقطة ما من هذا المحور ، فالعنصران $\mathbf{V}(A)_{2,1}$ و $\omega_{2,1}$ في الحركة $(\frac{S_2}{S_1})$ يعاكسان مباشرة العنصرين $\mathbf{V}(A)_{1,2}$ و $\omega_{1,2}$ في الحركة $(\frac{S_1}{S_2})$.

٦٤ — نعين عناصر الحركة الحاصلة : لتكن S_1 مجموعة ثابتة و S_2 و S_3 و ... و S_n مجموعات متحركة . فقد رأينا أن السرعة المختلفة لنقطة M في لحظة مفروضة t تحقق العلاقة :

$$\mathbf{V}_{n,1} = \mathbf{V}_{n,n-1} + \dots + \mathbf{V}_{3,2} + \mathbf{V}_{2,1}$$

لنعين عناصر الحركة الحاصلة $(\frac{S_n}{S_1})$ حين تكون الحركات المركبة مماسة في اللحظة t لبعض الحركات الخاصة .

(١) لنفرض أن الحركات المركبة مماسة في اللحظة المفروضة لحركات انسحابية .

فالسرع $\mathbf{V}_{2,1}$ و $\mathbf{V}_{3,2}$ و ... و $\mathbf{V}_{n,n-1}$ تكون مستقلة عن النقطة

المفروضة M ، وتعدو بالتالي السرعة $V_{n,1}$ مستقلة ايضاً عن M . فالحركة الحاصلة تعدو هي ايضاً بماسة حركة انسحابية .

(٢) نفرض أن الحركات المركبة بماسة لحركات دورانية .

ليكن Δ_i محور الدوران الآني للحركة $(\frac{S_i}{S_{i-1}})$ ، و A_i نقطة ما من هذا المحور ، و ω_i شعاع الدوران الموافق لهذه الحركة والمطبق في النقطة A_i . فيكون :

$$V_{i,i-1} = \omega_i \wedge A_i M$$

وهكذا يكون :

$$V_{2,1} = \omega_2 \wedge A_2 M$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$V_{n,n-1} = \omega_n \wedge A_n M$$

نستخلص من ذلك أن $V_{n,1}$ هو العزم الحاصل في M لمجموعة الاشعة

ω_1 و ω_2 و ... و ω_n .

نرى أن هذه المجموعة لا تكون مكافئة في الحالة العامة لشعاع وحيد .
فالحركة الحاصلة لا تكون بماسة بوجه عام لحركة دورانية .
وهنا نميز عدة حالات (اعتماداً على رد مجموعة أشعة) :

١ - فان كانت مجموعة الاشعة ω_i مكافئة لشعاع وحيد Ω ، فالحركة الحاصلة تعدو بماسة لحركة دورانية شعاع دورانها Ω .

ففي الحالة الخاصة مثلاً ، حين تكون المحاور Δ_i مارة جميعها من نقطة واحدة O ، فمجموعة الاشعة ω_i ترد الى شعاع وحيد Ω مار من O (بفرض ان $\sum \omega_i \neq 0$) . فالحركة الحاصلة تكون اذن بماسة لحركة دورانية حول محور مار O .

٢ - وان كانت مجموعة الاشعة ω_i مكافئة لمزدوجة ، فالحركة الحاصلة تعدو بماسة لحركة انسحابية سرعتها محور هذه المزدوجة .

٣ - أما في الحالة العامة ، فمجموعة الاشعة ω_i ترد الى شعاع وحيد ، وليكن ω (وهو الحاصلة الانسحابية للمجموعة) ، والى مزدوجة محورها في نقطة ما o هو V_o . فسرع نقط الجسم S_n تغدو اذن كما لو كان لهذا الجسم حركة دورانية (معينة بالشعاع ω المطبق في o) وحركة انسحابية (سرعتها V_o) .

هذا واذا رمزنا بـ Δ للمحور المركزي للمجموعة ω_i ، وبـ A لنقطة ما من هذا المحور ، لرأينا أن هذه المجموعة تكافئ شعاعاً وحيداً ω (محمولاً على Δ) ومزدوجة محورها V_A (محمول أيضاً على Δ ، هو العزم الاصغري للمجموعة ω_i) . فسرع نقط الجسم S_n تغدو اذن كما لو كان للجسم حركة دورانية (شعاع دورانها ω) وحركة انسحابية (شعاع سرعتها V_A يوازي ω) . فحركة S_n تكون مماسة لحركة لولبية محورها Δ ودورانها الآني ω وخطوطها المختلة ، ولترمز لها بـ b ، هي (بند ٥٥ ، ص ٨٢) :

$$b = \frac{\omega \cdot V_o}{\omega^2} = \frac{V_A}{|\omega|}$$

بفرض أن V_A هي القيمة الجبرية لمسقط V_o على ω (باعتبار ω محوراً) .

ونلاحظ هنا ، أنه حين يكون $V_A = 0$

أي حين يكون $\omega \perp V_o$ أو $b = 0$

ففي هذه الحالة تغدو سرع نقط الجسم S_n كما لو كانت حركة هذا الجسم دورانية ، محورها الآني Δ (المحور المركزي للمجموعة ω_i) وشعاع دورانها ω .

كما نلاحظ أيضاً أنه حين يكون $\omega = 0$ ، تغدو سرع نقط الجسم S_n كما لو كانت حركة هذا الجسم انسحابية ، سرعتها V_o .

أما اذا كان $\omega = 0$ و $V_A = 0$

أو كان $\omega = 0$ و $b = 0$

فالمجموعة ω_i تكافئ الصفر ، وسرع نقط الجسم تغدو مساوية للصفر .

٦٥ - الانزلاق والتدحرج والفتل : لنفرض جسمين سطحاهما

الخارجيان S و S_1 متلامسان بنقطة مثل I . ليكن π المستوي المماس لهذين السطحين في نقطة التماس I .

لنفرض أن الجسم S متحرك بالنسبة للجسم S_1 . أما الجسم S_1 فقد يكون ثابتاً او متحركاً في الفراغ .

لنرمز بـ A و A_1 لنقطتين من السطحين S و S_1 على الترتيب انطبقتا في لحظة ما t على نقطة التماس I .

الانزلاق : نسمي سرعة النقطة A من السطح S في الحركة $(\frac{S}{S_1})$ بسرعة انزلاق S بالنسبة لـ S_1 .

لنبرهن أن سرعة الانزلاق هذه ، ونرمز اليها بـ w :

$$(59) \quad w = V(A)_{S_1}$$

هي واقعة في المستوي المماس π للسطحين المتلامسين في تلك اللحظة .

بالحقيقة ، لتصور متحركاً ينطبق في كل لحظة على النقطة الهندسية I التي يتلامس فيها السطحان S و S_1 .

نرى أن النقطة I تتحرك على كل من السطحين . فترسم منحنيّاً C_1 على السطح S_1 ومنحنيّاً آخر C على السطح S . لنرمز بـ $V(I)_{S_1}$ و $V(I)_S$ لسرعتي I في حركتيها على S_1 و S .

نعلم (اعتماداً على تركيب الحركات) أن :

$$(60) \quad V(I)_{S_1} = V(I)_S + V(A)_{S_1}$$

وذلك اذا لاحظنا ان حركة I بالنسبة للسطح S_1 يمكن اعتبارها كأنها ناتجة من تركيب حركتين ، احدهما حركة I بالنسبة للسطح S ، والثانية حركة S بالنسبة لـ S_1 .

وبما أن الشعاع $V(I)_{S_1}$ ، وهو سرعة النقطة I في حركتها على السطح S_1 ، واقع على المماس في I للمنحني C_1 ، وأن الشعاع $V(I)_S$ ، وهو سرعة I في حركتها على السطح S ، واقع على المماس في I للمنحني C ، فالشعاعان $V(I)_S$ و $V(I)_{S_1}$ يكونان اذن واقعين في المستوي المماس π ، ويكون بالتالي (اعتماداً على العلاقة الاخيرة) الشعاع $V(A)_{S_1}$ ، وهو سرعة الانزلاق w ، واقعاً في المستوي المماس π وهو المطلوب .

التدحرج والانزلاق : نعلم ، اعتماداً على توزيع السرعة في جسم متحرك (بند ٥٤) ، ان سرعة نقط الجسم S في الحركة $(\frac{S}{S_1})$ ، توزع في اللحظة المفروضة t كما لو كانت حركة الجسم S بالنسبة للجسم S_1 هي حركة انسحاب ، سرعتها $V(A)_{S_1}$ ، وهي سرعة الانزلاق w ، ودوران آني ω حول محور مارّ من النقطة A .

نقول ان السطح S يتدحرج ويفتل على السطح S_1 في فترة زمنية معينة ، اذا كانت سرعة الانزلاق في أية لحظة من هذه الفترة مساوية للصفر :

$$w = 0$$

عندما يتغير الزمن ينتقل محور الدوران في كل من الفراغين المتماكين مع الجسمين S و S_1 . فيرسم في الفراغ S_1 سطحاً مسطراً Σ_1 ، وفي الفراغ S سطحاً مسطراً Σ . فحركة S بالنسبة لـ S_1 تتعين اذن بتدحرج Σ على Σ_1 . نسمي Σ بالسطح المتدحرج و Σ_1 بالقاعدة .

والخلاصة ، ان المحل الهندسي لحامل شعاع الدوران ωA في الفراغ S_1 هو السطح المسطر Σ_1 ، وفي الفراغ S هو السطح المسطر Σ .

نرى أن المحل الهندسي لنقطة A_1 في الفراغ S_1 هو المنحني C_1 ، وأن المحل الهندسي لنقطة A في الفراغ S هو المنحني C .

كما نرى ان المنحني C_1 هو المنحني المشترك بين السطحين S_1 و Σ_1 ، وأن C هو المنحني المشترك بين S و Σ .
واذا لاحظنا أن :

$$w = V(A)S_1 = 0$$

ورأينا بالتالي (اعتمادا على العلاقة 60) ان :

$$V(I)S_1 = V(I)S$$

لأدركنا أن المنحني C يتدحرج على المنحني C_1 .

لذا نسمي C بالمنحني المتدحرج و C_1 بالقاعدة .

هذا واذا فرقنا شعاع الدوران الآتي ω الى مركبتين ، احدهما مماسية

ω_t (واقعة في المستوي المماس للسطحين في النقطة I) والاخرى ناظمية ω_n

(واقعة على الناظم في I للسطحين) ، فإننا نسمي ω_t بسرعة التدحرج

و ω_n بسرعة القتل .

ونلاحظ ان S يتدحرج على S_1 حين تنعدم سرعة القتل ω_n .

تمارين

١ - ما مقدار واتجاه السرعة الحاصلة لسفينة تحاول السير جهة الشرق بسرعة ٣ كيلومتر في الساعة حينما يحملها تيار متجه جهة الجنوب بسرعة ٣ كيلومتر في الساعة ؟

٢ - ما السرعة الحاصلة لجبة رمل نازلة في الماء بسرعة ٨ قدم/ثانية حينما يحملها تيار في جهة أفقية بسرعة ٦ قدم/ثانية ؟

٣ - ما هي السرعة التي يحاول أن يسبح بها رجل في نهر في اتجاه AB عمودي على التيار الذي يجري بسرعة ٣ أميال/ساعة ، اذا علم ان عرض النهر ١٢٠ ياردة ، وأنه عندما عبر الرجل النهر من نقطة A وصل الى نقطة على الشاطئ الآخر تبعد عن B بقدر ١٧٦ قدماً ؟ وما الزمن الذي يستغرقه في عبوره النهر في هذه الحالة ؟

(الميل = ١٧٦٠ ياردة ، الياردة = ٣ أقدام) .

٤ - مركب بخارية يمكن ان تسير في الماء الراكد بسرعة ٣٠ عقدة . وجهت شرق الشمال بقدر ٣٠° في قناة يجري فيها التيار نحو الشرق بسرعة ٥ عقدات . أوجد سرعة المركب بالنسبة لرجل واقف على الشاطئ ، وكذا الاتجاه الذي تسير فيه فعلاً .

(العقدة = ميل بحري في الساعة) .

٥ - عربة تسير بسرعة معينة في مطر ساقط في اتجاه راسي بالسرعة نفسها . في أي اتجاه يرى راكب في العربة المطر ساقطاً ؟

٦ - يسير قطار بجركة مستقيمة منتظمة بسرعة ٦٠ كم/سا بينما يتساقط عليه شاقوليا مطر بسرعة ثابتة قدرها ٤ م/ثا . انشئ شعاع سرعة قطرة من هذا

المطر بالنسبة لراكب في القطار ، ثم احسب طول هذا الشعاع وزاويته مع الشاقول .

٧ - مسافر جالس في قطار يسير بسرعة ثابتة قدرها ٦٠ كم/سا على سكة مستقيمة . قطار آخر طوله ٢٠٠ م يسير بحركة منتظمة في جهة مضادة وعلى سكة موازية .

ما سرعة هذا القطار مع العلم أن مروره أمام المسافر يستغرق زمنا قدره ٨ ثوان ؟

٨ - يتحرك مركب في تيار سرعته ثابتة a . ادرس حركة المركب إذا فرض ان سرعته الخاصة هي ثابتة وتساوي b ، وان محوره يبقى عمودياً أثناء الحركة على OM (M نقطة ثابتة من محور المركب ، و O سارية باخرة ساكنة) .

٩ - يدور مستقيم في مستو ثابت حول نقطة O من هذا المستقيم بسرعة زاوية ثابتة ω . تتحرك نقطة M على المستقيم بحركة نوسية دورها $\frac{2\pi}{\omega}$ ، ومركز نوساتها O . عين مسار النقطة M في المستوي الثابت ، ثم ادرس حركة هذه النقطة .

١٠ - قضيب طوله a يدور حول O في المستوي الثابت xOy . قضيب آخر طوله b مرتبط مفصلياً في A مع OA يتحرك في المستوي المفروض . عين شعاع سرعة النقطة B .

١١ - ox و oy محوران متعامدان يدوران حول O بسرعة زاوية ω . نقطة احداثياتها x و y متحولان . فاذا فرضنا ان مركبتي سرعة M على المحورين ox و oy هما $\frac{a}{x}$ و $\frac{b}{y}$ (a و b ثابتان) ، فالمطلوب اثبات ان مربع بُعد M عن O هو تابع خطي للزمن .

١٢ - زاوية متماسكة قياسها α تدور في مستويها حول رأسها

الثابت o وبسرعة زاوية ω . M نقطة تتحرك في المستوي xoy ، احداثياتها بالنسبة للمحورين ox و oy هما x و y . احسب ، بدلالة الاحداثيتين x و y ومشتقاتهما بالنسبة للزمن ، مركبتي سرعة M على المحورين ox و oy .

١٣ - أوجد مركبات سرعة نقطة في الاحداثيات الديكارتية ، وفي الاحداثيات الاسطوانية ، ثم في الاحداثيات القطبية .

١٤ - نفرض جسماً S يتحرك بالنسبة لجسم آخر S_1 . فاذا كان للمحور الآني للدوران ، في الحركة $(\frac{S}{S_1})$ منحنى ثابت بالنسبة للجسم S ، فان منحنى هذا المحور يكون ثابتاً ايضاً بالنسبة لـ S_1 .

١٥ - AB قطعة مستقيمة تتحرك في مستو ثابت π_1 بحيث ان نهايتها A و B ترسمان محورين متعامدين من هذا المستوي . أوجد في لحظة مفروضة مركز الدوران الآني للمستوي π المتمايك مع القطعة AB . ثم عين القاعدة والمتدرج .

١٦ - المماس لكونكوئيد ^(١) : نفرض في مستو معلوم منحنياً C ونقطة o واقعة خارج المنحني . نصل بين o ونقطة ما M من C ، ثم نأخذ على oM (باتجاه الشعاع oM أو بالاتجاه المعاكس) ، طولاً ثابتاً MP . فعندما ترسم M المنحني C ، ترسم P منحنياً Σ نسميه بالمنحني الكونكوئيدي للمنحني C بالنسبة للقطب o .

عين ، اعتماداً على حركة المستوي المتمايك مع المستقيم MP ، المماس في P للمنحني Σ اذا علم المماس في M للمنحني C .

١٧ - المماس لبودير ^(٢) : نفرض في مستو معلوم منحنياً C ونقطة o في مستوي المنحني . ليكن P مسقط o على المماس في نقطة ما M من المنحني C .

. Conchoïde (١)

. Podaire (٢)

عندما ترسم M المنحني C ، فإن P ترسم منحنياً Γ نسميه ببودير المنحني C بالنسبة للقطب o .

عين (اعتماداً على حركة المستوي المتماثل مع الزاوية القائمة OPM التي يمر احد ضلعيها من النقطة الثابتة o ويمس ضلعها الآخر المنحني C) المماس في P للمنحني Γ اذا علم المماس في M للمنحني C .

١٨ - المماس لسيكلويد^(١) : نفرض ، في مستو ثابت مفروض ، دائرة C تتدحرج بدون انزلاق على دائرة ثابتة C_1 ، او على مستقيم ثابت D . نسمي المنحني Γ الذي ترسمه نقطة ما M من الدائرة C بالمنحني السيكلويدي . ونسمي بوجه خاص المنحني الموافق لتدحرج C على المستقيم D بالسيكلويد . عين في لحظة ما t المماس في M للمنحني Γ .

١٩ - $A_1 A_2 A_3$ صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A_1 تنزلق على مستو ثابت معلوم . لنفرض أن حركة الصفيحة في كل لحظة هي حاصلة من تركيب ثلاث حركات دورانية ω_1 و ω_2 و ω_3 مراكزها رؤوس المثلث A_1 و A_2 و A_3 على الترتيب ، وقيمها الجبرية :

$$\omega_1 = 1 + 2 \operatorname{tg} t - \operatorname{tg}^2 t$$

$$\omega_2 = - 2 \operatorname{tg} t$$

$$\omega_3 = \operatorname{tg}^2 t$$

فاذا فرض أن طول احد ساقى المثلث يساوي a ، فالمطلوب تعيين القاعدة والمتدحرج ، ثم تعيين المحل الهندسي للرأس A_3 .

الباب الثالث

علم النوازن

الفصل الأول

مفهوم الكتلة

مركز العطالة :

٦٦ - تعريف : نفرض مجموعة نقط مادية . ليكن M_i موضع احدى هذه النقط ، و m_i كتلة هذه النقطة .

نسمي بمركز عطالة هذه المجموعة (أو مركز كتلتها) المركز C للنقط M_i وقد أسند اليها الأعداد m_i .

ان كل ما اوردناه في بحث مركز نقط يصبح في مركز كتل النقط .
ولما كانت الكتلة تقدر بأعداد حسابية يكون :

$$\sum m_i \neq 0$$

ويكون بالتالي المركز C معيناً ابداً وواقعاً داخل أيّ سطح محدب يحيط بالنقط .

نعلم أن مركز كتل النقط M_i يتعين بالعلاقة (5) :

$$\sum m_i \mathbf{CM}_i = 0$$

وإذا فرضنا O نقطة ما في الفراغ فالعلاقة السابقة تكتب :

$$\begin{aligned} (\sum m_i) \mathbf{OC} &= \sum m_i \mathbf{OM}_i \\ (62) \quad M \cdot \mathbf{OC} &= \sum m_i \cdot \mathbf{OM}_i \quad \text{أو} \end{aligned}$$

وذلك بفرض ان M هي كتلة المجموعة :

$$M = \sum m_i$$

هذا وإذا اعتبرنا O مبدأً للاحداثيات ، ورمزنا بـ (x_i, y_i, z_i) لاحداثيات النقطة M_i ، وبـ (ξ, η, ζ) لاحداثيات المركز C ، فمن العلاقة (62) التي تكتب :

$$(63) \quad \mathbf{OC} = \frac{\sum m_i \mathbf{OM}_i}{M}$$

يمكن تعيين احداثيات C بدلالة احداثيات نقط المجموعة ، فنجد :

$$(64) \quad \xi = \frac{\sum m_i x_i}{M} \quad \eta = \frac{\sum m_i y_i}{M} \quad \zeta = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

٦٧ — مركز عطالة جسم : إذا فرضنا مجموعة نقط مادية وكانت كتل هذه النقط متصل بعضها ببعض ، فانا نقول بأن هذه المجموعة تؤلف جسمًا .

لنفرض جسمًا محدوداً Σ . وليكن V حجمه ، و M كتلته . فاذا اشرنا بـ $\rho(x, y, z)$ لكثافته في النقطة $P(x, y, z)$ ، لكان :

$$\rho = \frac{dm}{dv}$$

بفرض ان dm هو كتلة الحجم الجزئي dv .

نرى أن كتلة الجسم واحداثيات مركز عطالته تتعين جميعها بتكاملات ثلاثية تمتد على الحجم الكلي للجسم :

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{M} \\ \eta = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz}{M} \\ \zeta = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz}{M} \end{array} \right.$$

وإذا كان الجسم صفيحة ، وكان S سطحها و M كتلتها ، فكثافتها السطحية في النقطة $P(x, y, z)$ تكون :

$$\rho = \frac{dm}{d\sigma}$$

بفرض ان dm هو كتلة السطح الجزئي $d\sigma$.

فكتلة الصفيحة واحداثيات مركز عطالتها تتعين بتكاملات ثنائية تمتد على السطح الكلي للصفيحة :

$$M = \iint_S \rho d\sigma$$

$$\xi = \frac{\iint_S \rho x d\sigma}{M}$$

$$\eta = \frac{\iint_S \rho y d\sigma}{M}$$

$$\zeta = \frac{\iint_S \rho z d\sigma}{M}$$

وإذا كان الجسم سلكاً (بشكل قوس) ، وكان L طوله و M كتلته ، فكثافته الخطية في النقطة $P(x, y, z)$ تكون :

$$\rho = \frac{dm}{ds}$$

بفرض ان dm هو كتلة القوس الجزئي ds .

فكتلة السلك واحداثيات مركز عطالته تتعين بتكاملات بسيطة تمتد على القوس السلكي للسلك :

$$M = \int_L \rho \, ds$$

$$\xi = \frac{\int_L \rho x \, ds}{M} \quad \eta = \frac{\int_L \rho y \, ds}{M} \quad \zeta = \frac{\int_L \rho z \, ds}{M}$$

٦٨ - **الاجسام المتجانسة** : يقال عن جسم انه متجانس اذا كانت كتل

جميع اجزائه متناسبة مع حجمها .

وقد لا يكون لجسم مادي حجم : كصفحة رقيقة (نعتبرها سطحاً) ، أو سلك رفيع (نعتبره خطاً) . فيقال عن هذه الاجسام بأنها متجانسة اذا كانت كتل اجزائها متناسبة مع مساحات سطوحها أو أطوال خطوطها . أو بعبارة أخرى يقال عن جسم (سواء كان له حجم أو كان صفحة أو سلكاً) انه متجانس اذا كان لجميع نقطه كثافة واحدة .

لا يتوقف موضع مركز عطالة جسم متجانس ، بالنسبة للجسم نفسه ، على نوع مادته وانما يتوقف على شكله الهندسي .

نرى أن كتلة جسم متجانس واحداثيات مركز عطالته تتعين كما يلي :

$$M = \rho \cdot V$$

$$\xi = \frac{\iiint_V x \, dv}{V} \quad \eta = \frac{\iiint_V y \, dv}{V} \quad \zeta = \frac{\iiint_V z \, dv}{V}$$

وان كان الجسم صفحة يكون :

$$M = \rho \cdot S$$

$$\xi = \frac{\iint_S x \, d\sigma}{S} \quad \eta = \frac{\iint_S y \, d\sigma}{S} \quad \zeta = \frac{\iint_S z \, d\sigma}{S}$$

وإذا كان الجسم سلكاً يكون :

$$M = \rho L$$

$$\xi = \frac{\int_L x ds}{L}$$

$$\eta = \frac{\int_L y ds}{L}$$

$$\zeta = \frac{\int_L z ds}{L}$$

٦٩ -- العناصر التناظرية في جسم : — نظرية ١ : إذا كان الجسم ما
مرکز تناظر فمرکز عطالته ينطبق على مرکز تناظره .

إذا رمزنا بـ O لمركز التناظر ، فانه يمكن تفريق الجسم الى ذرات
متناظرة مثنى بالنسبة للمركز O . فمرکز عطالة كل ذرتين متناظرتين ينطبق
على O ، وينطبق بالتالي مرکز عطالة جميع ذرات الجسم على مرکز التناظر O .
نظرية ٢ : إذا كان الجسم ما محور تناظر ، فمرکز عطالته يقع على هذا
المحور أو في هذا المستوي .

تبرهن هذه النظرية كسابقتها .

٧٠ -- العناصر المترافقة في جسم : — تعريف : يقال إن لشكل مستو
قطراً D مرافقاً لاستقامة Δ ، إذا أمكن انضمام نقط الشكل مثنى بحيث
تكون الاوتار الواصلة بين هذه الأزواج من النقط موازية للاستقامة Δ وتقع
منتصفات هذه الاوتار على القطر D .

المستقيم الواصل بين منتصفي قاعدتي شبه منحرف مثلاً ، هو قطر مرافق
لاستقامة إحدى القاعدتين .

وأحد قطرين مترافقين في قطع ناقص هو قطر مرافق لاستقامة القطر الثاني .

تعريف : يقال إن لجسم ما مستويًا قطريًا π مرافقاً لاستقامة Δ إذا
أمكن انضمام نقط الشكل مثنى بحيث تكون الاوتار الواصلة بين هذه

الأزواج من النقط موازية للاستقامة Δ وتقع منتصفات هذه الاوتار على المستوي π .

فاذا فرضنا مثلاً رباعي وجوه ABCD ، فالمستوي المار من احد حروفه AB ومنتصف الحرف المقابل CD هو مستوي قطري مرافق لاستقامة الحرف CD .

ومستوي القاعدة الوسطى في موشور ما (قائم او مائل) هو مستوي قطري مرافق لاستقامة احد احرف الموشور .

نظرية : اذا كان لجسم متجانس مستوي قطري مرافق لاستقامة ما ، فمركز عطالته يقع في هذا المستوي .

واذا كان لصفحة مستوية متجانسة قطر مرافق لاستقامة ، فمركز عطالتها يقع على هذا القطر .

تبرهن هذه النظرية بفرعيها كسابقتها .

٧١ — تطبيقات : من الخواص الواردة في مركز نقط ، ومن الخواص التي أوردناها في العناصر التناظرية والترافقية لجسم متجانس ، نستخلص النتائج التالية ، وهي قواعد شهيرة نعتمد عليها في تعيين مراكز عطالة الأجسام المتجانسة .

١ — مراكز عطالة نقط منهزلة ذات كتل متساوية :

(١) اذا تساوت كتلتا نقطتين فمركز عطالة هاتين النقطتين يقع في منتصف القطعة الواصلة بينهما .

نرى أنه عند البحث عن مراكز العطالة ، يمكن تعويض كل نقطتين ماديتين متساويتين في الكتلة بنقطة واحدة ، كتلتها تساوي ضعف كتلة احدى النقطتين وموضعها يقع في منتصف القطعة الواصلة بين النقطتين .

(٢) مركز عطالة ثلاث كتل متساوية موضوعة في رؤوس مثلث هو نقطة تلاقي أقطار هذا المثلث .

نرى أنه عند البحث عن مراكز العطالة ، يمكن تعويض كل ثلاث كتل متساوية وموضوعة في رؤوس مثلث بكتلة واحدة تساوي مجموع الكتل وموضوعة في مركز هذه الكتل .

(٣) مركز أربع كتل متساوية موضوعة في رؤوس رباعي وجوه هو نقطة تلاقي القطع المستقيمة الواصلة بين رؤوس الشكل ونقط تلاقي أقطار الوجوه المقابلة لهذه الرؤوس . وهو أيضاً نقطة تلاقي المستقيمت الواصلة بين منتصفات أحرف الشكل المتقابلة .

عند البحث عن مراكز العطالة ، يمكن تعويض كل أربع كتل متساوية وموضوعة في رؤوس رباعي وجوه بكتلة واحدة تساوي مجموع الكتل وموضوعة في مركز هذه الكتل .

٢ - مراكز عطالة الأسلاك المتجانسة : (١) مركز عطالة قطعة مستقيمة يقع في منتصفها .

عند البحث عن مركز عطالة خط منكسر يمكن أن نستبدل بقطعه المستقيمة نقطاً كتلتها تساوي أطوال القطع ، نضعها في منتصفات هذه القطع . (٢) مركز عطالة محيط مثلث هو نقطة تلاقي المنصفات الداخلية لمثلث رؤوسه منتصفات أضلاع المثلث المفروض .

أو نقول ان مركز عطالة محيط مثلث هو مركز الدائرة المرسومة داخل مثلث رؤوسه منتصفات أضلاع المثلث المفروض .

٣ - مراكز عطالة الصفائح المتجانسة : بما أن كل قطر في مثلث هو قطر موافق لاستقامة الضلع المتعلق بهذا القطر ، فمركز عطالة سطح مثلث هو نقطة تلاقي أقطاره .

نلاحظ أن مركز عطالة سطح مثلث هو أيضاً مركز عطالة ثلاث كتل متساوية موضوعة في رؤوس هذا المثلث .

عند البحث عن مراكز العطالة ، يمكن أن نستبدل بكتلة سطح مثلث ثلاث كتل (تساوي كل منها ثلث كتلة سطح هذا المثلث) نضعها في رؤوسه الثلاثة .

٤ - مراكز عطالة الحجوم المتجانسة : (١) مركز عطالة حجم موشور ثلاثي هو مركز عطالة سطح مقطعه الاوسط .
نرى أنه عند البحث عن مركز العطالة ، يمكن أن نستبدل بحجم موشور ثلاثي سطح مقطعه الاوسط .

وللبحث عن مركز عطالة موشور ما نقسمه الى مواشير ثلاثية بمستويات تمر من أحد حروفه ، ثم نستبدل بهذه المواشير مقاطعها الوسطى ، فمركز العطالة المطلوب هو مركز عطالة سطوح هذه المقاطع . اذن :

مركز عطالة حجم موشور ما هو مركز عطالة سطح مقطعه الاوسط .
ان ما ذكرناه في موضع مركز عطالة حجم موشور ما ينطبق على حجم اسطوانة ، لأن حجم اسطوانة هو نهاية حجم موشور .

(٢) بما أن المستوي المار من أحد أحرف رباعي وجوه ومنتصف الحرف المقابل له هو مستو قطري للشكل مرافق لاستقامة الحرف المقابل ، فالمستويات القطرية الثلاثة المماثلة لهذا المستوي والمارة بأحد رؤوس الشكل تتقاطع بمستقيم يصل هذا الرأس بنقطة تلاقي أقطار الوجه المقابل له ، أو يصل هذا الرأس بمركز عطالة الوجه المقابل له . فمركز عطالة حجم رباعي وجوه يقع اذن على هذا المستقيم ، كما يقع أيضاً على المستقيمتين الأربعة التي تماثله والتي تصل رؤوس الشكل بنقط تلاقي أقطار الوجوه المقابلة لهذه الرؤوس . اذن مركز عطالة الشكل هو نقطة تلاقي هذه المستقيمتين . وقد وجدنا أن نقطة تلاقي هذه المستقيمتين هي مركز عطالة أربع كتل متساوية موضوعة في رؤوس هذا الشكل .

فمرکز عطالة حجم رباعي وجوه ينطبق على مرکز عطالة اربع كتل متساوية موضوعة في رؤوسه . فيقع اذن في نقطة تلاقي المستقيمت الواصلة بين منتصفي كل حرفين متقابلين من الشكل ، كما يقع أيضاً في ربع المستقيم الواصل بين أحد رؤوس الشكل ونقطة تلاقي اقطار الوجه المقابل لهذا الرأس اعتباراً من الوجه . فهو ينطبق اذن على نقطة تلاقي اقطار مقطع الشكل (أو على مرکز عطالة سطح المقطع) بمستوي يوازي احد الوجوه ويبعد عنه بقدر ربع بُعد هذا الوجه عن الرأس المقابل له .

فمرکز عطالة رباعي وجوه ينطبق على مرکز عطالة سطح مقطع له يوازي أحد وجوهه ويبعد عنه بقدر ربع بُعد هذا الوجه عن الرأس المقابل له . نرى أنه عند البحث عن مراكز العطالة ، يمكن ان نستبدل بحجم رباعي وجوه سطح هذا المقطع ، أو اربع كتل (تساوي كل واحدة منها ربع كتلته) نضعها في رؤوسه .

(٣) للبحث عن مرکز عطالة هرم ما نقسمه بمستويات مارة بأحد حروفه الى هرمات ثلاثية . ثم نستبدل بهذه الهرمات مقاطعها بمستويات توازي قواعدها وتبعد عن هذه القواعد بقدر ربع ارتفاع الهرم المفروض . فمرکز العطالة المطاوب هو مرکز عطالة سطوح هذه المقاطع .

نستخلص من ذلك أن مرکز عطالة حجم هرم ما هو مرکز عطالة سطح مقطعه بمستوي يوازي قاعدته ويبعد عنها بقدر ربع ارتفاعه .

إن ما أوردناه في موضع مرکز عطالة حجم هرم ينطبق على حجم مخروط ، لان المخروط هو نهاية هرم . فمرکز عطالة مخروط هو مرکز عطالة سطح مقطعه الذي يوازي قاعدته ويبعد عنها بقدر ربع ارتفاعه .

عزوم العطالة :

٧٢ - تعريف : نفرض مجموعة نقط مادية في الفراغ . ليكن M موضع احدى هذه النقط ، و m كتلة هذه النقطة .

نسمي بعزم عطالة هذه المجموعة بالنسبة لنقطة مفروضة O الكمية I المعينة بالعلاقة التالية :

(65)

$$I = \sum m r^2$$

وذلك بفرض أن r هو بُعد M عن O .

وكذا نقول عن الكمية I التي تحقق العلاقة السابقة بأنها هي أيضاً عزم عطالة المجموعة بالنسبة لمستقيم مفروض D أو مستو مفروض π وذلك اذا اعتبرنا ان r هو بُعد M عن المستقيم D أو المستوي π .

واذا رمزنا بـ M لكتلة المجموعة :

$$M = \sum m$$

فإننا نسمي الطول k الذي يحقق العلاقة :

$$I = M k^2$$

$$k^2 = \frac{\sum m r^2}{\sum m} \quad \text{أو}$$

بنصف قطر العطالة .

واذا نسبنا المجموعة المادية المفروضة لمجاور احداثية قائمة $oxyz$ لكانت عزوم عطالة المجموعة بالنسبة للمستويات الاحداثية هي :

$$(66) \quad I_{yz} = \sum m x^2$$

$$I_{zx} = \sum m y^2$$

$$I_{xy} = \sum m z^2$$

وكانت عزوم العطالة بالنسبة للمحاور الاحداثية هي :

$$(67) \quad I_x = \sum m (y^2 + z^2) \quad I_y = \sum m (z^2 + x^2) \quad I_z = \sum m (x^2 + y^2)$$

وكان بالتالي عزم العطالة بالنسبة لمبدأ الاحداثيات هو :

$$(68) \quad I_o = \sum m (x^2 + y^2 + z^2)$$

ملاحظة : — ان كانت المجموعة تؤلف جسماً فعزم العطالة يتعين حينئذ بتكامل ثلاثي أو ثنائي أو بسيط حسبما يكون الجسم حجماً أو صفيحة أو سلكاً .

واذا اعتبرنا كثافة جسم مساوية للواحدة :

$$\rho = 1$$

لأصبح حينئذ عزم عطالة كتلة جسم منطبقاً على عزم عطالته الهندسي .

٧٣ — العلاقات بين عزوم العطالة لمجموعة : هنالك علاقات شهيرة تساعد في تعيين عزوم العطالة لمجموعة . وهذه العلاقات هي :

١ — من (66) و (67) تنتج العلاقات :

$$(69) \quad \begin{cases} I_x = I_{yx} + I_{xz} \\ I_y = I_{zy} + I_{yx} \\ I_z = I_{xz} + I_{zy} \end{cases}$$

نستخلص من ذلك أن عزم عطالة مجموعة بالنسبة لمستقيم ما يساوي مجموع عزمي عطالة المجموعة بالنسبة لمستويين متعامدين يمران بالمستقيم .

ونرى بالمقابل ، أنه يمكن حساب عزم عطالة مجموعة حول مستو بدلالة عزوم العطالة حول ثلاثة مستقيمت متعامدة اثنان منها في المستوي المفروض .

لنحسب I_{xy} مثلاً . نعلم أن :

$$z^2 = \frac{1}{2} \left[(y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) - (x^2 + y^2) \right]$$

فيكون :

$$\sum m z^2 = \frac{1}{2} \left[\sum m (y^2 + z^2) + \sum m (z^2 + x^2) - \sum m (x^2 + y^2) \right]$$

$$I_{xy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y - I_z) \quad \text{أو}$$

وهي العلاقة المطلوبة .

وهكذا نجد العلاقات التالية :

$$(70) \quad \begin{cases} I_{xy} = \frac{1}{2} (I_x + I_y - I_z) \\ I_{yz} = \frac{1}{2} (I_y + I_z - I_x) \\ I_{zx} = \frac{1}{2} (I_z + I_x - I_y) \end{cases}$$

هذا ونرى أنه يمكن الوصول مباشرة الى العلاقات (70) من العلاقات السابقة (69) .

٢ - من (66) و (68) تنتج العلاقة :

$$(71) \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}$$

ومن (67) و (68) تنتج العلاقة :

$$(72) \quad I_0 = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

فعزم العطالة حول نقطة يساوي مجموع عزوم العطالة حول ثلاثة مستويات متعامدة تمر جميعها بالنقطة ، أو يساوي نصف مجموع عزوم العطالة حول ثلاثة مستويات متعامدة تمر جميعها بالنقطة .

هذا ونلاحظ ان :

$$\Sigma m (x^2 + y^2 + z^2) = \Sigma m (x^2 + y^2) + \Sigma m z^2$$

فمن المجموعات (66) و (67) و (68) تنتج العلاقة :

$$I_o = I_z + I_{xy}$$

وهكذا نجد العلاقات :

$$(73) \quad I_o = I_x + I_{yz} = I_y + I_{zx} = I_z + I_{xy}$$

نستخلص من ذلك أن عزم عطالة مجموعة بالنسبة لنقطة يساوي مجموع عزمي عطالة المجموعة بالنسبة لمستقيم ومستو متعامدين يمر كل منهما بالنقطة .

٣ - هنالك مقادير من الشكل :

$$\Sigma mxy, \quad \Sigma myz, \quad \Sigma mzx$$

نسمي أحدها بجداء العطالة .

نلاحظ أنه يمكن تعيين جداء العطالة بدلالة عزوم العطالة .

لتعين مثلاً Σmxy . نعلم أن :

$$xy = \frac{1}{4} [(x+y)^2 - (x-y)^2]$$

فاذا دورنا مجموعة المحاور الاحداثية $oxyz$ حول المحور oz بقدر $\frac{\pi}{4}$

نحصل على مجموعة محاور جديدة ، ولنرمز لها بـ $OXYZ$ (O منطبقة على o) .

فاذا كتبنا معادلات نقل المحاور ، وهي :

$$X = \frac{\sqrt{2}}{2} (x+y) \quad Y = \frac{\sqrt{2}}{2} (-x+y) \quad Z = z$$

لوجدنا أن :

$$xy = \frac{1}{2} (X^2 - Y^2)$$

وكان بالتالي :

$$\Sigma m x y = \frac{1}{2} (\Sigma m X^2 - \Sigma m Y^2)$$

$$\Sigma m x y = \frac{1}{2} (I_{YZ} - I_{ZX}) \quad \text{او}$$

واذا لاحظنا أن :

$$X^2 - Y^2 = X^2 + Z^2 - (Y^2 + Z^2)$$

لكان أيضاً :

$$\Sigma m x y = \frac{1}{2} [\Sigma m (X^2 + Z^2) - \Sigma m (Y^2 + Z^2)]$$

$$\Sigma m x y = \frac{1}{2} (I_Y - I_X) \quad \text{او}$$

وهكذا نجد أن :

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma m x y = \frac{1}{2} (I_{YZ} - I_{ZX}) = \frac{1}{2} (I_Y - I_X) \\ \Sigma m y z = \frac{1}{2} (I_{ZX} - I_{XY}) = \frac{1}{2} (I_Z - I_Y) \\ \Sigma m z x = \frac{1}{2} (I_{XY} - I_{YZ}) = \frac{1}{2} (I_X - I_Z) \end{array} \right.$$

ملاحظة : - نرى أنه حين يكون مستوي الاحداثيات xoy مثلاً هو مستوي تناظر مادي المجموعة ، يصبح حينئذ :

$$\Sigma m y z = 0 \quad \Sigma m z x = 0$$

وذلك لان نقط المجموعة تكون متناظرة مثني بالنسبة لهذا المستوي . فاذا فرضنا أن احدى نقط المجموعة هي M_i وان كتلة هذه النقطة هي m_i واحداثياتها هي (x_i , y_i , z_i) ، لكانت كتلة النقطة M'_i المتناظرة مع

النقطة M_i هي أيضاً m_i وكانت احداثياتها هي $(x_i, y_i, -z_i)$. وبذلك نجد أن :

$$\sum m y z = \sum m_i y_i z_i + \sum m_i y_i (-z_i)$$

$$\sum m y z = \sum m_i y_i z_i - \sum m_i y_i z_i = 0 \quad \text{او}$$

كما نجد أن :

$$\sum m z x = \sum m_i z_i x_i + \sum m_i (-z_i) x_i$$

$$\sum m z x = \sum m_i z_i x_i - \sum m_i z_i x_i = 0 \quad \text{او}$$

وهكذا نجد أنه حين يكون مستوي الاحداثيات $yo z$ هو مستوي تناظر للمجموعة يكون :

$$\sum m z x = 0 \quad \sum m x y = 0$$

وحين يكون المستوي zox مستوي تناظر للمجموعة يكون :

$$\sum m x y = 0 \quad \sum m y z = 0$$

هذا ونلاحظ بسهولة أنه حين يكون المحور ox هو محور تناظر للمجموعة يكون :

$$\sum m x y = 0 \quad \sum m z x = 0$$

وحين يكون المحور oy محور تناظر للمجموعة يكون :

$$\sum m y z = 0 \quad \sum m x y = 0$$

وحين يكون المحور oz محور تناظر يكون :

$$\sum m z x = 0 \quad \sum m y z = 0$$

ع - لنبحث عن العلاقة بين عزمي عطالة مجموعة حول مركز عطالتها C وحول نقطة مفروضة O .

لتكن M_i احدى نقط المجموعة . نعلم أن عزم عطالة المجموعة حول O هو :

$$I_o = \sum m_i OM_i^2$$

$$OM_i = OC + CM_i \quad \text{وبما أن}$$

فيكون :

$$I_o = \sum m_i OC^2 + \sum m_i CM_i^2 + 2 \sum m_i OC \cdot CM_i$$

واذا لاحظنا أن :

$$\sum m_i OC^2 = (\sum m_i) OC^2 = M \cdot OC^2 \quad (M \text{ كتلة المجموعة})$$

$$\sum m_i CM_i^2 = I_c \quad \text{وان} \quad (I_c \text{ عزم العطالة حول } C)$$

$$\sum m_i OC \cdot CM_i = OC \sum m_i CM_i \quad \text{و}$$

$$\sum m_i CM_i = 0 \quad \text{و} \quad (\text{لان } C \text{ مركز نقط})$$

لوجدنا أن :

$$(75) \quad I_o = M \cdot OC^2 + I_c$$

واذا رمزنا بـ d لبعـد النقطة O عن مركز العطالة C ، فالعلاقة السابقة تكتب :

$$I_o = M d^2 + I_c$$

واذا أشرنا بـ k_o و k_c لنصفي قطري عطالة المجموعة بالنسبة للنقطتين O و C فالعلاقة الاخيرة يمكن كتابتها أيضاً :

$$K_o^2 = d^2 + K_c^2$$

هذا ونجد بسهولة (بنفس المحاكات السابقة) أنه اذا فرضنا مستقيمين

متوازيين D و DC ، أحدهما DC يمر بمركز عطالة المجموعة ، فالعلاقة بين عزمي عطالة المجموعة حول هذين المستقيمين تكون أيضاً :

$$(76) \quad I_D = I_{DC} + M d^2$$

وذلك بفرض أن d هو البعد بين المستقيمين المتوازيين .

كما نجد أيضاً أن العلاقة بين عزمي عطالة مجموعة حول مستويين متوازيين P و PC ، يمر أحدهما PC بمركز عطالة المجموعة ، هي أيضاً :

$$(77) \quad I_P = I_{PC} + M d^2$$

وذلك بفرض أن d هو البعد بين المستويين المتوازيين .

٥ - لنحسب عزم عطالة مجموعة حول مستقيم ، أو محور ، يمر بمبدأ الاحداثيات بدلالة عزوم عطالة المجموعة حول المحاور الاحداثية .

ليكن Δ المحور ، و $u(\alpha, \beta, \gamma)$ شعاع واحدته ، و r بُعد نقطة ما $M(x, y, z)$ من المجموعة عن المحور Δ .

نعلم أن عزم عطالة المجموعة حول المحور Δ هو :

$$I_\Delta = \sum m r^2$$

ونعلم أيضاً (اعتماداً على قياس الجداء الخارجي لشعاعين) أن :

$$|u \wedge OM| = |u \cdot r| = r$$

فيكون إذن :

$$r^2 = (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$$

وبعد الإصلاح نجد :

$$r^2 = (y^2 + z^2) \alpha^2 + (z^2 + x^2) \beta^2 + (x^2 + y^2) \gamma^2$$

$$- 2[yz\beta\gamma + zx\gamma\alpha + xy\alpha\beta]$$

فعزم العطالة حول Δ يصبح اذن :

$$I_{\Delta} = x^2 \sum m (y^2 + z^2) + \beta^2 \sum m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \sum m (x^2 + y^2) \\ - 2 [\beta \gamma \sum m y z + \gamma x \sum m z x + x \beta \sum m x y]$$

واذا رمزنا بـ A و B و C لعزوم عطالة المجموعة حول المحاور

ox و oy و oz :

$$A = \sum m (y^2 + z^2) \quad B = \sum m (z^2 + x^2) \quad C = \sum m (x^2 + y^2)$$

ورمزنا بـ D و E و F لجداآت العطالة :

$$D = \sum m y z \quad E = \sum m z x \quad F = \sum m x y$$

لاصبح دستور عزم العطالة :

$$(78) \quad I_{\Delta} = A x^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2 [D \beta \gamma + E \gamma x + F x \beta]$$

نستخلص من ذلك أن تعيين عزم عطالة مجموعة حول أي مستقيم يمر بمبدأ الاحداثيات يؤول الى تعيين عزوم عطالة المجموعة حول المحاور الاحداثية (وهي A و B و C) والى تعيين جداآت العطالة (وهي D و E و F) .

نتيجة : ينتج من العلاقة (78) أن عزم عطالة مجموعة بالنسبة لمحور Δ مار بنقطة o هو تابع لمركبات شعاع واحدة المحور $u(x, \beta, \gamma)$. فعزم العطالة حول محور هو تابع اذن لمنحى المحور .

سنبين الآن بطريقة هندسية كيف يتغير عزم العطالة I_{Δ} حينما يدور المحور Δ حول النقطة o .

٧٤ — جسم العطالة : نأخذ على المحور Δ نقطة P بحيث يكون :

$$(79) \quad OP = \frac{u}{\sqrt{I_{\Delta}}}$$

فاذا رمزنا لاحداثيات P بـ (X, Y, Z) لكان :

$$X = \frac{\alpha}{\sqrt{I_{\Delta}}} \quad Y = \frac{\beta}{\sqrt{I_{\Delta}}} \quad Z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_{\Delta}}}$$

واذا حسبنا المركبات (α, β, γ) بدلالة الاحداثيات (X, Y, Z) :

$$\alpha = X \sqrt{I_{\Delta}} \quad \beta = Y \sqrt{I_{\Delta}} \quad \gamma = Z \sqrt{I_{\Delta}}$$

وعوضنا هذه القيم في العلاقة (78) لوجدنا أن النقطة P تقع على السطح :

$$(80) \quad AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2(DYZ + EZX + FXY) = 1$$

وهو سطح من الدرجة الثانية متناظر بالنسبة لمبدأ الاحداثيات ، ولنرمز له بـ Σ .
نرى اعتماداً على العلاقة (80) أن نقط هذا السطح هي على أبعاد محدودة
من مركز تناظره O (إلا في حالة خاصة ، حين تكون نقط المجموعة على
استقامة واحدة ، فينعدم عزم العطالة حول المحور الذي تقع عليه النقط ،
وتبتعد آتئذ P الى اللانهاية) . فالسطح Σ يكون اذن في الحالة العامة هو مجسم
القطع الناقص ، ونسميه بمجسم القطع الناقص للعطالة الموافق للنقطة O (أو
اختصاراً مجسم العطالة في O) .

يتعين مجسم العطالة في O (ويتعين أيضاً عزم العطالة I_{Δ}) حين تعلم
الأمثال A و B و C و D و E و F . وبالمقابل إذا علم مجسم العطالة
في O أمكن تعيين عزم العطالة حول أي مستقيم يمر بالمبدأ O .

نسمي المحاور التناظرية في مجسم العطالة بمحاور العطالة الاساسية للمجموعة
في النقطة O .

ونسمي المستويات التناظرية في مجسم العطالة بمستويات العطالة الاساسية
للمجموعة في النقطة O .

وإن كانت O هي مركز العطالة لمجموعة ، فنسمي آتئذ السطح Σ بمجسم

العطالة المركزي للمجموعة . كما نسمي المحاور التناظرية والمستويات التناظرية لهذا الجسم بالمحاور المركزية والمستويات المركزية .
هذا وإذا انطبقت المحاور الاحداثية على المحاور الاساسية للعطالة في O ، فجدات العطالة تصبح جميعها مساوية للصفر ، ويغدو دستور عزم العطالة حول المحور Δ :

$$I_{\Delta} = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2$$

وتغدو معادلة مجسم العطالة :

$$A X^2 + B Y^2 + C Z^2 = 1$$

وتصبح الامثال A و B و C هي عزوم العطالة الاساسية في O .

٧٥ — ملاحظات خاصة : لنعين عزم العطالة I_{Δ} ومجسم العطالة Σ في

بعض الحالات الخاصة الشهيرة ، وذلك حين تكون المجموعة جسماً دورانياً ، أو كرة ، أو صفيحة مستوية ، أو سلكاً مستقيماً .

١ — المجموعة جسم دوراني متجانس : نفرض أن مبدأ الاحداثيات O

واقع على محور الدوران (أي محور الشكل) . فاذا اخترنا المحاور الاحداثية بحيث

ينطبق المحور OZ على محور الشكل ، لغدت المحاور الاحداثية OX و OY و OZ

هي محاور أساسية للعطالة في O .

وإذا لاحظنا أن عزوم العطالة حول المستقيمت المنبثقة من نقطة من محور

الشكل عمودياً على هذا المحور هي مقادير متساوية لادر كننا أن :

$$A = B$$

وان مجسم العطالة في O هو جسم دوراني ، معادلته :

$$A (X^2 + Y^2) + C Z^2 = 1$$

أما عزم العطالة حول محور Δ مار من o فيصبح دستورهِ :

$$I_{\Delta} = A (\alpha^2 + \beta^2) + C \gamma^2$$

وإذا رمزنا بـ θ للزاوية الكائنة بين المحورين Δ و oz :

$$\theta = (oz, \Delta)$$

لأضحى الدستور السابق :

$$I_{\Delta} = A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta$$

٢ — المجموعة كرة متجانسة : نفرض أن مبدأ الاحداثيات o منطبق على مركز الكرة .

نرى أن مجسم العطالة في o هو أيضا كرة مركزها النقطة o ، وأن أي مستقيم يمر بالنقطة o هو محور أسامي للعطالة في o .
ينتج من ذلك أن :

$$A = B = C$$

$$I_{\Delta} = A$$

وأن

أما مجسم العطالة فهو كرة معادلتها :

$$I_{\Delta} (X^2 + Y^2 + Z^2) = 1$$

٣ — المجموعة صفيحة مستوية متجانسة : لنفرض أن مبدأ الاحداثيات o واقع في الصفيحة . فإذا اخترنا المحاور الاحداثية بحيث ينطبق المستوي xoy على الصفيحة لكان :

$$A = \sum m y^2$$

$$B = \sum m x^2$$

$$C = \sum m (x^2 + y^2)$$

$$D = 0$$

$$E = 0$$

و

وأصبح عزم العطالة حول محور Δ مار من o هو :

$$I_{\Delta} = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 - 2 F \alpha \beta$$

وأصبحت بالتالي معادلة مجسم العطالة :

$$A X^2 + B Y^2 + C Z^2 - 2 F X Y = 1$$

نلاحظ في هذه الحالة أن :

$$A + B = C$$

وأن مستوي الصفيحة هو مستو أساسي للعطالة في O (وهو يقطع مجسم العطالة بقطع ناقص هو القطع الناقص للعطالة في O للصفيحة المستوية) ، وأن المحور العمودي على مستوي الصفيحة هو محور أساسي للعطالة في O .

٤ - المجموعة سلك مستقيم متجانس : لنفرض أن مبدأ الاحداثيات O واقع على المستقيم الحامل للسلك . فإذا اخترنا المحاور الاحداثية بحيث ينطبق المحور OZ على السلك لكان :

$$A = B = \sum m z^2 \quad C = 0$$

$$D = E = F = 0$$

وأصبح مجسم العطالة أسطوانة دورانية حول OZ معادلتها :

$$A (X^2 + Y^2) = 1$$

أما عزم العطالة حول محور Δ يمر بالنقطة O ويصنع زاوية θ مع المحور OZ فيغدو دستوراه :

$$I_{\Delta} = A (\alpha^2 + \beta^2)$$

$$I_{\Delta} = A \sin^2 \theta$$

وبالتالي

ملاحظة : إذا رجعنا الى العلاقات (70) التي عيّنا بها عزوم العطالة حول المستويات الاحداثية بدلالة عزوم العطالة حول المحاور الاحداثية لوجدنا أن هذه العلاقات تكتب كما يلي :

$$2 I_{xy} = A + B - C$$

$$2 I_{yz} = B + C - A$$

$$2 I_{xz} = C + A - B$$

واذا لاحظنا أن عزم عطالة مجموعة حول مستو هو مقدار موجب بوجه عام أو مساو للصفر في حالة خاصة (تكون نقط المجموعة في هذه الحالة واقعة في هذا المستوي) لأدركنا أنه يوجد بين المقادير A و B و C العلاقات :

$$(81) \quad A + B \geq C \quad B + C \geq A \quad C + A \geq B$$

وهي العلاقات الكائنة بين أطوال أضلاع مثلث .

نستخلص من ذلك أن أي مجسم للقطع الناقص لا يكون بوجه عام مجسماً للعطالة لمجموعة ما . ويشترط ليصبح مجسم قطع ناقص مفروض مجسماً للعطالة لمجموعة كتل نختارها بصورة مناسبة ، أن يمكن انشاء مثلث من المقادير $\frac{1}{a^2}$ و $\frac{1}{b^2}$ و $\frac{1}{c^2}$ ، باعتبار هذه المقادير أطوالاً ، وبفرض أن a و b و c هي انصاف محاور مجسم القطع الناقص المفروض .

فاذا كان المجسم المفروض مثلاً مجسماً دورانياً حول oz ، فالعلاقات بين أضلاع مثلث ترد الى العلاقة :

$$\frac{2}{a^2} \geq \frac{1}{c^2}$$

$$\frac{a}{c} \leq \sqrt{2} \quad \text{او}$$

فيشترط إذن ، ليصبح مجسم دوراني مفروض مجسماً للعطالة لمجموعة كتل ، أن تكون النسبة بين المحور الاستوائي للمجسم المفروض والمحور القطبي له اصغر من العدد $\sqrt{2}$ أو مساوية له . فيمكن إذن للمجسم الدوراني المفروض أن تزداد استطالته بلا تناسخ حتى ينقلب الى اسطوانة (وعندها ترد كتل المجموعة

الى سلك مستقيم) . أما انبساط هذا الجسم فمحدود . ونهاية الانبساط توافق المساواة :

$$a = \sqrt{2} c$$

وفي هذه النهاية تؤلف كتل المجموعة صفيحة مستوية دائرية .

هذا ونلاحظ في الحالتين الخاصتين التاليتين :

(١) حين تقع نقط المجموعة في مستوي مجوي o ، وليكن المستوي xoy ، ترتبط المقادير A و B و C بالعلاقة :

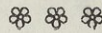
$$A + B = C$$

ففي هذه الحالة تنطبق أضلاع المثلث على بعضها ، ويغدو بالتالي هذا المثلث قطعة مستقيمة .

(٢) حين تقع نقط المجموعة على مستقيم مجوي o ، وليكن المحور oz ، يكون :

$$A = B \quad C = 0$$

فينطبق ضلعان من المثلث على بعضهما وينعدم الضلع الثالث ، ويغدو المثلث ايضاً قطعة مستقيمة .



نماذج

- ١ - عين مركز ثلاث كتل موضوعة في رؤوس مثلث ومتناسبة مع أضلاعه المقابلة لهذه الرؤوس .
- ٢ - أوجد مركز أربع كتل موضوعة في رؤوس رباعي وجوه ومتناسبة مع سطوح وجوهه المقابلة لهذه الرؤوس .
- ٣ - برهن أن مركز عطالة خط مضلعي متجانس ومنتظم يقع على القطر العمودي على الوتر الواصل بين نهائي الخط ، وأن بُعد هذا المركز عن مركز الخط يساوي الرابع المتناسب بين محيط الخط ووتره وعامده .
- ٤ - أوجد مركز عطالة قطعة من سلك دائري متجانس .
- ٥ - أوجد مركز عطالة قطعة متجانسة من سلك لولبي .
- ٦ - أوجد عطالة قوس من سلسلة متجانسة .
- ٧ - برهن أن مركز عطالة سطح شبه منحرف متجانس يمكن تعيينه بالإنشاء التالي : نمد قاعدتي شبه المنحرف في جهتين مختلفتين بحيث نمد كلاً منهما بقدر الثانية ، فالمستقيم الواصل بين منتصفيه نهائي ممددي القاعدتين يلاقي المستقيم الواصل بين منتصفيه هاتين القاعدتين في مركز العطالة المطلوب .
- ٨ - ننشئ على وتر مثلث قائم الزاوية (إحدى زواياه 30°) وخارجه مثلثاً متساوي الأضلاع . فالمثلثان يؤلفان شبه منحرف قائم . عين مركز عطالة شبه المنحرف واحسب أبعاد هذا المركز عن أضلاع المثلث القائم وذلك بفرض أن الوتر يساوي واحدة الأطوال .
- ٩ - برهن أنه إذا اسقط سطح مستو على مستو فمركز عطالة المسقط يقع على مسقط مركز عطالة السطح المفروض .
- ١٠ - أوجد مركز عطالة سطح قطاع دائري متجانس مفروض .

١١ - اوجد مركز عطالة السطح المتجانس المحصور بين قطع زائد مفروض ومستقيم عمودي على محور القطع (بُعد المستقيم عن ذروة القطع معلوم) .
ثم اوجد مركز عطالة نصف هذا السطح .

١٢ - اوجد مركز عطالة سطح نصف قطع ناقص متجانس مفروض .

١٣ - قطعنا صفيحة كروية متجانسة بمستويين متوازيين ، فالمطلوب تعيين مركز عطالة القسم المحصور بين هذين المستويين من الصفيحة المفروضة .

١٤ - ABCDEF مسدس مركزه O . اوجد مركز عطالة سطحه المتجانس بعد ان يقطع منه المثلث OAB .

١٥ - اوجد مركز عطالة السطح المتجانس لقبة مجسم قطع زائد دوراني نشأت من قطع هذا المجسم بمستو عمودي على محور الشكل ومار من محور القطع .
١٦ - اوجد مركز عطالة الحجم المتجانس لقبة مجسم قطع زائد دوراني نشأت من قطع هذا المجسم بمستو عمودي على محور الشكل .
ثم اوجد حجم هذه القبة .

١٧ - نظرية غولدان (١) : برهن ان السطح الحادث من دوران منحني مستو حول محور كائن في مستويه وغير قاطع له يساوي جداء طول المنحني بمحيط الدائرة التي يرسمها مركز كتلته .

١٨ - نظرية غولدان (٢) : الحجم الحادث من دوران سطح مستو حول محور كائن في مستويه وغير قاطع له يساوي جداء هذا السطح بمحيط الدائرة التي يرسمها مركز كتلته .

١٩ - يدور مثلث متساوي الاضلاع حول احد اضلاعه . اوجد السطح الحادث من دوران ضلعيه الآخرين ، ثم الحجم الحادث من دوران سطحه ، وذلك بتطبيق نظريتي غولدان .

- ٢٠ - اوجد حجم القبة الوارد في التمرين (١٦) ، بتطبيق نظرية غولدان .
٢١ - اوجد سطح حلقة ناتجة من دوران دائرة حول محور واقع في مستوياتها وغير قاطع لها . ثم اوجد حجم هذه الحلقة .
٢٢ - اوجد عزم عطالة قطعة مستقيمة من سلك متجانس مفروض بالنسبة :

(١) لمستقيم يوازي القطعة المستقيمة .

(٢) لمنتصف القطعة .

(٣) لاحدى نهايتي القطعة .

(٤) لنقطة مفروضة في الفراغ .

(٥) لمحور عمودي على القطعة ومار بنقطة مفروضة من المستقيم الحامل للقطعة .

(٦) لمحور يصنع زاوية معلومة مع القطعة ويمر من منتصفها .

٢٣ - اوجد عزم عطالة سلك دائري متجانس مفروض بالنسبة :

(١) لمركز الدائرة .

(٢) لمستقيم يوازي محور الدائرة ويمر من نقطة معلومة من مستوياتها .

(٣) لاحد اقطار الدائرة .

(٤) لمستو مماس للدائرة وعمودي على مستوياتها .

(٥) لمحور يمر بمركزها ويصنع زاوية معلومة مع محورها .

٢٤ - اوجد عزم عطالة قطعة من سلك دائري متجانس بالنسبة لقطر الدائرة المار من احدى نهايتي القوس .

٢٥ - اوجد عزم عطالة صفيحة متجانسة دائرية (بشكل دائرة) بالنسبة :

(١) لمحور الدائرة .

(٢) لنقطة مفروضة في الفراغ .

(٣) لاحد اقطار الدائرة .

- (٤) لمحور يمر بمر كزها ويصنع زاوية معلومة مع محورها .
(٥) لمستوي يمر بأحد اقطارها ويصنع زاوية معلومة مع مستويها .
٢٦ - اوجد عزم عطالة سطح مستطيل متجانس مفروض بالنسبة :
(١) لأحد اضلاعه .
(٢) لمر كزه .
(٣) لمستقيم عمودي على المستطيل ومار من احد رؤوسه .
٢٧ - اوجد عزم عطالة سطح متوازي اضلاع متجانس مفروض بالنسبة
لمستقيم يمر من مر كزه ويوازي احد اضلاعه .
٢٨ - اوجد عزم عطالة سطح مثلث متجانس مفروض بالنسبة لمستقيم
يوازي احد اضلاعه .
٢٩ - اوجد عزم عطالة سطح مثلث قائم متجانس بالنسبة لرأس الزاوية
القائمة .
٣٠ - اوجد عزم عطالة سطح مثلث متساوي الساقين متجانس بالنسبة
لرأسه الموافق لالتقاء الضلعين المتساويين .
٣١ - اوجد عزم عطالة سطح حلقة دائرية متجانسة مفروضة بالنسبة
لمر كزها .
٣٢ - اوجد عزم عطالة سطح قطع ناقص متجانس مفروض بالنسبة :
(١) لأحد محوريه التناظرين .
(٢) لمر كزه .
٣٣ - اوجد عزم عطالة السطح المتجانس المحصور بين قطع مكافئ مفروض
ومستقيم عمودي على محور الشكل بالنسبة :
(١) للمحور التناظري للقطع .
(٢) للمماس في الذروة .

(٣) لذروة القطع .

٣٤ - لدينا اسطوانة دورانية نصف قطرها a وارتفاعها h . اوجد عزوم عطالة سطحها الجانبي المتجانس ، ثم عزوم عطالة حجمها المتجانس بالنسبة :

(١) لمحورها التناظري .

(٢) لمستوي احدى قاعدتيها .

(٣) لمركز عطالتها .

٣٥ - لدينا كرة نصف قطرها R . اوجد عزوم عطالة سطحها المتجانس ، ثم حجمها المتجانس ، بالنسبة :

(١) لمركزها .

(٢) لقطر لها .

(٣) لمستوي يمر بمركزها .

٣٦ - اوجد عزوم عطالة الحجم المتجانس لمجسم القطع الناقص المعين بالمعادلة :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

بالنسبة :

(١) للمستويات الاحداثية .

(٢) للمحاور الاحداثية .

(٣) لمركز الاحداثيات .

٣٧ - اذا كان مستقيم D هو محور عطالة اساسي لمجموعة مادية في نقطتين من D كان هذا المستقيم :

(١) محوراً اساسياً للعطالة للمجموعة المفروضة في اية نقطة من D .

(٢) محوراً مركزياً للعطالة .

٣٨ - أوجد مركز عطالة جسم دوراني متجانس مفروض ، ثم أوجد عزوم عطالة هذا الجسم بالنسبة :

(١) لمحور o .

(٢) لمستو عمودي على محوره .

(٣) لنقطة من محوره .

٣٩ - لدينا جسم متجانس محصور بين مجسم القطع الناقص المعين بالمعادلة :

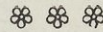
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

وبين المستويات الاحداثية xoy و $yo z$ و zox . أوجد مركز عطالة هذا الجسم ، ثم مجسم عطالته المركزي .

٤٠ - اذا فرضنا أن المحاور الاحداثية ox و oy و oz هي المحاور الاساسية للعطالة في مبدأ الاحداثيات o لجسم متجانس مفروض S ، وأن o هو مركز عطالة هذا الجسم ، فمعادلة مجسم عطالة S المركزي تكون :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1$$

عين ، بالنسبة للمحاور الاحداثية المفروضة ، النقط التي يصبح من أجلها مجسم العطالة كرة .



الفصل الثاني

توازن الجسم الصلب

بمجموعة نقط مادية :

٧٦ - توازن مجموعة نقط : - لقد رأينا ، حين بحثنا في توازن نقطة مادية ، أن الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية طليقة هو أن تكون حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في النقطة مساوية للصفر . ونرى الآن في مجموعة نقط مادية أنه :

(١) حين تكون المجموعة مؤلفة من نقط مادية طليقة مستقل بعضها عن بعض ، فالشرط اللازم والكافي لتوازن هذه المجموعة هو أن تكون حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في كل نقطة من المجموعة مساوية للصفر .
(٢) وحين تكون المجموعة مقيدة ، أي خاضعة لاربطة ، فالشرط السابق يبقى صحيحاً اذا اعتبرنا كل نقطة من المجموعة كأنها طليقة وخاضعة للقوى المفروضة المؤثرة فيها ولقوى الرباط .

٧٧ - القوى الداخلية والقوى الخارجية : - نعتبر المجموعات المادية المؤلفة من أجسام صلبة أو سائلة أو غازية كأنها مكوّنة من عدد غير متناه من نقط مادية خاضعة لبعض الارتبطة . فالجسم الصلب مثلاً مكوّن من نقط مادية مكرمة على أن تحافظ على أبعاد ثابتة فيما بينها .
نميّز نوعين من القوى المؤثرة في أية مجموعة مادية : قوى داخلية وقوى خارجية . فالقوى الداخلية تنشأ من التأثير المتبادل القائم بين نقط المجموعة . وهي تتعاكس مباشرة مثني مثني وفق مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل :

فاذا أثرت مثلاً نقطة ما M_i من المجموعة في نقطة ثانية منها M_j بقوة ، ولنرمز لها بـ F_{ij} ، فالنقطة M_j تؤثر بالمقابل في النقطة M_i بقوة ، ولنرمز لها بـ F_{ji} ، وتكون هذه القوة معاكسة مباشرة للقوة F_{ij} :

$$F_{ji} = - F_{ij}$$

هذا ونسمي القوى التي ليست داخلية بالقوى الخارجية .
عندما تنعزل مجموعة عن غيرها لا يؤثر فيها أية قوة خارجية ، وتكون القوى المؤثرة فيها داخلية فحسب .

٧٨ - شروط توازن مجموعة : - لقد رأينا ان الشرط اللازم والكافي لتوازن مجموعة مادية هو ان تكون حاصلة القوى المؤثرة في كل نقطة منها مساوية للصفر .

لنبحث الآن عن الشروط اللازمة لتوازن مجموعة والشاملة على القوى الخارجية فقط .

نرى بسهولة انه حين تتوازن مجموعة مادية تؤلف مجموعة القوى المؤثرة في جميع نقطها مجموعة أشعة مكافئة للصفر .

ولما كانت القوى المؤثرة في نقط المجموعة هي قوى داخلية وخارجية ، وكانت القوى الداخلية متعاكسة مباشرة (وفق مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل) فيمكن اذن القول :

ان الشروط اللازمة لتوازن مجموعة مادية هو أن تؤلف القوى الخارجية مجموعة أشعة مكافئة للصفر .

فاذا رمزنا بـ F_E و G_E للحاصلة العامة والعزم الحاصل في مبدأ الاحداثيات ٥ لمجموعة الاشعة الممثلة للقوى الخارجية ، فانه يمكن التعبير عن الشرط السابق بمعادلتين شعاعيتين وهما :

$$F_E = 0 \quad G_E = 0$$

أو بست معادلات جبرية هي :

$$(83) \quad \begin{cases} X_E = 0 \\ Y_E = 0 \\ Z_E = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L_E = 0 \\ M_E = 0 \\ N_E = 0 \end{cases}$$

وتدعى هذه المعادلات بالمعادلات الست لتوازن مجموعة .

إن هذه المعادلات يجب ان تتحقق من اجل مواضع توازن نقط المجموعة ، ومن اجل سرع معدومة لهذه النقط مهما كان الزمن .

نرى ان هذه المعادلات الست هي شروط لازمة لتوازن مجموعة مادية وليست بشروط كافية إلا في المجموعات المتأسكة (الاجسام الصلبة) كما سنرى ذلك في توازن الجسم الصلب .

الجسم الصلب :

٧٩ — توازن الجسم الصلب : — الجسم الصلب هو مجموعة نقط مادية متلاصقة بعضها ببعض ومتأسكة فيما بينها . فهي تحافظ على ابعاد ثابتة فيما بينها مهما تغير الزمن .

عندما تؤثر قوة في احدى نقط جسم صلب ، فعندها نقول إن هذه القوة تؤثر في الجسم .

هنالك أجسام غير صلبة كالسوائل والغازات لا تحافظ على اشكالها وابعادها بالنسبة لبعضها .

ليس في الطبيعة جسم ينطبق عليه تعريف الجسم الصلب تماماً ، لان أي جسم مهما كانت مقاومته يمكن ان تختلف ابعاد نقطه بعضها عن بعض اذا تأثر بقوة مناسبة . غير ان النتائج العملية لهذا التعريف قد ينطبق على كثير من الاجسام الطبيعية كالخشب والحديد .

لقد وجدنا في توازن مجموعة مادية ما ان الشرط اللازم للتوازن هو ان
تؤلف القوى المؤثرة فيها مجموعة اشعة مكافئة للصفر .
ان هذا الشرط اللازم لتوازن مجموعة ما هو كاف ايضاً لتوازن جسم
صلب . ويتم برهان ذلك اذا قبلنا المبدأ التالي :

القوتان المتعاكستان مباشرة والمؤثرتان في جسم صلب متوازنتان .
اعتماداً على هذا المبدأ يمكن اضافة قوتين متعاكستين مباشرة دون ان يطرأ
أي تغيير على حالة الجسم الميكانيكية (اي على حركة الجسم او سكونه) .
واعتماداً على هذا المبدأ يمكننا ان نبرهن الخاصة التالية :
يمكن نقل نقطة تطبيق قوة مؤثرة في جسم صلب الى أية نقطة من
الجسم واقعة على حامل القوة دون أن يؤدي ذلك الى أي تغيير في حالة
الجسم الميكانيكية .

بالحقيقة ، ان نقل نقطة تطبيق قوة F مثلاً من موضع A الى موضع B
كأن على حامل F هو عملية يمكن استنتاجها من المبدأ السابق كما يلي :
نضيف الى القوى المؤثرة في الجسم قوتين متعاكستين مباشرة نطبقهما في
النقطة B ، احدهما F' تساوي F والثانية F'' :

$$F' = F \quad F'' = -F$$

فاذا ما حذفنا من القوى المطبقة في الجسم القوتين المتعاكستين مباشرة F و F''
نكون بذلك قد استبدلنا بالقوة F (المطبقة في A) القوة F' (المطبقة
في B) ، اي زلقنا القوة F على حاملها .

نستخلص من هذه الخاصة النتيجة التالية :

يمكن تمثيل القوة المؤثرة في جسم صلب بشعاع منزلق .

هذا وسنبين الآن كيف ترد مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب ، ثم
نستخلص من ذلك الشروط اللازمة والكافية لتوازن الجسم الصلب .

٨٠ - رد مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب : - نرى اعتماداً على ما سبق أنه يمكن إجراء العمليات البسيطة التالية على القوى المؤثرة في جسم صلب دون أن يؤدي ذلك الى أي تغيير في حالة الجسم الميكانيكية :

(١) إضافة او حذف قوتين متعاكستين مباشرة (وفق المبدأ الخاص في ميكانيك الجسم الصلب) .

(٢) زلق قوة على حاملها (نتيجة من المبدأ السابق) .

(٣) تركيب قوى متلاقية في نقطة ، أو تفريق قوة الى قوى متلاقية في نقطة تطبيق القوة المفروضة (وفق المبدأ الوارد في ميكانيك النقطة) .

هذا وقد رأينا في بحث مجموعات الاشعة المنزلة المتكافئة ، ان مجموعتي الاشعة المنزلة الناشئة احدهما عن تطبيق العمليات البسيطة على الثانية هما مجموعتان متكافئتان ، بمعنى ان لهاتين المجموعتين حاصلّة عامة واحدة وعزماً حاصلّاً واحداً في أية نقطة في الفراغ .

كما رأينا ايضاً انه يمكن الانتقال ، بوساطة العمليات البسيطة ، من مجموعة اشعة منزلة الى مجموعة مكافئة لها .

نستخلص من ذلك الخاصة التالية :

إذا كانت مجموعتا الأشعة المنزلة الممثلة لمجموعي قوى مؤثرة في جسم صلب متكافئتين ، فانه يمكن أن نبادل بين مجموعتي القوى المؤثرة دون أن يؤدي ذلك الى أي تغيير في حالة الجسم الميكانيكية .

نرى اعتماداً على هذه الخاصة انه يمكن ، بوساطة العمليات البسيطة ، إجراء ما يلي :

(١) رد مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب الى قوتين نقطة تطبيق احدهما اختيائية ، كما رأينا ذلك في بحث الاشعة .

(٢) الاستعاضة عن مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب بقوة وحيدة (هي

الحاصلة العامة المطبقة في نقطة ما من الجسم (ومزدوجة) محورها العزم الحاصل لمجموعة القوى بالنسبة لتلك النقطة) ، كما رأينا ذلك أيضاً في بحث الأشعة .

٨١ - شروط توازن جسم صلب : - نرى ، اعتماداً على ما وجدناه

في توازن مجموعة نقط مادية ، ان الشرط اللازم لتوازن جسم صلب هو ان تكون مجموعة الاشعة الممثلة للقوى المؤثرة في الجسم مكافئة للصفر ، أي أن تكون الحاصلة العامة لمجموعة الاشعة مساوية للصفر ويكون العزم الحاصل في نقطة ما لهذه المجموعة مساوياً أيضاً للصفر .

فاذا ما رمزنا ب F للحاصلة العامة لهذه المجموعة و ب G لعزمها الحاصل بالنسبة لنقطة ما O في الفراغ ، فان الشرط السابق يكتب :

$$(84) \quad F = 0 \quad G = 0$$

لنبرهن ان هذا الشرط اللازم لتوازن جسم ما هو أيضاً كاف لتوازن الجسم الصلب .

بالحقيقة ، اذا انعدم كل من شعاعي الحاصلة العامة F والعزم الحاصل G لأمكن رد مجموعة القوى المؤثرة في الجسم الى قوة وحيدة مساوية للصفر والى مزدوجة محورها يساوي الصفر . وبذلك ترد المجموعة الى قوتين متعاكستين مباشرة ، أو ترد (اعتماداً على المبدأ السابق) الى قوتين متوازنتين ، وهو المطلوب .

٨٢ - معادلات التوازن : - اذا فرضنا مجموعة محاور احداثية قائمة

ومباشرة $oxyz$ ، واشربنا ب (X, Y, Z) لمركبات الحاصلة العامة F على المحاور الاحداثية وب (L, M, N) لمركبات العزم الحاصل G حول مبدأ الاحداثيات O ، لا يمكن التعبير عن الشرط السابق ، وهو الشرط اللازم والسكافي للتوازن ، بالمعادلات الآتية :

$$(85) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ Y = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{array} \right.$$

وهي المعادلات الست لتوازن الجسم الصلب .

٨٣ - **مجموعات القوى المنظّفة** : - لقد رأينا ، في رد مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب ، انه اذا كانت مجموعتا الاشعة المنزلة الممثلة لمجموعتي قوى مؤثرة في جسم صلب متكافئتين ، فانه يمكن ان نبادل بين هاتين المجموعتين دون ان يؤدي ذلك الى اي تغيير في حالة الجسم الميكانيكية .
لنبرهن الآن عكس هذه الخاصة :

إذا أمكن أن نبادل بين مجموعتي قوى مؤثرة في جسم صلب دون أن يطرأ اي تغيير على حالة الجسم ، فانه يمكن أن نمثل مجموعتي القوى المؤثرة بمجموعتي أشعة منزلة متكافئتين .

بالحقيقة ، اذا امكن ان نبادل بين مجموعتي قوى مؤثرة (S) و (S') دون ان يؤدي ذلك الى اي تغيير في حالة الجسم ، فالمجموعة المؤلفة من القوى المعاكسة مباشرة لقوى (S) ، ولنرمز لها بـ (-S) ، تكون متوازنة مع المجموعة (S) ، وتغدو بالتالي متوازنة مع المجموعة (S') . فمجموعة أشعة [(-S) ، (S')] تكون اذن مكافئة للصفر . وتكون بالتالي مجموعة اشعة (S) مكافئة لمجموعة (S') وهو المطلوب .

نسمي مجموعتي القوى المؤثرة (S) و (S') اللتان يمكن ان يتم التبادل بينهما دون ان يؤدي ذلك الى أي تغيير في حالة الجسم الصلب ، بالمجموعتين المتكافئتين من اجل جسم صلب .

نستخلص مما اوردناه النتيجة التالية :

نتيجة : - الشرط اللازم والسكافي لتكافؤ مجموعتي قوى مؤثرة في جسم صلب هو ان تكون مجموعتا الأشعة المنزلة الممثلة لمجموعتي القوى المؤثرة في الجسم متكافئتين .

فاذا فرضنا مجموعتي قوى (S) و (S') مؤثرة في جسم صلب ، ورمزنا بـ $F(X, Y, Z)$ و $F'(X', Y', Z')$ حاصلتيهما الانسحابيتين ، وبـ $G(L, M, N)$ و $G'(L', M', N')$ لعزميهما الحاصلين في مبدأ الاحداثيات O ، فانه يمكن التعبير عن شرط تكافؤ هاتين المجموعتين بالمعادلتين الشعاعيتين التاليتين :

$$(86) \quad F = F' \quad G = G'$$

أو بالمعادلات الجبرية الست التالية :

$$(87) \quad \begin{cases} X = X' \\ Y = Y' \\ Z = Z' \end{cases} \quad \begin{cases} L = L' \\ M = M' \\ N = N' \end{cases}$$

٨٤ - حالات خاصة في رد مجموعة قوى : - إذا فرضنا مجموعة قوى

(S) مؤثرة في جسم صلب ، ورمزنا بـ F حاصلتها العامة وبـ G لعزمها الحاصل في مبدأ الاحداثيات O ، لرأينا اعتماداً على النتيجة السابقة وعلى ردّ مجموعة أشعة :

(١) ان الشرط اللازم والسكافي لكي تردّ مجموعة القوى (S) الى قوة وحيدة (أو تكافؤ هذه المجموعة قوة وحيدة) ، هو أن تكون الحاصلة الانسحابية F غير مساوية للصفر ، ويكون العزم الحاصل G مساوياً للصفر

أو عمودياً على الحاصلة الانسحابية :

$$\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{G} = 0$$

أو نقول بتعبير آخر :

إن الشرط اللازم والكافي ليكون لمجموعة القوى (S) حاصلة ، هو أن يكون العزم الحاصل الاصغري للمجموعة (S) مساوياً للصفر ، وتكون الحاصلة العامة لهذه المجموعة غير مساوية للصفر .

فاذا رمزنا بـ $\mathbf{G}_F$ للعزم الحاصل الاصغري لهذه المجموعة ، فإنه يمكن التعبير عن الشرط السابق بالعلاقين :

$$\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G}_F = \mathbf{0}$$

وإذا أشرنا بـ (X, Y, Z) وبـ (L, M, N) لمركبات الحاصلة العامة $\mathbf{F}$ والعزم الحاصل $\mathbf{G}$ على المحاور الاحداثية القائمة والمباشرة $oxyz$ ، لأمكن التعبير عن الشرط السابق بالعلاقين :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0$$

$$LX + MY + NZ = 0$$

هذا ونلاحظ ان حامل حاصلة المجموعة (S) هو المحور المركزي لهذه المجموعة .

(٢) ان الشرط اللازم والكافي لكي ترد مجموعة القوى (S) الى مزدوجة وحيدة (أو تكافئ هذه المجموعة مزدوجة وحيدة) هو أن تكون الحاصلة الانسحابية $\mathbf{F}$ مساوية للصفر ويكون العزم الحاصل $\mathbf{G}$ غير مساوياً للصفر :

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{G} \neq \mathbf{0}$$

ويمكن التعبير عن الشرط السابق بالعلاقات :

$$X = Y = Z = 0$$

$$L^2 + M^2 + N^2 > 0$$

مجموعة القوى المتوازية :

٨٥ - رد المجموعة : - لنفرض مجموعة قوى متوازية F_1 و F_2 و ...

و F_n مؤثرة في جسم صلب ومطبقة في النقط A_1 و A_2 و ... و A_n على الترتيب .

لتكن F_1 و F_2 و ... و F_n القيم الجبرية لهذه القوى مقدرة على محور Δ يوازي المنحى المشترك للقوى .

فاذا أشرنا ب u لشعاع واحدة المحور Δ لكانت الحاصلة العامة لهذه المجموعة ، ولنرمز لها ب F ، هي :

$$F = \sum F_i = \sum (F_i \cdot u)$$

$$F = (\sum F_i) \cdot u \quad \text{أو}$$

وكان العزم الحاصل للمجموعة في نقطة ما o في الفراغ ، ولنرمز له ب G ، هو :

$$G = \sum OA_i \wedge F_i = \sum OA_i \wedge F_i u$$

$$G = \sum (F_i \cdot OA_i) \wedge u \quad \text{أو}$$

وهنا نميز عدة حالات (كما رأينا ذلك في ردّ مجموعة الأشعة المتوازية بند ٣٨) :

$$\text{الحالة الأولى : } \sum F_i \neq 0 \quad \text{أو} \quad F \neq 0$$

في هذه الحالة يكون لمجموعة القوى حاصلة توازي المحور Δ . وقد رأينا أن هذه الحاصلة ، ولنرمز إليها ب R ، هي مطبقة في مركز القوى المتوازية C ، وأن هذا المركز (وهو مركز النقط A_i وقد أسند إليها الامثال F_i) يتعين من العلاقة :

$$OC = \frac{\sum F_i \cdot OA_i}{\sum F_i} \quad (88)$$

ونلاحظ أن المركز C هو تابع لمواضع نقط تطبيق القوى ، كما هو تابع أيضاً للقيم الجبرية لهذه القوى . وهو لا يتقيد بالمنحى المشترك للقوى ، ولا يتغير حين نضرب كلاً من القوى بعدد واحد .

$$\mathbf{F} = 0 \quad \text{أو} \quad \sum F_i = 0 \quad \text{الحالة الثانية :}$$

$$\sum F_i \cdot \mathbf{OA}_i \neq 0 \quad \text{و}$$

نلاحظ في هذه الحالة أنه لا يوجد مركز للنقط A_1 و A_2 و ... و A_n . كما نلاحظ أيضاً أن المجموع الهندسي $\sum F_i \cdot \mathbf{OA}_i$ يبقى مساوياً لشعاع ثابت مهما تنقلت النقطة o في الفراغ .

فاذا رمزنا لهذا الشعاع الثابت بـ $\mathbf{H}$ ، لأصبح العزم الحاصل للقوى المفروضة هو :

$$\mathbf{G} = \mathbf{H} \wedge \mathbf{u}$$

فالعزم الحاصل $\mathbf{G}$ يغدو في هذه الحالة ثابتاً مهما تغير مركز العزم .
فاذا كان الشعاع $\mathbf{H}$ غير مواز للشعاع $\mathbf{u}$ ، فالمجموعة تكافئ مزدوجة ، (لأن $\mathbf{G} \neq 0$) ، وترد الى مزدوجة بسيطة محورها $\mathbf{G}$.
أما اذا كان $\mathbf{H}$ يوازي $\mathbf{u}$ ، فالمجموعة تكافئ الصفر ، والجسم يغدو متوازناً .

$$\sum F_i \cdot \mathbf{OA}_i = 0 \quad \text{و} \quad \sum F_i = 0 \quad \text{الحالة الثالثة :}$$

$$\mathbf{G} = 0 \quad \text{و} \quad \mathbf{F} = 0 \quad \text{أو}$$

فالمجموعة تكافئ الصفر ، والجسم يتوازن ، مهما كان اتجاه المنحى المشترك للقوى المفروضة .

ملاحظة : إذا رمزنا بـ (X, Y, Z, L, M, N) لاحداثيات مجموعة القوى المتوازية المفروضة بالنسبة للمحاور الاحداثية القائمة والمباشرة $oxyz$ ، وبـ (x_i, y_i, z_i) لاحداثيات A_i ، وبـ (α, β, γ) لمركبات شعاع الواحدة u على المحاور الاحداثية ، لغدت حالات ردّ هذه المجموعة كما يلي :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 > 0 \quad \text{١ - اذا}$$

يكون المجموعة المفروضة حاملة وحيدة مطبقة في مركز القوى المتوازية C . وتعين احداثيات هذا المركز ، ونرمز لها بـ (ξ, η, ζ) ، من العلاقات :

$$\xi = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i} \quad \eta = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i} \quad \zeta = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{\sum F_i}$$

$$X = Y = Z = 0 \quad \text{٢ - اذا}$$

$$L^2 + M^2 + N^2 > 0 \quad \text{و}$$

فالمجموعة ترد الى مزدوجة وحيدة .

$$X = Y = Z = 0 \quad \text{٣ - اذا}$$

$$L = M = N = 0 \quad \text{و}$$

فالمجموعة ترد الى الصفر ، والجسم يغدو متوازناً .

ونلاحظ هنا أن العزم الحاصل G يصبح مساوياً الى الصفر في حالتين :

(١) حين يكون الشعاعان H (أو $\sum F_i \cdot OA_i$) و u متوازيين ، أي حين يكون :

$$\frac{\sum F_i \cdot x_i}{\alpha} = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\beta} = \frac{\sum F_i \cdot z_i}{\gamma}$$

ونرى ، في هذه الحالة ، أن التوازن لا يبقى قائماً حين نغيّر المنحى المشترك للقوى .

(٢) حين يكون الشعاع H (أو المجموع الهندسي $\Sigma F_i \cdot OA_i$) مساوياً الى الصفر ، أي حين يكون :

$$\Sigma F_i \cdot x_i = \Sigma F_i \cdot y_i = \Sigma F_i \cdot z_i = 0$$

ففي هذه الحالة يتوازن الجسم مهما كان المنحى المشترك للقوى بالنسبة للجسم .

لذا نقول عن التوازن في هذه الحالة بأنه توازن مستتب .

٨٦ — تركيب القوى المتوازية : سنبين الآن كيف نركب القوى المتوازية المؤثرة في جسم صلب ، أي كيف نرد هذه القوى بتطبيق العمليات البسيطة عليها . وسنبداً بتركيب قوتين متوازيتين (سواء كانت هاتان القوتان باتجاه واحد أو باتجاهين مختلفين) ، ثم نعمم التركيب على مجموعة مؤلفة من عدة قوى متوازية .

٨٧ — تركيب قوتين متوازيتين : ليكن F_1 و F_2 قوتين متوازيتين مؤثرتين في جسم صلب ومطبقتين في النقطتين A_1 و A_2 على الترتيب . لنفرض أن هاتين القوتين غير متعاكستين :

$$F_1 \neq -F_2$$

(لأن المجموعة المؤلفة من قوتين متعاكستين تؤلف مزدوجة بسيطة ، ونعلم أنه لا يمكن ردالمزدوجة البسيطة الى مجموعة أبسط منها) .

سنجري على مجموعة القوتين المتوازيتين F_1 و F_2 العمليات البسيطة التالية :

(١) نضيف الى المجموعة المفروضة قوتين متعاكستين مباشرة f_1 و f_2 ، شدة إحداهما اختيارية . نطبق الاولى في A_1 والثانية في A_2 .

(٢) نستبدل بالقوتين F_1 و f_1 المتلاقيتين في A_1 حاصلتهما K_1 ،
وبالقوتين F_2 و f_2 المتلاقيتين في A_2 حاصلتهما K_2 .
(٣) نزلق القوتين K_1 و K_2 على حاملتهما حتى نقطة تلاقيهما ، وليكن
B نقطة التقاء هذين الحاملين .

(٤) نستبدل بالقوتين K_1 و K_2 المتلاقيين في B حاصلتهما ، ولتكن
R هذه الحاصلة .

(٥) نزلق الحاصلة R على حاملها حتى تقع نقطة تطبيقها على المستقيم
 $A_1 A_2$ الواصل بين نقطتي تطبيق القوتين المفروضتين F_1 و F_2 . ليكن C
نقطة تلاقي حامل الحاصلة R بالمستقيم $A_1 A_2$.

وبعد إجراء هذه العمليات البسيطة نكون بذلك قد استبدلنا بالقوتين
المتوازيتين المفروضتين F_1 و F_2 قوة وحيدة R هي حاصلة هاتين القوتين ،
وتكون النقطة C هي مركز القوتين المتوازيتين المفروضتين .
لنعيّن عناصر هذه الحاصلة :

بما أن المجموعة المؤلفة من القوتين F_1 و F_2 تكافئ المجموعة المؤلفة من
القوة الوحيدة R (لان القوة R قد نشأت من المجموعة المفروضة بتطبيق
العمليات البسيطة) ، فيكون هاتين المجموعتين اذن حاصلة عامة واحدة
وعزم حاصل واحد بالنسبة لنقطة ما في الفراغ .

فمن تساوي الحاصلتين العامتين للمجموعتين تنتج العلاقة :

$$F_1 + F_2 = R$$

ومن تساوي العزمين الحاصلين في C للمجموعتين تنتج العلاقة :

$$CA_1 \wedge F_1 + CA_2 \wedge F_2 = 0$$

واذا رمزنا بـ F_1 و F_2 و R للقيم الجبرية للقوى F_1 و F_2 و R

مقدرة على محور Δ يوازي المنحى المشترك لهذه القوى ، فإنه يمكن كتابة العلاقة الاولى كما يلي :

$$(89) \quad F_1 + F_2 = R$$

وإذا أشرنا ب u لشعاع واحدة المحور Δ لكان :

$$F_1 = F_1 \cdot u \quad F_2 = F_1 \cdot u$$

ولأمكن بالتالي كتابة العلاقة الثانية بالشكل :

$$(F_1 \cdot CA_1 + F_2 \cdot CA_2) \wedge u = 0$$

وإذا لاحظنا أن كلا من الحدين $F_1 \cdot CA_1$ و $F_2 \cdot CA_2$ محمول على المستقيم $A_1 A_2$ ، وان هذا المستقيم لا يوازي u ، لا ندر كنا أن العلاقة الاخيرة ترد الى الشكل :

$$F_1 \cdot CA_1 + F_2 \cdot CA_2 = 0$$

$$(90) \quad \frac{CA_1}{CA_2} = - \frac{F_2}{F_1} \quad \text{أو}$$

هذا وينتج من العلاقتين (89) و (90) :

١- ان القيمة الجبرية لحاصلة قوتين متوازيتين تساوي مجموع القيمتين الجبريتين لمركبتيهما .

٢- ان مركز قوتين متوازيتين F_1 و F_2 مطبقتين في نقطتين A_1 و A_2 من جسم صلب ، هو النقطة القاسمة للقطعة $A_1 A_2$ بنسبة $(-\frac{F_2}{F_1})$. فتكون هذه النقطة داخل القطعة أو خارجها حسبما تكون القوتان متحدتين أو مختلفتين في الاتجاه ، وهي ابدأ قريبة من القوة الكبرى .

٣- انه يمكن أن نكتب ، اعتماداً على خواص التناسب ، العلاقات التالية :

$$\frac{A_1 C}{F_2} = \frac{CA_2}{F_1} = \frac{A_1 A_2}{R}$$

٨٨ - تركيب عدة قوى متوازية : - لتركيب عدة قوى متوازية

مؤثرة في جسم صلب ، نميز حالتين :

الحالة الأولى : القوى متحدة في الاتجاه : لتكن F_1 و F_2 و ...

و F_n مجموعة قوى متوازية مؤثرة في جسم . لنفرض ان هذه القوى متحدة في الاتجاه ومطبقة في النقط A_1 و A_2 و ... و A_n على الترتيب .

لتركيب قوى هذه المجموعة ، نبدأ بتركيب القوتين F_1 و F_2 (وليكن C_2 و R_2 مركز هاتين القوتين وحاصلتهما) . ثم نركب الحاصلة الجزئية R_2 والقوة الثالثة F_3 (وليكن C_3 و R_3 مركز هاتين القوتين وحاصلتهما) . ثم نتابع التركيب حتى آخر قوة من المجموعة المفروضة ، فنركب الحاصلة الجزئية R_{n-1} والقوة الاخيرة F_n . فاذا رمزنا بـ C و R (او C_n و R_n) لمركز هاتين القوتين وحاصلتهما ، لكان C هو مركز مجموعة القوى المفروضة و R حاصلة هذه المجموعة .

نرى أن الحاصلة R توازي القوى المفروضة ، وتساوي شدتها مجموع شدات مركباتها .

كما نرى ان المركز C لا يتقيد بمنحى قوى المجموعة ، كما لا يتقيد ايضاً بالترتيب الذي نركب فيه القوى

الحالة الثانية : القوى بشكلها العام : ان القوى المتوازية لا تكون بوجه

عام متحدة في الاتجاه . ففي هذه الحالة نركب القوى المتحدة في الاتجاه معاً . فنجد حاصلتين R' و R'' ومركزين C' و C'' . وهنا نميز ثلاث حالات :

$$1 - \text{اذا كان } R' + R'' \neq 0$$

يكون لمجموعة القوى المتوازية المفروضة حاصلة R (هي حاصلة القوتين R' و R'') ومركز C (هو مركز القوتين المتوازيتين R' و R'') .

$$R' + R'' = 0$$

٢ - اذا كان

وكان حاملا R' و R'' غير منطبقين على بعضهما ، فمجموعة القوى المفروضة تساوي مزدوجة ، وتورد الى المزدوجة البسيطة المؤلفة من القوتين R' و R'' .

$$R' + R'' = 0$$

٣ - اذا كان

وكان حاملا R' و R'' منطبقين على بعضهما ، فالمجموعة المفروضة تكون متوازنة .

ونلاحظ هنا حالتين :

(١) ان كان المركزان C' و C'' غير منطبقين على بعضهما ، فتوازن المجموعة لا يبقى قائماً حين نغير المنحى المشترك للقوى المتوازية .

(٢) وان كان المركزان C' و C'' منطبقين على بعضهما ، فتوازن المجموعة يبقى قائماً مهما كان المنحى المشترك للقوى المتوازية . وقد قلنا عن التوازن في هذه الحالة : انه توازن مستتب .

مركز الثقل :

٨٩ - مركز ثقل جسم : - أثقال نقط جسم هي قوى شاقولية متجهة

باتجاه الشاقول الهابط ومتناسبة مع كتل هذه النقط . فهي تؤلف مجموعة قوى متوازية ، اتجاهها واحد وشداتها متناسبة مع كتل نقط تطبيقها . مركز هذه القوى يدعى مركز ثقل الجسم ، وحاصلتها ثقل الجسم .

عندما نغير وضع جسم بأن نغير جهاته باستمرار ، تدور اثقال نقطه (بالنسبة لراصد مثبت في الجسم) حول نقط تطبيقها وتبقى أبداً متوازية فيما بينها ، ويبقى بالتالي مركزها ثابتاً في موضعه بالنسبة للجسم .

وعندما ننقل جسماً على سطح الأرض تتغير اثقال نقطه ، لكن هذه الأثقال تبقى متناسبة مع كتل نقطها ، فمركزها يبقى ثابتاً ايضاً في موضعه بالنسبة للجسم .

مركز ثقل جسم هو نقطة ثابتة في الجسم : فهو لا يتقيد بأوضاع الجسم
او اتجاهاته المختلفة في اية بقعة من الارض .

٩٠ - **امدائيات مركز الثقل :** - لنفرض مجموعة نقط مادية M_1 و M_2
و ... و M_n . ليكن M_i احدى نقط المجموعة . فاذا رمزنا ب m_i لكتلة هذه
النقطة ، وب p_i لثقلها لكان :

$$p_i = m_i \cdot g$$

بفرض ان g هو شدة الثقاقل .

واذا رمزنا ب M لكتلة المجموعة المفروضة ، وب P لثقلها لكان :

$$M = \Sigma m_i$$

$$P = \Sigma p_i = \Sigma m_i \cdot g \quad \text{و}$$

$$P = M \cdot g \quad \text{او}$$

أما مركز ثقل المجموعة (وهو مركز قوى متوازية) ، ولنرمز له ب C ،
فيتعين من العلاقة :

$$OC = \frac{\Sigma p_i \cdot OM_i}{\Sigma p_i}$$

$$OC = \frac{g \Sigma m_i \cdot OM_i}{g \Sigma m_i} = \frac{\Sigma m_i \cdot OM_i}{M} \quad \text{او}$$

واذا فرضنا مجموعة محاور احداثية $oxyz$ ، ورمزنا ب (x_i, y_i, z_i)

لاحداثيات M_i وب (ξ, η, ζ) لاحداثيات مركز الثقل C لكان :

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{\sum p_i x_i}{P} = \frac{\sum m_i x_i}{M} \\ \eta = \frac{\sum p_i y_i}{P} = \frac{\sum m_i y_i}{M} \\ \zeta = \frac{\sum p_i z_i}{P} = \frac{\sum m_i z_i}{M} \end{array} \right.$$

نلاحظ ان مركز ثقل جسم صغير الابعاد ينطبق على مركز عطالته (يمكن اعتباره التسارع الأرضي g ثابتاً في مختلف نقط المجموعة ذات الابعاد الصغيرة) . فجميع ما أوردناه في مركز عطالة مجموعة نقط مادية ، او في مركز نقط ، ينطبق ايضاً على مركز ثقل مجموعة نقط مادية .

هذا وقد لا تنطبق مراكز ثقل بعض المجموعات المادية على مراكز عطالتها (كمجموعة تباعدت اجزاؤها عن بعضها) . وقد يكون لمجموعة مركز عطالة ولا يكون لها مركز ثقل (كالمجموعة الشمسية) .

مجموعة القوى الواقعة في مستوى واحد :

٩١ - رد المجموعة : — لنفرض مجموعة قوى F_1 و F_2 و ... و F_n مؤثرة في جسم صلب وواقعة في مستوى واحد نعتبره مستوي الاحداثيات xoy .

ليكن F الحاصلة العامة لهذه القوى و G العزم الحاصل للقوى في مبدأ الاحداثيات o .

فاذا رمزنا لمركبات F و G على المحاور الاحداثية القائمة والمباشرة oxy بـ (X, Y, Z) و (L, M, N) على الترتيب لكان :

$$Z = 0$$

$$L = M = 0$$

و

وكان بالتالي :

$$LX + MY + NZ = 0$$

وهنا نميز عدة حالات (كما رأينا ذلك في رد مجموعة الاشعة الواقعة في مستو واحد ، بند ٣٦) :

$$1 - \text{ اذا } X^2 + Y^2 > 0 \quad \text{او} \quad F \neq 0$$

يكون لمجموعة القوى المفروضة وحيدة كائنة في مستوي القوى ومحمولة على المحور المركزي لمجموعة القوى .

$$2 - \text{ اذا } X = Y = 0 \quad \text{او} \quad F = 0$$

$$\text{و} \quad N \neq 0 \quad \text{او} \quad G \neq 0$$

فالمجموعة ترد الى مزدوجة محورها عمودي على مستوي القوى .

$$3 - \text{ اذا } X = Y = 0 \quad \text{او} \quad F = 0$$

$$\text{و} \quad N = 0 \quad \text{او} \quad G = 0$$

فالمجموعة تكون متوازنة .

هذا ونلاحظ بوجه عام انه حين يكون :

$$N = 0 \quad \text{او} \quad G = 0$$

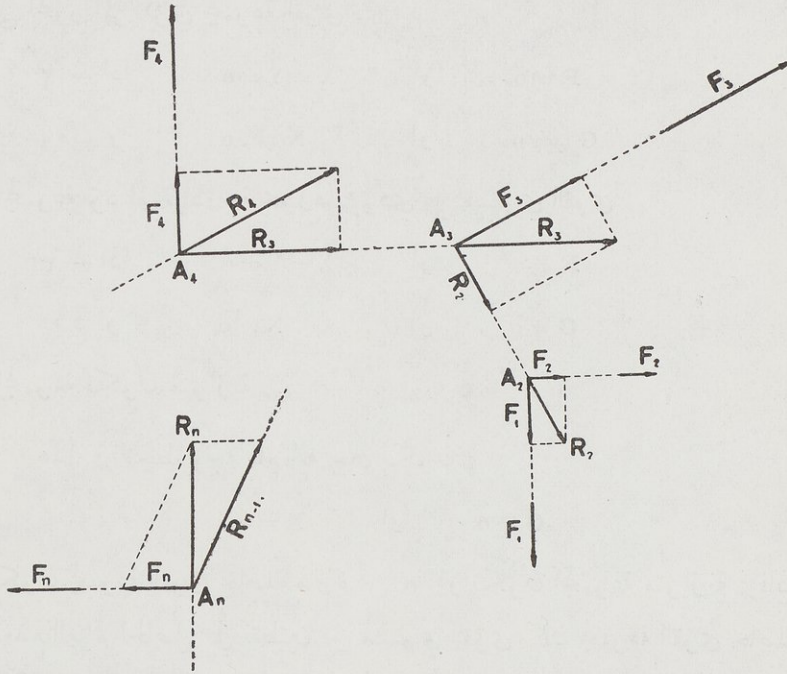
يكون لمجموعة القوى حاصلة مارّة من O او تكون المجموعة متوازنة . فاذا انعدم العزم الحاصل في نقطتين من مستوي القوى كان لمجموعة القوى حاصلة مارّة من هاتين النقطتين او كانت المجموعة متوازنة .

نستخلص من ذلك انه حين ينعدم العزم الحاصل لمجموعة القوى في ثلاث نقط غير كائنة على استقامة واحدة فالمجموعة تغدو متوازنة .

ملاحظة : يمكن بواسطة العمليات البسيطة ردّ القوى الواقعة في مستو

واحد الى قوة وحيدة او مزدوجة او الصفر (كما رأينا ذلك في - ردّ مجموعة الاشعة الواقعة في مستو واحد بالعمليات البسيطة - بند ٣٧) .
سنرى الآن كيف نرد القوى الواقعة في مستو واحد بطريقة تخطيطية ثم نستخلص من ذلك شروط توازن هذه القوى .

٩٢ - ردّ المجموعة بطريقة تخطيطية : - لتكن F_1 و F_2 و ... و F_n مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب وكائنة في مستو واحد (شكل ١٤)



(شكل ١٤)

لنفرض بوجه عام ان هذه القوى ليست متوازية فيما بينها (سندرس فيما بعد حالة القوى المتوازية) .

لرد هذه المجموعة نبدأ بالقوتين F_1 و F_2 فنزلقهما على حاملهما حتى

ثلاثياً ، ولتكن A_2 نقطة نلاقيهما . ثم نستعيز عن القوتين المتلاقيتين في A_2 بحاصلتهما ، ولتكن R_2 هذه الحاصلة .

ثم نتابع العمل ، ونستعيز عن القوتين R_2 و F_3 (بعد زلّقيهما ونلاقيهما في A_3) بحاصلتهما . لتكن R_3 هذه الحاصلة . فالحاصلة الناتجة R_3 تكون أيضاً هي حاصلة القوى F_1 و F_2 و F_3 .

وهكذا نتابع التعويض حتى نصل الى القوة الاخيرة F_n . فنستعيز عن القوتين F_n و R_{n-1} بحاصلتهما . لتكن R_n هذه الحاصلة . فالحاصلة الاخيرة R_n ، ولترمز لها بـ R ، هي حاصلة القوى المفروضة .

هذا وقد تكون القوتان الاخيرتان R_{n-1} و F_n متعاكستين فالمجموعة ترد الى مزدوجة (في هذه الحالة النقطة A_n في اللانهاية) ، او تكون القوتان متعاكستين مباشرة فالمجموعة ترد الى الصفر والجسم يتوازن (النقطة A_n تصبح غير معينة على حامل F_n) .

٩٣ - مضلع القوى والمضلع الجبلي : — نلاحظ عند اجراء العمليات السابقة انه قد يحسن الاستعاضة عن الشكل السابق (الشكل ١٤) بالشكلين التاليين (الشكل ١٥) :

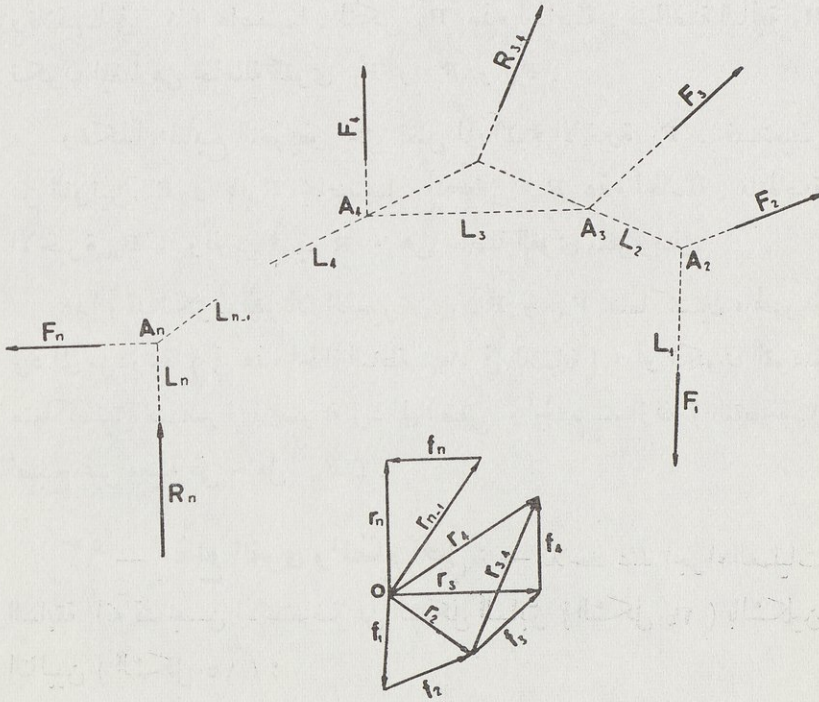
في الشكل الاول القوى المفروضة F_1 و F_2 و ... و F_n والحوامل L_1 و L_2 و ... و L_n للحاصلات الجزئية R_1 و R_2 و ... و R_n . فالخطوط L_i تؤلف مضلعاً نسميه بالمضلع الجبلي .

وفي الشكل الثاني مضلع المجموع الهندسي للقوى المفروضة . نسمى هذا المضلع بمضلع القوى (او مضلع فارينيون ، او مضلع التحريك) .

وللحصول على هذين الشكلين :

نرسم من نقطة ما O من مستوي القوى مضلعاً اضلاعه f_1 و f_2 و ...

و f_n تساوي على الترتيب القوى المفروضة F_1 و F_2 و ... و F_n .
 فنحصل بذلك على مضلع القوى . واذا ما وصلنا بين o ونهاية القوة f_2 حصلنا
 على القوة r_2 التي تساوي الحاصلة الجزئية R_2 . واذا تابعنا العمل حصلنا على



(الشكل ١٥)

القوى r_3 و r_4 و ... و r_n التي تساوي الحاصلات R_3 و R_4 و ... و R_n على الترتيب . وبذلك يتم رسم الشكل الثاني .

ولتعيين المضلع الجلي ، نرسم من A_2 (نقطة تلاقي حاملي F_1 و F_2)
 مستقيماً L_2 يوازي r_2 فيلاقي هذا المستقيم حامل F_3 بنقطة A_3 . ثم نرسم
 من A_3 مستقيماً L_3 يوازي r_3 . وهكذا نتابع الرسم حتى المستقيم الاخير
 الذي يوازي L_n . فنحصل بذلك على الشكل الاول .

نرى ان الشكل الثاني يعين لنا شدات الحاصلات R_2 و R_3 و ... و R_n ومناحيها واتجاهاتها ، في حين ان الشكل الاول يعين حوامل هذه القوى .

ملاحظة : يمكن اعتبار المضلع الجبلي كأنه الشكل التوازني لجبل أهمل ثقله وقد اثرت فيه القوى F_1 و F_2 و ... و F_n والقوة المعاكسة مباشرة للحاصلة R_n . فالقوى F_1 و R_2 و ... و R_n تكون هي شذود الجبل في الاجزاء L_1 و L_2 و ... و L_n .

بالحقيقة ، يمكن اعتبار النقطة A_3 مثلاً من هذا الجبل نقطة مادية قد اثرت فيها القوة F_3 وشذ الجزء L_2 من الجبل (وهو R_2) وشذ الجزء I_3 (وهو يعاكس مباشرة R_3) . ولما كانت حاصلة هذه القوى مساوية للصفر فالنقطة A_3 تكون متوازنة . وتكون بالتالي جميع النقط المماثلة لها من الجبل متوازنة . فالمضلع الجبلي إذن هو الشكل التوازني لجبل قد اثرت فيه القوى المذكورة . لذا سمي هذا المضلع بالمضلع الجبلي .

نتيجة : يمكن بوساطة الشكلين السابقين تعيين حاصلة فئة من قوى متتالية من المجموعة المفروضة .

لنعين مثلاً الحاصلة $R_{3,4}$ للقوتين F_3 و F_4 : ان مضلع القوى يعين منحى وقياس واتجاه الحاصلة .

سنبرهن ان حامل الحاصلة يمر من نقطة تلاقي ممددي الضلعين L_2 و L_4 من المضلع الجبلي .

بالحقيقة ، اذا فرضنا قوتين R'_2 و R'_3 معاكستين مباشرة للقوتين R_2 و R_3 على الترتيب ، ولاحظنا ان F_3 تكافئ مجموعة القوتين R'_2 و R'_3 :

$$F_3 = S (R'_2 , R'_3)$$

وأن F_4 تكافئ مجموعة القوتين R'_3 و R_4 :

$$F_4 = S (R'_3, R_4)$$

لكان :

$$R_{3,4} = S (F_3, F_4) = S (R'_2, R_3, R'_3, R_4)$$

وكان بالتالي :

$$R_{3,4} = S (R'_2, R_4)$$

فالقوة $R_{3,4}$ تكافئ مجموعة القوتين R'_2 و R_4 . فهي تمر اذن من نقطة تلاقي الحاملين L_2 و L_4 لهاتين القوتين .
وهكذا فإننا نرى ايضاً ان حاصلة القوى المتتالية F_2 و F_3 و F_4 تمر من نقطة تلاقي الضلعين L_1 و L_4 .

نستخلص من ذلك ان حاصلة فئة من قوى متتالية تمر ابدأ من نقطة تلاقي ممددي ضلعي المضلع الحبلي الموافقين لقوتي مضلع القوى المحيطتين بالحاصلة المفروضة .

هذا ونلاحظ ان كل مثلث من مضلع القوى يقابله نقطة من المضلع الحبلي ؛ كما نلاحظ بالمقابل ان كل نقطة من مضلع القوى يقابلها مثلث من المضلع الحبلي .

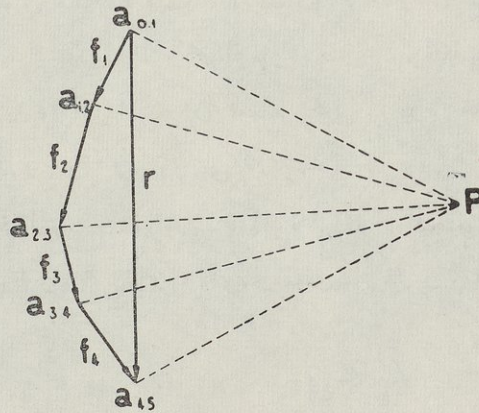
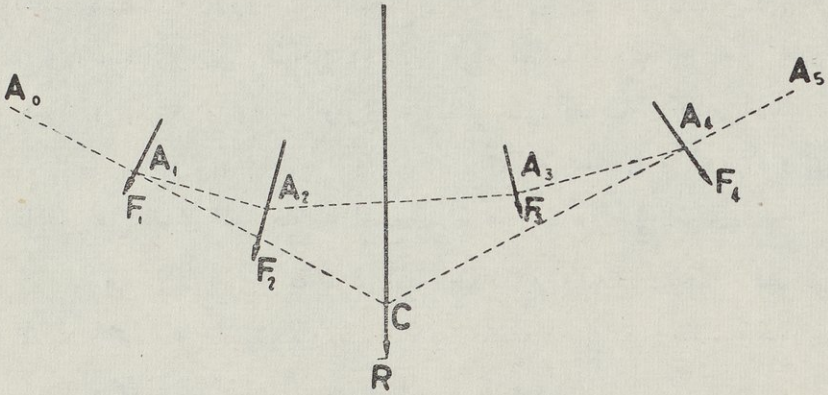
٩٤ — شروط التوازن : — لقد رأينا ان الجسم يتوازن حين تكون مجموعة القوى المؤثرة فيه مكافئة للصفر .

فاعتماداً على ما سبق نلاحظ ان الجسم الخاضع لقوى F_i واقعة في مستو واحد يكون متوازناً حين تنعدم الحاصلة R_n لهذه القوى ، وتصبح بالتالي القوتان F_n و R_{n-1} متعاكستين مباشرة .

نستخلص من ذلك ان الشرط اللازم والكافي لتوازن مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب وواقعة في مستو واحد هو :

أولاً : ان ينطبق في المضلع الجبلي حامل القوة الاخيرة F_n على الضلع L_{n-1} .
 ثانياً : ان ينطبق في مضلع القوى نهاية القوة F_n على O . اي ان يصبح مضلع القوى مغلقاً .

٩٥ - الطريقة الخطيطة بواسطة قوى مساعدة : - قد يكون للقوى المفروضة وضع خاص لا يساعد على تطبيق الطريقة التخطيطة السابقة . فان



(شكل ١٦)

كانت القوى المفروضة مثلاً متوازية فلا تتلاقى فيما بينها ، او كانت الزوايا بين القوى صغيرة فلا تقع نقط تلاقيها داخل لوحة الرسم . لذا نلجأ الى طريقة تخطيطية ثانية تعتمد على قوى مساعدة .

سنشرح هذه الطريقة على اربع قوى مفروضة فقط .

لتكن F_1 و F_2 و F_3 و F_4 القوى المفروضة . نرسم مضلع القوى (كما جرينا في الطريقة السابقة) ، ونصل بين نقطة ما P من مستوي القوى ، نسميها بالقطب ، ورؤوس هذا المضلع . لتكن $a_{0,1}$ و $a_{1,2}$ و $a_{2,3}$ و $a_{3,4}$ و $a_{4,5}$ هذه الرؤوس (شكل ١٦) . ثم نرسم مضلعاً أضلاعه $A_0 A_1$ و $A_1 A_2$ و $A_2 A_3$ و $A_3 A_4$ و $A_4 A_5$ توازي على الترتيب انصاف الاقطار القطبية $P a_{0,1}$ و $P a_{1,2}$ و $P a_{2,3}$ و $P a_{3,4}$ و $P a_{4,5}$ وتقع رؤوسه A_1 و A_2 و A_3 و A_4 على حوامل القوى المفروضة . فالمضلع الناتج هو المضلع الجبلي للقوى .

لنبرهن الآن ان مجموعة القوى المفروضة متكافئة قوتين : احدهما تساوي $a_{0,1}P$ ومحمولة على الضلع الاول $A_0 A_1$ من المضلع الجبلي ، والثانية تساوي $Pa_{4,5}$ ومحمولة على الضلع الاخير من المضلع نفسه .

بالحقيقة ، لنفرض قوى مساعدة مساوية لـ $Pa_{0,1}$ انصاف الاقطار القطبية $Pa_{0,1}$ و $Pa_{1,2}$ و $Pa_{2,3}$ و $Pa_{3,4}$ و $Pa_{4,5}$ ومحمولة على الاضلاع الموافقة لها $A_0 A_1$ و $A_1 A_2$ و $A_2 A_3$ و $A_3 A_4$ و $A_4 A_5$ من المضلع الجبلي . لنرمز لهذه القوى بـ $H_{0,1}$ و $H_{1,2}$ و $H_{2,3}$ و $H_{3,4}$ و $H_{4,5}$ على الترتيب .

لتكن $H'_{0,1}$ القوة المعاكسة مباشرة للقوة $H_{0,1}$. فمجموعة القوى المفروضة F_1 و F_2 و F_3 و F_4 متكافئة بمجموعة القوى $H'_{0,1}$ و $H_{0,1}$ و F_1 و F_2 و F_3 و F_4 :

$$S(F_1, F_2, F_3, F_4) = S(H'_{0,1}, H_{0,1}, F_1, F_2, F_3, F_4)$$

واذا لاحظنا تكافؤ المجموعات الجزئية التالية :

$$S (H_{0,1} , F_1) = S (H_{1,2})$$

$$S (H_{1,2} , F_2) = S (H_{2,3})$$

$$S (H_{2,3} , F_3) = S (H_{3,4})$$

$$S (H_{3,4} , F_4) = S (H_{4,5})$$

لأدر كذا ان المجموعة المفروضة تكافئ القوتين $H_{4,5}$ و $H'_{0,1}$:

$$S (F_1 , F_2 , F_3 , F_4) = S (H'_{0,1} , H_{4,5})$$

وهو المطلوب .

نستخلص من هذه النظرية ما يلي :

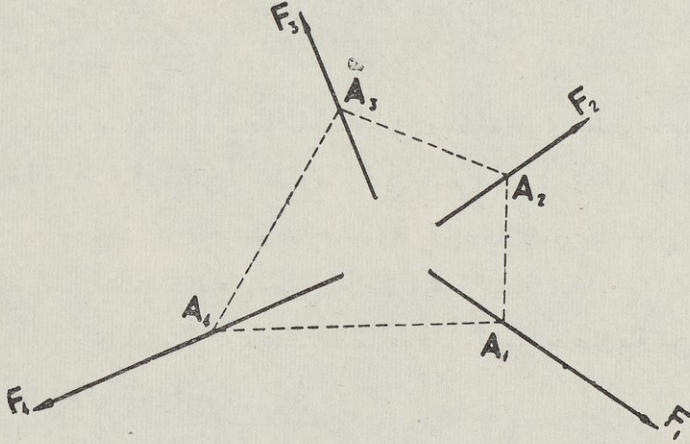
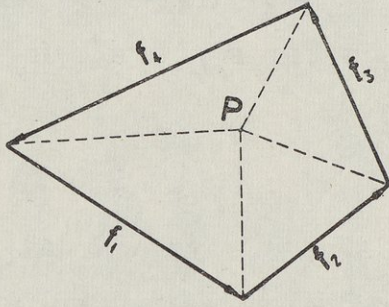
١- اذا تلاقى الضلعان $A_4 A_5$ و $A_0 A_1$ من المضلع الجبلي (الضلع الاول والمضلع الاخير) في نقطة مثل C ، فالمجموعة المفروضة ترد آتئذ الى قوة وحيدة تمر من النقطة C . هذه القوة ، ولنرمز اليها بـ R ، هي حاصلة القوى المفروضة .

نرى انه قد امكن بوساطة المضلع الجبلي ومضلع القوى تعيين حاصلة قوى مفروضة واقعة في مستو واحد ومؤثرة في جسم صلب : فمضلع القوى يعين قياس ومنحى واتجاه الحاصلة (الحاصلة R تساوي المجموع الهندسي (r) ، والمضلع الجبلي يعين نقطة من حامل الحاصلة (هي النقطة C) .
هذا ونرى بسهولة انه يمكن بالطريقة ذاتها تعيين حاصلة فئة من القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .

٢- اذا انطبق الرأسان $a_{0,1}$ و $a_{4,5}$ من مضلع القوى على بعضهما ($a_{0,1}$ الرأس الاول و $a_{4,5}$ الرأس الاخير) ، لأضحي الضلع الاول $A_0 A_1$ من المضلع الجبلي موازياً للضلع الاخير $A_4 A_5$ او منطبقاً عليه :
فإن توازي الضلعان ، فالمجموعة ترد عندئذ الى مزدوجة (لآنها ترد الى قوتين متوازيتين مجموعهما الهندسي يساوي الصفر) .

وإن انطباقا على بعضهما فالمجموعة ترد الى الصفر ، وتعدو متوازنة (شكل ١٧) .

او نقول باختصار : اذا اغلق كل من مضلع القوى والمضلع الجبلي فالمجموعة تكون متوازنة . وان اغلق مضلع القوى لوحده فالمجموعة ترد الى مزدوجة .



(شكل ١٧)

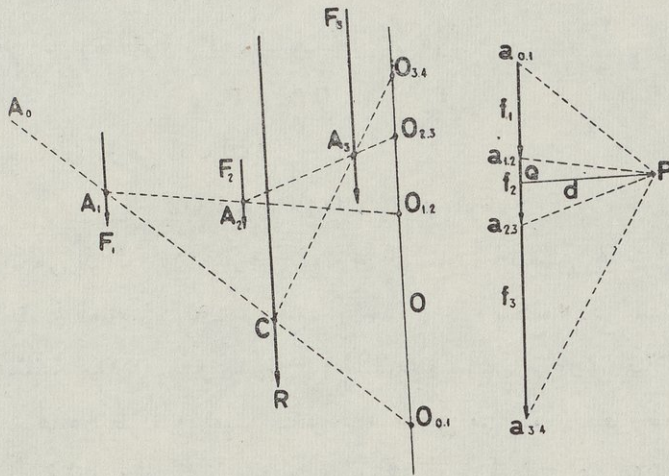
ملاحظة : نلاحظ هنا ، كما لاحظنا في الطريقة السابقة ، ان المضلع الجبلي هو الشكل التوازني لجبل أهمل ثقله وقد اثرت فيه القوى المفروضة والقوتان المعاكستان مباشرة للقوتين $H_{0,1}$ و $H_{1,5}$.

٩٦ — حالة خاصة : القوى المتوازية الواقعة في مستو واحد :

لرد مجموعة قوى متوازية واقعة في مستو واحد نحري على القوى العمليات التي سبق ان اوردناها في رد القوى الواقعة في مستو واحد بوجه عام .

فنرى ان هذه المجموعة قد ترد الى قوة وسيدة (كما هو واضح في الشكل

(١٨) ، او ترد الى مزدوجة او الى الصفر .



(شكل ١٨)

هنا ونلاحظ في حالة القوى المتوازية ما يلي :

- ١ — ان اضلاع مضلع القوى تقع على مستقيم يوازي قوى المجموعة .
- ٢ — يمكن تعيين العزم بالنسبة لنقطة ما من مستوي المجموعة لاية قوة من المجموعة او تعيين العزم الحاصل لفئة من قوى المجموعة بطريقة تخطيطية سهلة تعتمد على النظرية الآتية :

ان عزوم القوى المفروضة F_1 و F_2 و F_3 وعزم الحاصلة R بالنسبة لنقطة ما O واقعة في مستوي القوى تساوي على الترتيب :

$$O_{01} O_{34} \wedge PQ \text{ و } O_{23} O_{34} \wedge PQ \text{ و } O_{12} O_{23} \wedge PQ \text{ و } O_{01} O_{12} \wedge PQ$$

(بفرض ان O_{01} و O_{12} و O_{23} و O_{34} هي نقط تلاقي المستقيمت $A_0 A_1$ و $A_1 A_2$ و $A_2 A_3$ و $A_3 A_4$ من المضلع الجبلي مع المستقيم المنشأ من النقطة O موازياً القوى المفروضة ، وان Q هي مسقط القطب P على هذا المستقيم) .
لنبرهن ان عزم احدى القوى ، ولتكن القوة F_2 مثلاً ، يساوي

$$. O_{12} O_{23} \wedge PQ$$

نعلم ان عزم القوة F_2 بالنسبة لنقطة O هو :

$$(F_2, O) = OA_2 \wedge F_2$$

فيجب ان نبرهن اذن ان :

$$OA_2 \wedge F_2 = O_{12} O_{23} \wedge PQ$$

ويكفي لذلك ان نبرهن تساوي القيمتين المطلقتين لهذين المقدارين
 (لان بقية العناصر الشعاعية فيهما واحدة) . ويتضح هذا التساوي من
 تشابه المثلثين $A_2 O_{12} O_{23}$ و $PA_{12} a_{23}$ (المثلثان متشابهان لتوازي اضلاعهما) .
 تفيد هذه النظرية في تعيين قياس عزم كل من القوى المفروضة وعزم
 حاصلتها . فيقدر قياس كل من هذه العزوم ببجاء طول ثابت هو PQ (وهو
 بُعد النقطة P عن المستقيم ، ولنرمز لهذا البُعد بـ d) بطول متغير حسب
 القوة التي نعين عزمها (وهذا الطول هو $O_{12} O_{23}$ من اجل عزم القوة F_2) .
 فإذا قسنا الطول المتغير على محور مدرج (وذلك بأن نوجه المستقيم
 $O O_{34}$ وندرجه بتدرج مناسب) لحصلنا مباشرة على قياس عزم كل من
 القوى المفروضة .

واذا اعتبرنا قياس البُعد d مساوياً الواحدة ، فالقياسات الجبرية لعزوم
 القوى المفروضة F_1 و F_2 و F_3 وعزم حاصلتها R تقدر آنشد بالقطع الجبرية :
 $O_{01} O_{12}$ و $O_{12} O_{23}$ و $O_{23} O_{34}$ المقدرة على المحور المارّ من النقطة O
 والموازي للقوى المفروضة .

تمارين

١ - ثلاث قوى مطبقة في رؤوس مثلث وفق ارتفاعاته . وهي متجهة جميعها إما الى رؤوس المثلث او الى الاتجاه المعاكس . فاذا فرض ان شدات هذه القوى متناسبة مع الاضلاع العمودية على القوى ، فانه يطلب ان تبرهن ان هذه القوى متوازنة .

٢ - نفرض مضلعاً مستوياً ومحدباً . نطبق في مستوي المضلع قوة عمودية على كل من اضلاعه باستثناء ضلع واحد . فاذا فرض ان هذه القوى متجهة جميعها الى خارج المضلع ، وان شداتها متناسبة مع الاضلاع العمودية عليها ، فانه يطلب ان تبرهن ان لهذه القوى حاصلة عمودية على الضلع الاخير من المضلع ومتناسبة مع هذا الضلع (اي ان القوى وحاصلتها متناسبة مع الاضلاع العمودية عليها) .

٣ - Ax و By نصفا مستقيمين في الفراغ . العمود المشترك بينهما هو AB . AA' و BB' قوتان محمولتان على Ax و By على الترتيب . فاذا فرض ان مجموعي قياسي القوتين هو ثابت ، فانه يطلب تعيين المحل الهندسي لنهاية شعاع العزم الحاصل لهاتين القوتين بالنسبة لمنتصف AB . عين النهاية الصغرى لهذا العزم .

٤ - AA' و BB' قوتان مؤثرتان في نهايتي قضيب معدني صلب AB وواقعتان في مستو واحد وبطرف واحد من AB . فاذا علم ان :

$$\begin{aligned} AA' &= 6 \text{ kg} & BB' &= 8 \text{ kg} \\ \hat{A}BB' &= 144^\circ & \hat{B}AA' &= 126^\circ \end{aligned}$$

فانه يطلب تعيين قوة F اذا أثرت في القضيب أصبح هذا القضيب متوازناً .

٥ - AA' و BB' و CC' ثلاث قوى مؤثرة في رؤوس مثلث ABC ومساوية على الترتيب لـ BC و CA و AB .

(١) برهن ان هذه القوى تكافئ مزدوجة . اوجد محور هذه المزدوجة .

(٢) تدار هذه القوى حول نقط تطبيقها بجهة واحدة بقدر زاوية α فنحصل على القوى AA'' و BB'' و CC'' .

برهن ان هذه القوى تكافئ مزدوجة ايضاً . عين محور هذه المزدوجة . عين الزاوية α كي تتوازن هذه القوى .

٦ - يؤثر في رؤوس مثلث متساوي الاضلاع ABC (ضلعه a) ثلاث قوى متوازية متحدة في الاتجاه ، شداتها متناسبة مع الاعداد ١ و ٢ و ٣ . عين مركز هذه القوى واحسب ابعاد هذا المركز عن اضلاع المثلث .

٧ - F_1 و F_2 و F_3 و F_4 قوى متوازية مؤثرة على الترتيب في H_1 و H_2 و H_3 و H_4 منتصفات الاضلاع AB و BC و CD و AD لشكل رباعي محدب $ABCD$.

(١) نفرض ان القوى متساوية جميعها في القياس . برهن ان هذه القوى تتوازن عندما يكون لـ F_1 و F_3 اتجاه واحد ولـ F_2 و F_4 اتجاه يخالف الاتجاه الاول .

عين منحنى القوى المشترك الذي تتوازن من اجله هذه القوى عندما يكون لـ F_1 و F_2 اتجاه واحد ولـ F_3 و F_4 اتجاه معاكس للاتجاه الاول .

(٢) نفرض ان شدات القوى متناسبة مع الاضلاع التي تؤثر فيها القوى ، ونفرض ان لـ F_1 و F_3 اتجاهاً واحداً ، ولـ F_2 و F_4 اتجاهاً معاكساً للاتجاه الاول . عين شروط توازن هذه القوى .

٨ - ABC مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه a . ليكن O منتصف

الضلع AC . لنفرض محورين متعامدين للاحداثيات ، احدهما OAx والثاني OBy .

يؤثر في رؤوس المثلث A و B و C ثلاث قوى متوازية قياساتها الجبرية هي على التوالي 1 و 2λ و λ^2 (λ وسيط متغير موجب او سالب) .
المطلوب :

(١) حساب احداثي مركز القوى .

(٢) تعيين نهاية موضع هذا المركز عندما يتناهي λ الى الصفر ، او (-1) ، او عندما تزداد القيمة المطلقة لـ λ الى اللانهاية .

(٣) تعيين المنحني الذي يرسمه هذا المركز عندما يتغير λ .

٩ - Ox و Oy محوران احداثيان متعامدان . لتكن A نقطة على المحور Ox فصلها a ، و B نقطة على المحور Oy ترتبها b . نطبق في O و A و B ثلاث قوى متوازية وباتجاه واحد ، شداتها تساوي على التوالي : ١ و ٢ و ٣ .

(١) احسب احداثي مركز هذه القوى .

(٢) عين المنحني الذي يرسمه هذا المركز عندما تتحرك النقطة A على المحور Ox وتتحرك B على Oy بحيث يبقى الطول AB ثابتاً .

١٠ - كيف نضع على محيط دائرة ثلاثة اثقال P_1 و P_2 و P_3 ليكون مركز هذه الاثقال هو مركز الدائرة .

تطبيق عددي : $P_1 = 2 \text{ kg}$ و $P_2 = 3 \text{ kg}$ و $P_3 = 4 \text{ kg}$.

١١ - ABCDEF مسدس طول ضلعه a . نضع في رؤوسه على التوالي

الاثقال : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ (مقدرة بالكيلوغرامات) . عين مركز هذه الاثقال .

١٢ - عين على صفيحة مربعة الشكل ABCD نقطة o بحيث اذا اقتطع من الصفيحة المثلث oAB كان مركز ثقل ما تبقى من الصفيحة هو نقطة مفروضة G .

١٣ - برهن أن مركز ثقل قطاع مضلعي منتظم هو مركز ثقل خط منكسر محاك لقاعدة القطاع : مركز التحاكي هو مركز دائرة القطاع ، ونسبة التحاكي $\frac{2}{3}$.

١٤ - استنتج من المسألة السابقة أن بُعد مركز قطاع دائري عن مركز ثقل سطحه يساوي $\frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ (R نصف قطر الدائرة ، α نصف الزاوية الرأسية للقطاع) .

١٥ - نفرض مجموعة قوى مؤثرة في جسم صلب ومنسوبة لمجموعة محاور احداثية مائلة oxyz . لتكن $F_h(X_h, Y_h, Z_h)$ احدى هذه القوى و $M_h(x_h, y_h, z_h)$ نقطة تطبيق هذه القوة في الجسم .

برهن ان المعادلات الست للتوازن في الاحداثيات المائلة لا تختلف في شكلها عن مثيلاتها في الاحداثيات القائمة :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma X_h = 0 \\ \Sigma Y_h = 0 \\ \Sigma Z_h = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma (y_h Z_h - z_h Y_h) = 0 \\ \Sigma (z_h X_h - x_h Z_h) = 0 \\ \Sigma (x_h Y_h - y_h X_h) = 0 \end{array} \right.$$

١٦ - اذا توازنت مجموعة قوى مؤثرة في جسم ، او كانت هذه القوى مكافئة لمزدوجة ، فمركز ثقل كتل متساوية موضوعة في نقط تطبيق القوى ينطبق على مركز ثقل كتل متساوية موضوعة في نهايات أشعة هذه القوى .

١٧ - لدينا شكل رباعي مستو محدب ABCD . عين على اضلاع هذا الشكل اربع قوى بحيث تكون مجموعة هذه القوى متوازنة .

١٨ - اوجد بطريقة تخطيطية النتائج الواردة في تركيب قوتين متوازيتين (بند ٨٧ ، ص ١٥٠) .

١٩ - لدينا في مستو مفروض : قوة F ومستقيمان D_1 و D_2 موازيان للقوة F . المطلوب تفريق القوة F بطريقة تخطيطية الى مركبتين عمولتين على المستقيمين D_1 و D_2 .

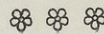
٢٠ - AB قضيب (قطعة مستقيمة من سلك معدني رفيع) متجانس طوله $2l$ وثقله P . يستند هذا القضيب بنهايتيه A و B الى مستويين صقيلين ، أحدهما أفقي والآخر شاقولي .

نفرض خيطاً طوله d (يهمل ثقله) نشد به القضيب الى نقطة o كائنة على الفصل المشترك للمستويين المتعامدين : فنربط احدى نهايتي الخيط بنقطة معلومة c من القضيب (اي بحلقة صغيرة مثبتة في الموضع c من القضيب) ، ثم نربط النهاية الثانية بحلقة صغيرة مثبتة في النقطة o .

عين في وضع التوازن القوى المؤثرة في القضيب بطريقتين : إحداهما تخطيطية والاخرى تحليلية .

٢١ - حوض أملس بشكل نصف كرة جوفاء قطرها $2a$.

AB قضيب متجانس طوله $2l$ وثقله P . يستند هذا القضيب الى حافة الحوض ، وتستند نهايته A الى سطح الحوض . عين الوضع التوازني للقضيب ، ثم عين قوى الرباط الموافقة لهذا الوضع .



الفصل الثالث

توازن الجسم الصلب المقيد

٩٧ — تعريف : نقول عن جسم صلب إنه طليق إذا أمكنه التنقل دون عائق في جميع الجهات .

ونقول عن جسم إنه مقيد أو خاضع لأربطة إذا حال عائق دون حركته في جهة واحدة أو في جهات عديدة .

يمكن تمثيل تأثيرالعائق في الجسم بقوى نسميها ردود الفعل أو قوى الرباط (أو قوى الصلة) .

سنقتصر في بحثنا في اتصال يقوم بين الجسم والعائق بدون احتكاك .

أما الطريقة التي سنتبعها في تعيين شروط التوازن فهي أن نعتبر الاجسام كأنها طليقة شريطة ان ندخل في عداد القوى المؤثرة فيها ردود الفعل الناشئة من الاربطة التي تخضع لها هذه الاجسام . فتصبح هذه الردود (التي سمينها بقوى الرباط) مجاهيل مساعدة .

٩٨ — نوازن جسم مقيد بنقطة ثابتة : لنفرض جسماً صلباً يستطيع

الدوران حول نقطة ثابتة في الفراغ . لتكن O هذه النقطة (شكل ١٩) .

لنرمز بـ $S(F_i)$ لمجموعة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .

نسمي بوجه عام الجسم المقيد بنقطة ثابتة برافعة .

لنبحث عن شروط توازن الرافعة .

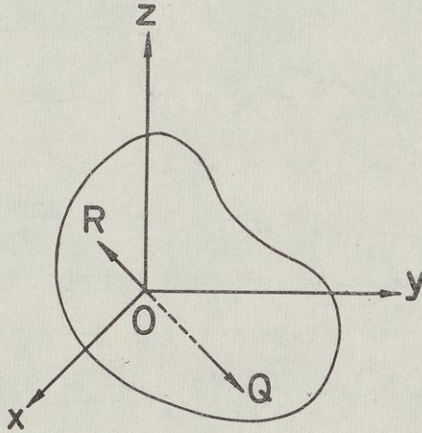
نرى أن الجسم المفروض يؤثر في النقطة الثابتة O بقوة ضاغطة . لتكن

Q هذه القوة .

كما نرى ، اعتماداً على مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل ، ان النقطة o تؤثر في الجسم بقوة R (هي رد فعل الجسم في النقطة) ، وان هذه القوة تعاكس مباشرة القوة Q .

فالجسم المفروض يمكن اعتباره اذن طليقاً تحت تأثير مجموعة القوى $S(F_i)$ ورد الفعل R .

فاذا فرضنا الجسم بحالة توازن كان لمجموعة القوى $S(F_i)$ حاصلة تعاكس مباشرة القوة R .



(الشكل ١٩)

فشرط التوازن اذن هو ان يكون لمجموعة القوى المفروضة حاصلة مارة من النقطة الثابتة .

ان هذا الشرط اللازم للتوازن هو ايضاً كاف .

بالحقيقة ، اذا فرضنا ان مجموعة القوى المفروضة $S(F_i)$ مكافئة لقوة وحيدة Q مارة من النقطة الثابتة o ، فانه يمكن الاستعاضة عن القوى المفروضة المطبقة في الجسم بالقوة Q التي يعدم عملها (اي تأثيرها في الجسم)

مقاومة النقطة الثابتة o . فينشأ من النقطة الثابتة هذه قوة R (هي ردّ الفعل) تعاكس مباشرة القوة Q . وبذلك يغدو الجسم متوازناً .
نستخلص من ذلك النتيجةين التاليتين :

(١) لكي يتوازن جسم صلب مقيد بنقطة ثابتة ، يلزم ويكفي ان يكون للقوى المفروضة المؤثرة في الجسم حاصلة تمر ابدأً من النقطة الثابتة (او ينعدم العزم الحاصل لهذه القوى بالنسبة للنقطة الثابتة) .

(٢) أما رد فعل النقطة الثابتة في الجسم فهو قوة تعاكس مباشرة حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .

هذا ويمكن الوصول الى هذه النتائج بطريقة تحليلية :

الطريقة التحليلية : نفرض مجموعة محاور احداثية $oxyz$ (قائمة ومباشرة) مبدؤها النقطة الثابتة o (شكل ١٩) .

لنرمز بـ $F(F_x, F_y, F_z)$ للحاصلة العامة للقوى المفروضة وبـ $G(L, M, N)$ للعزم الحاصل في o لهذه القوى . لتكن X و Y و Z مركبات ردّ الفعل R على المحاور الاحداثية ox و oy و oz على الترتيب .
فشروط التوازن تكون :

$$(91) \quad F_x + X = 0 \quad F_y + Y = 0 \quad F_z + Z = 0$$

$$(92) \quad L = 0 \quad M = 0 \quad N = 0$$

نرى ان المعادلات (92) التي لا تحوي رد الفعل تعين شروط التوازن . فهي تدل على ان مجموعة القوى المفروضة $S(F_i)$ متكافئة قوة وحيدة مارة من مبدأ الاحداثيات o .

أما المعادلات (91) فتعين رد الفعل . وهي تدل على ان رد الفعل يعاكس مباشرة حاصلة القوى المفروضة .

ونلاحظ ان حاصلة القوى المفروضة هذه هي القوة التي يضغط بها الجسم على النقطة الثابتة .

٩٩ - مانه خاصة : توازن جسم ثقيل مقيم بنقطة ثابتة - يتوازن الجسم الثقيل (اي الجسم الخاضع لثقله فحسب) والمقيد بنقطة ثابتة حين يقع مركز ثقله على شاقول النقطة الثابتة .

ملحظة : نرى انه يمكن تعيين مركز ثقل جسم بطريقة عملية تعتمد على الشرط السابق . وتتلخص هذه الطريقة بما يلي :

نعلق الجسم من احدى نقطه . فمركز ثقل الجسم يقع على شاقول هذه النقطة . نعين هذا الشاقول في الجسم (ان امكن ذلك) . ثم نعيد التجربة بعد ان نعلق الجسم من نقطة ثانية ، فنحصل على شاقول آخر يلاقي الشاقول الاول في مركز ثقل الجسم المطلوب .

١٠٠ - توازن جسم مقيم بمحور ثابت : لنفرض جسماً صلباً يستطيع الدوران حول محور ثابت نعتبره المحور OZ .

لتكن $S(F_i)$ مجموعة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .

نرى ان الجسم يؤثر في مختلف نقط المحور بقوى ضاغطة . لنرمز بـ Q_1 و Q_2 و ... لهذه القوى .

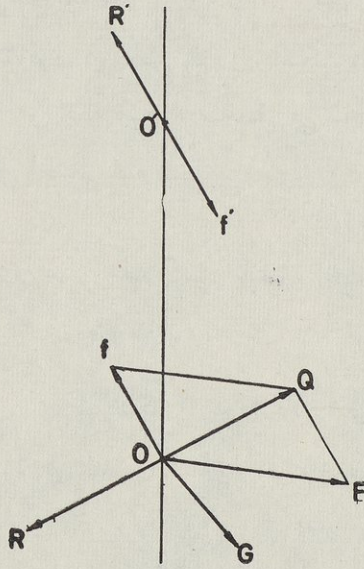
كما نرى ان المحور يؤثر بالمقابل في الجسم بردود فعل . لنرمز بـ R_1 و R_2 و ... لهذه الردود .

فالجسم يمكن اعتباره اذن طليقاً تحت تأثير مجموعة القوى المفروضة $S(F_i)$ وردود الفعل R_1 و R_2 و

وليكون هنالك توازن ، فانه يلزم بوجه خاص ^(١) ، ان يكون العزم الحاصل بالنسبة للمحور الثابت لجميع القوى المؤثرة في الجسم مساوياً للصفر .
واذا لاحظنا ان عزوم ردود الفعل هي مساوية للصفر ، لا دركنا عندئذ ان الشرط اللازم للتوازن هو ان يكون العزم الحاصل للقوى المفروضة مساوياً للصفر :

$$N = 0$$

لنبرهن ان هذا الشرط اللازم هو ايضاً كاف للتوازن .
بالحقيقة ، اذا تحقق هذا الشرط لا يمكن رد مجموعة القوى المفروضة في نقطة ما O من المحور الثابت (شكل ٢٠) الى قوة F (هي الحاصلة العامة



(شكل ٢٠)

(١) نعلم انه يلزم للتوازن ، بوجه عام ، ان تؤلف ردود فعل المحور والقوى المفروضة المؤثرة في الجسم مجموعة قوى مكافئة للصفر : بمعنى ان يكون كل من الحاصلة العامة لجميع القوى المؤثرة في الجسم والعزم الحاصل لهذه القوى بالنسبة لنقطة ما (او بالنسبة لمحاور الاحداثية) مساوياً للصفر .

للمجموعة () ومزدوجة C محورها G (هو العزم الحاصل للمجموعة في 0) .
وبما ان العزم الحاصل للقوى المفروضة بالنسبة للمحور oz مساوٍ للصفر :

$$N = 0$$

فإما ان يكون G مساوياً للصفر او عمودياً على oz .

فإن كان G صفراً ، فالقوى المفروضة تكافئ القوة الوحيدة F (المطبقة في 0) التي يعدم عملها وتأثيرها مقاومة النقطة الثابتة 0 . وبذلك يصبح الجسم متوازناً .

وان كان G عمودياً على oz ، فيمكن حينئذ تعيين مركبتين f و f' للمزدوجة C بحيث يقع المحور oz في مستويها وينطبق بالتالي على ذراعها .
فالقوى f و f' و F المطبقة في نقط من المحور oz يعدم عملها مقاومة هذا المحور الثابت . وبذلك يصبح الجسم متوازناً .
نستخلص من ذلك :

أن الشرط اللازم والكافي لتوازن جسم صلب مقيد بمحور ثابت ، هو
أن يكون العزم الحاصل للقوى المفروضة بالنسبة لهذا المحور مساوياً للصفر .
لنعين الآن ردود فعل المحور في الجسم :

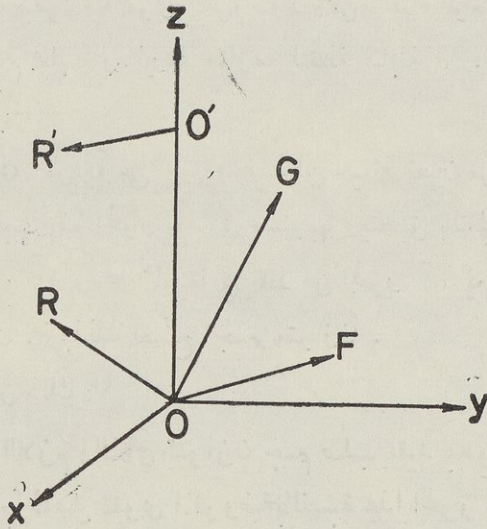
نعلم ان هذه الردود هي قوى مطبقة في مختلف نقط الجسم الملامسة للمحور .
فيمكن اذن رد هذه القوى الى قوتين R و R' مطبقتين في نقطتين اختياريتين
o و o' من المحور .

هذا ويمكن الوصول الى هذه النتيجة عملياً اذا قبلنا ان تثبيت المحور oz
قد تمّ بتثبيت نقطتين منه هما o و o' . فهاتان النقطتان تؤثران في الجسم
بالقوتين R و R' .

سنعين بطريقة تحليلية شروط التوازن وردى الفعل R و R' .

الطريقة التحليلية : لنفرض مجموعة محاور احداثية oxyz نختارها بحيث

تقع احدى النقطتين المثبتتين من محور الدوران على مبدأ الاحداثيات O وتقع النقطة الثانية O' على المحور OZ (شكل ٢١) .
ليكن (F_x, F_y, F_z, L, M, N) احداثيات مجموعة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .



(شكل ٢١)

لنرمز بـ $R(X, Y, Z)$ و $R'(X', Y', Z')$ لردى فعل النقطتين O و O' في الجسم ، وبـ h لواقع النقطة O' .
فمعادلات التوازن تكون :

$$(93) \quad \begin{cases} F_x + X + X' = 0 \\ F_y + Y + Y' = 0 \\ F_z + Z + Z' = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L - hY' = 0 \\ M + hX' = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

نرى ان المعادلة الاخيرة من المجموعة (93) هي مستقلة عن مركبات ردى الفعل ، فهي تعين الشرط اللازم والكافي للتوازن .

أما المعادلات الخمس الباقية ، الحاوية على المجاهيل الستة X و Y و Z و X' و Y' و Z' ، فهي لا تكفي لتعيين هذه المجاهيل (وتمثل عدم تعيين) .
فالمعادلتان ، الرابعة والخامسة ، تعيينان Y' و X' .
والمعادلتان ، الأولى والثانية ، تعيينان X و Y .

أما Z و Z' فلا يمكن تعيين كل منهما ، بل تعيين مجموعهما فحسب :

$$F_z + Z + Z' = 0$$

وسبب عدم التعيين ناشئ عن تثبيت نقطتين o و o' من محور الدوران .
بينما يكفي لتثبيت محور أن نثبت نقطة منه o ونثبت ميله في نقطة ثانية منه o' . ويمكن تحقيق ذلك عملياً بأن نتصور النقطة الثابتة o كرة صغيرة ثابتة من المحور تمس كرة صغيرة جوفاء في الجسم بدون احتكاك (فرد الفعل R يكون عمودياً على الكرة او ماراً من o) ، وان نتصور النقطة o' حلقة اسطوانية صغيرة ثابتة والمحور داخلها ملازماً لها بدون احتكاك (فرد الفعل R' يكون عمودياً على المحور) . فيصبح إذن :

$$Z' = 0$$

وتصبح بالتالي المعادلات الخمس كافية لحساب المجاهيل الخمسة .

ملاحظة : لقد رأينا انه لا يمكن ، اعتماداً على الميكانيك العقلي ، تعيين ردي فعل النقطتين المثبتتين R و R' .

لكننا نلاحظ من الوجهة الفيزيائية ان ردي الفعل R و R' يتعينان تماماً .
وتفسير ذلك : ليس في الطبيعة جسم ينطبق عليه تعريف الجسم الصلب تماماً . فأي جسم مهما كانت مقاومته يمكن ان تختلف أبعاد نقطه بعضها عن بعض اذا تأثر بقوة مناسبة .

فاعتماداً على المرونة يمكن تعيين ردي الفعل في النقطتين المثبتتين o و o' .

١٠١ - توازن جسم يستطیع الدوران حول محور ثابت والانتزاق

علیم : فی هذه الحالة تكون ردود فعل المحور R_1 و R_2 و ... عمودية على المحور (بفرض ان الانتزاق بدون احتكاك) .

فإذا اعتبرنا هذا المحور هو المحور oz لكان شرط التوازن :

$$N = 0$$

$$F_z = 0$$

نستخلص من ذلك :

أن الشرط اللازم والكافي لتوازن جسم صلب يستطيع الدوران حول محور ثابت والانتزاق على المحور نفسه ، هو ان يكون العزم الحاصل لمجموعة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم بالنسبة لهذا المحور مساوياً للصفر وان تكون الحاصلة العامة لهذه المجموعة مساوية للصفر او عمودية على المحور .

١٠٢ - توازن جسم يستند الى مستو ثابت : - لنفرض جسماً صلباً

يستند الى مستو ثابت بنقطة واحدة او بنقط عديدة .

فاذا فرضنا ان الاستناد بدون احتكاك فردود فعل المستوي في نقط الاستناد تكون عمودية على المستوي ومتجهة نحو الجسم .

لنميز عدة حالات حسبما يكون للجسم :

(١) نقطة استناد واحدة .

(٢) نقط استناد واقعة على مستقيم واحد .

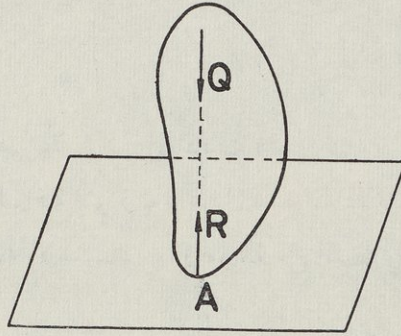
(٣) نقط استناد غير كائنة على استقامة واحدة . وهي الحالة العامة .

١ - حالة نقطة استناد واحدة : - لتكن A هي نقطة الاستناد ،

(شكل ٢٢) .

لنرمز بـ R لرد فعل المستوي في الجسم ، وبـ $S(F_i)$ لمجموعة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .

فتوازن الجسم يستلزم توازن رد الفعل R ومجموعة القوى المفروضة $S(F_i)$. ويتم ذلك حين تكون مجموعة القوى $S(F_i)$ مكافئة لقوة وحيدة عمودية على المستوي ومارة من نقطة الاستناد A ومتجهة نحو المستوي .
لنرمز بـ Q لهذه القوة .



(شكل ٢٢)

ان هذا الشرط اللازم للتوازن هو ايضاً كاف .
بالحقيقة ، اذا تحقق هذا الشرط فإن حاصلة القوى المفروضة (العمودية على المستوي في نقطة الاستناد ، والمتجهة نحو المستوي) لا تعمل على تحريك الجسم المستند الى المستوي ، بل على تثبيته على المستوي .
أما تأثير هذه الحاصلة في الجسم فإنه يتلشى بفضل مقاومة المستوي .
ويكون رد فعل المستوي الناشئ معاكساً مباشرة للقوة Q .

الطريقة التحليلية : لنفرض مجموعة محاور احداثية (قائمة ومباشرة)
نختارها بحيث ينطبق مبدؤها o على نقطة الاستناد A ، وينطبق مستوي
الاحداثيات xoy على المستوي الذي يستند اليه الجسم ، ويقع المحور oz
والجسم بطرف واحد بالنسبة للمستوي xoy .

ليكن $R(0, 0, Z)$ ، رد فعل المستوي في الجسم ، و $F(F_x, F_y, F_z)$ حاصل القوى المفروضة المؤثرة في الجسم ، و $G(L, M, N)$ العزم الحاصل في O للقوى المفروضة هذه .

فمعادلات التوازن هي :

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z + Z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L = 0 \\ M = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

نرى في هذه المجموعة ان المعادلات الخمس التي لا تحوي رد الفعل تعين الشروط اللازمة والكافية للتوازن . فتدل هذه المعادلات ان للقوى المفروضة حاصله مارة من نقطة الاستناد O وعمودية على المستوي xoy الذي يستند اليه الجسم .

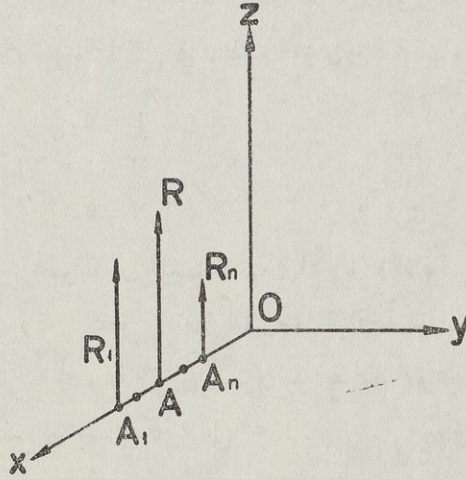
أما المعادلة الثالثة من المجموعة فتعين رد الفعل . ويستدل من هذه المعادلة ان حاصله القوى المفروضة (وهي معاكسة مباشرة لرد الفعل) تتجه نحو المستوي .

٢ — مآلة عمرة نقط استناد على استقامة واحدة : لنفرض ان الجسم يستند الى المستوي الثابت بنقط A_1 و A_2 و ... و A_n واقعة على مستقيم واحد . ليكون هذا المستقيم هو المحور ox (شكل ٢٣) .

نعلم ان ردود فعل المستوي في نقط الاستناد ، ولنرمز لها بـ R_1 و R_2 و ... و R_n ، هي قوى عمودية على المستوي ومتحدة في الاتجاه . فلهذه القوى اذن حاصله R عمودية على المستوي ومتحدة في الاتجاه مع مركباتها ومطبقة في نقطة A من المحور ox كائنة بين النقطتين A_1 و A_n المحيطتين ببقية نقط الاستناد .

فلسي يتوازن الجسم يلزم اذن أن توازن القوى المفروضة ردود فعل

المستوي . ويتم ذلك حين يكون للقوى المفروضة حاصلة عمودية على المستوي ومتجهة بحيث تضغط الجسم على المستوي (فهي متجهة نحو المستوي) ومطبقة في نقطة من المحور ox كائنة بين النقطتين A_1 و A_n .



(شكل ٢٣)

إن هذه الشروط اللازمة للتوازن هي أيضاً كافية .
بالحقيقة ، إذا تحققت هذه الشروط ، أمكن تفريق حاصلة القوى المفروضة إلى قوتين عموديتين على المستوي ومطبقتين في نقطتين من نقط الاستناد . هاتان القوتان لا تعملان على تحريك الجسم . أما تأثيرهما فيتلاشى بفضل مقاومة المستوي .

الطريقة التحليلية : لنفرض مجموعة محاور إحداثية xyz (قائمة ومباشرة) . نختار هذه المجموعة بحيث ينطبق المستوي الثابت على المستوي xoy والمستقيم الذي تقع عليه النقط على المحور ox ويقع المحور oz والجسم بطرف واحد بالنسبة للمستوي الثابت .

لتكن a_i فاصلة نقطة الاستناد A_i . فاحداثيات A_i تكون $(a_i, 0, 0)$.
نرى أن مسقط رد الفعل R_i (في النقطة A_i) على المحور oz هو موجب
(بوجه عام) ويساوي قياس رد الفعل R_i .
فإذا رمزنا بـ $F (F_x, F_y, F_z)$ لحاصل القوى المفروضة المؤثرة في الجسم ،
وبـ $G (L, M, N)$ للعزم الحاصل في O لهذه القوى ، لكانت معادلات التوازن :

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z + \sum R_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L = 0 \\ M - \sum a_i R_i = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

نرى في هذه المجموعة ان المعادلات : الاولى والثانية والرابعة والسادسة
(وهي لا تحوي ردود الفعل) تعين الشروط اللازمة للتوازن . ويستدل من
هذه المعادلات أن لمجموعة القوى المفروضة حاصلة عمودية على المستوي xoy
وقاطعة لهذا المستوي بنقطة كائنة على المحور ox .

ونستخلص من المعادلة الثالثة أنه يجب أن يكون F_z سالباً . فيجب إذن
أن تكون حاصلة القوى المفروضة متجهة بحيث تطبق الجسم على المستوي .
وإذا رمزنا بـ x لفصل النقطة التي يتلاقى فيها حامل الحاصلة والمستوي ،
لكان M (وهو العزم الحاصل للقوى المفروضة بالنسبة للمحور oy) مساوياً
لعزم حاصلة هذه القوى بالنسبة للمحور نفسه :

$$M = - x F_z$$

وغدت المعادلة الخامسة :

$$x F_z + \sum a_i R_i = 0$$

وبالرجوع إلى المعادلة الثالثة تصبح المعادلة الاخيرة :

$$x = \frac{\sum a_i R_i}{\sum R_i}$$

وإذا لاحظنا أن R_1 و R_2 و ... و R_n هي مقادير موجبة لا در كنا أن المقدار x محصور بين القيمة الصغرى للمقادير a_1 و a_2 و ... و a_n والقيمة العظمى لها . فحاصلة القوى المفروضة تلاقي إذن المحور ox بنقطة كائنة بين النقطتين A_1 و A_n المحيطتين بجميع نقط الاستناد .

أما ردود فعل المستوي في الجسم فيجب أن تحقق المعادلتين :

$$F_z + \sum R_i = 0$$

$$M - \sum a_i R_i = 0$$

ويلاحظ أن هذه الردود تتعين تماماً حين لا يكون للجسم أكثر من نقطتي استناد .

ففي الحالة الخاصة ، حين يستند الجسم إلى المستوي الثابت بنقطتي استناد A_1 و A_2 مثلاً ، فالمعادلتان الأخيرتان تعينان آنئذ رددي الفعل R_1 و R_2 في هاتين النقطتين :

$$\begin{cases} F_z + R_1 + R_2 = 0 \\ M - a_1 R_1 - a_2 R_2 = 0 \end{cases}$$

فنجد :

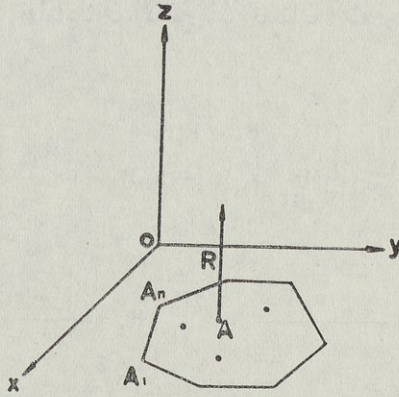
$$R_1 = \frac{M + a_2 F_z}{a_1 - a_2} \quad R_2 = \frac{M + a_1 F_z}{a_2 - a_1}$$

أما في الحالة العامة ، حين يستند الجسم إلى المستوي بأكثر من نقطتين ، فإنه لا يمكن عندها تعيين ردود الفعل إلا بالاعتماد على المرونة .

٣ - مائة فقط استناد عديدة : لنفرض أن الجسم يستند إلى المستوي الثابت بنقط عديدة A_1 و A_2 و ... و A_n غير واقعة جميعها على استقامة واحدة (شكل ٢٤) .

نعلم أن ردود فعل المستوي في الجسم ، ولتكن R_1 و R_2 و ... و R_n ، هي قوى عمودية على المستوي ومتحدة في الاتجاه (متجهة جميعها نحو الجسم) . فيمكن إذن رد هذه القوى إلى قوة وحيدة R عمودية على المستوي ومتحدة في الاتجاه مع مركباتها ومطبقة في نقطة كائنة داخل مضلع الاستناد (وهو مضلع محدب تقع على سطحه وعلى رؤوسه نقط الاستناد) .

فلكي يتوازن الجسم يلزم أن توازن ^(١) القوى المفروضة ودود فعل المستوي أو حاصلة هذه الردود (وهي R) . فيلزم إذن أن يكون للقوى المفروضة حاصلة عمودية على المستوي ومتجهة بحيث تضغط الجسم على المستوي ومطبقة في نقطة من المستوي كائنة داخل مضلع الاستناد .
إن هذه الشروط اللازمة للتوازن هي أيضاً كافية .



(شكل ٢٤)

بالحقيقة ، إذا تحققت هذه الشروط ، أمكن تفريق حاصلة القوى المفروضة إلى ثلاث قوى عمودية على المستوي ومطبقة في ثلاث نقط من نقط الاستناد .

(١) أي أن تصبح مجموعة القوى المفروضة وردود الفعل متوازنة (مكائنة للصفر) .

هذه القوى لا تعمل على تحريك الجسم . أما تأثيرها فيتألف من مقاومة المستوي .

الطريقة العملية : انفرض مجموعة محاور احداثية $oxyz$ (قائمة ومباشرة) .
نختار هذه المجموعة بحيث ينطبق المستوي الثابت على المستوي xoy ويقع المحور oz والجسم بطرف واحد بالنسبة للمستوي الثابت .
ليكن a_i و b_i فاصلة وترتيب نقطة الاستناد A_i . فاحداثيات A_i تكون $(a_i, b_i, 0)$.

نرى أن مسقط رد الفعل R_i (في النقطة A_i) على المحور oz هو موجب (بوجه عام) ويساوي قياس رد الفعل R_i .

فإذا رمزنا بـ $F(F_x, F_y, F_z)$ لحاصلة القوى المفروضة المؤثرة في الجسم وبـ $G(L, M, N)$ للعزم الحاصل في O لهذه القوى ، لكانت معادلات التوازن :

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z + \sum R_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} L + \sum b_i R_i = 0 \\ M - \sum a_i R_i = 0 \\ N = 0 \end{cases}$$

نرى في هذه المجموعة أن المعادلات : الاولى والثانية والسادسة (وهي لا تحوي ردود الفعل) تعين الشروط اللازمة للتوازن .

ويستدل من هذه المعادلات :

(١) أن لمجموعة القوى المفروضة حاصلة .

بالحقيقة ، نلاحظ أن :

$$L \cdot F_x + M \cdot F_y + N \cdot F_z = 0$$

$$G \cdot F = 0 \quad \text{أو}$$

كما نلاحظ ، بوجه عام ، أن :

$$F_z \neq 0$$

أو $(F_x = F_y = 0 \text{ لأن } F \neq 0)$

إذ لو انعدم F_z لانعدمت جميع ردود الفعل (اعتماداً على المعادلة الثالثة ، لأن هذه الردود إما أن تكون موجبة أو مساوية للصفر) ، وانعدمت بالتالي المقادير :

$$F_z = 0 \quad L = 0 \quad M = 0$$

كما انعدم أيضاً :

$$F = 0 \quad G = 0$$

ففي هذه الحالة الخاصة تتوازن القوى المفروضة المؤثرة في الجسم .

أما في الحالة العامة ، حين يكون :

$$F \neq 0 \quad \text{أو} \quad F_z \neq 0$$

يكون لمجموعة القوى المفروضة حاصلة .

(٢) أن هذه الحاصلة عمودية على المستوي xoy (وهو مستوي الاستناد)

$$\text{لأن } F_x = 0 \quad F_y = 0$$

(٣) أن الحاصلة تتجه نحو المستوي xoy (فهي تتجه بحيث تطبق الجسم على المستوي الثابت) ، لأن :

$$F_z < 0$$

كما يتضح ذلك من المعادلة الثالثة .

(٤) أن الحاصلة تلاقي المستوي xoy بنقطة كائنة داخل مضع الاستناد ، كما يبدو ذلك من المعادلتين : الرابعة والخامسة .

أما ردود فعل المستوي في الجسم فيجب أن تحقق المعادلات :

$$\begin{cases} F_z + \sum R_i = 0 \\ L + \sum b_i R_i = 0 \\ M - \sum a_i R_i = 0 \end{cases}$$

ونلاحظ أن هذه الردود تتعين تماماً حين لا يكون للجسم أكثر من ثلاث
نقط استناد .

ففي الحالة الخاصة : حين يستند الجسم إلى المستوي الثابت بثلاث نقط
استناد A_1 و A_2 و A_3 مثلاً ، فالمعادلات الأخيرة تعين ردود الفعل R_1
و R_2 و R_3 في هذه النقط . وتكتب هذه المعادلات ، في هذه الحالة ،
كما يلي :

$$\begin{cases} F_z + R_1 + R_2 + R_3 = 0 \\ L + b_1 R_1 + b_2 R_2 + b_3 R_3 = 0 \\ M - (a_1 R_1 + a_2 R_2 + a_3 R_3) = 0 \end{cases}$$

أما في الحالة العامة (أي حين يستند الجسم إلى المستوي الثابت بأكثر من
ثلاث نقط) فإنه لا يمكن تعيين ردود الفعل إلا بالاعتماد على المرونة .

مسألة : لنأت بمثال نوضح فيه كيف يتم تعيين ردود الفعل اعتماداً على المرونة .
والمثال هو منصدة مستطيلة الشكل تستند بأربع قوائم إلى مستو أفقي
بدون احتكاك .

لتكن A_1 و A_2 و A_3 و A_4 نقط الاستناد . لنرمز بـ P لحاصلة أثقال
المنصدة والاجسام التي عليها ، وبـ A للنقطة التي تلاقي بها هذه الحاصلة المنصدة .
لنفرض مجموعة محاور احداثية (قائمة ومباشرة) نختارها بحيث يقع مبدؤها
في مركز مستطيل الاستناد ، وينطبق محوران منها على محوري المستطيل :
المحوران ox و oy مثلاً يوازن الشعاعين $A_2 A_1$ و $A_4 A_1$ ويتحددان معهما
في الاتجاه .

فإذا رمزنا بـ $2a$ و $2b$ لطولي الضلعين $A_4 A_1$ و $A_2 A_1$ على الترتيب
لكانت احداثيات رؤوس مضلع الاستناد :

$$A_1 (a, b) \text{ و } A_2 (-a, b) \text{ و } A_3 (-a, -b) \text{ و } A_4 (a, -b)$$

وإذا رمزنا بـ (x, y) لاجداثي A وبـ R_1 و R_2 و R_3 و R_4 لردود فعل المستوي في النقط A_1 و A_2 و A_3 و A_4 لا يمكن كتابة المعادلات العامة للتوازن التي ترد الى المعادلات :

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - P = 0 \\ b R_1 + b R_2 - b R_3 - b R_4 - P_y = 0 \\ -a R_1 + a R_2 + a R_3 - a R_4 + P_x = 0 \end{cases}$$

ولإضافة شرط جديد ، نقبل بأن الارض ليست تامة الصلابة (مرنة) ، وأن نقط الاستناد تنتقل ، وأن الازاحات الناتجة (وهي صغيرة جداً) متناسبة مع القوى المؤثرة فيها .

فاذا رمزنا بـ ε_1 و ε_2 و ε_3 و ε_4 لازاحات نقط الاستناد داخل الارض ، لكان :

$$\frac{\varepsilon_1}{R_1} = \frac{\varepsilon_2}{R_2} = \frac{\varepsilon_3}{R_3} = \frac{\varepsilon_4}{R_4}$$

وإذا لاحظنا أن مركز المستطيل o ينتقل الى موضع o' ، هو مركز المستطيل في وضعه الجديد ، لكان :

$$oo' = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}$$

$$oo' = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{2}$$

و

وكان بالتالي :

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_3 = \varepsilon_2 + \varepsilon_4$$

واعتمادا على سلسلة النسب السابقة نجد :

$$R_1 + R_3 = R_2 + R_4$$

فإذا أضفنا هذه العلاقة إلى معادلات التوازن لحصلنا على مجموعة المعادلات التي تعين ردود الفعل .

وبعد حل هذه المجموعة نجد :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1 = \frac{P}{4} \left(1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \\ R_2 = \frac{P}{4} \left(1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \\ R_3 = \frac{P}{4} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \\ R_4 = \frac{P}{4} \left(1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \end{array} \right.$$

ولما كانت ردود فعل الأرض في نقط الاستناد موجبة ، فيجب إذن أن تتحقق المتراجحات الآتية بأن واحد :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{x}{a} + \frac{y}{b} > 0 \\ 1 - \frac{x}{a} + \frac{y}{b} > 0 \\ 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} > 0 \\ 1 + \frac{x}{a} - \frac{y}{b} > 0 \end{array} \right.$$

وهذا لا يتم إلا إذا وقعت النقطة $A(x, y)$ داخل المعين الذي رؤوسه منتصفات أضلاع مستطيل الاستناد .

وإن وجدت A خارج هذا المعين ، وفي النقطة التي تقع فيها A_1 مثلاً ، فإن رد الفعل R_3 في النقطة A_3 يعدو سالباً ، بينما تكون ردود الفعل في بقية نقط الاستناد موجبة . ولما كان هذا الأمر مستحيلاً ، فإننا نقبل بأن يكون تأثير المنضدة في نقطة الاستناد A_3 معدوماً ، وأن المنضدة تستند إلى الأرض كما لو كانت قائمة على ثلاثة أرجل فحسب . ففي هذه الحالة ، نعين ردود الفعل

R_1 و R_2 و R_4 من معادلات التوازن الثلاث السابقة بعد أن نفرض أن قيمة R_3 معدومة .

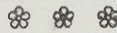
١٠٣ - توازن مجموعة أجسام : لكي نعين شروط توازن مجموعة مؤلفة من عدة أجسام صلبة خاضعة لصلات متبادلة ، يكفي أن نلاحظ أن كل جسم من المجموعة هو متوازن تحت تأثير :

(١) القوى المطبقة مباشرة في الجسم .

(٢) ردود الفعل الناشئة من تأثير بقية الأجسام فيه .

فنكتب شروط توازن كل من هذه الأجسام .

وندرك بسهولة أن قوى الصلة المتبادلة بين الأجسام تخضع لمبدأ تساوي الفعل ورد الفعل .



نماذج

١ - A o قضيب متجانس (ثقله P وطوله 2l) يستطيع الدوران في مستو شاقولي حول نهايته المثبتة o . تربط نهايته A بخيط لا ثقل له (يهمل ثقله) . يمر الخيط بحز بكرة صغيرة B كائنة في المستوي الشاقولي للدوران وفي موضع من أفق النقطة o يبعد عن o بقدر 2l . يعلق في نهاية الخيط ثقل Q .

عين الوضع التوازني للقضيب .

٢ - قرص دائري متجانس (ثقله P ومركزه C) يستطيع الدوران في مستو شاقولي حول نقطة ثابتة o من محيطه . نفرض خيطاً لا ثقل له (يهمل ثقله) تثبت إحدى نهايتيه في o وتربط نهايته الثانية A بثقل Q ، فيتدلى الخيط في A بعد أن يمر على محز في محيط القرص .

عين الزاوية الكائنة بين نصف القطر CO والأفق والموافقة للوضع التوازني للقضيب .

تطبيق : احسب هذه الزاوية بفرض أن :

$$Q = P$$

٣ - ABCD صفيحة (متجانسة وثقيلة) مستطيلة الشكل ، ضلعها الصغيرة AD وضلعها الكبيرة AB تساوي a . عين على ضلعها العليا AB نقطة H بحيث إذا اقتطع منها المثلث CBH ثم علقت الصفيحة AHCD من النقطة H كانت الضلع CD أفقية .

٤ - AOBCEDEF صفيحة متجانسة ثقيلة مؤلفة من سدس ABCDEF

مركزه O قد اقتطع منه المثلث OAB . فإذا علقت هذه الصحيفة من الرأس A وتوازنت تحت تأثير ثقلها ، فأية ضلع من الصحيفة نلأقي شاقول نقطة A ، وفي أية نسبة تكون هذه الضلع مقسومة بهذا الشاقول ؟

٥ - لدينا قطاع دائري AOB لا ثقل له (يهمل ثقله) يستطيع الدوران حول محور أفقي ثابت عمودي على مستوي القطاع π ومارت من مركزه O . يؤثر في القطاع قوتان متوازيتان a و b واقعتان في المستوي π ومطبقتان في A و B على الترتيب .

عين شروط توازن القطاع .

٦ - ABC صحيفة متجانسة (ثقلها P) بشكل مثلث متساوي الأضلاع تستطيع الدوران حول قاعدتها AB الأفقية . يربط في رأس الصحيفة C خيط يمر (بدون احتكاك) بمحز بكرة صغيرة D . يعلق في نهاية الخيط ثقل Q . فإذا رمزنا بـ O لمنتصف AB وفرضنا أن OD أفقي وعمودي على AB ويساوي OC ، فالمطلوب تعيين الزاوية θ السكائنة بين OC و OD والموافقة للوضع التوازن في الصحيفة . ناقش .

تطبيق عددي : احسب الزاوية θ في الحالتين :

$$P = 3Q \quad \text{و} \quad P = 5Q$$

٧ - $ABCD$ صحيفة متجانسة ثقيلة رباعية الشكل وضعت في مستو شاقولي بحيث تستند بضلعها AB إلى مستو أفقي بدون احتكاك . فإذا علم أن زاوية قائمة وأن B قائمة وأن :

$$AB = BC = l \quad CD = DA = k$$

(l و k طولان مفروضان) ، فالمطلوب تعيين شروط توازن الصحيفة .

تطبيق عددي : نفرض أن :

$$2k = \sqrt{6l}$$

برهن أن الصفيحة متوازنة .

٨ - $\triangle ABC$ ثلاثية متماسكة مؤلفة من ثلاثة قضبان OA و OB و OC متساوية وغير ثقيلة (يهمل ثقلها) . تستند النهايات A و B و C إلى مستو أفقي ثابت .

(١) نفرض أن الثلاثية تستند بدون احتكاك . فإذا وضعنا في O ثقلاً معلوماً P ، فالمطلوب إثبات أن الشرط اللازم والكافي للتوازن هو أن يكون المثلث ABC حاد الزوايا .

برهن أن ردود فعل الأرض في نقط الاستناد A و B و C هي متناسبة مع جيوب الزوايا $2A$ و $2B$ و $2C$ على الترتيب .

(٢) نفرض أن الاستناد يقوم باحتكاك أمثاله μ . فإذا طبقنا في O قوة ما F متجهة نحو داخل الثلاثية ، فالمطلوب تعيين شروط التوازن .

٩ - ox محور أفقي و oy محور شاقولي صاعد . مثلث متساوي الاضلاع ($OA = 1$) وضع شاقولياً بحيث يستند بضلعه OA على ox .

لنفرض صفيحة متجانسة بشكل شبه منحرف نشأت من المثلث OAB بعد أن اقتطع منه المثلث المتساوي الاضلاع $O'A'B'$ الذي طول ضلعه l .

(١) احسب إحداثي مركز عطالة الصفيحة .

(٢) هل تتوازن الصفيحة مهما كانت قيمة l .

الفصل الرابع

مبدأ العمل الافتراضي

العمل الافتراضي

١٠٤ — أعمال القوى المؤثرة : لنفرض مجموعة مادية M_1 و M_2 و ... و M_n تؤثر فيها القوى F_1 و F_2 و ... و F_n على الترتيب .
فقد رأينا^(١) أن العمل الافتراضي للقوة F_i (المطبقة في النقطة M_i)
الموافق للانتقال الافتراضي δM_i هو :

$$\delta \mathcal{E}_i = F_i \cdot \delta M_i$$

مجموع الأعمال الافتراضية للقوى المؤثرة في النقط المفروضة هو :

$$\delta \mathcal{E} = \sum \delta \mathcal{E}_i = \sum F_i \cdot \delta M_i$$

هذا ونعلم أن القوى المؤثرة في مجموعة مادية تتألف من قوى داخلية وقوى خارجية . فالأعمال الافتراضية الناشئة عن القوى المؤثرة تتألف إذن من الأعمال الافتراضية للقوى الداخلية والقوى الخارجية :

$$\delta \mathcal{E} = \delta \mathcal{E}_E + \delta \mathcal{E}_I$$

لنبحث في عمل القوى الداخلية . لقد رأينا أن القوى الداخلية هي قوى متعاكسة مباشرة فيما بينها . فإذا أخذنا نقطتين M_1 و M_2 من المجموعة ، فالنقطة M_1 تؤثر في M_2 بقوة ، ولنرمز لها بـ f_2 ، والنقطة M_2 تؤثر في M_1

(١) الجزء الأول من كتاب الميكانيك (بند ٢٥٩ ، ص ٢٢١) .

بقوة f_1 تعاكس f_2 مباشرة (حسب مبدأ تساوي الفعل ورد الفاعل) :

$$f_1 = - f_2$$

فمجموع العملين الافتراضيين لهاتين القوتين هو :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_{1,2} &= f_1 \delta M_1 + f_2 \cdot \delta M_2 = f_2 (\delta M_2 - \delta M_1) \\ &= f_2 \cdot \delta M_1 M_2 \end{aligned}$$

وإذا فرضنا محوراً يوازي الشعاع $M_1 M_2$ ويتحد معه في الاتجاه ، ورمزنا بـ u لشعاع واحدة هذا المحور وبـ f_1 و f_2 و r للقيم الجبرية للأشعة f_1 و f_2 و $M_1 M_2$ الموازية للمحور لكان :

$$f_2 = f_2 u$$

$$M_1 M_2 = r \cdot u \quad \text{و}$$

$$\delta M_1 M_2 = \delta r \cdot u + r \cdot \delta u \quad \text{و}$$

$$f_2 \cdot \delta M_1 M_2 = f_2 \cdot u (\delta r u + r \delta u) \quad \text{و}$$

وكان بالتالي :

$$\delta \mathcal{E}_{1,2} = f_2 \delta r$$

ونرى أن هذا العمل يصبح صفراً حين يكون البعد بين النقطتين M_1 و M_2 ثابتاً .

ففي المجموعة المتماكة مثلاً يكون العمل الافتراضي للقوى الداخلية مساوياً للصفر .

وفي المجموعة المؤلفة من أجسام مرتبطة مع بعضها مفصلياً يكون العمل الافتراضي لقوى الرباط (القوى الناشئة عن التأثير المتبادل في المفاصل ، وهي قوى داخلية) مساوياً للصفر .

ملاحظة : حين تؤثر كل من النقطتين M_1 و M_2 في الأخرى بقوة ،

وتكون القوتان الناشئتان f_1 و f_2 متعاكستين مباشرة ، فعندها نسمي مجموعة القوتين f_1 و f_2 بالتأثير المتبادل بين النقطتين .

هذا وقد اصطلح على أن يسمى القياس المشترك للقوتين f_1 و f_2 مسبقاً بإشارة + أو - (حسبما تكون النقطتان متدافعتين أو متجاذبتين) بالقيمة الجبرية للتأثير المتبادل .

فإذا رمزنا بـ r البعد بين النقطتين M_1 و M_2 ، وبـ f للقيمة الجبرية للتأثير المتبادل بينهما ، فالعمل الافتراضي للقوتين f_1 و f_2 (ويدعى بالعمل الافتراضي للتأثير المتبادل f) ، وهو كما رأينا :

$$\delta \mathcal{W}_{1,2} = f_2 \cdot \delta M_1 M_2$$

يكتب بالشكل :

$$\delta \mathcal{W}_{1,2} = f \cdot \delta r$$

١٠٥ — عمل قوى الرباط : لنفرض مجموعة نقط مادية خاضعة لصلات

(بدون احتكاك) يمكن التعبير عنها بعلاقات تساوي .

لنبحث في الأعمال الافتراضية لقوى الرباط من أجل انتقالات افتراضية موافقة لهذه الصلات .

نميز نوعين من الأربطة أو الصلات :

(١) صلات بين أجسام من المجموعة المفروضة وأجسام خارجة عن المجموعة

نسميها بالخواجز .

(٢) صلات بين أجسام المجموعة بعضها مع بعض .

لنأت بأمثلة نوضح فيها هذه الصلات ، ثم نبهن في كل منها أن مجموع

الأعمال الافتراضية لقوى الرباط (من أجل انتقالات افتراضية موافقة

للصلات) مساوي للصفر .

النوع الأول : ١ - أبسط مثال لهذا النوع هو حالة نقطة مادية تستطيع التنقل بدون احتكاك على سطح ثابت أو سلك ثابت .
نفرض نقطة مادية M تستطيع الحركة على سطح ثابت S معين بالمعادلة :

$$f(x, y, z) = 0$$

فالمجموعة هنا هو النقطة M والحاجز هو السطح الثابت S .
فهناك صلة يمكن التعبير عنها بالمعادلة السابقة . أما الانتقالات الموافقة لهذه الصلة فهي انتقالات النقطة على السطح .
وبما أن الصلة بدون احتكاك فقوة الرباط (وهي في هذا المثال رد فعل السطح في النقطة) تكون عمودية على السطح في تلك النقطة ، وتكون بالتالي عمودية على أي انتقال افتراضي على السطح .
فالعمل الافتراضي لقوة الرباط يساوي إذن الصفر .
هذا وإذا فرضنا أن النقطة المادية M تستطيع الحركة على منحنى ثابت C معين بالمعادلتين :

$$f_1(x, y, z) = 0$$

$$f_2(x, y, z) = 0$$

فالمجموعة في هذه الحالة أيضاً تكون هي النقطة M ، والحاجز هو السلك المنحني .
أما الصلة فيمكن التعبير عنها بالمعادلتين السابقتين .
نرى أن الصلة بدون احتكاك ، فرد الفعل عمودي على السلك ، وعمودي بالتالي على أي انتقال افتراضي على السلك .

فالعمل الافتراضي لقوة الرباط يساوي في هذه الحالة أيضاً الصفر .

٢ - حالة جسم مقيد بنقطة ثابتة أو بمحور ثابت .

نفرض جسماً S يستطيع الدوران حول نقطة ثابتة O .

في هذه الحالة ، المجموعة هي الجسم والحاجز هو النقطة الثابتة O . والانتقال الافتراضي الموافق للصلة هو دوران حول O .

فالمعمل الافتراضي لقوة الرباط (وهي رد فعل النقطة الثابتة) يساوي الصفر ، لأن نقطة تطبيق هذه القوة تبقى ثابتة حين يدور الجسم .
هذا وإذا فرضنا جسماً يستطيع الدوران حول محور ثابت ، فالحاجز في هذه الحالة هو المحور الثابت ، والانتقال الافتراضي الموافق للصلة هو الدوران حول المحور الثابت . فالمعمل الافتراضي لقوى الرباط (وهي ردود فعل المحور الثابت) تساوي الصفر (لأن نقط تطبيق هذه القوى تبقى ثابتة حين يدور الجسم) .

٣ - حالة جسم يستطيع الحركة بحيث يبقى سطحه ملامساً لسطح حاجز ثابت .

لنفرض جسماً من المجموعة المادية المفروضة يستطيع الحركة بحيث يبقى سطحه S ملامساً لسطح حاجز ثابت Σ .

لنرمز بـ I لنقطة التماس ، وبـ A و α لنقطتين من السطحين S و Σ على الترتيب انطبقتا في لحظة ما t على نقطة التماس I .

فقوى الرباط في هذه الحالة هي رد فعل الحاجز في الجسم ، ولنرمز إليه بـ R .

وبما أن رد الفعل R هو قوة مطبقة في النقطة A ، فالمعمل الافتراضي لقوى الرباط ، ولنرمز له بـ $\delta \mathcal{W}_L$ ، يكون :

$$\delta \mathcal{W}_L = R \cdot \delta A$$

$$\delta \mathcal{W}_L = R \cdot V(A) \cdot \delta t \quad \text{أو}$$

بفرض أن $V(A)$ هو السرعة الافتراضية لنقطة A في اللحظة المفروضة t .
وقد رأينا (بند ٦٥ ، ص ١٠١) أن سرعة A في اللحظة t هي سرعة انزلاق S بالنسبة لـ Σ ، وأن هذه السرعة كائنة في المستوي π المماس في A للسطحين S و Σ .

فإذا رمزنا بـ w لسرعة انزلاق S بالنسبة لـ Σ لكان :

$$\delta \mathcal{E}_L = w \cdot \delta t$$

وهنا نميز حالتين حسب نوع الحركة $(\frac{S}{\Sigma})$:

(١) فإن كانت الحركة $(\frac{S}{\Sigma})$ في اللحظة t انزلاقاً بدون احتكاك ،
كان رد الفعل R عمودياً على المستوي المماس π في نقطة التماس I للسطحين
 S و Σ ، وكان بالتالي :

$$R \cdot w = 0$$

$$\delta \mathcal{E}_L = 0$$

و

(٢) وإن كانت الحركة $(\frac{S}{\Sigma})$ في اللحظة t هي حركة تدحرج وفتل
بدون انزلاق ، فإن رد الفعل R لا يكون في هذه الحالة عمودياً على المستوي
المماس π (لأن الصلة القائمة بين S و Σ تعمل على مقاومة الانزلاق) .
وإذا لاحظنا أن الانتقال الافتراضي الموافق للصلة هو تدحرج وفتل بدون
انزلاق ، لأدركنا أن :

$$w = 0$$

$$\delta \mathcal{E}_L = 0$$

وأن

هذا وإن أبسط مثال عملي يوضح هذه الحركة هو حركة عجلة مسننة
(وضع على محيطها أسنان صغيرة) كائنة في مستو ثابت تتدحرج على عجلة
مسننة ثانية كائنة في المستوي الثابت ذاته .

النوع الثاني : ١ - أبسط مثال لهذا النوع هو حالة جسامين متحركين
مرتبطين مفصلياً بنقطة .

لنفرض مجموعة مؤلفة من جسامين S_1 و S_2 مرتبطين مفصلياً بنقطة I .

فقوى الرباط في هذه المجموعة هي القوى الناشئة عن التأثير المتبادل في I
بين الجسامين المفروضين .

فإذا رمزنا بـ R_1 للقوة الناشئة من تأثير S_2 في S_1 وبـ R_2 لرد فعل S_1 في S_2 ، فإننا نعلم أن هاتين القوتين متعاكستان مباشرة :

$$R_2 = - R_1$$

وإذا لاحظنا أن نقطة تأثير إحدى القوتين تنطبق على نقطة تأثير القوة الثانية (من أجل أي انتقال افتراضي موافق للصلة) لكان العمل الافتراضي لقوى الرباط ، وهو مجموع العملين الافتراضيين لهاتين القوتين هو :

$$\delta \mathcal{W}_L = R_1 \cdot \delta I + R_2 \cdot \delta I = (R_1 + R_2) \cdot \delta I$$

فالعمل الافتراضي لقوى الرباط يساوي إذن الصفر .

وهذا ما وجدناه سابقاً (بند ١٠٤ ، ص ١٩٩) . فقوى الرباط في هذه الحالة هي قوى داخلية بالنسبة للمجموعة المؤلفة من الجسمين S_1 و S_2 .

٢ - حالة جسمين متحركين سطح أحدهما يلامس سطح الآخر بدون احتكاك .

لنفرض جسمين S و S_1 من المجموعة يستطيع كل منهما أن يتحرك بحيث يبقى سطحه ملامساً لسطح الآخر بدون احتكاك .

لنرمز بـ I لنقطة التماس وبـ A و A_1 لنقطتين من السطحين S و S_1 على الترتيب انطبقتا في لحظة ما t على نقطة التماس I .

فقوى الرباط في هذه الحالة هي القوى الناشئة من التأثير المتبادل في I بين الجسمين المفروضين . فإذا رمزنا بـ R للقوة الناشئة من تأثير S_1 في S وبـ R_1 لرد فعل S في S_1 ، لكانت قوى الرباط هي القوتين R و R_1 المطبقتين في النقطتين A و A_1 على الترتيب .

فالعمل الافتراضي لقوى الرباط ، وهو مجموع العملين الافتراضيين لردّي الفعل R و R_1 ، هو :

$$\delta \mathcal{W}_L = R \cdot \delta A + R_1 \cdot \delta A_1$$

ونعلم أن ردّي الفعل متعاكسان مباشرة :

$$R_1 = -R$$

فيكون إذن :

$$\delta \mathcal{E}_L = R (\delta A - \delta A_1)$$

$$\delta \mathcal{E}_L = R [V(A) - V(A_1)] \delta t \quad \text{أو}$$

لنفرض أن $V(A)$ و $V(A_1)$ هما سرعتان الافتراضيتان لنقطتي A و A_1 في اللحظة المفروضة t .

وقد رأينا (بند ٦٥ ، ص ١٠١) أن سرعة A في الحركة $(\frac{S}{S_1})$ هي سرعة انزلاق S بالنسبة لـ S_1 ، وأن هذه السرعة كائنة في المستوي المماس في A للسطحين S و S_1 في اللحظة t . وإذا لاحظنا أن هذه السرعة هي :

$$w = V(A) - V(A_1)$$

لكان العمل الافتراضي لقوى الرباط هو :

$$\delta \mathcal{E}_L = R \cdot w \cdot dt$$

وهنا نغير حالتين حسب نوع الحركة $(\frac{S}{S_1})$:

(١) فإن كانت الحركة $(\frac{S}{S_1})$ في اللحظة t هي حركة انزلاق بدون احتكاك ، كان رد الفعل R عمودياً على المستوي المماس في A (أو I) للسطحين S و S_1 ، وكان بالتالي :

$$R \cdot w = 0$$

$$\delta \mathcal{E}_L = 0$$

و

(٢) وإن كانت الحركة $(\frac{S}{S_1})$ في اللحظة t هي حركة تدحرج وفتل بدون انزلاق ، فإن رد الفعل R لا يكون في هذه الحالة عمودياً على المستوي المماس المشترك للسطحين .

وإذا لاحظنا أن الانتقال الافتراضي الموافق للصلة هو تدحرج وفتل بدون انزلاق لأدركنا أن :

$$w = 0$$

$$\delta \mathcal{L} = 0$$

وأن

ملاحظة : لقد رأينا حين بحثنا في العمل الافتراضي للقوى الناشئة عن الصلة القائمة بين جسمين متلامسين (بدون احتكاك) أن العمل الافتراضي لقوى الرباط يساوي الصفر في الحالتين التاليتين :

- (١) إذا كان الجسمان من المجموعة .
- (٢) إذا كان أحد الجسمين من المجموعة وكان الآخر حاجزاً ثابتاً .

وهنا نلاحظ أن العمل الجزئي الحقيقي لقوى الرباط لا يساوي الصفر حين يكون الحاجز متحركاً . فقوة الرباط في هذه الحالة ، وهي رد فعل الحاجز في الجسم ، لا تكون عمودية ، بوجه عام ، على سرعة نقطة تطبيق هذه القوة . فإذا رمزنا بـ R لرد فعل الحاجز في الجسم ، وبـ A لنقطة تطبيق هذه القوة في اللحظة t (وهي نقطة من الجسم تقع على نقطة التماس في اللحظة المفروضة t) لكان العمل الجزئي الحقيقي لقوة الرباط :

$$d \mathcal{L} = R \cdot dA$$

$$d \mathcal{L} = R \cdot V(A) dt \quad \text{أو}$$

بفرض أن $V(A)$ هي السرعة الحقيقية لنقطة A (وهي لا تساوي سرعة انزلاق الجسم بالنسبة للحاجز) .

هذا وإذا لاحظنا :

- (١) أن الحواجز المتحركة تعتبر ثابتة في الانتقال الافتراضي للمجموعة .
- (٢) وأن الانتقال الجزئي الحقيقي للمجموعة في لحظة مفروضة t لا

يكون بوجه عام انتقالاً افتراضياً إلا إذا كانت الحواجز ثابتة أو اعتبرت كأنها ثابتة في الموضع الموافق للحظة ١ .

أو نقول بعبارة أخرى : إن الانتقال الجزئي الحقيقي للمجموعة لا يكون انتقالاً افتراضياً إلا إذا كانت الصلات مستقلة عن الزمن .

لأدركنا أن العمل الافتراضي لقوى الرباط من أجل انتقال افتراضي موافق للصلة يساوي الصفر سواء كانت الصلات قائمة بين أجسام المجموعة بعضها مع بعض أو بين أجسام منها وحواجز ثابتة أو متحركة . ويشترط في جميع هذه الأحوال أن تكون الصلات بدون احتكاك (أو أن تكون سرعة الانزلاق معدومة) .

١٠٦ — مبدأ العمل الافتراضي : نفرض مجموعة نقط مادية خاضعة لارتبطة ثنائية الجانب وبدون احتكاك ومستقلة عن الزمن .

فالشرط اللازم والسكافي لتوازن هذه المجموعة في وضع ما ، ومن أجل سرع معدومة لنقط المجموعة ، هو أن يكون العمل الافتراضي للقوى المفروضة ، من أجل انتقال افتراضي للمجموعة موافق للصلة (اعتباراً من الوضع المفروض) ، مساوياً للصفر .

لنؤم الشرط : لنفرض أن المجموعة متوازنة ، ولنبرهن أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة المطبقة في نقط المجموعة يساوي الصفر .

بالحقيقة ، عندما تتوازن المجموعة في وضع معين ، تغدو أية نقطة M من هذه المجموعة متوازنة تحت تأثير القوى المؤثرة في هذه النقطة (من قوى مفروضة مطبقة في النقطة ، ولتكن F حاصلتها ، وقوى مؤثرة في النقطة نشأت عن الرباط ، ولتكن R حاصلتها) . وتكون حاصلة هذه القوى مساوية للصفر :

$$F + R = 0$$

فمن أجل أي انتقال افتراضي للنقطة (اعتباراً من الوضع التوازني المفروض) يكون العمل الافتراضي لجميع القوى المؤثرة في هذه النقطة مساوياً للصفر .
ومن أجل أي انتقال افتراضي للمجموعة (سواء أكان هذا الانتقال موافقاً للصلة أم لا) يغدو العمل الافتراضي لجميع القوى المؤثرة في نقط المجموعة مساوياً للصفر :

$$\sum (\mathbf{F} + \mathbf{R}) \delta \mathbf{M} = 0$$

$$\delta \mathfrak{E}_D + \delta \mathfrak{E}_L = 0$$

أو

بفرض أن $\delta \mathfrak{E}_D$ هو العمل الافتراضي للقوى المفروضة المطبقة في نقط المجموعة ، و $\delta \mathfrak{E}_L$ العمل الافتراضي لقوى الرباط .
وقد رأينا أن العمل الافتراضي لقوى الرباط (بند ١٠٥) ، من أجل أي انتقال افتراضي للمجموعة موافق للصلة ، يساوي الصفر :

$$\delta \mathfrak{E}_L = 0$$

فينتج إذن أن :

$$\delta \mathfrak{E}_D = 0$$

فالعمل الافتراضي للقوى المفروضة يساوي إذن الصفر ، وهو المطلوب .
كفاية الشرط : لنفرض أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة من أجل أي انتقال افتراضي للمجموعة موافق للصلة (اعتباراً من وضع معين للمجموعة ومن أجل سرع معدومة لنقط المجموعة في ذلك الموضع) هو مساو للصفر :

$$\delta \mathfrak{E}_D = 0$$

ولنبرهن أن المجموعة المفروضة متوازنة في الوضع المعين المفروض .
بالحقيقة ، لنفرض أن المجموعة هي غير متوازنة . فإذا تركت نقط المجموعة بدون سرع ، فإن هذه النقط تتحرك بتأثير القوى المؤثرة فيها (من قوى مفروضة وقوى ربط) وتكون انتقالات النقط حقيقية .

ونعلم أنه حين تتحرك نقطة من موضع وتكون مرعتها في ذلك الموضع معدومة ، فإن هذه النقطة تتحرك باتجاه حاصلة القوى المؤثرة فيها .

نستخلص من ذلك أن العمل الجزئي الحقيقي للقوى المؤثرة في نقط المجموعة (اعتباراً من الموضع المفروض للمجموعة ، ومن أجل مرجع معدومة لنقط المجموعة) هو موجب :

$$\delta \mathcal{W}_D + \delta \mathcal{W}_L > 0$$

ولما كان العمل الجزئي الحقيقي لقوى الرباط (وهو عمل افتراضي خاص) مساوياً للصفر :

$$\delta \mathcal{W}_L = 0$$

$$\delta \mathcal{W}_D > 0$$

فيكون

وهذا يخالف الفرض . فالمجموعة إذن متوازنة وهو المطلوب .

ملاحظات : ١ - حين بحثنا في عمل قوى الرباط ، أوردنا في أمثلتنا السابقة بعض الصلات البسيطة التي تقوم بين الأجسام . ونرى أن الصلات الكائنة في الآلات هي صلات مركبة من الصلات البسيطة هذه .

فمن اليسير مثلاً أن يكون في نطاق الصلات التي بحثناها الأربطة القائمة بوساطة السلاسل والحلقات .

فإذا فرضنا نقطتين M_1 و M_2 من مجموعة مفروضة ووصلنا بينهما بسلسلة (أو خيط لدن طوله ثابت) ، ثم جعلنا قسماً مشدوداً من السلسلة يستند إلى سطح S (ثابت أو متحرك) بحيث يستطيع الانزلاق على هذا السطح بدون احتكاك ، لرأينا أن هذه الصلة هي تركيب لبعض الصلات الواردة سابقاً . فالحلقات الصغيرة التي تتألف منها السلسلة هي أجسام صلبة ترتبط ببعضها

مفصلياً ، وتستند فئة منها إلى السطح S وتنزلق عليه بدون احتكاك . أما النقطتان M_1 و M_2 ، فقد تكون إحداها مثبتة على السطح S وتكون الثانية متدلية في الفراغ بوساطة بكرة .

فالعلاقات في هذا المثال هي تركيب للعلاقات التي أوردناها سابقاً .

٢ - لقد رأينا في العلاقات البسيطة (أو المركبة) أن العمل الافتراضي لقوى الرباط يساوي الصفر من أجل أي انتقال افتراضي موافق للصلة شريطة أن تكون هذه العلاقات بدون احتكاك .

هذا ونرى أن هنالك حالات ذات طابع أكثر تعقيداً (كتدحرج وفتل ككرة على مستو بدون انزلاق) يكون فيها العمل الافتراضي لقوى الرباط مساوياً للصفر . فيمكن في هذه الحالة اعتبار هذه الصفة كتعريف لفقدان الاحتكاك . فنقول إن العلاقات تقوم بدون احتكاك إذا كان العمل الافتراضي لقوى الرباط من أجل أي انتقال افتراضي مرافق للصلة مساوياً للصفر .

٣ - لقد رأينا أن العمل الجزئي (الحقيقي أو الافتراضي) لقوة F تؤثر في نقطة M من جسم هو :

$$d\mathcal{E} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \cdot dt$$

$$\delta\mathcal{E} = \mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \cdot \delta t$$

و

وهنا يجدر الإشارة إلى أن $d\mathbf{M}$ أو $\delta\mathbf{M}$ هو انتقال النقطة المادية M التي تؤثر فيها القوة في اللحظة المفروضة ، لا انتقال نقطة التطبيق الهندسية للقوة المؤثرة F .

ففي المثال الوارد في عمل قوى الرباط (بند ١٠٥ ، النوع الأول ، الحالة ٣) نرى أن قوة الرباط R (وهي رد فعل الحاجز في الجسم) هي مطبقة في

النقطة A ، وأن الانتقال الجزئي dM أو الانتقال الافتراضي δM الوارد في حساب العمل الجزئي $\delta \mathcal{E}$ أو العمل الافتراضي $\delta \mathcal{W}$ هو الانتقال الموافق للنقطة المادية A من الجسم ، لا الانتقال المرتبط بالموضع الهندسي لنقطة تطبيق رد الفعل R ، أي بنقطة التماس I .

٤ - قد نصادف في مجموعة مادية (متحركة أو ساكنة) أن تكون كتلة إحدى نقط المجموعة مهملة بالنسبة لكتل بقية النقط ، وتعتبر بالتالي هذه الكتلة مساوية للصفر . ففي هذه الحالة تصبح حاصله القوى المؤثرة في هذه النقطة مساوية للصفر .

بالحقيقة ، إذا فرضنا M هذه النقطة ورمزنا بـ m لكتلتها وبـ F لحاصله القوى المؤثرة فيها ، وبـ Γ للتسارع الناشئ من تأثير القوة F ، لكان بين هذه العناصر العلاقة ^(١) :

$$m \Gamma = F$$

وبما أن M هي إحدى نقط المجموعة المتحركة ، فتسارعها محدود . فعندما تكون الكتلة m صغيرة تصبح القوة F صغيرة أيضاً . وعندما تصبح m مساوية للصفر ، تغدو القوة F مساوية أيضاً للصفر .

هذا وإذا تصورنا جملة مادية بدون كتلة ، فإن كتلة كل نقطة من الجملة تكون مساوية للصفر ، وتكون بالتالي القوى المؤثرة في هذه النقطة متوازنة : فمجموعة القوى المؤثرة في الجملة المادية تكون إذن متوازنة .

لنأخذ مثلاً نقطتين ماديتين M_1 و M_2 يربط بينهما قضيب بلا كتلة . فإن هذا القضيب يؤثر في النقطتين بقوتين F_1 و F_2 متعاكستين مباشرة .

(١) الجزء الأول من كتاب الميكانيك .

بالحقيقة ، إذا أثر القضيبي في النقطة M_1 بقوة F_1 ، فإن M_1 تؤثر بالمقابل في القضيبي بقوة $(-F_1)$. وإذا أثر القضيبي في M_2 بقوة F_2 ، فإن M_2 تؤثر في القضيبي بقوة $(-F_2)$. فالقوى المؤثرة في القضيبي تكون إذن $(-F_1)$ و $(-F_2)$.

ولما كانت القوى المؤثرة في القضيبي متوازنة : فالقوتان المؤثرتان $(-F_1)$ و $(-F_2)$ تكونان إذن متعاكستين مباشرة ، وتكون بالتالي القوتان F_1 و F_2 متعاكستين مباشرة وهو المطلوب .

تمارين

١ — يستند قضيب AB بنهايته A إلى مستو أفقي صقيل وبنهايته B إلى مستو شاقولي صقيل .

نفرض خيطاً (لا ثقل له) نشد به القضيب لكي يصبح بحالة توازن : فنربط إحدى نهايتي الخيط بنقطة A ، ونجعل الخيط يمر بعجز بكرة صغيرة مثبتة في المستوي الأفقي ، ثم نترك الخيط يتدلى في الفراغ بعد أن نربط نهايته الثانية بثقل Q .

عين الزاوية φ الكائنة بين القضيب AB والمستوي الأفقي ، إذا علم أن ثقل القضيب هو P ، وطوله l ، وبعد مركز عطالته عن A يساوي a .

٢ — AB قضيب متجانس طوله $2l$ وثقله P . يستند هذا القضيب بنهايته A إلى جدار شاقولي صقيل .

نفرض خيطاً طوله $2a$ (لا ثقل له) نشد به القضيب ليصبح متوازناً : فنربط إحدى نهايتي الخيط بنقطة A ، والنهاية الثانية بنقطة C مثبتة في الجدار .

عين في الوضع التوازي للقضيب :

(١) الزاوية φ الكائنة بين القضيب والجدار .

(٢) الزاوية θ الكائنة بين الخيط والجدار .

٣ — قضيبان متجانسان OA و $O'A'$ يتحركان في مستو شاقولي حول

نهایتيهما الثابتتين O و O' الواقعتين في مستو أفقي واحد .

الطول OA يساوي $2a$ والطول $O'A'$ يساوي $2a'$ والطول OO'

يساوي $2a$ ، وثقل OA يساوي P وثقل $O'A'$ يساوي $2P$.
 يزلق القضيب $O'A'$ (بدون احتكاك) داخل حلقة صغيرة (تعتبر
 نقطة) موضوعة في النهاية A للقضيب oA . فإذا فرضنا القضيبين تحت
 الأفقي oo' ، ورمزنا بـ 2ϕ الزاوية الكائنة بين OA والأفقي oo' ،
 فالمطلوب تعيين ϕ في حالة توازن القضيبين . ناقش .

٤ - $ABCD$ صفيحة بشكل نصف مسدس . القطر AD يساوي
 ٣٠ سم . ثقل كل سنتيمتر مربع من الصفيحة يساوي غراماً واحداً . علقت
 هذه الصفيحة من الرأس B ، ثم ربط في A ثقل قدره ٣٠٠ غ وفي C ثقل
 قدره ١٠٠ غ .

عين الزاوية التي يصنعها BC مع الشاقول عندما تتوازن الصفيحة .

٥ - ABC صفيحة بشكل مثلث متساوي الأضلاع . يعلق في الرأس B
 ثقل Q .

تتحرك هذه الصفيحة في مستو شاقولي حول رأسها الثابت A .
 لتكن θ الزاوية الكائنة بين AB ومحور أفقي (في المستوي الشاقولي) .
 فإذا علم أن ثقل الصفيحة هو P ، فالمطلوب تعيين قياس قوة أفقية F
 إذا أثرت في الرأس C جعلت المثلث متوازناً .



الفصل الخامس

تطبيقات العمل الافتراضي

توازن الآلات البسيطة

١٠٧ — المجموعة ذات الصلوات الثامنة : نقول عن مجموعة نقاط مادية إنها ذات صلوات تامة إذا كان وضع هذه المجموعة يتعين بوسيط واحد : كالجسم المقيد بدوران حول محور ثابت ، أو الجسم المقيد بحركة لولبية حول محور ثابت .

نرى في هذه المجموعات أن كل نقطة ترسم منحنيًا ثابتًا معينًا ، وأن معرفة وضع هذه النقطة على مسارها يكفي لمعرفة وضع جميع نقاط الجسم .

١٠٨ — الآلة البسيطة : هي مجموعة ذات صلوات تامة ، تؤثر فيها قوتان : قوة P نسميها بالقوة المحركة ، وقوة Q نسميها بالقوة المقاومة .
فالآلة البسيطة جهاز تؤثر فيه القوة المحركة P ، فيتغلب الجهاز بفضل هذه القوة على القوة المقاومة Q .

نسمي نسبة القوة المقاومة إلى القوة المحركة بالفائدة الآلية للجهاز ، وتكون هذه النسبة غالباً أكبر من الواحد .

سنعين شروط توازن الآلات البسيطة اعتماداً على النظريات العامة ، ثم بطريقة ثانية تطبيقاً لمبدأ العمل الافتراضي .

هذا ويتم التعيين في الطريقة الثانية باتباع ما يلي :

نعطي الآلة الانتقال الافتراضي الوحيد الموافق للصلة . لنرمز بـ A و B

لنقطتي تطبيق القوتين P و Q . فالعمل الافتراضي للقوى المفروضة المؤثرة في الآلة يكون :

$$\delta \mathcal{W} = P \cdot \delta A + Q \cdot \delta B$$

وإذا أشرنا بـ δp لمسقط الانتقال الافتراضي لنقطة A على P (باعتبار الشعاع P محوراً) وبـ δQ لمسقط الانتقال الافتراضي لنقطة B على Q (باعتبار Q محوراً) لكان :

$$\delta \mathcal{W} = P \cdot \delta p + Q \cdot \delta Q$$

وكان بالتالي شرط التوازن :

$$P \cdot \delta p + Q \cdot \delta Q = 0$$

وإذا رمزنا بـ $V(A)$ و $V(B)$ للسرعتين الافتراضيتين للنقطتين A و B ،
لأمكن كتابة شرط التوازن كما يلي :

$$P \cdot V(A) + Q \cdot V(B) = 0$$

وإذا فرضنا أن V_p و V_Q هما مسقطا السرعتين الافتراضيتين للنقطتين A و B على P و Q لأضحي الشرط السابق :

$$P \cdot V_p + Q \cdot V_Q = 0$$

هذا ونلاحظ أن الفائدة الآلية للجهاز تكون في حالة التوازن :

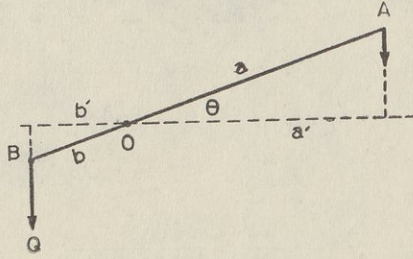
$$\frac{Q}{P} = - \frac{V_p}{V_Q}$$

الرافعة :

١٠٩ — تعريف : الرافعة جسم صلب مقيد بنقطة ثابتة تدعى نقطة الاستناد .

١١٠ — شروط التوازن : لنكن O النقطة الثابتة ، و A نقطة

تأثير القوة المحركة P ، و B نقطة تأثير القوة المقاومة Q (شكل ٢٥) .
لنرمز بـ a' و b' لذراعي الرافعة ، أي لبعدي O عن حاملي القوتين P و Q .



(شكل ٢٥)

لنعين شروط التوازن بتطبيق النظريات العامة أولاً ، ثم بتطبيق مبدأ العمل الافتراضي .

النظريات العامة : نرى أن الشرط اللازم والكافي للتوازن هو أن يكون العزم الحاصل في O للقوتين ^(١) المؤثرتين P و Q صفراً ، أو أن يكون عزماهما حول O متعاكسين مباشرة . ويتم ذلك إذا كانت القوتان P و Q ونقطة الاستناد O في مستو واحد ، ومتجهتين بحيث تعملان على تدوير الجسم حول O في اتجاهين مختلفين ، ومرتبطين عددياً بالعلاقة :

$$a' \cdot P = b' \cdot Q$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{a'}{b'} \quad \text{أو}$$

فالقياسان العدديان للقوتين متناسبان عكسياً مع بعدي هاتين القوتين عن O . هذا ونرى أن هذه الشروط جميعها تنتج أيضاً من توازن ثلاث قوى متلاقية أو متوازنة ، وهي : القوة المحركة P والقوة المقاومة Q وردة فعل نقطة الاستناد R .

(١) يعتبر ثقل الرافعة مهملًا بالنسبة للقوتين P و Q .

العمل الافتراضي : لتكن θ الزاوية السكّانة بين OA والمستوي الأفقي (وهي الوسيط الوحيد الذي يعين وضع الرافعة) . ولنرمز بـ a و b لبعدي O عن A و B .

من أجل انتقال افتراضي موافق للصلة يكون :

$$\begin{cases} \delta P = a \cos \theta \cdot \delta \theta \\ \delta Q = -b \cos \theta \cdot \delta \theta \end{cases}$$

فشرط التوازن يكون إذن :

$$\frac{Q}{P} = - \frac{\delta P}{\delta Q} = \frac{a \cos \theta \cdot \delta \theta}{b \cos \theta \cdot \delta \theta}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \quad \text{أو}$$

أي جداء القوة المحركة في ذراعها يساوي جداء المقاومة في ذراعها .

ملاحظة ١ : نرى أن الفائدة الآلية للرافعة هي :

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b}$$

فتكون قيمتها كبيرة بقدر ما تكون نقطة الاستناد بعيدة عن القوة المحركة وقريبة من المقاومة .

ملاحظة ٢ : إن الحاصلة F للقوتين P و Q تدعى همولة نقطة الاستناد . قياس هذه همولة هو :

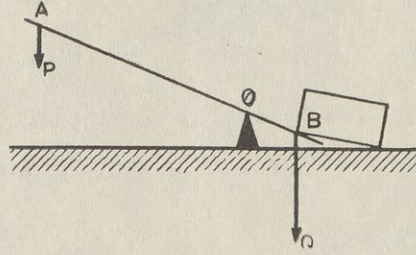
$$F = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2 P \cdot Q \cdot \cos (P, Q)}$$

وتكون في نهايتها العظمى ، وهي $P + Q$ ، عندما تتوازي القوتان (شكل ٢٥) . أما رد الفعل R لنقطة الاستناد O ، فهو قوة تعاكس مباشرة F .

١١١ — أنواع الروافع : نميز ثلاثة أنواع للروافع ، وذلك حسب

توزيع نقط تأثير القوى بالنسبة لبعضها :

(١) ففي النوع الأول ، تقع نقطة الاستناد بين نقطتي تأثير القوة المحركة والمقاومة : كرافعة الأحجار (شكل ٢٦) ، وعائق الميزان ، ودفة السفينة .

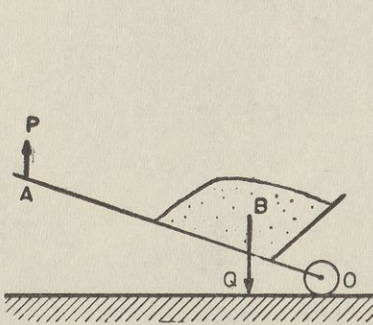


(شكل ٢٦)

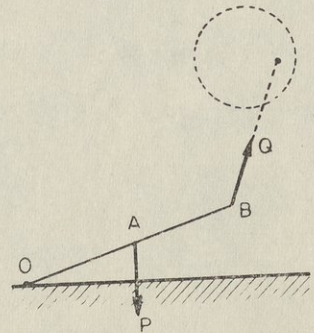
ويعتبر المقص رافعة مضاعفة .

(٢) وفي النوع الثاني ، تقع نقطة تأثير المقاومة بين نقطة تأثير القوة المحركة ونقطة الاستناد : كعربة البستاني (شكل ٢٧) ، وكسارية البندق .
وتعتبر مهرمة التبغ رافعة مضاعفة من هذا النوع .

(٣) وفي النوع الثالث ، تقع نقطة تأثير القوة المحركة بين نقطة تأثير المقاومة ونقطة الاستناد : كمداس شاحذ السكاكين (شكل ٢٨) ، ورجل آلة الخياطة .



(شكل ٢٧)



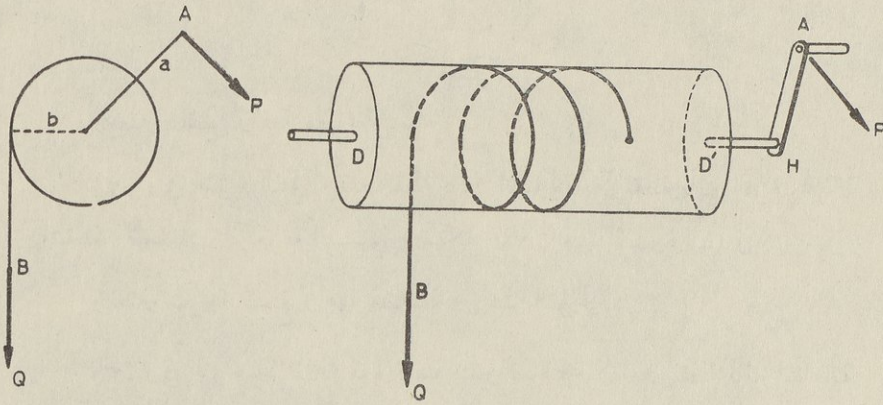
(شكل ٢٨)

ويعتبر الملقط رافعة مضاعفة من هذا النوع .

الملفاف :

١١٢ — تعريف : الملفاف جسم مقيد بمحور ثابت يتألف من أسطوانة تدور حول محور ثابت DD' .

تؤثر المقاومة في نهاية حبل ملفوف على هذه الأسطوانة ، وتؤثر القوة باستعمال مقبض ، كما هو واضح في الشكل (٢٩) .



(شكل ٢٩)

يؤثر في الملفاف ثلاث قوى : ثقله P (نعتبر مركز ثقل الملفاف C نقطة من المحور DD') ، والمقاومة Q ، والقوة المحركة P (وهي عمودية على المستوي القطري DHA) .

١١٣ — شرط التوازن : لنعين شرط التوازن بتطبيق النظريات العامة أولاً ، ثم بتطبيق مبدأ العمل الافتراضي .

النظريات العامة : نرى أن الشرط اللازم والكافي لتوازن الملفاف هو أن يكون العزم الحاصل للقوى المحركة والمقاومة بالنسبة لمحور الدوران DD'

مساوياً للصفر : أي أن يكون عزم القوتين P و Q بالنسبة للمحور DD' متعاكسين .

فإذا رمزنا بـ a و b لبعدي القوتين P و Q عن المحور لكان شرط التوازن :

$$a \cdot P = b \cdot Q$$

$$\text{أو} \quad \frac{Q}{P} = \frac{a}{b}$$

أي أن المقاومة والقوة المحركة متناسبتان عكساً مع بعديهما عن محور الملفاف .

العمل الافتراضي : إذا رمزنا بـ θ للزاوية التي تعين وضع الملفاف أثناء دورانه حول محوره ، لكان :

$$\begin{cases} \delta P = a \cdot \delta \theta \\ \delta Q = - b \cdot \delta \theta \end{cases}$$

وكان بالتالي شرط التوازن :

$$\frac{Q}{D} = \frac{a}{b}$$

$$\text{أو} \quad a \cdot P = b \cdot Q$$

ملاحظة ١ : نرى أن الفائدة الآلية للملفاف هي :

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b}$$

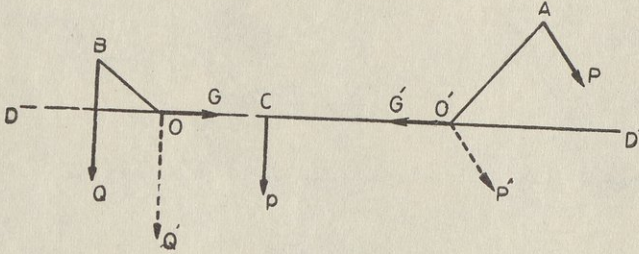
ملاحظة ٢ : لتعيين حمولة نقطتي الاستناد D و D' ، نمر من كل من المقاومة Q والقوة المحركة P مستوياً عمودياً على المحور . ليكن o و o' نقطتي تقاطع هذين المستويين مع المحور (شكل ٣٠) .

- ٢٢٢ -

نرى أن المقاومة Q تكافئ قوة Q' :

$$Q' = Q$$

ومزدوجة عزمها في O ، وهو G ، يساوي عزم Q في O



(شكل ٣٠)

والقوة المحركة P تكافئ قوة P' :

$$P' = P$$

ومزدوجة عزمها في O' ، وهو G' ، يساوي عزم P في O' .

فالقوى المفروضة ، وهي الثقل p والقوة المحركة P والمقاومة Q ، تكافئ إذن :

(١) الثقل p ، وهو قوة مطبقة في نقطة c (مركز الثقل) واقعة على

محور الدوران DD' .

(٢) القوة P' ، وهي مطبقة في نقطة o' واقعة على محور الدوران .

(٣) القوة Q' ، وهي مطبقة في نقطة o واقعة على محور الدوران .

(٤) مزدوجة أولى ، محورها G واقع على محور الدوران .

(٥) مزدوجة ثانية ، محورها G' واقع أيضاً على محور الدوران .

وبما أن العزم الحاصل للقوى المفروضة بالنسبة لمحور الدوران مساوٍ للصفر ،

وأن عزوم القوى p و P' و Q' (المطبقة في نقط واقعة على محور الدوران)

مساوية للصفر ، فالعزم G و G' يكونان إذن متعاكسين مباشرة .
نستخلص من ذلك ، أن القوى المفروضة تكافئ إذن القوى الثلاث :
 P و P' و Q .

فإذا فرقنا كل واحدة من هذه القوى إلى قوتين متوازيتين مطبقتين في
نقطتي الاستناد D و D' لكانت حاصلة القوى الثلاث المؤثرة في D هي حمولة
الوسادة التي تتركز عليها النهاية D للمحور ، وحاصلة القوى الثلاث المؤثرة في
 D' هي حمولة الوسادة في D' .

البكرة :

١١٤ — تعريف : البكرة قرص دائري يمكن إدارته حول محور مار
بمركزه . وقد نُحِط على محيطه محزٌ ليمر عليه حبل . فتؤثر القوة المحركة في أحد
طرفي الحبل .

نفرض أن الحبل يتحرك بدون زلق في مقوه على القرص فيدير القرص
بحركته .

تكون البكرة إما ثابتة أو متحركة حسبما يكون محورها ثابتاً أو متحركاً .

١١٥ — البكرة الثابتة : في البكرة الثابتة ، يؤثر في طرفي الحبل القوة
المحركة والمقاومة (شكل ٣١) .

لنرمز بـ R لنصف قطر البكرة .

فإذا كتبنا شرط التوازن ، اعتماداً على النظريات العامة (العزم حول
محور البكرة) أو على العمل الافتراضي ، لوجدنا (١) :

$$Q = P$$

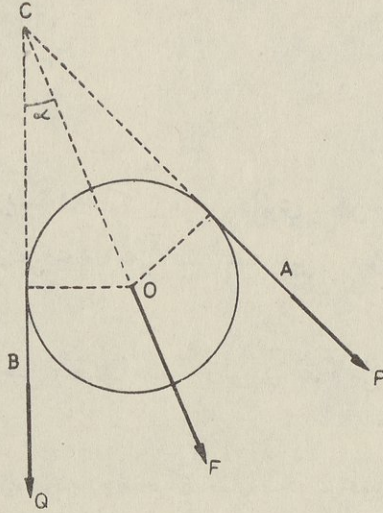
(١) يهمل ثقل البكرة والحبل .

نرى أن الفائدة الآلية للجهاز هي :

$$\frac{Q}{P} = 1$$

كما نلاحظ أن جمولة المحور ، وهي حاصل القوتين المتلاقيتين P و Q ،
محمولة على المنصف co لحاملي القوتين ، وأن قياس هذه الحاصلة هو :

$$F = 2 P \cdot \cos \alpha$$



(شكل ٣١)

بفرض أن α هي نصف زاوية طرفي الجبل .

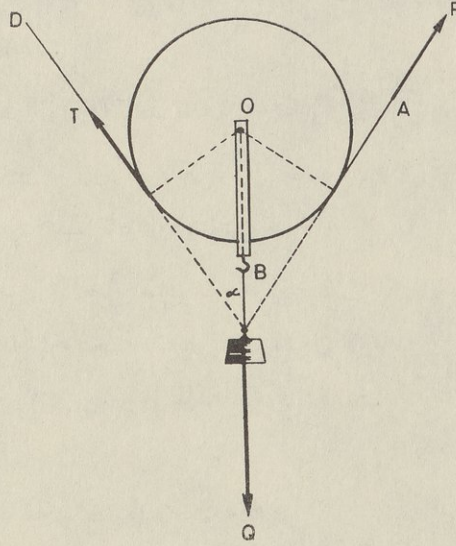
وتكون الجمولة في نهايتها العظمى ، وهي $2P$ عندما يتوازي طرفا الجبل .

١١٦ — البكرة المتحركة : في البكرة المتحركة ، ينتهي أحد طرفي

الجبل بنقطة ثابتة D والطرف الآخر A بالقوة المحركة P . أما المقاومة Q

فتؤثر في محور البكرة (شكل ٣٢) .

تؤثر في البكرة المتحركة ثلاث قوى : القوة المحركة P ، والمقاومة Q ،
والشد T لطرف الجبل المثبت في D . القوتان P و T مماستان للبكرة ،
والقوة Q تمر من O .



(شكل ٣٢)

فإذا كتبنا شروط التوازن ، اعتماداً على النظريات العامة (الحاصلة العامة
صفر ، والعزم الحاصل صفر) أو على العمل الافتراضي ، لوجدنا :

$$T = P$$

$$Q = 2 P \cos \alpha$$

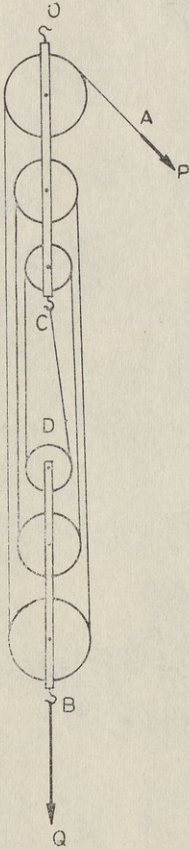
نرى أن الفائدة الآلية للجهاز هي :

$$\frac{Q}{P} = 2 \cos \alpha$$

وتكون هذه الفائدة أعظم ما يمكن ، وهي 2 حين يتوازي طرفا الجبل .

١١٧ — ملاحظة : يمكن مضاعفة الفائدة الآلية بتركيب مجموعة من بكرات (كما هو واضح في الشكل ٣٣) .

فهذه المجموعة مؤلفة من ست بكرات : محاور ثلاث بكرات منها مثبتة بساق ثابتة OD ، ومحاور البكرات الباقية مثبتة بساق متحركة BD .



(شكل ٣٣)

لنعيّن شروط التوازن بالطريقتين :

(١) يستدل من توازن كل بكرة على حدة أن شدّ الحبل واحد في جميع نقطه ويساوي P .
فإذا اعتبرنا فروع الحبل شاقولية ، وكانت بكرات الساق BD' خاضعة لتأثير المقاومة Q ، ولشد فروع الحبل (وهي قوى شاقولية عددها ٦ وقياس إحداها P) .

فشروط توازن بكرات BD هو :

$$Q = 6 P$$

(٢) بما أن طول الحبل ثابت ، فإذا عملنا على شدّ نقطة التطبيق A باستقامة القوة P ، لازداد طول القسم الطليق من الحبل بقدر δP ونقص بالتالي طول كل من أقسام الحبل الواصلة بين بكرات المجموعة بقدر $\frac{1}{6} \delta P$.

ينتج من ذلك أن :

$$\delta Q = - \frac{1}{6} \delta P$$

$$P \cdot \delta P + Q \delta Q = 0$$

فالعلاقة

$$P - \frac{1}{6} Q = 0$$

نصبح

ويغدو شرط التوازن :

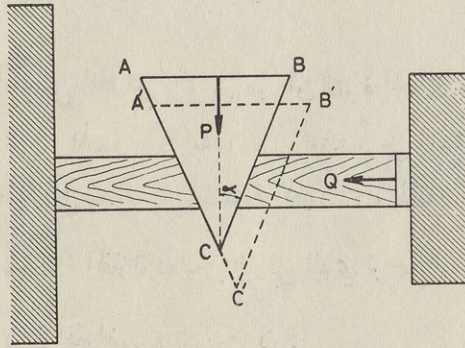
$$Q = 6 P$$

وهو المطلوب .

هذا ونلاحظ أن الفائدة الآلية للمجموعة تساوي ٦ .

١١٨ - المكبسي الموسوري^(١) : آلة تستعمل لإزاحة الأجسام باتجاه أفقي .

يتألف من موشر ثلاثي متساوي الساقين ينزلق بسطحيه الجانبيين المتساويين على سطحي جذعين : أحدهما ثابت ، والآخر متحرك متماسك مع الجسم الذي يُراد إزاحته (شكل ٣٤) .



(شكل ٣٤)

القوة المحركة هي ضغط نوثر به شاقولياً على الوجه العلوي الذي نفرضه أفقياً .
والمقاومة هي القوة الأفقية R التي تعاكس انتقال الجذع المتحرك .

لنتصور انتقالاً افتراضياً ينسحب المكبس به من الوضع ABC إلى الوضع $A'B'C'$ (شكل ٣٤) ، فيسهل بالتالي شاقولياً بقدر δP .

نرى أن الانتقال δQ يتعين بسهولة من العلاقة :

$$\delta Q = -2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta P$$

فشرط التوازن يكون :

$$P \cdot \delta P - 2 Q \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \delta P = 0$$

$$P = 2 Q \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

أو

أما الفائدة الآلية فتغدو :

$$\frac{Q}{P} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \alpha}$$

ونكون أعظم ما يمكن بقدر ما تكون α صغيرة . بمعنى أنه يمكن التغلب على مقاومة كبيرة بقوة متحركة صغيرة حين تكون زاوية الموشور صغيرة .

١١٩ - المكبس اللولبي^(١) : نفرض أن القوة المحركة هي قوة P مطبقة

في نقطة A (تبعد عن المحور Bz بقدر a) عمودياً على المستوي (A, Bz) . أما المقاومة Q فتؤثر في نقطة B باستقامة المحور Bz ذاته (شكل ٣٥) .

لنرمز بـ b للخطوة المختزلة للمنحني اللولبي الذي ترسمه النقطة A .

فمن أجل دوران افتراضي $\delta \theta$ يكون :

$$\delta P = a \cdot \delta \theta$$

$$\delta Q = -b \cdot \delta \theta$$

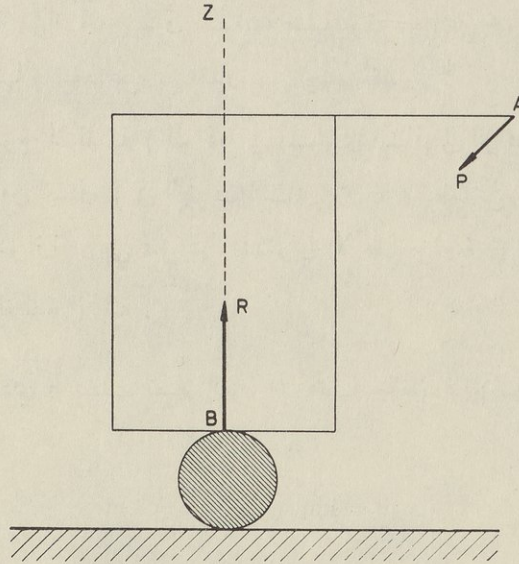
و

فشرط التوازن يكون :

$$P \cdot a \delta \theta - Q \cdot b \delta \theta = 0$$

ويكون بالتالي :

$$P = \frac{1}{a} Q$$



(شكل ٣٥)

فالفائدة الآلية للجهاز تكون :

$$\frac{Q}{P} = \frac{a}{b}$$

وتكون هذه الفائدة أعظم ما يمكن بقدر ما يكون البعد a كبيراً
والخطوة b صغيرة .

تمارين

- ١ - رافعة مؤلفة من ساق مستقيمة صلبة ترتكز على محور o ، وقد علق في نقطة منها (تبعد عن o بقدر a) جسم ثقله p .
- (١) فما القوة الأفقية (الواقعة في المستوي الشاقولي للرافعة) التي إذا أثرت في نقطة من الساق (في الطرف الثاني من o وتبعد عن o بقدر b) جعلت الساق متوازنة وهي تميل على المستوي الأفقي بزاوية α .
- (٢) عين الفائدة الآلية .

تطبيق عددي : يطلب تعيين القوة الأفقية والفائدة الآلية إذا فرض :

أن الثقل $p = 16 \text{ kg}$

والطول $a = 4 \text{ m}$ و $b = 6 \text{ m}$

والزاوية $\alpha = 60^\circ$

- ٢ - يتوكل ملفاف من أسطوانتين قد ثبتت إحداها في الأخرى بحيث تدوران معاً حول محور واحد ثابت . قطر الأسطوانة الكبيرة المسماة بالدارة هو D ، وقطر الصغيرة المسماة بالجدع هو d . يلف حبلان حول الأسطوانتين في اتجاهين مختلفين بحيث إذا تحركت الآلة صعد أحدهما وهبط الآخر .
- تؤثر القوة المحركة في طرف حبل الدارة ، والمقاومة في طرف الحبل الآخر .
- (١) أوجد ثقلًا إذا علق في نهاية حبل الجذع اثنان مع قوة محركة قدرها الثقل P .

(٢) نفرض أن البعد بين المستويين الشاقولين المارين من القوة المحركة والمقاومة هو l ، وأن مركز ثقل الملفاف يقع على المحور وفي منتصف البعد

بين هذين المستويين ، ثم أن البعد بين نقطتي الاستناد هو L وأن مركز الثقل في منتصف هذا البعد .

فإذا فرض أن ثقل الملفاف هو p ، فالمطلوب حساب حمولة كل من نقطتي الاستناد في الحالتين :

الحالة الأولى : القوة المحركة شاقولية ومتجهة إلى الأسفل .

الحالة الثانية : القوة المحركة أفقية .

تطبيق عددي : نفرض أن :

$$p = 6 \text{ kg} \quad \text{و} \quad P = 24 \text{ kg}$$

$$d = 30 \text{ cm} \quad \text{و} \quad D = 40 \text{ cm}$$

$$L = 80 \text{ cm} \quad \text{و} \quad \ell = 60 \text{ cm}$$

وأن

و

٣ - P ثقل معلق في A إحدى نهايتي ساق صلبة OA طولها ℓ (يهمل

ثقلها) . النهاية الثانية من الحيط مثبتة في نقطة ثابتة o .

تدور الساق حول o في مستو شاقولي . يربط في A حبل يمر في بكرة

ثابتة يقع مركزها B على الأفقي لـ o ($OB = \ell$) ، ويعلق في نهاية الحبل

ثقل p .

احسب الزاوية الكائنة بين الساق OA والأفقي OB عندما يتوازن الجهاز .

تطبيق عددي : نفرض أن $P = p$

٤ - قرص دائري مركزه C وثقله P . يدور هذا القرص في مستو

شاقولي حول نقطة ثابتة o من محيطه .

يربط في نهاية حبل $OABD$ قد لف قسم منه OAB على قوس من محيط

القرص (B نقطة تماس الحبل مع القرص) ، ويتدلى القسم الباقي BD بحيث

يعلق في نهايته D ثقل p .

احسب الزاوية الكائنة بين CO والافقي CB عندما يتوازن القرص .
تطبيق عددي : نفرض أن :

$$p = (3 + 2\sqrt{3}) P$$

٥ - قرص دائري مركزه O ثابت ونصف قطره R ، لف على محيطه حبل وربط في نهاية الحبل ثقل P . أخذ في مستوي القرص نقطة A (OA = a) وربط بهذه النقطة طرف حبل ABC . يمر الحبل بحلقة B مثبتة في نقطة من شاقول O (OB = b) . ويعلق في الطرف الآخر C من الحبل ثقل قدره 2P .
احسب الزاوية الكائنة بين الشاقول OB و OA عندما يتوازن الجهاز .

٦ - صفيحة متجانسة ثقلها P ، شكلها مثلث متساوي الساقين ABC ، يمكنها الدوران حول قاعدتها الأفقية BC . يربط في رأسها A حبل يمر ببكرة مثبتة في نقطة H من المستقيم الأفقي العمودي على BC في منتصفه O (OA = OH) وينتهي هذا الحبل بثقل p .

عين وضع توازن الجسم ، ثم ناقش .

يؤخذ المجهول الزاوية AOH .

٧ - أوجد الفائدة الآلية لمستو مائل على الأفق بقدر ٣٠° عندما تكون القوة المحركة :

(١) موازية لخط الميل الأعظم للمستوي .

(٢) أفقية وفي المستوي الشاقولي لخط ميل أعظم .



الفصل السادس

الشروط العامة للتوازن

النتيجة عن مبدأ العمل الافتراضي

معادلات التوازن :

١٢٠ — المعادلة العامة للتوازن : نفرض مجموعة مؤلفة من n نقطة

مادية :

$$M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), \dots, M_n (x_n, y_n, z_n)$$

خاضعة لأربطة معينة بالشروط الواردة في مبدأ العمل الافتراضي .

لتكن $F_i (x_i, y_i, z_i)$ حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في النقطة M_i .

إن مبدأ العمل الافتراضي يعطينا المعادلة :

$$(94) \quad \sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

التي يجب أن تتحقق من أجل جميع الانتقالات الافتراضية $(\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i)$ الموافقة للصلة .

هذه المعادلة هي المعادلة العامة للتوازن .

١٢١ — رد معادلات التوازن الى أقل عدد ممكن : لكي نحصل ،

في مجموعة خاصة ما ، على أي انتقال افتراضي موافق للصلة ، فإنه يلزم ويكفي أن ننضع k من الوسطاء :

$$q_1, q_2, \dots, q_k$$

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$$

لتغيرات اختيارية

ونقول عندئذ إن للمجموعة k درجة من الحرية .

لنأت بأمثلة نعين فيها درجات الحرية :

نرى بسهولة أن لنقطة على منحنى درجة واحدة من الحرية ، ولنقطة على سطح درجتين .

وللحصول على أعم انتقال افتراضي لجسم طليق يكفي :

(١) أن نخضع هذا الجسم لثلاثة انسحابات اختيارية غير متناهية في الصغر وموازية لثلاثة محاور .

(٢) وأن نجعل الجسم بدور حول ثلاثة محاور بزوايا اختيارية وغير متناهية في الصغر .

فالجسم الطليق إذن هو مجموعة ذات ست درجات من الحرية .

ونلاحظ أن قرصاً يتدحرج بدون انزلاق في مستوي على مستقيم ثابت هو مجموعة ذات درجة واحدة من الحرية .

لنرجع الآن إلى الحالة العامة لمجموعة ذات k درجة من الحرية :

فقد رأينا أن انتقال المجموعة يتعين بالتغيرات الاختيارية :

$$\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_j, \dots, \delta q_k$$

فالتغيرات :

$$\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2, \dots, \delta x_n, \delta y_n, \delta z_n$$

لإحداثيات مختلف نقاط المجموعة تتعين إذن حين تعلم التغيرات δq_j . فيكون بين هذه التغيرات علاقات من الشكل :

$$\delta x_1 = a_{11} \delta q_1 + a_{12} \delta q_2 + \dots + a_{1k} \delta q_k$$

$$\delta y_1 = b_{11} \delta q_1 + b_{12} \delta q_2 + \dots + b_{1k} \delta q_k$$

$$\delta z_1 = c_{11} \delta q_1 + c_{12} \delta q_2 + \dots + c_{1k} \delta q_k$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\delta x_n = a_{n1} \delta q_1 + a_{n2} \delta q_2 + \dots + a_{nk} \delta q_k$$

$$\delta y_n = b_{n1} \delta q_1 + b_{n2} \delta q_2 + \dots + b_{nk} \delta q_k$$

$$\delta z_n = c_{n1} \delta q_1 + c_{n2} \delta q_2 + \dots + c_{nk} \delta q_k$$

ويمكن الاستعاضة عن هذه العلاقات ، اختصاراً ، بالعلاقات :

$$(95) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x_i = \sum_{j=1}^{j=k} a_{ij} \delta q_j \\ \delta y_i = \sum_j b_{ij} \delta q_j \\ \delta z_i = \sum_j c_{ij} \delta q_j \end{array} \right.$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n$$

بفرض أن

فإذا نقلنا هذه القيم إلى المعادلة العامة للتوازن ، وهي :

$$(94) \quad \sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

لغدت هذه المعادلة :

$$\sum_i [X_i \sum_j a_{ij} \delta q_j + Y_i \sum_j b_{ij} \delta q_j + Z_i \sum_j c_{ij} \delta q_j] = 0$$

ونكتب هذه المعادلة أيضاً بالشكل التالي :

$$\sum_j [\sum_i (X_i a_{ij} + Y_i b_{ij} + Z_i c_{ij})] \delta q_j = 0$$

وإذا رمزنا بـ Q_j للإفادة :

$$(96) \quad Q_j = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i a_{ij} + Y_i b_{ij} + Z_i c_{ij})$$

لغدت المعادلة الأخيرة كما يلي :

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k = 0$$

$$(97) \quad \sum_{j=1}^{j=k} Q_j \delta q_j = 0 \quad \text{أو}$$

ولما كان من الواجب أن تتحقق العلاقة الأخيرة (97) مهما كان δq_1 و δq_2 و ... و δq_k ، فإنه يلزم إذن أن يكون :

$$(98) \quad Q_1 = 0 , Q_2 = 0 , \dots , Q_k = 0$$

فنجهد بذلك k معادلة لازمة وكافية لتوازن المجموعة .

وحل مجموعة هذه المعادلات يعين الوسطاء q_j التي عددها k .

المجموعة الهولونومية^(١) : نقول عن مجموعة ذات k درجة من الحرية بأنها مجموعة هولونومية ، إذا وجدت مجموعة وسطاء q_1 و q_2 و ... و q_k وأمكن تعيين الإحداثيات (x_i, y_i, z_i) لثلاث نقط المجموعة بدلالة هذه الوسطاء بشكل محدود :

$$(99) \quad \begin{cases} x_i = x_i (q_1, q_2, \dots, q_k) \\ y_i = y_i (q_1, q_2, \dots, q_k) \\ z_i = z_i (q_1, q_2, \dots, q_k) \end{cases}$$

نسمي الوسطاء q_1 و q_2 و ... و q_k بإحداثيات المجموعة الهولونومية .

إن معرفة القيم العددية لهذه الوسطاء تعين وضع المجموعة .

هذا وللحصول على انتقال افتراضي موافق للصلة يكفي أن نعطي الوسطاء

q_1 و q_2 و ... و q_k تزايدات اختيارية غير متناهية في الصغر δq_1 و δq_2 و ... و δq_k . فنجد اعتماداً على (99) العلاقات :

$$(100) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x_i = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta y_i = \sum_j \frac{\partial y_i}{\partial q_j} \delta q_j \\ \delta z_i = \sum_j \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \delta q_j \end{array} \right.$$

هذه العلاقات هي حالات خاصة من العلاقات (95) : ففي العلاقات الأخيرة (100) ، الأطراف الثانية من δx_i و δy_i و δz_i هي تفاضلات كلية ، بيد أن هذه الأطراف ليست كذلك في العلاقات (95) .

وإذا حملنا هذه الإفادات إلى المعادلة العامة للتوازن (94) لوجدنا معادلات التوازن على الشكل التالي :

$$(101) \quad Q_1 = 0 \quad Q_2 = 0 \quad \dots \quad Q_k = 0$$

بفرض أن :

$$(102) \quad Q_j = \sum_{i=1}^{i=n} \left(X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right)$$

هذا ونلاحظ أن أكثر المجموعات التي نصادفها هي مجموعات هولونومية : فالجسم الذي يدور حول محور ثابت هو مجموعة هولونومية ، لأن وضع الجسم يتعين بوسيط واحد هو زاوية الدوران .

والجسم الذي يدور حول محور ثابت وينزلق على المحور نفسه هو مجموعة هولونومية ، لأن وضع الجسم يتعين بوسيطين ، هما الزاوية التي يدورها الجسم من وضع معين ، والطول الذي ينزلق بقدره الجسم على المحور بدءاً من الوضع المفروض .

والجسم الذي يدور حول نقطة ثابتة هو مجموعة هولونومية : لأن الجسم يتعين بثلاثة وسطاء ، هي الزوايا التي يدورها الجسم حول ثلاثة محاور .

أما القرص الذي يتدحرج بدون انزلاق على مستو ثابت ، فهو مجموعة غير هولونومية : لأن القرص ، وهو مجموعة ذات ثلاث درجات من الحرية ، لا يمكن تعيين وضعه على المستوي بثلاث وسطاء مستقلة .

خاصات خاصة : ١ - في حالة خاصة أولى ، حين تكون إفادة العمل الافتراضي وهي :

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k$$

تفاضلاً كلياً لتابع $U (q_1, q_2, \dots, q_k)$:

$$\delta U = \sum_{j=1}^{j=k} Q_j \delta q_j$$

أي حين يكون :

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1} , \quad Q_2 = \frac{\partial U}{\partial q_2} , \quad \dots , \quad Q_k = \frac{\partial U}{\partial q_k}$$

فمعادلات التوازن تصبح في هذه الحالة :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 , \quad \dots , \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0$$

ونرى أن هذه العلاقات هي المعادلات التي نعيد إلى حلها حين نبحث عن النهايات العظمى والصغرى للتابع U .

وسنبرهن (فيما بعد) أن التوازن يغدو مستقراً حين يصبح التابع U في نهايته العظمى .

(٢) وفي حالة خاصة ثانية ، حين تشتق القوى المفروضة من تابع قوى ، وليكن :

$$U (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

اي حين تكون الإفادة :

$$\Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i)$$

تفاضلاً كلياً للتابع U ، فإن هذه الحالة تدخل في نطاق الحالة الخاصة السابقة :
فإذا استبدلنا بالإحداثيات (x_i , y_i , z_i) قيمها المعينة بدلالة الوسطاء q_j ،
فإن إفادة العمل الافتراضي تكون أيضاً تفاضلاً كلياً .

هذا ونلاحظ أن العكس غير صحيح : فقد تكون الإفادة $\Sigma Q_j \delta q_j$
تفاضلاً كلياً دون أن يكون هنالك تابع قوى .

تطبيق : حين تكون القوى المفروضة المؤثرة في مجموعة هي ثقل المجموعة
فقط ، فإنه يوجد في هذه الحالة تابع قوى .

لنفرض محوراً oz باتجاه الشاقول الصاعد . لنرمز بـ m_i لكتلة نقطة
 M_i من المجموعة . فتقل هذه النقطة هو $m_i g$ ، والعمل الافتراضي لهذا الثقل
هو $- m_i g \delta z_i$. فالعمل الافتراضي للمجموعة يكون :

$$\delta \mathcal{C} = - \Sigma m_i g \delta z_i = - g \delta m_i \delta z_i$$

وإذا أشرنا بـ ζ لراقم مركز ثقل المجموعة ، لكان العمل الافتراضي
للمجموعة :

$$\delta \mathcal{C} = - M g \delta \zeta$$

فشرط التوازن يكون إذن :

$$\delta \zeta = 0$$

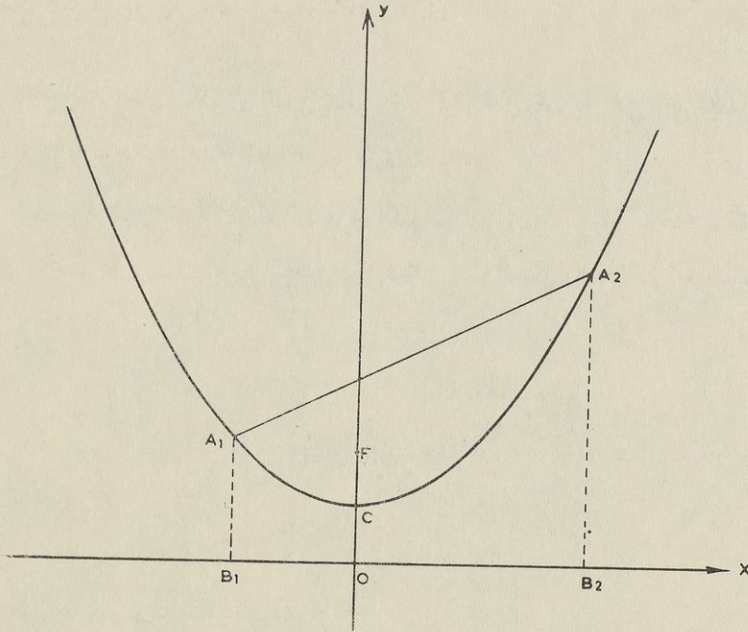
فمواضع توازن المجموعة هي المواضع التي يمكن الحصول عليها عند البحث
عن النهايات العظمى والصغرى للراقم ζ الذي يعتبر كتابع للوسطاء الهندسية
المستقلة :

$$q_1 , q_2 , \dots , q_k$$

التي تعين وضع الجسم .

مسألة : $A_1 A_2$ قضيب ثقيل متجانس ، تنزلق نهايته بدون احتكاك على قطع مكافئ ثابت مفروض . عين أوضاع توازن القضيب إذا علم أن محور القطع شاقولي وأن تقعره متجه إلى الأعلى .

الحل : لنفرض محورين إحداثيين ox و oy في مستوي القطع : الأول واقع على دليل القطع والثاني على محوره (شكل ٣٦) .



(شكل ٣٦)

فقد رأينا (في التطبيق السابق) أن الجسم يتوازن حين يبلغ مركز ثقله أعلى أو أخفض موضع على مساره .

فلتعيين مواضع التوازن إذن : نبحث أولاً عن الوسطاء المستقلة التي تعين وضع القضيب على القطع ، ثم نبحث بعدئذ عن النهايات العظمى والصغرى

لترتيب مركز ثقله بدلالة الوسطاء المستقلة هذه :

(١) نعلم أن معادلة القطع المكافئ المنسوب للمحورين المفروضين هي :

$$x^2 = p (2y - p)$$

فإذا رمزنا بـ (x_1, y_1) لإحداثي A_1 ، وبـ (x_2, y_2) لإحداثي A_2 ،
وبـ a لطول القضيب ، لكان بين هذه الإحداثيات ، وهي الوسطاء x_1 و y_1
و x_2 و y_2 التي تعين وضع القضيب ، العلاقات التالية :

$$x_1^2 = p (2y_1 - p)$$

$$x_2^2 = p (2y_2 - p)$$

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = a^2$$

وهي العلاقات التي تنشأ عن القيود التالية ، وهي :

النقطتان M_1 و M_2 واقعتان على القطع المكافئ .

البعد بين النقطتين ثابت (طول القضيب) .

ولما كانت هذه الوسطاء الأربعة غير مستقلة ، بل مرتبطة بالعلاقات الثلاث
السابقة ، فوضع القضيب يتعين إذن بوسيط واحد (المجموعة ذات درجة واحدة
من الحرية) ، وليكن x_1 هذا الوسيط .

(٢) نعلم أن مركز ثقل قضيب متجانس يقع في منتصفه ، فإذا رمزنا

بـ η لترتيب مركز ثقل القضيب $A_1 A_2$ لكان :

$$\eta = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

وكان بالتالي شرط التوازن :

$$\delta \eta = \frac{1}{2} [\delta y_1 + \delta y_2] = 0$$

نعين δy_1 و δy_2 بدلالة δx_1 : من علاقات الصلة السابقة ينتج (بعد

إجراء التفاضل) :

$$x_1 \delta x_1 = p \delta y_1$$

$$x_2 \delta x_2 = p \delta y_2$$

$$(x_2 - x_1) (\delta x_2 - \delta x_1) + (y_2 - y_1) (\delta y_2 - \delta y_1) = 0$$

فالعلاقة الأخيرة تصبح (بعد التعويض بدلالة الفصول وتفاضلاتها) :

$$(x_2 - x_1) (\delta x_2 - \delta x_1) + \frac{x_2^2 - x_1^2}{2p} \left(\frac{x_2 \delta x_2 - x_1 \delta x_1}{p} \right) = 0$$

وبما أن $x_2 \neq x_1$ ، فالعلاقة السابقة تكتب (بعد الاختصار) :

$$2p^2 (\delta x_2 - \delta x_1) + (x_2 + x_1) (x_2 \delta x_2 - x_1 \delta x_1) = 0$$

وبعد الإصلاح يكون :

$$[2p^2 + (x_2 + x_1)x_2] \delta x_2 - [2p^2 + (x_2 + x_1)x_1] \delta x_1 = 0$$

فيكون إذن :

$$\delta x_2 = \frac{2p^2 + (x_2 + x_1)x_1}{2p^2 + (x_2 + x_1)x_2} \delta x_1$$

وبما أن :

$$\delta y_1 + \delta y_2 = \frac{x_1 \delta x_1 + x_2 \delta x_2}{p}$$

ف نجد (بعد التعويض بقيمة δx_2) :

$$\delta y_1 + \delta y_2 = \frac{1}{p} \left[x_1 + x_2 \frac{2p^2 + (x_2 + x_1)x_1}{2p^2 + (x_2 + x_1)x_2} \right] \delta x_1$$

ويكون بالتالي :

$$\delta \eta = \frac{(x_1 + x_2) (p^2 + x_1 x_2)}{p [2p^2 + (x_2 + x_1)x_2]} \delta x_1$$

نرى أن التابع η يكون في إحدى نهايتيه العظمى أو الصغرى حين يكون :

$$(x_1 + x_2) (p^2 + x_1 x_2) = 0$$

فإما أن يكون $x_2 = -x_1$

فالمستقيم $A_1 A_2$ يكون أفقياً .

أو أن يكون $x_1 \cdot x_2 = -p^2$

فالوتر $A_1 A_2$ يمر بمحرق القطع .

فالقضيب يتوازن إذن على القطع حين يكون أفقياً أو ماراً بمحرق القطع .

ملاحظة : يمكن حل المثال السابق بطريقة هندسية مباشرة .

ندرك أولاً أن الوضع الأفقي للقضيب هو وضع توازني . ثم نلاحظ أن :

$$y_1 = B_1 A_1 = A_1 F$$

$$y_2 = B_2 A_2 = A_2 F$$

(بفرض أن F هو محرق القطع) ، وأن :

$$\eta = \frac{1}{2} (y_1 + y_2) = \frac{1}{2} (A_1 F + A_2 F)$$

ونعلم أن المجموع $A_1 F + A_2 F$ (المتغير مع الأوضاع المختلفة للقضيب) هو بوجه عام أكبر من القطعة $A_1 A_2$. ويبلغ هذا المجموع قيمته الصغرى (وهي $A_1 A_2$) حين تقع النقطة F على القطعة $A_1 A_2$.

مضارب لاغرانج :

١٢٢ - معادلات الصلة : نفرض مجموعة مؤلفة من n نقطة مادية :

$$M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2), \dots, M_n (x_n, y_n, z_n)$$

خاضعة لأربطة يمكن التعبير عنها بعلاقات بين إحداثيات المجموعة :

$$(103) \quad \begin{cases} f_1 (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \\ f_2 (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \vdots \\ f_h (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \end{cases}$$

إن عدد هذه العلاقات ، وهو h ، أقل حتماً من عدد إحداثيات المجموعة ، وهو $3n$. فإن كان h مساوياً $3n$ ، لغدت إحداثيات المجموعة معينة تماماً بالمعادلات السابقة .

لنفرض بوجه عام أن :

$$k = 3n - h$$

فالمجموعة تكون هولونومية : لأنه يمكن بواسطة المعادلات السابقة ، تعيين جميع الإحداثيات بدلالة k إحداثية منها نختارها بشكل مناسب . فالمجموعة إذن k درجة من الحرية .

لنرمز بـ $F_i (X_i, Y_i, Z_i)$ لحاصلة القوى المفروضة المطبقة في النقطة M_i ، فبدأ العمل الافتراضي يعطينا المعادلة :

$$(49) \quad \sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = 0$$

التي يجب أن تتحقق من أجل جميع الانتقالات δx_i و δy_i و δz_i الموافقة للصلات .

١٢٣ - مضارب لاغرانج^(١) : إن انتقالات النقط M_i هي مرتبطة بالعلاقات التالية ، الناشئة عن تفاضل المعادلات (103) :

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

$$\delta f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

⋮

$$\delta f_h = \frac{\partial f_h}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial f_h}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial f_h}{\partial z_1} \delta z_1 + \dots + \frac{\partial f_h}{\partial z_n} \delta z_n = 0$$

وتكتب هذه العلاقات ، اختصاراً ، بالشكل :

$$(104) \quad \delta f_j = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \delta x_i + \frac{\partial f_j}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \delta z_i \right)$$

$$j = 1, 2, \dots, h$$

بفرض أن

هذه العلاقات (وعددها h) الكائنة بين تغيرات الإحداثيات (وعددها $3n$) تبين أن فئة من هذه التغيرات (وعددها k) يمكن اعتبارها اختيارية ، ونسميها بالتغيرات الاختيارية . أما التغيرات الباقية (وعددها h) فتتبع من العلاقات (104) ، ونسميها بالتغيرات المتعلقة أو التابعة .

هذا ولتعيين شروط التوازن ، باتباع طريقة مضارب لاغرانج ، نضرب المعادلات (104) على التوالي بمجاهيل مساعدة ، هي :

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_h$$

ثم نجمع المعادلات الناتجة مع المعادلة (49) . نعين بعدئذٍ المضارب λ_j بحيث تنعدم ، في المعادلة الناتجة ، أمثال التغيرات التابعة (وعددها h) . فيجب عندئذٍ أن تصبح أمثال التغيرات الاختيارية (وعددها k) معدومة أيضاً .

والخلاصة ، يجب إمكان تعيين الوسطاء λ_j بحيث تنعدم جميع الأمثال في المعادلة الناتجة . فنجد بذلك $3n$ معادلة هي :

$$(105) \quad \begin{cases} X_i + \sum_{j=1}^{j=k} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} = 0 \\ Y_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i} = 0 \\ Z_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} = 0 \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

بفرض أن

فإذا أضفنا هذه المعادلات (وعددها $3n$) إلى معادلات الصلة (وعددها h) ، حصلنا على مجموعة معادلات (عددها $3n + h$) نعين بها إحداثيات النقط (وعددها $3n$) والمجاهيل المساعدة λ_j (وعددها h) .

مجموعة المعادلات الناتجة هذه ، هي المعادلات العامة للتوازن .
هذا ونرى أن المجاهيل λ_j تعين قوى الرباط :

بالحقيقة ، إن معادلات التوازن (105) لا تتغير حين نحذف الرباط :

$$f_j = 0$$

شربطة أن نضيف إلى القوى المفروضة المطبقة في النقطة M_i القوة التي مركباتها :

$$\left(\lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i}, \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_i}, \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_i} \right)$$

فالقوة هذه إذن هي التأثير الناتج من فعل الرباط في النقطة M_i . نسمي هذه القوة بقوة الرباط (أو قوة الصلة) . ونلاحظ أن هذه القوة متناسبة مع λ_j وعمودية على السطح الذي نحصل عليه من المعادلة :

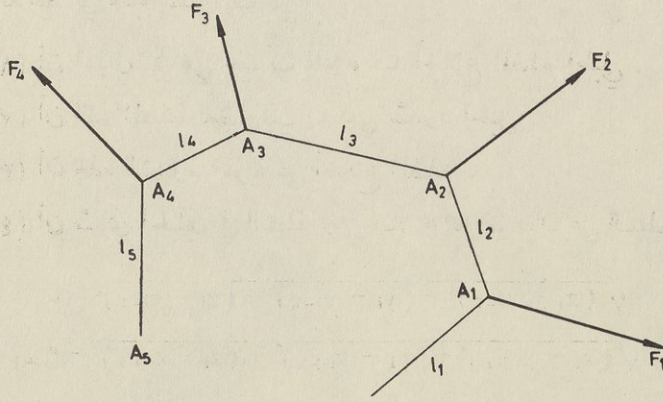
$$f_j (x_1, y_1, z_1, \dots, x_i, y_i, z_i, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

بعد أن نعطي جميع الإحداثيات ، باستثناء الإحداثيات (x_i, y_i, z_i) ، القيم العددية الموافقة لموضع التوازن .

مثال : توازن مضلع جبلي مثبت في نهايته .

الحل : لنفرض أن $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5)$ هو مضلع جبلي في الفراغ مثبت في نهايته A_0 و A_5 ، وخاضع للقوى المفروضة F_1 و F_2 و F_3 و F_4 (شكل ٣٧) .

لنكتب ، اعتماداً على مضارب لاغرانج ، المعادلات التي تعين أوضاع توازن المصلع من جهة وقوى الرباط في النقط A_1 و A_2 و A_3 و A_4 من جهة ثانية . لذا نفرض مجموعة محاور إحداثية $oxyz$ قائمة ومباشرة .



(شكل ٣٧)

لنرمز بـ (x_i, y_i, z_i) لإحداثيات النقطة A_i ، وبـ (X_i, Y_i, Z_i) لمركبات القوة F_i ، وبـ l_i لطول القطعة $A_i A_{i-1}$ ، وذلك بفرض أن :

$$i = 1, 2, \dots, 5$$

إن معادلات الصلة (وعددها 5) هي :

$$f_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} - l_i = 0$$

ومعادلات التوازن (وعددها 15) هي :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i + \lambda_i \frac{x_i - x_{i-1}}{l_i} + \lambda_{i+1} \frac{x_i - x_{i+1}}{l_{i+1}} = 0 \\ Y_i + \lambda_i \frac{y_i - y_{i-1}}{l_i} + \lambda_{i+1} \frac{y_i - y_{i+1}}{l_{i+1}} = 0 \\ Z_i + \lambda_i \frac{z_i - z_{i-1}}{l_i} + \lambda_{i+1} \frac{z_i - z_{i+1}}{l_{i+1}} = 0 \end{array} \right.$$

ونرى أن هذه المعادلات ، هي العلاقات التي نحصل عليها بتطبيق النظريات العامة للتوازن (أي أن القوى المؤثرة في النقطة A_i ، وهي القوة المفروضة F_i وشد كل من الجبلين المنتهين في النقطة A_i ، هي متوازنة) .

ونلاحظ في هذه المعادلات :

- (١) أن أمثال λ هي جيوب تمام توجيه أضلاع المضلع الجبلي .
- (٢) أن القيم المطلقة للمضارب λ هي شدود الجبل .
- (٣) أن هذه الشدود محمولة على أضلاع المضلع .
- (٤) أن شدي الجبلين في النقطة A_i مثلاً ، هما عموديان على السطحين :

$$\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2 + (z_i - z_{i-1})^2} = l_i$$

$$\sqrt{(x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2} = l_{i+1}$$

(بفرض أن الإحداثيات x_i و y_i و z_i هي المتحولات الوحيدة في هاتين المعادلتين) لأن السطحين المذكورين هما كرتان ، مركزاهما A_{i-1} و A_{i+1} .

١٢٣ — مائة مجموعة غير هولونومية : إن القاعدة التي سبق أن طبقناها

في المجموعة الهولونومية يمكن تطبيقها على المجموعة غير الهولونومية . ففي هذه الحالة ، تتعين الانتقالات الافتراضية الموافقة للصلة ، بعلاقات من الشكل :

$$A_{11} \delta x_1 + B_{11} \delta y_1 + C_{11} \delta z_1 + \dots + A_{1n} \delta x_n + B_{1n} \delta y_n + C_{1n} \delta z_n = 0$$

$$A_{21} \delta x_1 + B_{21} \delta y_1 + C_{21} \delta z_1 + \dots + A_{2n} \delta x_n + B_{2n} \delta y_n + C_{2n} \delta z_n = 0$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A_{h1} \delta x_1 + B_{h1} \delta y_1 + C_{h1} \delta z_1 + \dots + A_{hn} \delta x_n + B_{hn} \delta y_n + C_{hn} \delta z_n = 0$$

نرى أن الأمثال A و B و C هي توابع لإحداثيات نقط المجموعة ، وأن الأطراف اليسرى من هذه العلاقات ليست بتفاضلات كلية كما هو الحال في المجموعات الهولونومية .

ونكتب هذه العلاقات ، اختصاراً ، بالشكل التالي :

$$(106) \quad \sum_{i=1}^{i=n} (A_{ji} \delta x_i + B_{ji} \delta y_i + C_{ji} \delta z_i) = 0$$

بفرض أن

$j = 1, 2, \dots, h$

وإذا رمزنا بـ k للعدد $3n-h$ ، لكان بين التغيرات δx_i و δy_i و δz_i (التي عددها $3n$) تغيرات اختيارية عددها k .

وإذا تابعنا العمل (وطبقنا ما جرينا عليه في المجموعات الهولونومية) لوجدنا معادلات التوازن ، وهي :

$$(107) \quad \begin{cases} X_i + \sum_{j=1}^{j=h} \lambda_j A_{ji} = 0 \\ Y_i + \sum_j \lambda_j B_{ji} = 0 \\ Z_i + \sum_j \lambda_j C_{ji} = 0 \end{cases}$$

بفرض أن

$i = 1, 2, \dots, n$

النظريات العامة الناتجة عن مبدأ العمل الافتراضي :

١٢٤ - الصلوات تسمح بالانسحاب متفانك للمجموعة مواز لمحور :

لنفرض أن الانسحاب يوازي المحور ox مثلاً ، فالانتقالات الافتراضية الموافقة للصلة تكون :

$$\begin{cases} \delta x_1 = \delta x_2 = \dots = \delta x_i = \dots = \delta x_n \\ \delta y_1 = \delta y_2 = \dots = \delta y_i = \dots = \delta y_n = 0 \\ \delta z_1 = \delta z_2 = \dots = \delta z_i = \dots = \delta z_n = 0 \end{cases}$$

وإذا رمزنا بـ δx لإحدى القيم المتساوية للانتقالات δx_i ، لغدت المعادلة

الميكانيك العام ج ٢ (٣٢)

العامة للتوازن :

$$(\sum X_i) \delta x = 0$$

وأصبح شرط التوازن :

$$\sum X_i = 0$$

١٢٥ - الصلوات تسمح بدوران متماسك للمجموعة حول محور :

نفرض أن محور الدوران هو oz ، وأن (x_i, y_i, z_i) هي الإحداثيات الديكارتية لنقطة M_i من المجموعة . فإذا رمزنا بـ (r_i, θ_i, z_i) لإحداثيات M_i الأسطوانية ، لكان :

$$x_i = r_i \cos \theta_i \quad y_i = r_i \sin \theta_i \quad z_i = z_i$$

وكانت الانتقالات الافتراضية الموافقة للصلة هي :

$$\delta r_1 = 0, \delta r_2 = 0, \dots, \delta r_n = 0$$

$$\delta z_1 = 0, \delta z_2 = 0, \dots, \delta z_n = 0$$

$$\delta \theta_1 = \delta \theta_2 = \dots = \delta \theta_i = \dots = \delta \theta_n$$

وإذا أشرنا بـ $\delta \theta$ لإحدى القيم المتساوية للانتقالات $\delta \theta_i$ ، لكان :

$$\delta x_i = -r_i \sin \theta_i \delta \theta, \quad \delta y_i = r_i \cos \theta_i \delta \theta, \quad \delta z_i = 0$$

$$\delta x_i = -y_i \delta \theta \quad \delta y_i = x_i \delta \theta \quad \delta z_i = 0 \quad \text{أو}$$

وكان بالتالي العمل الافتراضي للقوة المفروضة هو :

$$\sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) = \sum (-y_i X_i + x_i Y_i) \delta \theta$$

وإذا رمزنا بـ N للعزم الحاصل للقوى المفروضة بالنسبة للمحور oz ،

لأصبح العمل الافتراضي للقوى المفروضة :

$$\delta \mathcal{E} = N \cdot \delta \theta$$

وغدت المعادلة العامة للتوازن :

$$N \cdot \delta \theta = 0$$

فشرط التوازن يكون إذن :

$$N = 0$$

وهو الشرط الذي وجدناه بتطبيق النظريات العامة على توازن جسم مقيد بمحور .

ملاحظة : نرى أنه يمكن تعيين العمل الافتراضي في هذه الحالة بطريقة شعاعية مباشرة .

نعلم أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة هو :

$$\delta \mathcal{E} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{M}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot (\delta \theta \wedge \mathbf{O M}_i)$$

$$\delta \mathcal{E} = \delta \theta \sum_i (\mathbf{O M}_i \wedge \mathbf{F}_i) \quad \text{أو}$$

وإذا رمزنا بـ G للعزم الحاصل للقوى المفروضة في النقطة O لكان :

$$\delta \mathcal{E} = G \cdot \delta \theta$$

$$\delta \mathcal{E} = N \cdot \delta \theta \quad \text{أو}$$

١٢٦ - الصلوات تسمح بانتقال لولبي متماثل للمجموعة : نفرض

أن محور الحركة اللولبية هو oz . لتكن $\delta \theta$ الزاوية (غير المتناهية في الصغر) التي تدور بها المجموعة ، و δz المقدار (غير المتناهية في الصغر) الذي تنزلق به المجموعة على المحور oz . فإذا رمزنا بـ b للخطوة المختزلة للحركة اللولبية ، لكان :

$$\delta z = b \cdot \delta \theta$$

نعلم أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة هو :

$$\delta \mathcal{E} = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{M}_i$$

فإذا أضربنا بـ $\mathbf{k}$ لشعاع واحدة المحور oz لكان :

$$\delta \mathbf{M}_i = \mathbf{k} \cdot \delta \theta \wedge \mathbf{O M}_i + \mathbf{k} \cdot \delta z$$

$$\delta \mathbf{M}_i = (\mathbf{k} \wedge \mathbf{O M}_i + b \mathbf{k}) \delta \theta \quad \text{أو}$$

وكان بالتالي :

$$\delta \mathcal{E} = \sum_i [\mathbf{F}_i (\mathbf{k} \wedge \mathbf{O M}_i + b \mathbf{k})] \delta \theta$$

وإذا لاحظنا أن :

$$\sum_i \mathbf{F}_i (\mathbf{k} \wedge \mathbf{O M}_i) = \mathbf{k} \sum_i (\mathbf{O M}_i \wedge \mathbf{F}_i) = \mathbf{N}$$

$$\sum \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{k} = \sum Z_i = Z \quad \text{وأن}$$

(بفرض أن $\mathbf{N}$ هو العزم الحاصل لمجموعة القوى المفروضة حول oz ، و Z مسقط الحاصلة العامة لهذه المجموعة على oz) لا دُرُكنا أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة المطبقة في المجموعة هي :

$$\delta \mathcal{E} = (N + bZ) \delta \theta$$

وأن شرط التوازن هو :

$$N + bZ = 0$$

تطبيق : نعين شروط توازن جسم صلب : لنفرض جسماً طليقاً أو مقيداً ، خاضعاً لقوى مفروضة حاصلتها العامة هي (X, Y, Z) وعزمها الحاصل في O هو (L, M, N) .

سنبين الحالات المختلفة لتوازن الجسم ، وسنضع جدولاً نشير فيه إلى عدد درجات حريته ، ثم شروط توازنه حسب الأربطة المختلفة التي يتقيد بها الجسم .

نوع الرباط	درجة الحرية	الانتقال		شروط التوازن
		انسحاب بوازي	دوران حول	
الجسم طليق	٦	ox, oy, oz	ox, oy, oz	$X = Y = Z = L = M = N = 0$
مقيد بنقطة ثابتة 0	٣	—	ox, oy, oz	$L = M = N = 0$
مقيد بمحور ثابت oz	١	—	oz	$N = 0$
يدور حول محور oz وينسحب باستقامته	٢	oz	oz	$Z = 0 \quad N = 0$
يستند إلى المستوي xoy (١) بنقطة واحدة 0	٥	ox, oy	ox, oy, oz	$X = Y = L = M = N = 0$
(٢) بنقط كائنة على محور ox	٤	ox, oy	ox, oz	$X = Y = L = N = 0$
(٣) بنقط ليست على استقامة واحدة	٣	ox, oy	oz	$X = Y = N = 0$

الصلات وحيدات الجانب :

١٢٧ - الصلات والانتقالات : قد تكون مجموعة مقيدة بأربطة

معينة بعلاقات تساوي ، وتكون الانتقالات الافتراضية الموافقة لهذه الأربطة معينة بعلاقات تراجع أو تساوي . فنقول في هذه الحالة إن الصلات هي وحيدات الجانب . لنوضح ذلك بأمثلة :

١ - لتكن M نقطة مادية موضوعة على مستو أفقي xoy . فالنقطة تستطيع التنقل في المستوي أو الانفكاك عنه نحو الأعلى . فإذا فرضنا أن oz

هو محور شاقولي صاعد ، وأن z هو راقم M ، لرأينا أن معادلة الصلة هي :

$$z = 0$$

وان الانتقالات الموافقة للصلة هي :

$$\delta z \geq 0$$

٢ - نفرض نقطة مادية مربوطة بخيط لدن (طوله ثابت r) ، ولنفرض أن النهاية الثانية للخيط مربوطة بنقطة ثابتة o (نعتبرها مبدأ للإحداثيات) .

ففي هذه الحالة يمكن اعتبار النقطة كأنها تتحرك على كرة (مركزها o ونصف قطرها r) أو تتحرك داخل هذه الكرة ، حسبما يكون الخيط مشدوداً أو رخواً ، أو حسبما يكون الرباط قائماً أو غير قائم .

فإذا رمزنا بـ (x, y, z) لإحداثيات النقطة (بالنسبة لمجموعة $oxyz$) لكانت معادلة الصلة :

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

وغدت الانتقالات الموافقة لهذه الصلة معينة بالعلاقة :

$$\delta f = x \delta x + y \delta y + z \delta z \leq 0$$

هذا ، ولنفرض بوجه عام مجموعة نقط مادية M_i (عددها n) خاضعة لارتباطة (بعضها وحيد والبعض الآخر ثنائي الجانب) ، فالانتقالات الموافقة لهذه الصلات تكون معينة بعلاقات تساوي وتواجه من الشكل :

$$(108) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n (A_{ji} \delta x_i + B_{ji} \delta y_i + C_{ji} \delta z_i) = 0 \\ j = 1, 2, \dots, g \end{cases}$$

$$(109) \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n (A_{ki} \delta x_i + A_{ki} \delta y_i + C_{ki} \delta z_i) \leq 0 \\ k = g+1, g+2, \dots, h \end{cases}$$

وذلك بفرض أن متراجحات (109) هي جميعها من إشارة واحدة ، ولتكن سالبة مثلاً (فإن اتفق وكانت إشارة إحدى هذه المتراجحات موجبة ، فنضرب طرفيها بـ -1) .

لنعين في المجموعة المفروضة ، مواضع التوازن التي تكون من أجلها جميع الصلات محققة .

ونلاحظ هنا نوعين من الانتقالات الموافقة لهذه الصلات : انتقالات تساوي ، وانتقالات تراجع .

نسمي بانتقال تساوي الانتقال الذي تكون من أجله جميع الأطراف الأولى (الأطراف اليسرى) من العلاقات (109) مساوية للصفر :

$$\begin{cases} \sum_i (A_{ki} \delta x_i + B_{ki} \delta y_i + C_{ki} \delta z_i) = 0 \\ k = g+1, g+2, \dots, h \end{cases}$$

ونسمي بانتقال تراجع الانتقال الذي يكون من أجله طرفٌ أبسر ، واحد على الأقل ، من العلاقات (109) غير مساوٍ للصفر ، وليكن مثلاً :

$$\sum_i (A_{g+1,i} \delta x_i + B_{g+1,i} \delta y_i + C_{g+1,i} \delta z_i) < 0$$

١٢٨ — نظرية : إذا كانت الانتقالات الافتراضية الموافقة للأربطة

التي تخضع لها مجموعة مادية هي معينة بالعلاقات (108) و (109) ، فالشرط اللازم والكافي لتوازن هذه المجموعة في وضع تكون فيه الصلات محققة ، هو أن يكون العمل الافتراضي للقوى المفروضة ، من أجل انتقالات موافقة للصلة ، صفراً أو سالباً :

$$\delta \mathcal{E}_D \leq 0$$

فيكون صفراً من أجل انتقالات التساوي وسالباً من أجل انتقالات التراجع .

لزوم الشروط : للبرهان على لزوم الشرط ، يكفي أن نلاحظ أولاً ، في الحالة التي تكون فيها الصلة وحيدة الجانب ، أن العمل الافتراضي لقوى الرباط ، من أجل أي انتقال افتراضي موافق للصلة ، هو صفر أو موجب :

$$\delta \mathcal{E}_L \geq 0$$

فيكون صفرًا من أجل انتقالات التساوي وموجباً (أو صفرًا) من أجل انتقالات التراجع .

لنأت بمثال نوضح به ذلك :

لنفرض نقطة مادية موضوعة على سطح . فالنقطة تستطيع الانفكاك عن هذا السطح من جهة ما . وقوة الرباط ، وهي رد فعل السطح في النقطة ، تتجه هي أيضاً باتجاه المنطقة التي تنفك نحوها النقطة . فإذا جعلنا النقطة تنتقل على السطح (انتقال تساوي) كان العمل الافتراضي لرد الفعل صفرًا . وإن جعلناها تنتقل بحيث تنفك عن السطح (انتقال تراجع) أضحى العمل الافتراضي لرد الفعل موجباً (أو صفرًا في الحالة التي ينعدم فيها رد الفعل) .

فاعتماداً على ما سبق : حين تكون المجموعة المادية المفروضة متوازنة ، فحاصلة القوى المؤثرة في كل نقطة من المجموعة تكون مساوية للصفر ، ويكون بالتساوي العمل الافتراضي لجميع القوى المؤثرة في المجموعة (من قوى مفروضة $\delta \mathcal{E}_D$ وقوى رباط $\delta \mathcal{E}_L$) مساوياً للصفر :

$$\delta \mathcal{E}_D + \delta \mathcal{E}_L = 0$$

$$\delta \mathcal{E}_L \geq 0$$

وبما أن

$$\delta \mathcal{E}_D \leq 0$$

فيكون إذن

وهو المطلوب .

كفاية الشوط : لنفرض الآن أن العمل الافتراضي للقوى المفروضة

$\delta \mathcal{E}_D$ يحقق ما يلي :

$$\delta \mathcal{E}_D \leq 0$$

فالمجموعة تكون متوازنة .

بالحقيقة ، إذا لم تكن المجموعة متوازنة ، فإنها تتحرك تحت تأثير القوى

المؤثرة في المجموعة (من قوى مفروضة وقوى الرباط) . فالعمل الحقيقي الجزئي لهذه القوى يكون موجباً :

$$d \mathcal{E}_D + d \mathcal{E}_L > 0$$

وبما أن العمل الحقيقي الجزئي لقوى الرباط مساوٍ للصفر ، أكانت الانتقالات

الحقيقية الجزئية هي انتقالات تساوي (وهذا واضح) أم تراجع (لأن قوى الرباط تغدو آتئذٍ معدومة) ، فالعمل الحقيقي الجزئي للقوى المفروضة يكون إذن موجباً :

$$d \mathcal{E}_D > 0$$

وهذا يخالف الفرض .

١٢٩ - نعين مواضيع التوازن : لنفرض مجموعة نقاط خاضعة لأربطة

معينة بعلاقات تساوي وعلاقات تراجع أو تساوي ، كالعلاقات (108) و (109) .

فقد رأينا أن شرط توازن هذه المجموعة (حين تكون الصلات قائمة) هو

أن يكون :

$$\delta \mathcal{E}_D \leq 0$$

$$(110) \quad \Sigma (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \leq 0$$

أو

من أجل جميع الانتقالات التي تحقق العلاقات (108) و (109) .

فلتعيين مواضع التوازن الموافقة للصلات المفروضة ، نبدأ بتعيين مواضع التوازن الموافقة لعلاقات التساوي في المجموعتين (108) و (109) ، ثم نختار منها المواضع التي تحقق التراجع في المجموعة (109) .

أو بتعبير آخر : نكتب أولاً أن المجموع (110) يساوي الصفر من أجل جميع انتقالات التساوي في المجموعتين (108) و (109) . فنجد بذلك عدداً من مواضع التوازن ، نختار منها مواضع يكون فيها العمل الافتراضي للقوى المفروضة ، من أجل انتقالات التراجع سالباً أو مساوياً للصفر .

فنحصل بذلك على مواضع التوازن التي تكون من أجلها جميع الصلات محققة .

هذا ولتعيين مواضع التوازن ، اعتماداً على مضارب لاغرانج ، نلاحظ ما يلي :

١ - لقد رأينا في حالة انتقالات التساوي أن الشروط اللازمة للتوازن ، هي من الشكل :

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=h} \lambda_{\alpha} A_{\alpha i} = 0 \\ Y_i + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} B_{\alpha i} = 0 \\ Z_i + \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} C_{\alpha i} = 0 \end{array} \right.$$

$i = 1, 2, \dots, n$ بفرض أن

٢ - لنأخذ الآن موضعاً للتوازن معيناً بهذه العلاقات . فلكي يكون هذا الموضع موافقاً لحالة التراجع ، فإنه يلزم ويكفي أن تكون المضارب :

$$\lambda_{g+1}, \lambda_{g+2}, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_h$$

الموافقة للعلاقات (109) سالبة .

بالحقيقة ، إذا حسبنا العمل الافتراضي $\delta \mathcal{C}_D$ من أجل انتقالات معينة
بالعلاقات (108) و (109) ، لوجدنا اعتماداً على العلاقات (107) أن :

$$\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) =$$

$$- \sum_{\alpha=1}^{\alpha=h} [\lambda_{\alpha} \sum_{j=1}^{j=n} (A_{\alpha j} \delta x_j + B_{\alpha j} \delta y_j + C_{\alpha j} \delta z_j)]$$

ونرى (اعتماداً على العلاقات 108) أن :

$$\sum_{\alpha=1}^g [\lambda_{\alpha} \sum_{j=1}^n (A_{\alpha j} \delta x_j + B_{\alpha j} \delta y_j + C_{\alpha j} \delta z_j)] = 0$$

فيكون إذن :

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) =$$

$$- \sum_{\alpha=g+1}^h [\lambda_{\alpha} \sum_{i=1}^n (A_{\alpha i} \delta x_i + B_{\alpha i} \delta y_i + C_{\alpha i} \delta z_i)]$$

وإذا لاحظنا أنه يجب أن يكون :

$$\sum_{i=1}^n (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) < 0$$

من أجل جميع الانتقالات التي تحقق المتراجحات :

$$\sum_{i=1}^n (A_{\alpha i} \delta x_i + B_{\alpha i} \delta y_i + C_{\alpha i} \delta z_i) < 0$$

بفرض أن $\alpha = g+1, g+2, \dots, n$

لأدركنا أن المضارب :

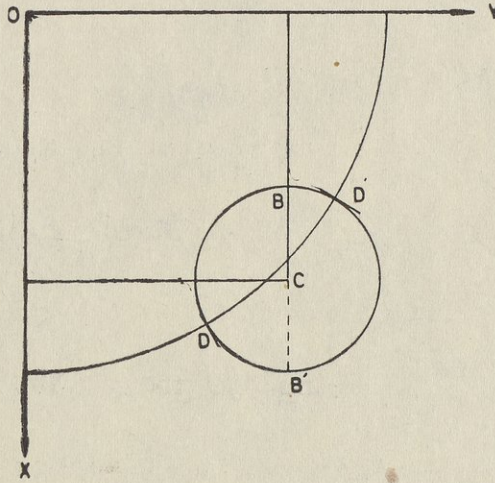
$$\lambda_{g+1}, \lambda_{g+2}, \dots, \lambda_h$$

الموافقة للعلاقات (109) سالبة وهو المطلوب .

مثال : لدينا خيط لدن طوله ثابت وكتلته معدومة (مهملة) . يربط

أحد طرفي الخيط بنقطة ثابتة o ويربط الطرف الآخر منه بنقطة مادية ثقيلة M موضوعة على السطح الخارجي لأسطوانة دورانية أفقية ثابتة .
المطلوب تعيين مواضع توازن النقطة M .

الحل : نعتبر النقطة o هي مبدأ الإحداثيات ، والمحور ox هو الشاقول المأبوط ، والمستوي xoy هو مستوي المقطع القائم للأسطوانة (المحور oy يكون إذن أفقياً) . لنفرض أن مقطع الأسطوانة بالمستوي xoy هو دائرة واقعة في الزاوية xoy (شكل ٣٨) .



(شكل ٣٨)

لنرمز بـ R لنصف قطر هذه الدائرة وبـ (a, b) لإحداثيي مركزها وبـ B لأعلى نقطة من محيطها .

لنفرض أن طول الخيط ، وليكن e ، محصور بين طول القطعة oB وطول المماس المنشأ من o للمقطع المفروض . فالخيط يكون إذن مشدوداً ، والنقطة تغدو مستندة إلى السطح الخارجي للأسطوانة .

نرى أن علاقتي الصلة هما :

$$[1] \quad \begin{cases} \varphi_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ \varphi_2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

وأن الانتقالات الموافقة للصلة تحقق ما يلي :

$$[2] \quad \begin{cases} \delta \varphi_1 = \delta (x^2 + y^2 + z^2) \leq 0 \\ \delta \varphi_2 = \delta [(x - a)^2 + (y - b)^2] \geq 0 \end{cases}$$

فإذا ضربنا طرفي العلاقة الثانية بـ (-1) ، ورمزنا (تسهيلاً للعمل) بـ f_1 و f_2 لـ φ_1 و $\varphi_2 - \frac{1}{2}$ على الترتيب ، لغدت علاقتنا الصلة [1] كما يلي :

$$[3] \quad \begin{cases} 2 f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ 2 f_2 = -(x - a)^2 - (y - b)^2 + R^2 = 0 \end{cases}$$

وغدت بالتالي العلاقتان [2] كما يلي :

$$[4] \quad \begin{cases} \delta f_1 = x \delta x + y \delta y + z \delta z \leq 0 \\ \delta f_2 = -(x - a) \delta x - (y - b) \delta y \leq 0 \end{cases}$$

لنعين مواضع التوازن بطريقتين :

الطريقة الأولى ، وتعتمد على الوسطاء المستقلة .

والطريقة الثانية ، وتعتمد على مضارب لاغرانج .

الطريقة الأولى : نرى أن الإحداثيات (x, y, z) لنقطة M ليست مستقلة عن بعضها ، بل مرتبطة بالعلاقتين [3] . فيمكن إذن تعيين هذه الإحداثيات بدلالة وسيط واحد ، وليكن z مثلاً .

فإذا حسبنا δx و δy بدلالة δz و δf_1 و δf_2 من مجموعة العلاقتين :

$$\begin{cases} \delta f_1 = x \delta x + y \delta y + z \delta z \\ \delta f_2 = -(x - a) \delta x - (y - b) \delta y \end{cases}$$

أو من المجموعة المكافئة لها وهي :

$$\begin{cases} x \delta x + y \delta y = \delta f_1 - z \delta z \\ a \delta x + b \delta y = \delta f_1 + \delta f_2 - z \delta z \end{cases}$$

لوجدنا :

$$[5] \quad \begin{cases} (ay - bx) \delta x = y \delta f_2 + (y - b) \delta f_1 + (b - y) z \delta z \\ (bx - ay) \delta y = x \delta f_2 + (x - a) \delta f_1 + (a - x) z \delta z \end{cases}$$

ونلاحظ أن ثقل النقطة M هو القوة المفروضة الوحيدة المطبقة في النقطة M . فإذا رمزنا بـ m لكثافة M لكان العمل الافتراضي للقوة المفروضة هو :

$$\delta \mathcal{E}_D = mg \delta x$$

وكان الشرط اللازم والكافي للتوازن الموافق للمجموعتين [3] و [4] هو :

$$\delta \mathcal{E}_D \leq 0$$

[6]

$$\delta x \leq 0$$

أو

هذا ولتعيين مواضع التوازن الموافقة للشروط السابقة ، نبدأ أولاً بتعيين مواضع التوازن الموافقة لانتقالات التساوي :

$$\delta f_1 = 0 \quad \delta f_2 = 0$$

ويتم ذلك بكتابة الشرط :

$$\delta \mathcal{E}_D = 0$$

ثم نختار منها المواضع الموافقة لانتقالات التراجع :

$$\delta f_1 < 0 \quad \delta f_2 < 0$$

أي المواضع التي تحقق العلاقة :

$$\delta \mathcal{E}_D < 0$$

إن مواضع التوازن الموافقة لانتقالات التساوي تتعين بالعلاقات :

$$\begin{cases} \delta f_1 = 0 \\ \delta f_2 = 0 \\ \delta \mathcal{E}_D = 0 \end{cases}$$

فمن العلاقة الأولى من المجموعة [5] ، ينتج بعد التعويض :

$$z (b - y) \delta z = 0$$

ونرى أن هذه العلاقة تصبح محققة مهما كان δz ، حين يكون :

$$z (b - y) = 0$$

وهنا نميز حالتين :

$$z = 0$$

(١) نفرض أن

فإذا عوضنا قيمة z في معادلتى الصلة ، لغدت هاتان المعادلتان :

$$x^2 + y^2 = l^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

فنجد موضعين للتوازن D و D' ، هما نقطتا تلاقي مقطعي الكرة والاسطوانة بالمستوي الشاقولي xoy (وهما موضعان موافقان لصلتين ثنائيتي الجانب) .

لنرمز بـ (x, y, z) لإحداثيات أحد هذين الموضعين . ولنبحث فيما إذا كان هذا الموضع موافقاً للصلات المفروضة (وهي صلات وحيدات الجانب) . ويتم ذلك بأن نعطي النقطة M ، بدءاً من هذا الموضع ، انتقالات تراجع معينة بما يلي :

$$\delta f_1 \leq 0$$

$$\delta f_2 \leq 0$$

فيجب أن يكون العمل الافتراضي للقوة المفروضة (وهو $mg \delta x$) من أجل هذه الانتقالات ، سالباً أو مساوياً للصفر :

$$mg \delta x \leq 0$$

فإذا رجعنا إلى العلاقة الأولى من [5] وعوضنا z بالقيمة الموافقة لموضع

التوازن (وهي الصفر) لا ضحت هذه العلاقة :

$$(a y - b x) \delta x = (y - b) \delta f_1 + y \delta f_2$$

وقد رأينا أنه يجب أن يكون :

$$\delta x \leq 0$$

$$\delta f_1 \leq 0$$

$$\delta f_2 \leq 0$$

حين يصبح

فمن أجل الموضع D' ، نجد أن :

$$a y - b x > 0$$

$$y - b > 0$$

$$y > 0$$

فالوضع D' يكون إذن موافقاً .

ومن أجل الوضع D ، نجد أن :

$$a y - b x < 0$$

$$y - b < 0$$

$$y > 0$$

نرى في هذه الحالة أن δx لا يصبح سالباً أو صفراً من أجل جميع القيم

السالبة أو المعدومة لـ δf_1 و δf_2 . فعندما يكون مثلاً :

$$\delta f_1 = 0$$

$$\delta f_2 < 0$$

$$\delta x > 0$$

يفقدو

فالوضع D يكون إذن غير موافق . وهذا واضح ، لأن النقطة M

الموضوعة على سطح الأسطوانة في الموضع D تنفك عن هذا السطح هابطة

إلى الأسفل .

(٢) لنفرض الآن أن :

$$y = b$$

فإذا رجعنا إلى المعادلة الثانية من معادلاتي الصلة [1] لكان :

$$x - a = \pm R$$

فمواضع التوازن (الموافقة لانتقالات التساوي) تقع إذن على أعلى

مولدات الأسطوانة :

$$x = a - R$$

أو تقع على أخفض مولداتها :

$$x = a + R$$

نرى ، اعتماداً على المعادلة الأولى من [1] ، أن هذه المواضع هي نقط تقاطع هذين المولدين مع الكرة التي مركزها o ونصف قطرها ℓ .

ونلاحظ أن الكرة (o, ℓ) تلاقي المولد العلوي $B (x = a - R)$ بنقطتين E و E' متناظرتين بالنسبة للمستوي xoy ، ولا تلاقي المولد السفلي $B' (x = a + R)$.

لندرس الآن إن كان كل من هذين الموضعين موافقاً للصلتين (وحيدتي الجانب) المفروضتين .

نرى أولاً أن إحداثيات الموضعين E و E' هي :

$$\begin{array}{llll} (E) & x = a - R & y = b & z > 0 \\ (E') & x = a - R & y = b & z < 0 \end{array}$$

ونعلم أن الموضع الموافق يجب أن يحقق العلاقة :

$$mg \delta x \leq 0$$

من أجل جميع انتقالات التراجع .

فإذا رجعنا إلى العلاقة الأولى من [5] ، وعوضنا الإحداثيات (x, y, z) بقيمها الموافقة للموضع E (أو E') لكان :

$$\delta x = \frac{y \delta f_2}{a y - b x} = \frac{\delta f_2}{a - x} = \frac{\delta f_2}{R}$$

وبما أن انتقالات التراجع تحقق العلاقة :

$$\delta f_2 \leq 0$$

$$\delta x \leq 0$$

فيكون إذن

فموضعا التوازن E و E' يكونان إذن موافقين .

الطريقة الثانية : وهي طريقة مضارب لاغرانج .

إن مواضع التوازن تتعين في هذه الطريقة بالمعادلات :

$$[7] \quad \begin{cases} X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

والعلاقات :

$$\lambda_1 \leq 0 \quad \lambda_2 \leq 0$$

فإذا علم أن :

$$X = P \quad Y = 0 \quad Z = 0$$

$$\begin{cases} 2 f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 \\ 2 f_2 = - (x - a)^2 - (y - b)^2 + R^2 \end{cases} \quad \text{وأن}$$

لغدت المعادلات السابقة :

$$[8] \quad \begin{cases} P + \lambda_1 x - \lambda_2 (x - a) = 0 \\ \lambda_1 y - \lambda_2 (y - b) = 0 \\ \lambda_1 z = 0 \end{cases}$$

فمن العلاقة الأخيرة ينتج :

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{أو} \quad z = 0$$

(١) فإذا فرضنا أن :

$$z = 0$$

لوجدنا موضعين D و D' (كما رأينا سابقاً) .

وإذا رجعنا إلى المعادلة الثانية من المجموعة [8] :

$$\lambda_1 y = \lambda_2 (y - b)$$

ولاحظنا أن :

$$\begin{array}{lll} \text{من أجل الموضع } D' & y - b > 0 & \text{و} & y > 0 \\ \text{من أجل الموضع } D & y - b < 0 & & y > 0 \end{array}$$

لا أدركنا أن الموضع D' يكون موافقاً ، وأن D غير موافق :

(٢) وإذا فرضنا أن :

$$\lambda_1 = 0$$

لغدت المعادلة الثانية من [8] كما يلي :

$$\lambda_2 (y - b) = 0$$

وإذا لاحظنا أن $\lambda_2 \neq 0$ (إذ لو انعدم λ_2 لأصبحت المعادلة الأولى من [8] غير محققة) ، لكان :

$$P = \lambda_1 (x - a)$$

وإذا علمنا أن $x < a$ من أجل الوضعين E و E' ، لرأينا أن هذين الموضعين موافقان .

١٣٠ — الصلات معينة بعلاقات تساوي أو تراجم : لقد فرضنا في

أبحاثنا السابقة ، أن الصلات التي تخضع لها مجموعة مادية هي معينة بعلاقات تساوي ، وأن الانتقالات الموافقة لهذه الصلات هي معينة بعلاقات تساوي أو تراجم . وقد أوضحنا كيف نعين موضع التوازن حين تكون الصلات قائمة .

لنفرض الآن مجموعة نقاط خاضعة لأربطة معينة بعلاقات تساوي أو تراجم من الشكل :

$$(111) \quad \begin{cases} f_1 (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \\ f_2 (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) = 0 \\ \vdots \\ f_g (x_1, \dots, \dots, z_n) = 0 \end{cases}$$

$$(112) \quad \begin{cases} f_{g+1} (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n) \leq 0 \\ f_{g+2} (x_1, \dots, \dots, z_n) \leq 0 \\ \vdots \\ f_h (x_1, \dots, \dots, z_n) \leq 0 \end{cases}$$

وتكتب هذه العلاقات ، اختصاراً ، على الشكل التالي :

$$(111) \quad \begin{cases} f_{\alpha} (x_i, y_i, z_i) = 0 \\ \alpha = 1, 2, \dots, g \end{cases}$$

$$(112) \quad \begin{cases} f_{\beta} (x_i, y_i, z_i) \leq 0 \\ \beta = g+1, g+2, \dots, h \end{cases} \quad \text{و}$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad \text{بفرض أن}$$

لنعين مواضع توازن هذه المجموعة :

نقول ، اختصاراً في التعبير ، إن الصلة f_{g+1} مثلاً هي محققة أو قائمة ، إذا كانت المجموعة في وضع يكون فيه التابع :

$$f_{g+1} (x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$$

مساوياً للصفر .

ونقول إن الصلة f_{g+1} غير قائمة ، إذا كانت المجموعة في وضع يكون من أجله التابع f_{g+1} محققاً للمراجعة :

$$f_{g+1} < 0$$

إن تعيين مواضع التوازن في الحالة التي تكون فيها الصلات معينة بعلاقات تساوي أو تراجع يعتمد على الحالات التي درسناها سابقاً .

سنوضح ذلك في المثال التالي :

مثال : لقد وجدنا في المثال السابق مواضع توازن النقطة المادية M حين كان الحيط مشدوداً وكانت النقطة موضوعة على السطح الخارجي للأسطوانة ، أي حين كانت الصلتان التاليتان محققتين :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

لنعين الآن مواضع التوازن حين يكون :

$$x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 \leq 0$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 \geq 0$$

الحل : نميز عدة حالات :

(١) نأخذ أولاً حالة التساوي :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

ف نجد المواضع التي عيناها سابقاً .

(٢) نعين مواضع التوازن التي تحقق ما يلي :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - \ell^2 < 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$

أي المواضع التي تكون فيها النقطة موضوعة على الأسطوانة من جهة ، ويكون الحيط غير مشدود من جهة ثانية .

فنرى أن نقط المولد B المحصورة بين موضعين التوازن E و E' (المعينين سابقاً) هي مواضع التوازن المطلوبة .

(٣) نعين مواضع التوازن بحيث يكون :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 > 0 \end{cases}$$

أي المواضع التي يكون فيها الحيط مشدوداً والنقطة خارج الأسطوانة .
فهناك موضع توازن وحيد ، وهو الموضع الذي تتوازن فيه نقطة مادية
ثقيلة مربوطة بخيط .

(٤) نبحث عن مواضع التوازن التي من أجلها يكون :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - l^2 < 0 \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 - R^2 > 0 \end{cases}$$

أي المواضع التي يكون فيها الحيط غير مشدود والنقطة خارج الأسطوانة .
نرى بسهولة أن ليس هناك أي موضع للتوازن .

تمارين

١ - OAB قطاع دائري غير ثقليل يستطيع الدوران في مستويه حول مركزه الثابت O . تؤثر في القطاع قوتان شاقوليتان : إحداهما P مطبقة في A ، والثانية Q مطبقة في B .
عين شروط توازن الجسم .

٢ - لدينا قرص دائري متجانس (نصف قطره R) يستطيع الدوران حول مركزه الثابت O . يُلف على محيط القرص خيط يُعلق في نهايته ثقل معلوم P .

نفرض خيطاً آخر يمر داخل حلقة صغيرة B موضوعة على شاقول نقطة O ($OB = b$) ، فنربط إحدى نهايتيه في نقطة A من سطح القرص ($OA = a$) ، ويُعلق في النهاية الثانية منه ثقل Q .
عين الزاوية الكائنة بين OA و OB حين تتوازن المجموعة .

٣ - OA قضيب متجانس ثقليل يستطيع الدوران في مستو شاقولي ثابت حول نهايته المثبتة O . تربط النهاية A بخيط لا ثقل له ، يمر بمحزّ بكرة صغيرة B كائنة في المستوي الشاقولي للدوران وفي موضع من أفق النقطة O . يُعلق في نهاية الخيط ثقل Q .

فإذا فرض أن ثقل القضيب هو P ، وأن :

$$OA = a \quad OB = b$$

فالمطلوب تعيين زاوية OA والاتق في الوضع التوازني للقضيب وذلك :

$$(١) \text{ إذا فرض أن } a = b$$

(٢) إذا فرض أن $a \neq b$

٤ - نفرض في مستو شاقولي ثابت محورين متعامدين للإحداثيات ox و oy (شاقولي هابط) ، ونقطة ثابتة $A(3a, 0)$ ، بفرض أن a هو طول مفروض .

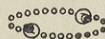
oB و AC قضيبان متجانسان طول كل منهما a وثقل كل منهما P ، يتحركان بدون احتكاك في مستوى الإحداثيات : الأول يدور حول o والثاني حول A . فإذا فرض :

(١) أن النهايتين B و C مربوطتان بخيط لدن طوله $2a$ ولا ثقل له ، فالمطلوب تعيين الوضع التوازني للمجموعة ، ثم تعيين ردّي فعل النقطتين o و A في القضيبين ، ثم شدّ الخيط .

(٢) أن النهايتين B و C مرتبطتان مفصلياً بقضيب متجانس طوله $2a$ وثقله $2P$ ، فالمطلوب تعيين الوضع التوازني للمجموعة ، ثم تعيين ردّ فعل النقطة o في القضيب ورد فعل القضيب BC في القضيب oB . استنتج ردّي فعل النقطة A والقضيب CB في القضيب AC .

(٣) أن النهايتين مرتبطتان بخيط قابل للشدّ ، طوله الطبيعي $2a$ ولا ثقل له . شدّ الخيط حين يمتدّ متناسب مع زيادة طول الخيط ، أمثال التناسب $M\omega^2$ (M كتلة القضيب oA و ω مقدار ثابت) .

عين الوضع التوازني للمجموعة . ناقش .



الفصل الخامس

الجسم المتغير مع الزمن

تمهيد : لقد اعتبرنا في أبحاثنا السابقة أن الأجسام الصلبة هي أجسام صلبة وصغيرة تماماً ، وقبلنا في حالة جسمين :

(١) ساكنين أو متحركين .

(٢) متلامسين في نقطة (ولتكن I) .

(٣) يستطيع أحدهما الانزلاق على الآخر .

أن التأثير المتبادل بين هذين الجسمين (الفعل ورد الفعل) هو عمودي على المستوي المماس المشترك للجسمين في النقطة I .

إن هذه الفرضية تخالف التجربة . فالأجسام الطبيعية ليست تامة الصلابة ولا تامة الصقل . فعندما يكون جسم ملامساً لآخر ، فإن الملامسة لا تكون بنقطة هندسية واحدة فحسب ، بل تقع على قطعة صغيرة من سطح : وذلك لأن نحولاً يطرأ على شكل كل من الجسمين المتلامسين ينشأ عن تأثير الضغط المتبادل بين الجسمين .

١٣١ — **ماتة جسمين متلامسين :** لنفرض جسمين سطحاهما الخارجي

S_1 و S_2 متلامسان بنقطة مثل I . ليكن π المستوي المماس لهذين السطحين في نقطة التماس I .

لنفرض أن الجسم S متحرك بالنسبة للجسم S_1 . أما الجسم S_1 فقد يكون ثابتاً أو متحركاً في الفراغ .

لنرمز بـ A و A_1 لنقطتين من السطحين S و S_1 على الترتيب انطبقتا في لحظة ما t على نقطة التماس I .

لقد سبق أن أوردنا الصفة الحركية للجسم S . فرأينا أن سرعة انزلاق S بالنسبة لـ S_1 (وهي سرعة A في الحركة $\frac{S}{S_1}$ ، وقد أشرنا إليها بـ w) تقع في المستوي المماس π للسطحين المتلامسين في النقطة I . ورأينا أن سرع نقط الجسم S في الحركة $(\frac{S}{S_1})$ توزع في اللحظة المفروضة t كما لو كانت حركة الجسم S بالنسبة للجسم S_1 هي حركة انسحاب سرعتها $V(A)S_1$ (وهي سرعة الانزلاق w) ودوران آني حول محور مار من النقطة A (وقد رمزنا لشعاع الدوران بـ ω). كما رأينا أيضاً أن لشعاع الدوران ω مركبتين ، إحداها مماسية ω_1 (واقعة في المستوي المماس π للسطحين المتلامسين في النقطة I وتدعى بسرعة التدحرج) والآخرى ناظمية ω_n (واقعة على الناظم في I للسطحين المتلامسين وتدعى بسرعة الفتل) .

لنبحث الآن في الصفة التحريكية للجسم S . نرى أنه عندما يكون جسمان S و S_1 متلامسين بضغط ، فشكل كل من الجسمين يتغير (حول نقطة التماس) والملازمة لا تكون عندئذ بنقطة هندسية واحدة بل بنقط سطح صغير (يحيط بنقطة التماس) تقع عليها القوى المتعاكسة للتأثير المتبادل بين السطحين . وإذا لاحظنا أن مجموعة القوى الناشئة من تأثير أحد الجسمين في الآخر يمكن ردها إلى قوة (مطبقة في إحدى نقط التماس) ومزدوجة ، وأن الملازمة بين السطحين واقعة على مساحة صغيرة جداً ، لا دركنا أنه يمكن أن نعتبر هندسياً أن الملازمة تتم بنقطة واحدة هي النقطة I (التي نسميها بالنقطة الهندسية للتماس) ، وأن نرد القوى الناشئة من تأثير أحد الجسمين ، وليكن S_1 ، في الجسم الآخر S ، إلى العناصر التالية :

(١) إلى قوة N مطبقة في نقطة التماس الهندسية A عمودياً على السطحين المتلامسين .

هذه القوة هي رد الفعل الناظمي الذي يعاكس اختراق الجسمين لبعضهما .

(٢) وإلى قوة T مطبقة في نقطة التماس ذاتها و كائنة في المستوي المماس في A للسطحين المتلامسين (منحى هذه القوة هو منحى سرعة الانزلاق w ، واتجاهها هو الاتجاه المعاكس لسرعة الانزلاق) .

هذه القوة هي قوة احتكاك الانزلاق ، وهي تعاكس الانزلاق .

(٣) مزدوجة k محورها عمودي على السطحين في نقطة التماس (اتجاه هذا المحور هو الاتجاه المعاكس لسرعة القتل ω_N) .

هذه المزدوجة هي مزدوجة احتكاك القتل ، وهي تعاكس القتل .

(٤) مزدوجة H محورها واقع في المستوي المماس في A للسطحين المتلامسين (منحى هذا المحور هو منحى سرعة التدرج ω_t ، واتجاهه هو الاتجاه المعاكس لهذه السرعة) .

هذه المزدوجة ، هي مزدوجة احتكاك التدرج ، وهي تعاكس التدرج .

والخلاصة ، يمكن رد القوى الناشئة من تأثير S_1 في S إلى قوة R ، هي حاصلتي القوتين T و N ، وإلى مزدوجة C هي حاصلتي المزدوجتين H و K .

هذا ونرى أن القوى الناشئة من تأثير S في S_1 يمكن ردّها أيضاً إلى قوة R_1 (هي حاصلتي قوتين T_1 و N_1) ومزدوجة C_1 (هي حاصلتي مزدوجتين H_1 و K_1) . كما نرى أيضاً أن القوى T_1 و N_1 و R_1 تعاكس مباشرة القوى T و N و R ، وأن محاور المزدوجات H_1 و K_1 و C_1 تعاكس مباشرة محاور المزدوجات H و K و C .

ونلاحظ بوجه عام أن المزدوجة C هي صغيرة بالنسبة للقوة R فيمكن إهمالها في بعض الحالات .

سنبدأ بدراسة الحالات التي يمكن فيها إهمال المزدوجة C ، ثم ندرس بعدها حالات التدحرج والقتل .

ملاحظة : لقد فرضنا فيما سبق أن الجسمين S و S_1 متلامسان بنقطة هندسية واحدة . لكن هنالك حالات تكون فيها الملامسة بنقط هندسية غير محدودة العدد ، كحالة هرم يستند بقاعدته إلى مستو . ففي هذه الحالة نطبق على كل نقطة تماس هندسية ما أوردناه في نقطة التماس الواحدة .

احتكاك الانزلاق :

تمهيد : نميز نوعين من احتكاك الانزلاق :

- (١) احتكاك في حالة السكون ، وبوجه خاص ، الاحتكاك عند الانطلاق (أي حين تبدأ الحركة بعد السكون) .
- (٢) احتكاك في حالة الحركة .

١٣٢ — الاحتكاك في حالة السكون : لنذكر من جديد التجربة التي

أوردناها سابقاً^(١) ، وهي كما يلي :

نضع جسماً ثقله P على منصدة أفقية . فإن هذا الجسم يبقى تحت تأثير ثقله ملازماً للمنصدة متوازناً عليها .

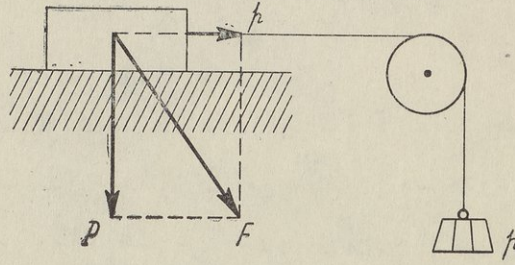
نرى أن القوى الناشئة من تأثير المنصدة في الجسم ترد في هذه الحالة إلى قوة N عمودية على المنصدة تعاكس مباشرة ثقل الجسم P .

لنؤثر الآن على الجسم بقوة أفقية متزايدة واقعة في المستوي الشاقولي

(١) في الجزء الأول من كتاب الميكانيك .

لمركز ثقل الجسم (ويتم ذلك بربط الجسم بمجبل يمر بمحز بكرة يشده ثقل متزايد p) .

فعندما يكون قياس القوة الأفقية صغيراً ، فالجسم يبقى متوازناً تحت تأثير قوتين ، هما الثقل P والقوة الأفقية التي قياسها p ، أو تحت تأثير حاصلتهما F (شكل ٣٩) .



(شكل ٣٩)

ففي هذه الحالة يكون رد فعل المنضدة في الجسم ، وليكن R ، معاكساً مباشرة للحاصلة F .

نرى أن رد الفعل R يمكن تفريقه إلى مركبتين : مركبة ناظمية N معاكسة مباشرة للثقل P ، ومركبة مماسية T معاكسة مباشرة للقوة الأفقية التي قياسها p .

نسمي المركبة المماسية بقوة الاحتكاك .

وإذا رمزنا بـ F_T و F_N للمركبتين (المماسية والناظمية) للحاصلة F (وهما في مثالنا القوة الأفقية التي قياسها p والثقل P) لكان :

$$F_T = - T \quad F_N = - N$$

وإذا أشرنا بـ α للزاوية الكائنة بين الحاصلة F والمركبة النازمية F_N ،

ليكن :

$$T_g \alpha = \frac{p}{P} = \frac{F_T}{F_N}$$

وكان بالتالي :

$$T_g \alpha = \frac{T}{N}$$

بفرض أن F_T و F_N و T و N هي القيم المطلقة للقوى (وليست بالقيم الجبرية) .

وإذا جعلنا المركبة المماسية F_T (أو القوة الأفقية التي قياسها p) تأخذ قيمةً مطلقةً متزايدة ، فالتوازن يبقى قائماً حتى حدّ محدود p_1 لهذه القيم المتزايدة . فإذا أوشك الجسم على الخروج عن توازنه ليزلق على المنضدة عندما يكاد يقهر رد الفعل R ، يقال عند للمركبة المماسية لرد الفعل الأقصى بأنها تمثل الاحتكاك عند الانطلاق ، ونرمز لها بـ T_1 .

وإذا أشرنا بـ φ للزاوية α الموافقة للاحتكاك عند الانطلاق ليكن :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p_1}{P}$$

وكان بالتالي :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{T_1}{N} \quad (113)$$

وقد وجد بالتجربة أن الاحتكاك عند الانطلاق :

(١) لا يتوقف على مساحات السطوح المتماسية .

(٢) وإنما يتوقف على نوعها .

(٣) ويكون متناسباً مع المركبة الناعمية N لرد الفعل أو مع المركبة

الناعمية للحصول على F :

(114)

$$T_1 = f \cdot N$$

$$T_1 = f \cdot F_N$$

أو

٢ عدد ثابت تتوقف قيمته على طبيعة الجسمين المتلامسين ويدعى أمثال الاحتكاك .

هذا ونلاحظ ، اعتماداً على العلاقة (113) ، أن :

(115)

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$

فشرط التوازن يمكن كتابته إذن :

(116)

$$F_T < f \cdot F_N$$

(117)

$$\alpha < \varphi$$

أو

١٣٣ — توازن الأجسام الطبيعية مع احتكاك : لنفرض جسماً S

يستند إلى حاجز واحد أو حواجز عديدة . لتعين الشروط اللازمة والكافية لتوازن هذا الجسم .

نميز عدة حالات :

١ — حالة نقطة استناد واحدة : نفرض أن الجسم S المستند إلى حاجز

ثابت Σ يلامس هذا الحاجز بنقطة واحدة A .

ليكن R رد فعل الحاجز في الجسم . نرى أنه يمكن تفريق R إلى

مركتبتين :

(١) مركبة ناظمية N واقعة على الناظم في A للسطحين المتلامسين .

(٢) مركبة مماسية T واقعة في المستوي المماس في A للسطحين

المفروضين . القيمة العظمى لهذه المركبة هي $f \cdot N$.

فلنكن يتوازن الجسم S يلزم أن تكون القوى المفروضة المطبقة في الجسم ورد الفعل R متوازنة ، أو أن تكون القوى المفروضة مكافئة لقوة وحيدة :

(١) مارّة من النقطة A .

(٢) متجهة بحيث تُسند S إلى Σ .

(٣) تصنع مع الناظم في A للسطحين المتلامسين زاوية أصغر من زاوية الاحتكاك φ .

إن هذه الشروط اللازمة للتوازن هي أيضاً شروط كافية .

بالحقيقة ، إذا تحققت هذه الشروط لأمكن تفريق حاصلة القوى المفروضة المطبقة في الجسم S (يمكن اعتبار نقطة تطبيق الحاصلة ، وهي قوة منزلة ، هي النقطة A) إلى مركبتين : إحداهما مماسية F_T والاخرى ناظمية F_N . وبما أن الزاوية الكائنة بين الحاصلة والمركبة الناظمية F_N هي أصغر من زاوية الاحتكاك φ ، فيكون :

$$\frac{F_T}{F_N} < \operatorname{tg} \varphi$$

وإذا لاحظنا أن :

$$f = \operatorname{tg} \varphi$$

$$F_T < f \cdot F_N$$

لكان

فالمركبة المماسية F_T تكون إذن أصغر من الاحتكاك عند الانطلاق ، والجسم يغدو متوازناً ، وهو المطلوب .

هذا وإذا أنشأنا المخروط الدوراني C الذي محوره هو الناظم في A للسطحين المتلامسين ونصف زاويته الرأسية هي زاوية الاحتكاك ، لكان الشرط اللازم والكافي للتوازن هو أن تكون القوى المفروضة مكافئة لقوة وحيدة (هي حاصلة القوى) مارّة من النقطة A وواقعة داخل المخروط C .

٢ - حالة نقط تماس عريضة : لنفرض جسماً S يستند إلى حواجز

ثابتة Σ_1 و Σ_2 و ... و Σ_p بالنقط A_1 و A_2 و ... و A_p مع وجود احتكاك : أمثاله f_1 و f_2 و ... و f_p وزواياه φ_1 و φ_2 و ... و φ_p على التوالي .

لتكن F_1 و F_2 و ... و F_n القوى المفروضة المطبقة في الجسم S .
لنعين شروط توازن الجسم .

إن رد فعل R_j في S هو قوة R_j :

(١) مطبقة في النقطة A_j .

(٢) تصنع مع الناظم $A_j N_j$ للسطحين المتلامسين S و Σ_j زاوية حادة α_j ، ويكون :

$$\alpha_j < \varphi_j$$

فالقوة R_j تقع إذن داخل مخروط دوراني C_j : محوره $A_j N_j$ ونصف زاويته الرأسية φ_j .

فلكي يكون هنالك توازن يلزم ويكفي أن تتوازن المجموعة المؤلفة من :

(١) مجموعة القوى المفروضة F_1 و F_2 و ... و F_n .

(٢) مجموعة ردود الفعل R_1 و R_2 و ... و R_p المحققة للشروط السابقة .

فلكي يتوازن الجسم S يلزم ويكفي إذن أن تكون مجموعة القوى المفروضة مكافئة لمجموعة القوى :

$$(-R_1, -R_2, \dots, -R_p)$$

التي تمر من النقطة :

$$(A_1, A_2, \dots, A_p)$$

على الترتيب ، وتقع داخل المخاريط :

($C_1, C_2, \dots, C_p$)

إن القوى الأخيرة تعينها ردود فعل السطوح :

($\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$)

٣ — مائة نقط تماس غير محدودة العدد : لنفرض أن الجسم S يستند إلى الحواجز Σ_j بسطوح محدودة .

فلسي يتوازن الجسم S يلزم ويكفي أن تكون مجموعة القوى المفروضة المطبقة في S مكافئة لمجموعة مؤلفة من عدد ما من قوى ، ويشترط في هذه القوى :

(١) أن تلاقي سطوح التماس .

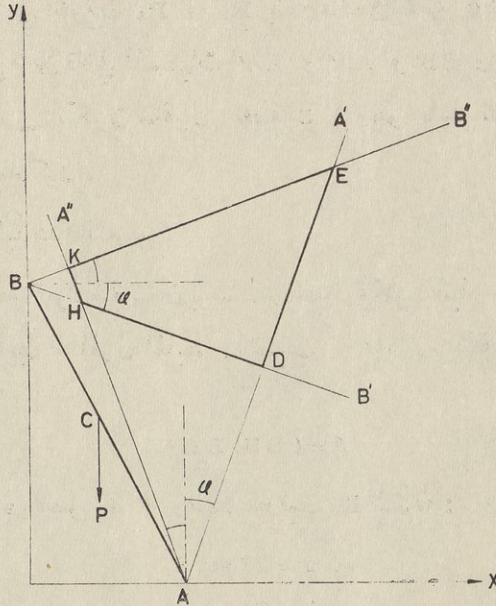
(٢) أن تكون الزوايا الحادة التي تصنعها القوى مع النواظم في نقط التلاقي أصغر من زوايا الاحتكاك الموافقة .

مثال : ox و oy محوران متعامدان (oy شاقولي صاعد) . AB قضيب متجانس (طوله $2l$ وثقله Q) يستند بنهايتيه A و B إلى المحورين ox و oy على الترتيب . M نقطة مادية (ثقلها Q_1) مثبتة على القضيب AB . عين الوضع التوازني للمجموعة بفرض وجود احتكاك بين القضيب والمحورين (أمثاله f في كل من A و B) .

الحل : إن المجموعة المؤلفة من القضيب AB والنقطة M هي خاضعة لثقلها ولردي الفعل في النقطتين A و B . فتوازن المجموعة يستلزم إذن توازن هذه القوى .

فرد الفعل في A ، ولنرمز له بـ R_A ، هو قوة مطبقة في النقطة A . وتكون هذه القوة (في حالة التوازن) : واقعة داخل الزاوية $A'AA''$ التي يصنع كل من ضلعها AA' و BB' مع العمود على المحور ox زاوية مساوية لزاوية الاحتكاك φ .

ورد الفعل في B ، ولترمز له بـ R_B ، هو قوة مطبقة في النقطة B .
وتكون هذه القوة أيضاً واقعة (في حالة التوازن) داخل الزاوية $B'BB''$ التي
يصنع كل من ضلعيها BB' و BB'' مع العمود على المحور oy زاوية φ .



(شكل ٣٩)

أما ثقل المجموعة ، ولترمز له بـ P ، فيساوي مجموع ثقلي القضيب والنقطة :

$$P = Q + Q_1$$

وهو قوة مطبقة في مركز عطالة المجموعة C . ويتعين المركز C من العلاقة :

$$[1] \quad (Q + Q_1) \mathbf{BC} = Q \mathbf{BG} + Q_1 \mathbf{BM}$$

بفرض أن G هو مركز عطالة القضيب (ويقع G في منتصف القضيب) .

وإذا رمزنا بـ λ للطول BC ، وبـ ℓ_1 للطول BM ، لأمكن كتابة

العلاقة السابقة بالشكل التالي :

$$[2] \quad \lambda = \frac{Q \ell + Q_1 \ell_1}{Q + Q_1}$$

هذا وإذا لاحظنا أن القوى المؤثرة الثلاث ليست متوازية فيما بينها ، لأدركنا أن توازن هذه القوى يستلزم تلاقيها بنقطة واحدة .

وبما أن حاملي القوتين R_A و R_B يتقاطعان في نقطة كائنة داخل المضلع DHKE الناشئ من تلاقي المستقيمتين AA' و AA'' و BB' و BB'' ، فيستتوئ إذن للتوازن أن يكون شاقول النقطة C (وهو حامل ثقل المجموعة P) قاطعاً للمضلع المذكور .

لتعين تحليلياً هذا الشرط :

إن المجموعة المفروضة تتعين بوسيط واحد . يمكن اعتبار هذا الوسيط هو الزاوية الكائنة بين الشاقول الهابط والقضيب . فإذا رمزنا لهذه الزاوية بـ β لكان :

$$\beta = (BO, BA)$$

وإذا أشرنا بـ a لفصل A ، وبـ b لترتيب B لكان :

$$[3] \quad \begin{cases} a = 2 \ell \sin \beta \\ b = 2 \ell \cos \beta \end{cases}$$

نرى أن شرط التوازن هو أن يكون فصل أقرب رؤوس المضلع DEKH (شكل ٣٩) إلى المحور oy (وهو الرأس K) أصغر من فصل مركز العطالة C .

لتعين الآن فصل الرأس K . إن هذا الرأس هو نقطة تلاقي المستقيمتين AA'' و BB'' .

فالمستقيم BB'' يتعين بالمعادلة :

$$y - b = x \cdot \operatorname{tg} \varphi$$

والمستقيم AA'' يتعين بالمعادلة :

$$y = (x - a) \operatorname{tg} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

فصل النقطة K يتعين إذن من المعادلتين :

$$[4] \quad \begin{cases} y = b + f \cdot x \\ y = -\frac{x - a}{f} \end{cases}$$

فإذا رمزنا بـ X لفصل K لكان :

$$[5] \quad X = \frac{a - b f}{1 + f^2}$$

وإذا رمزنا بـ ξ لفصل مركز العطالة C لكان :

$$\xi = \lambda \cdot \sin \beta$$

وكان بالتالي ، اعتماداً على العلاقة [2] :

$$[6] \quad \xi = \frac{Q \ell + Q_1 \ell_1}{Q + Q_1} \sin \beta$$

فشرط التوازن ، وهو :

$$X < \xi$$

يكتب إذن :

$$[7] \quad \frac{a - b f}{1 + f^2} < \frac{Q \ell + Q_1 \ell_1}{Q + Q_1} \sin \beta$$

وبعد تعويض a و b و f بقيمها بدلالة β أو φ تصبح العلاقة الأخيرة بالشكل :

$$[8] \quad 2 \ell \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} < \frac{Q \ell + Q_1 \ell_1}{Q + Q_1} \operatorname{tg} \beta$$

أو بالشكل التالي :

$$[9] \quad \sin (\beta - \varphi) \cos \varphi < \frac{Q \ell + Q_1 \ell_1}{2 \ell (Q + Q_1)} \sin \beta$$

هذا وإذا فرضنا أنه يمكن للنقطة M أن تُشغل مواضع مختلفة على القضيب AB ، لرأينا أنه :

(١) في الحالة التي يكون فيها :

$$\beta \leq \varphi$$

فالمجموعة تتوازن مهما كان موضع النقطة على القضيب .

(٢) في الحالة التي يكون فيها :

$$\sin (\beta - \varphi) \cos \varphi < \frac{Q}{2(Q + Q_1)} \sin \beta$$

فالمجموعة تتوازن مهما كان موضع M على القضيب .

ملاحظة : نرى أن حالة توازن القضيب والنقطة لا تختلف عن حالة توازن رجل يتنقل على سلم مستند إلى أرض أفقية وجدار شاقولي .

١٣٤ — احتكاك الانزلاق أثناء الحركة : لنفرض جسماً يتحرك في الفراغ بحيث يبقى سطحه الخارجي S ملامساً بنقطة A لسطح جسم آخر S' . فإذا كان بين السطحين احتكاك ، لأمكن تفريق رد فعل S' في S إلى مركبتين :

إحداهما ناظمية N ، وتدعى برد الفعل الناظمي .

والثانية مماسية T ، وتدعى بقوة الاحتكاك أثناء الحركة .

ونرى أن قوة الاحتكاك هذه ، تخضع للقوانين التالية :

(١) إن اتجاه هذه القوة هو الاتجاه المعاكس لسرعة A (A هي نقطة من S) بالنسبة لـ S' (أي سرعة الانزلاق w) :

- (٢) إن قياسها مستقل عن قياس سرعة الانزلاق w .
 (٣) إن قياسها متناسب مع قياس رد الفعل الناظمي N :

$$|T| = f |N| \quad (119)$$

أمثال التناسب f هو أمثال احتكاك الجسم S الذي ينزلق على الجسم S' .
 يلاحظ أن أمثال الاحتكاك أثناء الحركة هي أصغر بقليل من أمثال الاحتكاك عند الانطلاق .

هذا وتدل التجربة على أن هذه القوانين هي صحيحة في حالة جسمين متلامسين مباشرة (أي سطحين جافين لا يفصل بينهما أية مادة لزجة) .

امتلاك التدحرج والقتل :

١٣٥ — امتلاك التدحرج عند الانطراق : لقد سبق أن عرفنا بوجه عام (بند ١٣١) مزدوجة القتل (التي تقاوم القتل) ، ومزدوجة التدحرج (التي تقاوم التدحرج) .
 لنأخذ الآن حالة بسيطة ، هي حالة أسطوانة S موضوعة على مستو مفروض Σ .

لنفرض أن الأسطوانة تستطيع الانزلاق والتدحرج على المستوي . فإذا اعتبرنا أن الملامسة بين الأسطوانة والمستوي واقعة على مولد للأسطوانة ، وأن القوى المفروضة المطبقة في الأسطوانة كائنة في أحد مستويات مقاطعها القائمة (وليكن المستوي π) ، لا يمكن رد القوى المفروضة في النقطة A (وهي نقطة من S يكون فيها المقطع المذكور مماساً للمستوي Σ) إلى :

(١) قوة F مطبقة في النقطة A من الأسطوانة .

(٢) ومزدوجة C محورها عمودي على المستوي π .

لنفرق F إلى مركبتين : مركبة ناظرية F_N عمودية على المستوي Σ ،
ومركبة مماسية F_T واقعة في هذا المستوي .

فالقوة F_T تعمل على تحريك الأسطوانة لتزلق على المستوي .

أما المزدوجة C فتعمل على تحريك الأسطوانة بحيث تدور حول مولد التماس ، أي تتدحرج على المستوي (لأن مولد التماس يكون في حالة التدحرج محوراً آنياً للدوران) .

لنفرض الآن أن المزدوجة C معدومة . فيمكن عندئذ أن ينشأ انزلاق . ونعلم أن هذا الانزلاق لا يتم حين يكون :

$$F_T < f \cdot F_N$$

باعتبار أن f هو أمثال الاحتكاك في الانزلاق .

لنفرض أن هذا الشرط محقق . ولنؤثر على الأسطوانة ، إضافة إلى القوى المفروضة ، بمزدوجة C محورها عمودي على المستوي π . فإذا لم يكن هنالك مقاومة للتدحرج ، فالمزدوجة C تعمل على تحريك الأسطوانة لتتدحرج على المستوي ، مهما كانت هذه المزدوجة صغيرة .
لكن التجربة لا تؤيد ذلك :

فهي تدل على أن التدحرج لا يقع حين يكون قياس محور المزدوجة C ،
ولنرمز له بـ H ، أصغر من مقدار محدود متناسب مع F_N :

$$H < \delta \cdot F_N$$

نسمي أمثال التناسب δ بأمثال احتكاك التدحرج .

وقد دلت التجربة على أن الأمثال δ هي مستقلة (لحد ما) عن القوة F وعن تقوس المقطع القائم للأسطوانة المتدحرجة .

نرى أن شروط توازن الأسطوانة على المستوي هي معينة بالعلاقين :

$$(120) \quad F_T < f \cdot F_N$$

$$(121) \quad H < \delta \cdot F_N$$

وتدل الأولى على عدم وجود انزلاق ، والثانية على عدم وجود تدحرج .
ونعلم أن المستوي يرد على فعل الأسطوانة بقوة R (تعاكس F مباشرة) ومزدوجة Γ (تعاكس C مباشرة) . ويتضح ذلك إذا أدركنا أن الملامسة تقوم في الواقع على نطاق سطح محدود يحيط بالنقطة A : فإذا رددنا في A القوى الناشئة عن تأثير المستوي في الأسطوانة (وهي ردود الفعل) لوجدنا قوة ومزدوجة . هذه المزدوجة Γ هي مزدوجة احتكاك التدحرج .

نستخلص مما سبق أنه :

(١) إذا تحقق الشرطان (120) و (121) معاً ، فالأسطوانة تكون متوازنة .

(٢) إذا تحقق أحد الشرطين (120) أو (121) دون الآخر : بأن تحقق الشرط (120) مثلاً ، فالأسطوانة تشرع بالتدحرج دون انزلاق .

وإن تحقق الشرط (121) فيحسب ، فالأسطوانة تشرع بالانزلاق دون تدحرج .

(٣) إذا لم يتحقق أي من الشرطين السابقين ، فهناك تدحرج وانزلاق بآن واحد . بمعنى أن الانتقال الجزئي للأسطوانة يكون مركباً من انزلاق ودوران حول مولد التماس .

١٣٦ - اصطك التمرصع أثناء الحركة : حين تكون الأسطوانة (في مثالنا السابق) متحركة ، فإننا نقبل ما يلي :

(١) في الحالة التي تكون فيها الحركة هي تدحرج فيحسب ، فإن رد فعل

المستوي المقاوم للتدحرج ، يبلغ أبدأً نهايته العظمى . فمقدار محور المزدوجة الممثلة لاحتكاك التدحرج يغدو مساوياً ، أثناء الحركة ، إلى δN (بفرض أن N هو مقدار المركبة الناعمية لرد فعل المستوي) .

(٢) في الحالة التي تكون فيها الحركة هي انزلاق فحسب ، فقياس المركبة المماسية T لرد فعل المستوي يغدو مساوياً أبدأً إلى fN (كما رأينا ذلك في البند ١٣٤) .

(٣) في الحالة التي تكون فيها الحركة هي تدحرج وانزلاق معاً ، فيجب أن ندخل في الاعتبار الاحتكاك كين معاً . ويهمل عادة في هذه الحالة احتكاك التدحرج .

١٣٧ — انعطاك القتل : يمكن أن نقبل في الحالات البسيطة ، أن مقدار محور مزدوجة احتكاك القتل :

(١) يكون في حالة التوازن ، أصغر من εN (بفرض أن ε هي أمثال مشابهة للأمثال δ) .

(٢) يصبح في حالة الحركة ، مساوياً أبدأً لـ εN .

مثال : وضعت أسطوانة دورانية متجانسة S (ثقلها P ونصف قطرها R) على مستو مائل Σ (زاوية ميله α) .

المطلوب تعيين الشروط بحيث :

(١) لا تشرع الأسطوانة بالتدحرج على المستوي المائل .

(٢) تبقى الأسطوانة متوازنة على هذا المستوي .

الحل : (١) لنرمز بـ D لمولد التماس ، وبـ β للزاوية الحادة الكائنة بين مولد التماس D والخط ذي الميل الأعظم للمستوي .

إن القوى المفروضة المطبقة في الأسطوانة هي ثقلها P .

لنرمز بـ H لعزم P بالنسبة لمولد التماس D ، وبـ H لقياس هذا العزم .

لننشئ من مركز عتالة الأسطوانة (لنرمز بـ C لهذا المركز) مستويًا π عمودياً على محور الأسطوانة (هو مستوي المقطع القائم للأسطوانة الماراً من C) . لتكن A النقطة التي يتلاقى فيها مولد التماس D والمستوي π .

نرى أن القوى المفروضة (وهي الثقل P) ترد في النقطة A إلى قوة F (تساوي P) ومزدوجة E (محورها K هو عزم P في A) .

ونعلم أن المركبة المماسية F_T (وهي مسقط F على المستوي المائل) هي القوة التي تعمل على تحريك الأسطوانة لتتزلق على المستوي Σ ، وأن المزدوجة التي محورها H (وهو عزم P بالنسبة لمولد التماس D) هي المزدوجة C التي تعمل على تحريك الأسطوانة بحيث تدور حول مولد التماس (أي تتدحرج على المستوي Σ) .

لنعيّن المركبتين F_T و F_N للقوة F (أو الثقل P) :
إن مسقط P على المستوي Σ يقع على الخط ذي الميل الأعظم الماراً من A . قياس هذا المسقط هو :

$$F_T = P \sin \alpha$$

أما مسقط P على الناظم للمستوي المائل فقياسه :

$$F_N = P \cos \alpha$$

لنعيّن الآن H (محور المزدوجة C) :

إن عزم P بالنسبة للنقطة A (وهو K) هو شعاع أفقي يوازي فصل مشترك المستويين : المائل والأفقي . قياس هذا الشعاع هو :

$$K = P R \sin \alpha$$

فعزم P بالنسبة للمولد D (وهو H) هو المسقط على D لعزم P في A (أو مسقط K على D) . قياس هذا المسقط هو :

$$H = K \sin \beta$$

$$H = P R \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

أو

هذا ونعلم أن الأسطوانة لا تشرع بالتدحرج حين يكون :

$$H < \delta \cdot F_N$$

بفرض أن δ هو أمثال احتكاك التدحرج .

وتكتب هذه العلاقة (بعد تعويض H بقيمتها) كما يلي :

$$P R \sin \alpha \cdot \sin \beta < \delta P \cos \alpha$$

وتصبح العلاقة الأخيرة (بعد الاختصار) كما يلي :

$$[1] \quad \sin \beta < \frac{\delta}{R} \cotg \alpha$$

فإذا تحقق هذا الشرط فالأسطوانة لا تشرع بالتدحرج : فإما أن تشرع في الانزلاق ، أو أن تتوازن في المكان الذي وضعت فيه .

وهنا نلاحظ أن الشرط [1] يغدو محققاً مهما كانت الزاوية β إذا كان :

$$\frac{\delta}{R} \cotg \alpha \geq 1$$

[2]

$$R \leq \delta \cdot \cos \alpha$$

أو

وإذا لم تتحقق العلاقة [2] فالشرط السابق [1] يكون محققاً حين تصبح β أصغر من القيمة الحدية b المعينة بالعلاقة :

$$[3] \quad \sin b = \frac{\delta}{R} \cotg \alpha$$

(٢) لنعين الآن الشروط كي تبقى الأسطوانة متوازنة .

إن السطوانة تبقى متوازنة حين لا تشرع بالتدحرج أو الانزلاق .
فقد رأينا أن السطوانة لا تشرع بالتدحرج حين تتحقق العلاقة [1] .
ونعلم أن السطوانة لا تشرع بالانزلاق حين تتحقق العلاقة الآتية :

$$F_T < f \cdot F_N$$

بفرض أن f هو أمثال الاحتكاك في الانزلاق .

فإذا عوضنا كلاً من F_T و F_N بقيمته لغدت العلاقة السابقة كما يلي :

$$P \sin \alpha < f \cdot P \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha < f$$

أو

وإذا رمزنا بـ φ لزاوية الاحتكاك لا ضحت العلاقة الأخيرة كما يلي :

$$\alpha < \varphi \quad [4]$$

فالاسطوانة تتوازن إذن حين تتحقق العلاقتان [1] و [4] معاً .

إخلاصة : نستخلص مما تقدم النتائج التالية :

$$R \leq \delta \cot g \alpha \quad ١ - \text{إذا}$$

فالاسطوانة لا تتدحرج مطلقاً .

فإن كان $\alpha \geq \varphi$

وإن كان $\alpha < \varphi$ فالاسطوانة تبقى متوازنة

$$R < \delta \cot g \alpha \quad ٢ - \text{وإذا}$$

فالاسطوانة تتدحرج إذا $\beta > b$

أما إذا $\beta < b$

فالاسطوانة تنزلق إذا $\alpha \geq \varphi$

وتبقى متوازنة إذا $\alpha < \varphi$

تمارين

١ - لدينا جسم ثقيل موضوع على مستو مائل . فإذا فرض أنه يمكن تغيير ميل هذا المستوي ، فالمطلوب إثبات أن الجسم يكون متوازناً على المستوي حين تبقى زاوية ميل المستوي أصغر من زاوية الاحتكاك .

٢ - توازن المكبس الموشوري (بند ١١٨) بفرض وجود احتكاك أمثاله f .

برهن أنه في الحالة النهائية ، أي في اللحظة التي يبدأ فيها الموشور بالانزلاق ، يكون :

$$P = 2 Q \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$$

بفرض أن φ هي زاوية الاحتكاك .

٣ - لدينا في مستو شاقولي مفروض :

(١) قرصان دائريان متساويان ومتجانسان (مركزاهما A_1 و A_2 ، ونصف قطر كل منهما a ، وثقل كل منهما P) يستندان إلى مستقيم أفقي ثابت D .

(٢) قرص دائري ثابت متجانس (مركزه B ونصف قطره b) يستند إلى القرصين السابقين .

عين شروط توازن المجموعة علماً بأن أمثال الاحتكاك في مواضع التماس الأربعة هي واحدة وتساوي f .

مسائل عامة

١ - xyz مجموعة محاور إحداثية قائمة ومباشرة . نفرض مجموعة أشعة منزلة إحداثياتها :

$$(p, q, r, o, o, h)$$

ليكن D مستقيماً معيناً بالمعادلتين :

$$\begin{cases} y - mx = o \\ z = o \end{cases}$$

M نقطة متحركة على المستقيم D ، العزم الحاصل للمجموعة المفروضة بالنسبة للنقطة المتحركة M . المطلوب :

- (١) تعيين المحل الهندسي لحامل الشعاع G .
- (٢) تعيين المحل الهندسي لنهاية الشعاع G .

٢ - D مستقيم يتنقل في مستو حسب قانون معلوم ، فيشغل في كل لحظة t وضعاً معيناً $D(t)$.

- (١) أوجد المحل الهندسي لنهايات أشعة سرع نقط المستقيم في لحظة ما t .
- (٢) أوجد مغلف هذه الأشعة .

٣ - Δ مستقيم يتنقل في الفراغ بحيث يشغل في كل لحظة t وضعاً معيناً $\Delta(t)$.

- (١) برهن أن أشعة سرع نقط المستقيم في لحظة ما t تكون موازية لمستو واحد .

(٢) عين المحل الهندسي لنهايات هذه الأشعة .

(٣) عين السطح الحادث من حوامل هذه الأشعة .

٤ - xyz مجموعة محاور إحداثية ثابتة (قائمة ومباشرة) . C دائرة مركزها o ونصف قطرها R (أحد أقطار الدائرة ينطبق على المحور oz) .
لتكن M نقطة مادية تتحرك على الدائرة C بحركة منتظمة سرعتها الزاوية ω . الدائرة C تدور حول oz بدوران منتظم سرعته ω . فإذا علم أن M كانت في لحظة البدء على المحور ox . فاطلوب :

- (١) تعيين إحداثيات M بدلالة C .
- (٢) تعيين سرعة وتسارع M (اعتماداً على تركيب الحركات) .
- (٣) تعيين مسارات مساقط M على المستويات الإحداثية .
- (٤) تعيين حركة نقطة تلاقي حامل تسارع M مع المستوي xoy .
- (٥) إثبات أن حامل تسارع M يلاقي مستقيماً ثابتاً .

٥ - xyz مجموعة محاور قائمة . C دائرة نصف قطرها :

$$r = \frac{1-m}{2} a$$

تتحرك في المستوي xoy بحركة انسيابية بحيث يرسم مركزها C دائرة مركزها o ونصف قطرها :

$$R = \frac{1+m}{2} a$$

بسرعة زاوية ثابتة Ω قيمتها :

$$\Omega = (1-m) \alpha$$

M نقطة مادية تتحرك على الدائرة C بحركة منتظمة سرعتها الزاوية :

$$\omega = (1+m) \alpha$$

a و m و α هي مقادير ثابتة وموجبة ($m < 1$) .

في لحظة البدء : النقطتان C و M واقعتان على القسم الموجب من المحور ox ، وفصل M يساوي a .

(١) عين في لحظة مفروضة t سرعة وتسارع M .

(٢) لتكن P نقطة تتحرك في الفراغ بحيث أن مسقطها على المستوي xoy هو النقطة M وأن الزاوية الكائنة بين سرعتها والمحور oz هي ثابتة وتساوي φ .

عين راقم P إذا علم أن هذا الرقم يكون معدوماً في لحظة البدء .

برهن أن مسار P (ولترمز له بـ E) يقع على مجسم قطع ناقص دوراني محوره oz .

عين تقوس E . بيّن أن نصف قطر تقوس E في لحظة ما t متناسب مع سرعة P في تلك اللحظة .

اكتب معادلة المستوي المماسق للمنحنى E . بيّن أنه في لحظة ما t تكون المستويات المماسقة الموافقة لقيم متغيرة الزاوية φ مارةً جميعها من مستقيم واحد .

٦ - نفرض على لولب دائري (محوره oz ونصف قطره a وخطوته المختزلة b) نقطتين M_1 و M_2 . ليكن G مركز ثقل القوس المتجانس M_1M_2 .

(١) نفرض أن القوس M_1M_2 يتحول بحيث يبقى منتصفه ثابتاً . برهن أن المركز G ينتقل ، في هذه الحالة ، على مستقيم يلاقي المحور oz عمودياً .

(٢) عين المحل الهندسي للمركز G حين يتحول القوس M_1M_2 بحيث يبقى المستقيم M_1M_2 موازياً لمستو ثابت مفروض .

٧ - سلك دائري متجانس ثقيل (كتلته M ونصف قطره a) يتحرك بدون احتكاك حول قطر أفقي ثابت من الدائرة . قضيب متجانس ثقيل (كتلته $2M$ وطوله $a\sqrt{3}$) أنزلق نهايته A و B على محيط الدائرة (الملازمة ثنائية الجانب) .

عين أوضاع توازن المجموعة المؤلفة من السلك الدائري والقضيب .

٨ - نفرض في مستو شاقولي π محورين متعامدين ox و oy (شاقولي صاعد) . ليكن C منحنياً يقع في الربع الأول من المستوي ويتجه نغمه نحو الاتجاه السالب من المحور oy .

AB قضيب متجانس (طوله $2a$ وثقله P) يستند إلى المنحني C (لنرمز بـ M لنقطة التماس) وتنزلق نهايته A على المحور oy .

لنفرض أن المستقيم الحامل للقضيب AB هو محور AX موجب من A إلى B .

لنرمز بـ r لطول القطعة AM ، وبـ θ للزاوية (ox, AX) .

(١) اكتب في حالة توازن القضيب العلاقة بين r و θ علماً بأن الأربطة بدون احتكاك . عين ردود الفعل بدلالة θ .

(٢) نفرض أن المنحني قد رُدَّ إلى نقطة فصلها h . عين في حالة التوازن الوسيطين r و θ ، ثم ردود الفعل .

(٣) نفرض أن المنحني C هو فرع قطع المكافئ المعين كما يلي :

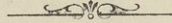
$$y^2 = 2px \quad y > 0$$

عين في حالة التوازن فصل نقطة استناد القضيب على المنحني .

(٤) عين المنحني C بحيث يتوازن القضيب في جميع أوضاعه على المنحني .

(٥) نفرض أن المنحني كما في الحالة الأولى ، ونفرض وجود احتكاك بين القضيب والمنحني (أمثاله f) . عين شروط التوازن .

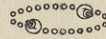
٩ — مجموعة مؤلفة من قضيبين متجانسين OA و AB مرتبطين مفصلياً في A (طول كل منهما l ، وثقل كل منهما P) تتحرك في مستو شاقولي حول النهاية O الثابتة . النهاية B تنزلق مع احتكاك (أمثاله f) على مستقيم أفقي OX . يُثبت ثقل Q في نقطة M من القضيب OA .
عين ، بحسب موضع M على القضيب OA ، شروط توازن المجموعة .
ناقش .



جدول الخطأ أو الصواب

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٤	١١	C	O
٥	٩	λ_i	M_i
٢١	٢٢	الأسامي	المرکزي
٢٣	١٥	CD	AB
٣٦	١٢، ١١، ٩	الأسامي	المرکزي
٣٦	١٨	$B^{P'}$	$P^{B'}$
٤٣	١	المفروضة	المفروضة ، في ٥ ،
٤٣	٢	هو	يساوي
٤٧	١٧	هذا	هذان
٥٠	١٧	$C =$	$c =$
٥٣	١٤	Z	X
٥٤	٦	X = ٥ و	Y = ٥ و
٧١	١٠	٦٨	٦٦
٧٢	١٢	انتقل	تنقل
٧٦	١٥	سرعتي	تسارعتي
٨١	٢٠	v	y
٨٣	١	$\neq ٥$	$\omega \neq ٥$
٨٦	١٧	الممكن	الممكن
٨٨	١٧	على	مع

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٩١	١٢	الجسم	المجموعة S
٩٣	٤	V_e	V_r
٩٩	١٢	ω_1 و ω_2	ω_2
١٠٢	٧	الانزلاق	الفتل
١١٢	٩	تناظر ،	تناظر أو مستوي تناظر ،
١٢٣	٣	M_o	M_i
١٢٥	٣	x	m x
١٣٢	١١	أوجد	أوجد مركز
٢٠٥	١٣	d t	δt
٢٢٨	١١	متحركة	حركة
٢٣٩	١٣	δm_i	Σm_i
٢٧٣	١	الخامس	السابع



أبحاث الكتاب

الباب الأول

مجموعات الأشعة

الصفحة	الصفحة
الفصل الثالث	الفصل الأول
مجموعات الأشعة المنزلة المتكافئة	مركز الأبعاد المناسبة
٣٨ تكافؤ مجموعتي أشعة	١ مركز مجموعة نقط
٤٠ رد مجموعة أشعة	٣ حالة خاصة للمجموعة
٤٥ العمليات البسيطة	٥ مراكز بعض المجموعات الخاصة
الفصل الرابع	الفصل الثاني
رد المجموعات الخاصة	عناصر مجموعة أشعة منزلة
٥٢ مجموعة الأشعة المتلاقية	١٣ الحاصلة العامة والعزم الحاصل
٥٣ مجموعة الأشعة الواقعة في مستو	١٩ المحور المركزي
٥٥ مجموعة الأشعة المتوازية	٢٢ ساحة العزوم
***	٣٠ المستقيمات الفاقدة للعزوم

الباب الثاني

علم الحركة

الصفحة	الصفحة
الفصل الأول	الفصل الثاني
الحركات البسيطة لمجموعة متماسكة	تركيب الحركات
٦٠ معلومات أولية	٩٠ تعريف
٦٤ الحركة الانسحابية	٩١ تركيب السرعة
٦٨ الحركة الدورانية	٩٢ تركيب التسارعات
٧٢ الحركة اللولبية	٩٥ تركيب عدة حركات
٧٧ الحركة العامة	٩٦ تطبيقات

الباب الثالث

علم التوازن

الصفحة	الصفحة
الفصل الأول	الفصل الثاني
هندسة الكتل	توازن الجسم الصلب
١٠٨ مركز العطالة	١٣٨ توازن مجموعة نقاط مادية
١١٣ تطبيقات	١٤٠ توازن الجسم الصلب
١١٧ عزوم العطالة	١٤٤ مجموعات القوى المتكافئة
١٢٥ مجسم العطالة	١٤٧ رد القوى المتوازنة

الصفحة

١٥٤ مركز الثقل

١٥٦ رد مجموعة قوى واقعة في مستو

١٥٨ رد المجموعة بطريقة تخطيطية

الفصل الثالث

توازن الجسم المقيد

١٧٤ توازن جسم مقيد بنقطة

١٧٧ توازن جسم مقيد بمحور

١٨٢ توازن جسم يستطيع الدوران

حول محور والانزلاق عليه

١٨٢ توازن جسم يستند إلى مستو

الفصل الرابع

مبدأ العمل الافتراضي

١٩٨ أعمال القوى المؤثرة

٢٠٠ عمل قوى الرباط

٢٠٧ مبدأ العمل الافتراضي

الفصل الخامس

تطبيقات العمل الافتراضي

توازن الآلات البسيطة

٢١٥ الآلة البسيطة

٢١٦ الرافعة

٢٢٠ الملفاف

الصفحة

٢٢٣ البكرة

٢٢٧ المكبس الموشوري

٢٢٨ المكبس اللولبي

الفصل السادس

الشروط العامة للتوازن

الناجبة عن مبدأ العمل الافتراضي

٢٣٣ معادلات التوازن

٢٤٣ مضارب لاغرانج

٢٤٩ النظريات العامة الناجبة عن

مبدأ العمل الافتراضي

٢٥٣ الصلات وحيدات الجانب

٢٦٧ الصلات معينة بعلاقات تساوي

أو تراجع

الفصل السابع

الجسم المقيد مع احتكاك

٢٧٣ حالة جسمين متلامسين

٢٧٦ احتكاك الانزلاق

٢٨٧ احتكاك التدرج والقتل

٢٨٩ احتكاك التدرج أثناء الحركة

٢٩٥ مسائل عامة

٣٠٢ الفهرس

