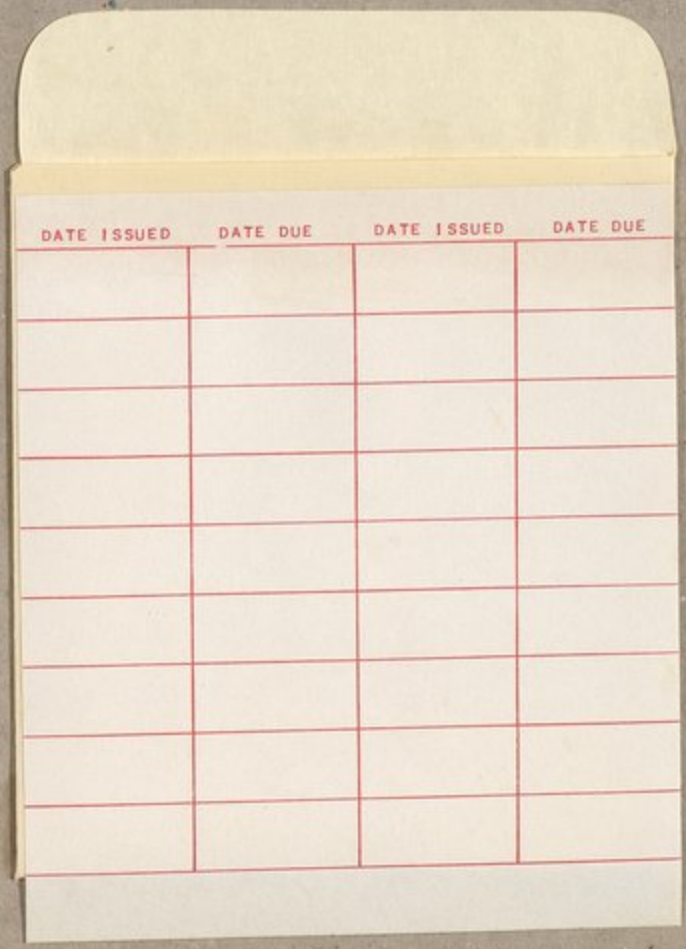
2272
.886
.366
v.1



DATE ISSUED	DATE DUE	DATE ISSUED	DATE DUE

Princeton University Library
32101 074298264

وجيه القدسي
أستاذ الرياضيات التطبيقية في جامعة دمشق

موجز الميكانيك

لطلاب
كليتي العلوم والهندسة

الجزء الأول

حركة وسكون النقطة المادية

مطبعة جامعة دمشق
١٣٧٩ هـ - ١٩٦٠ م

Wajih al-Qudsi

وجيه القدسي

استاذ الرياضيات التطبيقية في جامعة دمشق

Mujaz al-mikanik

مُوجَز الميكانيك

بروي

لطلاب

كليتي العلوم والهندسة

الجزء الأوّل

حركة وسكون النقطة المادية

مطبعة جامعة دمشق

١٣٧٩ هـ - ١٩٦٠ م

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمة

اقدّمُ هذا الكتاب في الميكانيك ، وهو الجزء الأول من سلسلة في هذا العلم توخّيتُ فيه الدقة والبساطة على السواء حتى يجد فيه طلابُ كليتي العلوم والهندسة عوناً في دراساتهم الجامعية ومصدراً عربياً الى جانب المصادر الأخرى باللغات الأجنبية .

فإذا حقق هذه الغاية فذلك رجائي والله الموفق .

وجيه الفرسي

2272
.886
.366
V.1

الباب الاول

موجز في الاشعة والاحداثيات

الفصل الاول

جمع الاشعة واسقاطها

الشعاع :

تمهيد : نصادف في الميكانيك (وفي الفيزياء) نوعين من المقادير. مقادير عددية تتعين بالاعداد (الحسابية او الجبرية) . ومقادير موجهة لايمكن تعيينها بالاعداد لوحدها . فهنالك عناصر اخرى تضاف الى هذه الاعداد ليتم بها تعيين هذه المقادير الموجهة، كما سنرى ذلك فيما بعد .

١ — تعريف : نسمي القطعة المستقيمة AB الموجهة من مبدئها A الى منتهاها B بالشعاع AB ، ونرمز اليه بـ $\overrightarrow{AB}$ او بحرف واحد $\overrightarrow{v}$ مثلاً . ونرمز لطوله بـ $|\overrightarrow{v}|$ او v اختصاراً .

نسمي المستقيم الواصل بين مبدأ الشعاع ومنتهاه بحامل الشعاع . ونسمي كل مستقيم مواز للشعاع بمنحى الشعاع .

نرى ان الشعاع يتميز بعناصر اربعة ، هي المبدأ والمنحى والطول والاتجاه. اذا ثبت وضع شعاع في الفراغ ، بأن ثبتت جميع عناصره ، قلنا ان

الشعاع مثبت . وان بقي مبدأ الشعاع غير معين في الفراغ وثبتت بقية عناصره، قلنا ان الشعاع طليق . وان بقي المبدأ غير معين على حامل الشعاع قلنا ان الشعاع منزلق .

٢ ـ **الاشعة المتساوية** : نقول عن شعاعين $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{v'}$ انهما متساويان (او متساويان) ونكتب :

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v'}$$

اذا اتحد هذان الشعاعان في المنحى والطول والاتجاه .

وفي حالة خاصة نسمي الشعاعين المتساويين الواقعين على حامل واحد بالشعاعين المتساويين مباشرة .

٣ ـ **الاشعة المتعاكسة**: نقول عن شعاعين $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{v'}$ انهما متعاكسان ونكتب :

$$\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v'}$$

اذا اتحد هذان الشعاعان في المنحى والطول واختلفا في الاتجاه .

وفي حالة خاصة نسمي الشعاعين المتعاكسين الواقعين على حامل واحد بالشعاعين المتعاكسين مباشرة .

نتيجة : نرى انه لو نشأ شعاع من آخر بانسحاب ما فالشعاعان متساويان، او بانزلاق على حامله فالشعاعان متساويان مباشرة ، او بتناظر بالنسبة لنقطة ما فالشعاعان متعاكسان ، او بتناظر بالنسبة لنقطة من حامله فالشعاعان متعاكسان مباشرة .

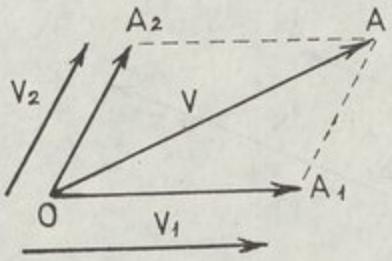
ملاحظة : قد يرمز ، اختصاراً في الكتابة ، لشعاع بحرف غامق وبدون سهم . فالشعاع $\overrightarrow{v}$ مثلا يكتب $\mathbf{v}$.

العمليات على الاشعة

تمهيد : نطبق على الاشعة الطليقة العمليات التي نجريها على الاعداد من جمع وطرح وضرب وتقسيم . وسنطبق عليها ايضاً عملية الاشتقاق عندما يكون الشعاع تابعاً لوسيط .

جمع الاشعة :

٤ — مجموع شعاعين : لجمع شعاعين $\mathbf{V_1}$ و $\mathbf{V_2}$ نرسم من نقطة ما O شعاعاً $\mathbf{OA_1}$ يساوي $\mathbf{V_1}$ ، ثم شعاعاً $\mathbf{OA_2}$ يساوي $\mathbf{V_2}$ (شكل ١) ، فالشعاع $\mathbf{OA}$ وهو القطر الموجه لمتوازي الاضلاع المنشأ على هذين الشعاعين ،



شكل (١)

او اي شعاع مساوٍ له ، هو مجموع الشعاعين $\mathbf{V_1}$ و $\mathbf{V_2}$ ، ونكتب :

$$\mathbf{OA_1} + \mathbf{OA_2} = \mathbf{OA}$$

أو

$$\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2} = \mathbf{V}$$

نرى انه يكفي لجمع الشعاعين $\mathbf{V_1}$ و $\mathbf{V_2}$ ان ننشىء من نقطة ما O شعاعاً $\mathbf{OA_1}$ يساوي الشعاع الاول ، وننشىء من نهايته $\mathbf{A_1}$ شعاعاً $\mathbf{A_1A}$ يساوي الشعاع الثاني . فالشعاع $\mathbf{OA}$ الذي مبدؤه النقطة O ونهايته نهاية الشعاع الثاني هو مجموع الشعاعين .

خاصة : نرى ان لا فرق حين الجمع بين $\mathbf{V_1} + \mathbf{V_2}$ و $\mathbf{V_2} + \mathbf{V_1}$. ومنه : لا يتغير مجموع شعاعين حين يتغير ترتيبهما .

٥ — **تفاضل شعاعين** : طرح شعاع V_1 من شعاع V هو ايجاد شعاع V_2 لو اضيف الى الشعاع V_1 لنتج V .

نرى ان هذا الشعاع يساوي A_1A او OA_2 (شكل ٢) لان :

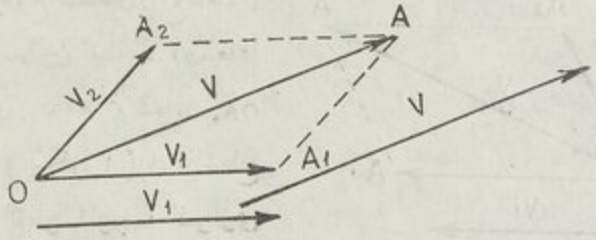
$$OA_1 + A_1A = OA$$

أو

$$V_1 + A_1A = V$$

ونلاحظ ان هذا الشعاع هو ايضاً مجموع الشعاع V ونظير V_1، فنكتب :

$$V_2 = V - V_1$$

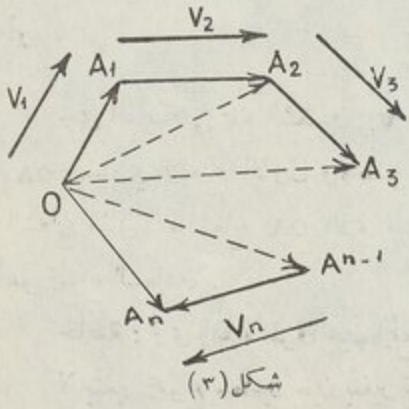


(شكل ٢)

٦ — **مجموع عدة اشعة** : يمكن جمع عدة اشعة بتعميم قاعدة الجمع لشعاعين.

فلجمع عدة اشعة V_1 و V_2 و ... و V_n ننشىء من نقطة ما O شعاعاً OA_1 يساوي الشعاع الاول V_1 وننشىء من نهايته A_1 شعاعاً A_1A_2 يساوي الشعاع الثاني V_2 وهكذا حتى الشعاع الاخير V_n (شكل٣) .

فالشعاع الذي مبدؤه النقطة O ونهايته نهاية الشعاع الاخير ، او اي



شكل(٣)

شعاع مساو له ، هو المجموع الشعاعي (او الهندسي) للاشعة المفروضة .
ونكتب :

$$\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \ldots + \mathbf{V}_n = \mathbf{OA}_n$$

أو $$(i = 1, 2, .., n) \qquad \Sigma\, \mathbf{V}_i = \mathbf{V}$$

نرى ان المجموع الهندسي ينعدم اذا انطبق مبدأ الشعاع الاول على نهاية الشعاع الاخير . اي اذا اغلق المحيط المضلعي $O A_1 A_2 \ldots A_n$.

هذا ونلاحظ ان التعريف السابق للمجموع الهندسي يبقى صحيحاً اذا توازت الاشعة فيما بينها .

ملاحظة : اذا فرضنا عدة اشعة متلاقية بنقطة ، فمجموعها الهندسي المار من نقطة تلاقيها ، ندعوه بحاصلة الاشعة .

٧ — خواص مجموع عدة اشعة : نرى بسهولة :

(١) ان عكس ترتيب شعاعين متتاليين من مجموعة اشعة لا يغير مجموعها لان الخط المضلعي يبقى ثابتاً قبل الشعاعين وبعدهما .
ينتج من ذلك انه يمكن تغيير ترتيب الاشعة حين جمعها .
(٢) انه يمكن ، عند جمع الاشعة ، تعويض طائفة منها بمجموعها .

تفريق شعاع :

٨ — تعريف : تفريق شعاع ، عملية معاكسة لجمع الاشعة ، يراد منها ايجاد عدة اشعة يساوي مجموعها الشعاع المفروض . نسمي هذه الاشعة بمركبات الشعاع المفروض .

يمكن تفريق شعاع ، بوجه عام ، على صور مختلفة . لكن هنالك حالات خاصة لا يمكن اجراء التفريق فيها الا على صورة واحدة ، منها :

٩ — تفريق شعاع على مستقيمين غير متوازيين : نتشيء من نقطة ما O

شعاعاً OV يساوي الشعاع المفروض ، ومستقيمين OX و OY موازيين للمستقيمين المفروضين .

فاذا رسمنا متوازي اضلاع بحيث ينطبق قطره على OV وينطبق احد اضلاعه ، وليكن OA على OX والضلع المجاور OB على OY ، يكون :

$$OA + OB = OV$$

ويكون OA و OB هما مركبتي الشعاع المفروض .

نلاحظ انه لايمكن اجراء هذا التفريق الا اذا كان الشعاع OV في مستوي المستقيمين OX و OY ، اي اذا كان حامل الشعاع المفروض والمستقيمان المفروضان موازية جميعها لمستو واحد .

١٠ — تفريق شعاع على ثلاث مستقيمات غير واقعة في مستو واحد: ننشىء من نقطة ما O شعاعاً OV يساوي الشعاع المفروض وثلاثة مستقيمات OX و OY و OZ موازية للمستقيمات المفروضة .

كي نفرق OV الى ثلاث مركبات محمولة على OX و OY و OZ نبدأ بتفريق OV في المستوي OVZ الى مركبتين ، احداهما OV' على الفصل المشترك للمستويين OVZ و OXY والثانية OC على OZ . ثم نفرق OV' في المستوي OXY الى مركبتين احداهما OA على OX والثانية OB على OY . وبذلك نكون قد فرقنا OV الى المركبات الثلاث OA و OB و OC .

نلاحظ ان OA و OB و OC هي الاحرف الثلاثة لمتوازي سطوح قطره OV واحرفه موازية للمستقيمات المفروضة .

ملاحظة : قد يرمز اختصاراً لشعاع مبدؤه نقطة ثابتة ما O بحرف واحد هو نهاية الشعاع . فالشعاع OA مثلاً يكتب A . ويكتب المجموع :

$$OA + OB + OC = OV$$

بالشكل :

$$A + B + C = V$$

كما يكتب التفاضل $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA}$

بالشكل $\mathbf{AB} = \mathbf{B} - \mathbf{A}$

جداء شعاع بعدد :

١١ – تعريف : جداء شعاع $\mathbf{V}$ بعدد جبري m ، هو شعاع $\mathbf{V}'$ ، منحاه يوازي $\mathbf{V}$ ، وطوله يساوي طول $\mathbf{V}$ بالقيمة المطلقة للعدد m ، واتجاهه يوافق اتجاه $\mathbf{V}$ او يخالفه حسبما يكون m موجباً او سالباً .

نرى ان $\mathbf{V}'$ يحاكي $\mathbf{V}$. نسبة التحاكي m ومركز التحاكي نقطة ما في الفراغ .

والمحاكاة تكون طردية او عكسية حسبما يكون العدد m موجباً او سالباً .

نرمز لجداء العدد m بالشعاع $\mathbf{V}$ بـ $m . \mathbf{V}$ ويكتب :

$$\mathbf{V}' = m\,\mathbf{V}$$

١٢ – نتائج : نرى بسهولة ان :

$$m(\mathbf{V}_1 + \ldots + \mathbf{V}_n) = m\,\mathbf{V}_1 + \ldots + m\,\mathbf{V}_n$$

$$m_1\,\mathbf{V} + \ldots + m_n\,\mathbf{V} = (m_1 + \ldots + m_n)\,\mathbf{V}$$

اسقاط الاشعة :

١٣ – الاسقاط على مستو : نعرّف مسقط نقطة على مستو بموقع العمود النازل من النقطة على المستوي . ومسقط شكل هو شكل يتألف من مساقط نقط الشكل المفروض . فمسقط شعاع (غير عامودي على مستو) هو شعاع مبدؤه مسقط مبدأ الشعاع المفروض ومنتهاه مسقط المنتهى .

١٤ – الاسقاط على مستقيم : نعرّف مسقط نقطة على مستقيم بموقع العمود

النازل من النقطة على المستقيم . ومسقط شعاع (غير عمودي على المستقيم) هو شعاع مبدؤه مسقط مبدأ الشعاع المفروض ومنتهاه مسقط المنتهى .

ملاحظة : ان الاسقاط الذي اوردناه (على مستو او مستقيم) هو الاسقاط القائم . وهناك بوجه عام اسقاط على مستو مواز لمستقيم مفروض او على مستقيم مواز لمستو مفروض يعرّف في الهندسة التحليلية .

١٥ — خواص الاسقاط : نرى بسهولة في حالتي الاسقاط على مستو او مستقيم ان :

١ — مسقطي شعاعين متساويين هما شعاعان متساويان .

٢ — مسقط مجموع اشعة يساوي مجموع مساقطها . وتعرف هذه الخاصة بنظرية المساقط .

٣ — مسقط الجداء $m\mathbf{v}$ يساوي جداء m بمسقط $\mathbf{v}$.

تمارين

١ – لدينا مثلث OAB وشعاعان مبدؤهما O :

$$\mathbf{V_1 = OA} \quad ; \quad \mathbf{V_2 = 3\,OB}$$

أوجد نقطة M حيث يتقاطع حامل حاصلة الشعاعين المفروضين مع AB ، واحسب نسبة قياس الحاصلة الى قياس OM .

٢ – ليكن M نقطة تلاقي اقطار مثلث ABC :

(١) احسب $\mathbf{MA + MB + MC}$

(٢) برهن ان $\mathbf{OA + OB + OC = 3OM}$

بفرض ان O نقطة ما في الفراغ .

٣ – A و B و C و D أربع نقط في الفراغ . أوجد نقطة o بحيث يكون :

$$\mathbf{oD = oA + oB + oC}$$

٤ – فرق شعاعاً الى شعاعين الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}$ ومجموع قياسيهما اعظم ما يمكن .

٥ – فرق شعاعاً الى ثلاث اشعة متساوية في الطول ومتعامدة مثنى .

٦ – انشىء ثلاث اشعة متلاقية ومتساوية في الطول بحيث يساوي مجموعها الهندسي الصفر .

٧ – لدينا مثلث OAB . نصفنا ضلعيه oA و oB في a و b .

برهن أن : $\mathbf{Ab + aB = \frac{3}{2}\,AB}$

٨ – أوجد مجموع ثلاث أشعة اطوالها 2a و 3a و 4a (a طول مفروض) بحيث توازي أضلاع مثلث متساوي الاضلاع ، وتتجه في اتجاه دوري واحد للمثلث .

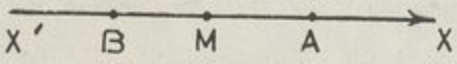
الفصل الثانى

الاحداثيات

تعيين نقطة على محور :

١٦ — توجيه المستقيم : يمكن توجيه مستقيم باختيار اتجاه عليه نعتبره اتجاهاً موجباً . نسمي هذا المستقيم الموجه محوراً ، ونشير الى اتجاهه الموجب بسهم .

فاذا انتقلت نقطة M على المحور x'x (شكل ٤) باتجاه السهم ، قلنا انها تسير في الاتجاه الموجب . وان تنقلت باتجاه معاكس ، قلنا انها تسير في الاتجاه السالب .

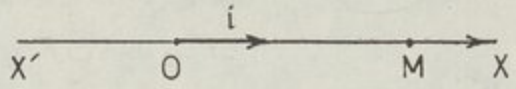


(شكل ٤)

واذا فرضنا نقطتين A و B على المحور x'x (شكل ٤) . فالقطعة المستقيمة AB تقدر بقياس جبري ، نرمز له بـ $\overline{AB}$ ، وهو العدد الجبري الذي قيمته المطلقة العدد الدال على طول القطعة ، واشارته موجبة او سالبة حسبما يكون الاتجاه من مبدأ القطعة A الى منتهاها B ، موافقاً لاتجاه المحور x'x او معاكساً له .

١٧ ـ شعاع الواحدة لمحور : هو شعاع ينزلق على المحور (أو يوازيه) ، يتجه باتجاهه ويساوي قياسه الواحدة .

١٨ ـ فصل نقطة على محور : لتكن M نقطة مفروضة على محور x'x (شكل ٥) . لنأخذ على هذا المحور نقطة ما o نسميها المبدأ . فموضع M يتعين على هذا المحور بالقياس الجبري x للشعاع oM .



(شكل ٥)

نسمي x بفصل M ونرمز للنقطة التي فصلها x بـ M(x) .

واذا فرضنا i هو شعاع واحدة المحور x'x فيكون :

$$\mathbf{OM} = x\,\mathbf{i}$$

ينتج من التعريف السابق أنه يوجد تقابل بين نقط المحور والاعداد الجبرية . فكل نقطة من المحور يقابلها عدد جبري وحيد هو فصل النقطة . وعلى العكس كل عدد جبري يقابله نقطة وحيدة من المحور .

تطبيق :

١٩ ـ القياس الجبري لشعاع محمول على محور : ليكن $M_1(x_1)$ مبدأ الشعاع المحمول على محور x'x ، و $M_2(x_2)$ منتهاه . فيكون :

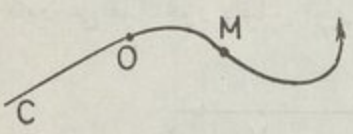
$$\mathbf{M_1M_2} = \mathbf{oM_2} - \mathbf{oM_1} = (x_2 - x_1)\,\mathbf{i}$$

فالقياس الجبري لشعاع يساوي فصل منتهى الشعاع مطروحاً منه فصل مبدئه .

تمرين : برهن ان فصل منتصف شعاع يساوي الوسط الحسابي لفصلي مبدئه ومنتهاه .

تعيين نقطة على منحن موجه :

٢٠ — توجيه المنحني : يوجه المنحني ، كما يوجه المستقيم ، باختيار اتجاه عليه نعتبره اتجاهاً موجباً . نشير الى الاتجاه الموجب بسهم (شكل ٦) .



(شكل ٦)

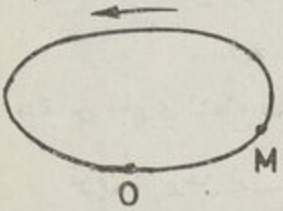
فاذا تنقلت نقطة M على هذا المنحني باتجاه السهم قلنا انها تسير في الاتجاه الموجب . وان سارت باتجاه معاكس قلنا انها تسير باتجاه سالب .

واذا فرضنا نقطتين A و B على منحن موجه ، فالقوس AB تقدر بقياس جبري ، نرمز له بـ $\overset{\frown}{AB}$ ، وهو العدد الجبري الذي قيمته المطلقة العدد الدال على طول القوس ، واشارته موجبة او سالبة حسبما يكون الاتجاه من مبدأ القوس A الى منتهاها B موافقاً لاتجاه المنحني أو معاكساً له .

٢١ — فصل نقطة على منحن موجه : اذا اخذنا على منحن موجه (شكل ٥) نقطة ما o نسميها المبدأ ، فموضع أية نقطة M من هذا المنحني يتعين بالقياس الجبري s للقوس $\overset{\frown}{oM}$.

نسمي s بفصل M ، ونرمز للنقطة التي فصلها s بـ M(s) .

نلاحظ (كما رأينا في المحور) أنه يوجد تقابل بين نقط المنحني الموجه والاعداد الجبرية . لكن هذا التقابل لا يكون تاماً إلا اذا كان المنحني غير مغلق .



(شكل ٧)

أما في المنحني المغلق (شكل ٧) ، فبينما يقابل كل قيمة للفصل نقطة وحيدة ، يقابل كل نقطة من المنحني عدد غير متناه من الفصول .

فاذا رمزنا بـ s لأحد فصول M و بـ k لعـدد صحيح جبريّ ما و بـ L لطول المنحني المغلق ، لكان فصل M :

$$\overset{\frown}{OM} = S = S_0 + KL$$

تطبيق : نجد (كما رأينا في المحور) أن القياس الجبري للقوس التي مبدؤها $M_1 (S_1)$ ومنتهاها $M_2 (S_2)$ هو $S_2 - S_1$ اذا كان المنحني غير مغلق و $S_2 - S_1 + KL$ اذا كان المنحني مغلقاً .

تمرين : برهن ان فصل منتصف $M_1 M_2$ هو $\frac{S_1 + S_2}{2}$ في المنحني غير المغلق . أمـا في المنحني المغلق فيوجد للقوس $M_1 M_2$ منتصفان يتعين فصلاهما من الافادة :

$$\frac{S_1 + S_2}{2} + K \frac{L}{2}$$

حالة خاصة : حين يكون المنحني المغلق دائرة مثلثية ، نعوض L بـ 2π في العلاقات السابقة ، فنجد الدساتير المعروفة في المثلثات .

تعيين نقطة في مستو :

٢٢ – توجيه المستوي : يمكن توجيه مستو باختيار اتجاه للدوران فيـه نعتبره اتجاهاً موجباً . وقد اتفق على ان يكون الاتجاه الموجب ، هو الاتجاه المعاكس لحركة عقرب الساعة . ونشير الى هذا الاتجاه بسهم .

واذا رسمنا دائرة موجهة نصف قطرها الواحدة ، فان هذه الدائرة التي كثيراً ما نوجه بها مستويها نسميها بالدائرة المثلثية .

٢٣ – تعيين نقطة في مستو موجه : يمكن تعيين موضع نقطة في مستو موجه بطرق عديدة . سنورد الطريقة الديكارتية والطريقة القطبية .

٢٤ - الطريقة الديكارتية : لتكن M النقطة المفروضة في المستوي . فاذا رسمنا محورين متعامدين في هذا المستوي ، أحدهما x'ox والآخر y'oy ، فان موضع M يتعين بمسقطيه A و B على المحورين ، او بالمركبتين oA و oB للشعاع oM على هذين المحورين :

$$\mathbf{oM} = \mathbf{oA} + \mathbf{oB}$$

فالعددان $x = \overline{oA}$ و $y = \overline{oB}$

اللذان يعينان موضع M نسميهما بالاحداثيين الديكارتيين لنقطة M (أو اختصاراً باحداثيي M) . نسمي x بفصل M ، و y بترتيبها ، ونرمز للنقطة M التي فصلها x وترتيبها y بـ $M(x, y)$.

نرى أنه يقابل كل نقطة من المستوي عددين وحيدين ، كما يقابل كل عددين مفروضين نقطة وحيدة من المستوي .

تطبيق : مركبتا شعاع على المحورين الاحداثيين : ليكن oM الشعاع المفروض في المستوي xoy . فاذا فرضنا ان oA و oB هما مركبتا oM على المحورين x'ox و y'oy ، فانا نسمي الاحداثيين :

$$x = \overline{oA} \qquad y = \overline{oB}$$

بمركبتي الشعاع oM العدديتين ، ونسمي oA و oB بمركبتيه الشعاعيتين .

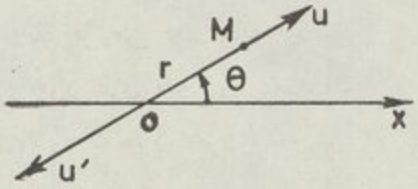
واذا فرضنا ان i و j هما شعاعا الواحدة للمحورين x'ox و y'oy يكون :

$$\mathbf{oA} = x\,\mathbf{i} \qquad \mathbf{oB} = y\,\mathbf{j}$$

وبالتالي يكون :

$$\mathbf{oM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

٢٥ – الطريقة القطبية : لتكن M النقطة المفروضة في المستوي . نرسم في هـذا المستوي من نقطة ثابتة o ، نسميها بالقطب ، محوراً ox نسميه بالمحور القطبي . فاذا انشأنا محوراً ou مارّاً من M فموضع هذه النقطة يتعين بالزاوية القطبية θ التي يصنعها المحور ou مع المحور ox ، وبالفصل r لنقطة M على المحور ou (شكل ٨) .



(شكل ٨)

نسمي (r, θ) بالاحداثيين القطبيين لنقطة M . ونرمز لنقطة M التي احداثياها القطبيان r و θ بـ M (r, θ) .

نلاحظ أنه يقابل أية مجموعة قطبية (r, θ) نقطة واحدة ، بينما يقابل نقطة ما من المستوي مجموعتان من الاحداثيات القطبية هما :

$$(r, \theta + 2k\pi) \quad \text{و} \quad (-r, \theta + \pi + 2k\pi) .$$

لأنه يمكن ان ننشىء من النقطة M محورين متعاكسين ou و ou' (شكل ٨) .

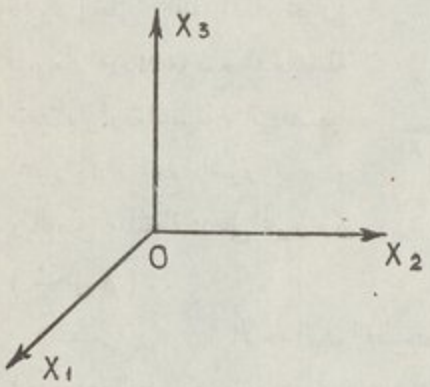
ملاحظة : نرى أنه يوجد بين الاحداثيات الديكارتية والقطبية لنقطة ما M العلاقتان :

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

تعيين نقطة الفراغ :

٢٦ – توجيه الفواغ : يمكن توجيه الفراغ باختيار اتجاه موجب للدوران حول محور ما في هذا الفراغ (أي حول راصد واقف وفق الاتجاه الموجب لهذا المحور) . وقد اتفق على ان يكون الاتجاه الموجب للدوران هو الاتجاه من يمين الراصد الى يساره .

واذا فرضنا الثلاثية $ox_1x_2x_3$ (شكل ٩) المؤلفة من المحاور ox_1 و ox_2 و ox_3 على الترتيب ؛ فانا نقول ان هذه الثلاثية هي موجبة (او طردية) اذا دار أحد محاورها ، وليكن ox_1 مثلاً ، بزاوية أقل من π راديان فانطبق على المحور الذي يليه ox_2 بعد أن يتم الدوران حول المحور الاخير ox_3 وباتجاه موجب .



(شكل ٩)

وهناك طريقة عملية لتعيين اتجاه الثلاثية بوساطة البزال ، وذلك بوضع البزال وفق ox_3 مثلاً وتدويره في اتجاه من ox_1 الى ox_2 . فان تقدم حسب الاتجاه الموجب للمحور ox_3 قلنا بأن الثلاثية $ox_1x_2x_3$ موجبة .

٢٧ ـ تعيين نقطة في فراغ موجه : يمكن تعيين موضع نقطة في فراغ موجه بطرق عديدة . سنورد الطريقة الديكارتية ، والطريقة الاسطوانية والطريقة القطبية .

٢٨ ـ الطريقة الديكارتية : لتكن M النقطة المفروضة في الفراغ . فاذا رسمنا من نقطة o ، نسميها المبدأ ، ثلاثية قائمة وموجبة $oxyz$ ، فان موضع M يتعين بمسقطيها m و c على المستوي oxy وعلى المحور oz ، أو بالمركبتين om و oc للشعاع oM على المستوي oxy والمحور oz :

$$oM = om + mC$$

ونعلم ان النقطة m تتعين في المستوي oxy بمسقطيها A و B على المحورين $x'ox$ و $y'oy$ ، أو بالمركبتين oA و oB للشعاع om على هذين المحورين :

$$om = oA + oB$$

فالنقطة M تتعين اذن بمساقطها A و B و C على المحاور $x'ox$ و $y'oy$ و $z'oz$ أو بالمركبات oA و oB و oC للشعاع oM على هذه المحاور :

$$oM = oA + oB + oC$$

فالاعداد $x = \overline{oA}$ و $y = \overline{oB}$ و $z = \overline{oC}$

التي تعين موضع M في الفراغ نسميها بالاحداثيات الديكارتية لنقطة M . نسمي x بفصل M و y بترتيبها و z براقمها . ونرمز للنقطة M التي احداثياتها x و y و z بـ $M(x, y, z)$.

نرى أنه يقابل كل نقطة في الفراغ ثلاثة اعداد ، كما يقابل كل مجموعة مؤلفة من ثلاثة اعداد مفروضة نقطة وحيدة في الفراغ .

٢٩ — تطبيق : مركبات شعاع على المحاور الاحداثية : ليكن oM الشعاع المفروض في الفواغ . فاذا فرضنا ان oA و oB و oC هي مركبات oM على المحاور $x'ox$ و $y'oy$ و $z'oz$ ، فانا نسمي الاحداثيات :

$$x = oA \qquad z = oB \qquad z = oC$$

لمنتهى الشعاع M بمركبات الشعاع oM العددية ، ونسمي oA و oB و oC بمركباته الشعاعية .

واذا فرضنا ان (i, j, k) هي اشعة الواحدة لمحاور الثلاثية oxyz يكون :

$$oA = xi \qquad oB = yj \qquad oC = zk$$

وبالتالي يكون :

$$oM = xi + yj + zk$$

٣٠ - الطريقة الاسطوانية : لقد رأينا (في الطريقة الديكارتية) أن النقطة M تتعين في الفراغ بمسقطيها m و C على المستوي xoy والمحور oz ،

أو بالمركبتين om و oC للشعاع oM على المستوي xoy والمحور oz :

$$oM = om + mM$$

فالنقطة M تتعين اذن في الفراغ اذا علم راقمها $z = \overline{mM}$ وموضع مسقطها m في المستوي xoy .

فاذا عينا m في المستوي xoy باحداثييها الديكاريتين (x, y) :

$$x = \overline{oA} \qquad y = \overline{oB}$$

نكون بذلك قد عينا M في الفراغ بالطريقة الديكارتية . وتكون احداثياتها الديكارتية هي (x, y, z) . وان عينا m في المستوي xoy باحداثييها القطبيين (r, ϕ) :

$$r = \overline{om} \qquad \phi = (ox, om)$$

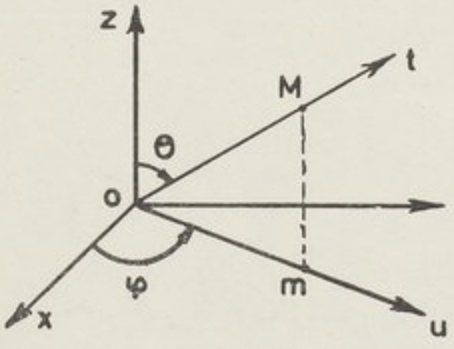
نكون بذلك قد عينا M في الفراغ بالطريقة الاسطوانية . وتكون احداثياتها الاسطوانية هي (r, ϕ, z) .

هذا ويوجد بين الاحداثيات الديكارتية والاسطوانية العلاقات :

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z$$

٣١ — الطريقة القطبية :

يمكن تعيين موضع نقطة مفروضة M في الفراغ بالنسبة لثلاثية قائمة oxyz (شكل ١٠) بأن نأخذ على المستقيم oM محوراً ot ونأخذ على المستقيم om (m هي مسقط M على المستوي xoy) محوراً ou ، فالاعداد :



(شكل ١٠)

$$\rho = \overline{oM} \qquad \theta = (oz, ot) \qquad \varphi = (ox, ou)$$

التي تعين موضع M في الفراغ تسمى بالاحداثيات القطبية الفراغية لنقطة M .
ونرمز لنقطة M التي احداثياتها (ρ, θ, φ) بـ $M(\rho, \theta, \varphi)$.

نرى انه يوجد بين الاحداثيات الاسطوانية (r, φ, z) والقطبية (ρ, φ, θ) لنقطة M العلاقات :

$$r = \rho \sin\theta \qquad \varphi = \varphi \qquad z = \rho \cos\theta$$

وبالتالي يوجد بين الاحداثيات الديكارتية والقطبية لنقطة M العلاقات :

$$x = \rho \sin\theta . \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\theta . \sin\varphi \qquad z = \rho \cos\theta$$

❀ ❀ ❀

تمارين

١ — A و B و C و D أربع نقط كائنة على محور وتؤلف تقسيماً توافقياً ، أي تحقق العلاقة :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

برهن انه يوجد بين الفصول a و b و c و d للنقط المفروضة العلاقة الآتية :

$$(a+b)(c+d) = 2(ab+cd)$$

استنتج من هذه المساواة علاقة نيوتون :

$$\overline{MA}^2 = \overline{MC} \cdot \overline{MD} \qquad (M \text{ منتصف } AB)$$

ثم استنتج علاقة ديكارت :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}}$$

٢ — A و B و C و D نقط كائنة على محور .

(١) اكتب بشكل مضاريب الافادة الآتية :

$$\overline{DA} \cdot \overline{DB} \cdot \overline{AB} + \overline{DB} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC} + \overline{DC} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{CA}$$

(٢) احسب قيمة الافادة الآتية :

$$\overline{DA} \cdot \overline{BC} + \overline{DB} \cdot \overline{CA} + \overline{DC} \cdot \overline{AB}$$

٣ — A و B و C و D و نقط كائنة على محور .

برهن صحة العلاقة الآتية :

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} \cdot \overline{CD} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{DA} + \overline{MC} \cdot \overline{MD} \cdot \overline{AB} + \overline{MD} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{BC} = o$$

٤ — A و B و C ثلاث نقط كائنة على محور x'ox . أوجد نقطة M من هذا المحور بحيث يكون :

$$\overline{MB} \cdot \overline{Mc} + \overline{MC} \cdot \overline{MA} + MA \cdot \overline{MB} = o$$

تطبيق : عين M بحيث يكون $\overline{AB} = -2$ و $\overline{Bc} = 1$

٥ — M' و M'' نقطتان من محور x'ox ، فصلاهما جذرا المعادلة :

$$(m-1)x^2 - 2(m+1)x + m - 3 = o$$

m وسيط متحول . برهن انه مهما تغير الوسيط m فالنقطتان M' و M'' تبقيان مترافقتين متوافقتين مع نقطتين ثابتتين من المحور x'ox . عين هاتين النقطتين الثابتتين .

٦ — احسب الاحداثيات القطبية للنقط التي احداثياتها الديكارتية :

$$(1, \sqrt{3}) \quad ، \quad (1, -\sqrt{3}) \quad ، \quad (-\sqrt{3}, -1)$$

٧ — احسب الاحداثيات الديكارتية للنقط التي احداثياتها القطبية :

$$\left(2, \frac{\pi}{6}\right) \quad ، \quad \left(4, -\frac{\pi}{3}\right) \quad ، \quad \left(-1, \frac{29\pi}{4}\right)$$

٨ — احسب الاحداثيات الاسطوانية (r, φ, z) ثم الاحداثيات الديكارتية (x, y, z) لنقطة احداثياتها القطبية :

$$\rho = 2 \qquad \varphi = \frac{\pi}{4} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$

* * *

الفصل الثالث

جداء الأشعة

الجداء العددي لشعاعين :

٣٢ – تعريف : نقول جداء عددي لشعاعين a و b ، ونرمز له بـ a . b ، العدد | a . b | cos (a, b) . فنكتب :

$$a \cdot b = |a \cdot b| \cos(a, b) \qquad (1)$$

٣٣ – نتائج : ينتج من هذا التعريف :

(١) أن الجداء العددي لشعاعين يكون موجباً او سالباً أو صفراً حسبما تكون زاوية الشعاعين حادة او منفرجة او قائمة .

(٢) ان تبديل موضعي شعاعين لا يغير جداءهما العددي :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

(٣) اذا فرض ان $\overline{b}_1$ هو القياس الجبري لمسقط b على a (باعتبار a محوراً) يكون :

$$\overline{b}_1 = |b| \cos(a, b)$$

فينتج ان :

$$a \cdot b = |a| \, \overline{b}_1 \qquad (2)$$

أي ان الجداء العددي لشعاعين a و b يساوي جداء طول احدهما a في القياس الجبري لمسقط الآخر b على a .

وينتج من العلاقة الاخيرة ايضاً :

$$a \cdot b = a \cdot b_1 \qquad (3)$$

أي ان الجداء العددي لشعاعين لا يتغير حين نستبدل بأحدهما مسقطه على الآخر .

تطبيق :

٣٤ — مسقط شعاع على محور : اذا فرضنا ان b هو الشعاع المفروض وان b_1 هو مسقطه على محور شعاع واحدته u فاستناداً الى العلاقة (2) يكون :

$$u \cdot b = |u| \overline{b_1} \qquad (4)$$

أو

$$u \cdot b = \overline{b_1}$$

فمسقط شعاع على محور يساوي الجداء العددي للشعاع بشعاع واحدة المحور .

٣٥ — مربع شعاع : ان مربع شعاع هو الجداء العددي للشعاع بنفسه :

$$(a)^2 = a \cdot a$$

ونرى ان :

$$a \cdot a = a^2 \qquad (5)$$

٣٦ — خواص الجداء العددي لشعاعين : (١) نرى بسهولة ان :

$$(\alpha a) \cdot (\beta \cdot b) = \alpha \beta (a \cdot b)$$

ينتج من هذه الخاصة انه اذا فرضنا شعاعاً a محمولاً على محور $x'x$ شعاع واحدته i ، وشعاعاً b محمولاً على محور $y'y$ شعاع واحدته j :

$$a = a \cdot i \qquad b = b \cdot j$$

يكون :

$$a \cdot b = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot (i \cdot j)$$

أو

$$a \cdot b = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos(x'x, y'y) \qquad (6)$$

أي ان الجداء العددي لشعاعين واقعين على محورين يساوي جداء قياسيهما الجبريين بجيب تمام زاوية محوريهما .

واذا رمزنا بـ $\overline{b_1}$ لمسقط b على المحور x'x لكان :

$$\overline{b} \cos(x'x, y'y) = \overline{b_1}$$

فالعلاقة (6) تصبح اذن :

$$a \cdot b = \overline{a} \cdot \overline{b_1}$$

اي ان الجداء العددي لشعاعين محمولين على محورين يساوي جداء القياس الجبري لاحدهما بمسقط الثاني على المحور الحامل للأول .

(٢) ان الخواص الواردة في جداء الاعداد يمكن تطبيقها على الجداء العددي للأشعة . فلدينا مثلاً :

$$a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (7)$$

وتبرهن هذه الخاصة في الهندسة التحليلية (اعتماداً على الخاصة السابقة) .

ويمكن استناداً الى العلاقة (7) ، حساب جداء مجموع عدة اشعة بمجموع آخر . ونجري الحساب في الاشعة كما نجريه في الاعداد الجبرية . فنجد مثلاً :

$$(a + b) \cdot (c + d) = a.c + a.d + b.c + b.d$$

٣٧ – حساب الجداء العددي لشعاعين تحليلياً : ليكن $v(x, y, z)$ و $v'(x', y', z')$ الشعاعين المفروضين . نعلم ان :

$$v = x\,i + y\,j + z\,k \qquad v' = x'\,i + y'\,j + z'\,k$$

فيكون :

$$\mathbf{v}.\mathbf{v}' = (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})(x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k})$$

وبما ان :

$$\mathbf{i}.\mathbf{i} = \mathbf{j}.\mathbf{j} = \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1$$

و

$$\mathbf{i}.\mathbf{j} = \mathbf{j}.\mathbf{k} = \mathbf{k}.\mathbf{i} = 0$$

فيكون :

$$\mathbf{v}.\mathbf{v}' = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

٣٨ - تطبيق : حساب طول شعاع تحليلياً : يمكن حساب طول شعاع اعتماداً على العلاقة (7) فنجد :

$$\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}.\mathbf{v} = x^2 + y^2 + z^2$$

الجداء الشعاعي لشعاعين :

٣٩ - تعريف : نقول جداء شعاعي (أو متجه) لشعاعين a و b ، ونرمز له بـ $a \wedge b$ ، الشعاع c الذي حامله عمودي على الشعاعين المفروضين ، وقياسه يقدر بالعدد $|a.b| \sin \varphi$ ، بفرض ان φ هي زاوية الشعاعين a و b ($0 < \varphi < \pi$) ، واتجاهه يتعين بحيث تكون الثلاثية (a, b, c) مباشرة . ونكتب :

$$c = a \wedge b$$

٤٠ - نتائج : ينتج من هذا التعريف :

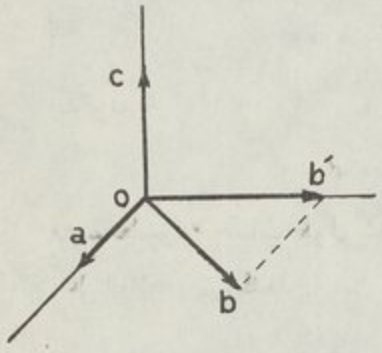
(١) ان الجداء الشعاعي لشعاعين يقدر بسطح متوازي الاضلاع المنشأ على الشعاعين .

(٢) ان تبديل موضعي شعاعين لا يغير الا اتجاه جدائهما الشعاعي ، اي :

$$a \wedge b = - b \wedge a$$

(٣) ان الجداء الشعاعي يصبح مساوياً للصفر اذا توازى الشعاعان.

(٤) ان الجداء الشعاعي لا يتغير حين نستبدل بأحد الشعاعين مسقطه على مستو عمودي على الشعاع الآخر.



(شكل ١١)

فاذا فرضنا b' هو مسقط b على مستو عمودي على a (شكل ١١) لكان :

$$a \wedge b = a \wedge b' \qquad (9)$$

ملاحظة : لو فرضنا ان b_1 و b' هما مسقطاً b على الشعاع a وعلى مستو عمودي على a ، لكان للشعاع b مركبتان ، احداهما داخلية b_1 (تقع على a) والاخرى خارجية b' (تقع خارج a) ، وكان :

$$a.\, b = a.\, b_1$$

و

$$a \wedge b = a \wedge b'$$

لذا نسمي الجداء العددي بالجداء الداخلي والجداء الشعاعي بالخارجي لصلة الاول بالمركبة الداخلية والثاني بالمركبة الخارجية .

٤١ ـ **انشاء الجداء الشعاعي هندسياً** : نستخلص مما تقدم انه يمكن انشاء الجداء $a \wedge b$ هندسياً ، وذلك باسقاط b على مستو عمودي على a ، ثم ادارة المسقط b' حول a بزاوية قدرها $\frac{\pi}{2}$. فالشعاع المحاكي (مركز التحاكي o ونسبة التحاكي $|a|$) للشعاع الناتج من دوران b' هو شعاع الجداء المطلوب.

٤٢ ـ **خواص الجداء الخارجي لشعاعين** : (١) نرى بسهولة ان :

$$(\alpha a) \wedge (\beta b) = \alpha\beta (a \wedge b)$$

ينتج من هذه الخاصة انه اذا فرضنا شعاعاً a محمولا على محور x'x شعاع واحدته i وشعاعاً b محمولاً على محور y' y شعاع واحدته j يكون :

$$a = \overline{a}\, i \qquad\qquad b = \overline{b}\, j$$

وبالتالي يكون :

$$a \wedge b = \overline{a}.\overline{b}\,(i \wedge j)$$

أي ان الجداء الخارجي لشعاعين واقعين على محورين يساوى جداء قياسيهما الجبريين بالجداء الخارجي لشعاعي الواحدة لهذين المحورين .

(٢) ان خواص جداء الاعداد الجبرية التي أمكن تطبيقها على الجداء الداخلي للاشعة يمكن تطبيقها أيضاً على الجداء الخارجي لها شريطة المحافظة على ترتيب الاشعة حين ضربها . فلدينا مثلاً :

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c \qquad (10)$$

وتبرهن هذه الخاصة في الهندسة التحليلية (اعتماداً على الانشاء الهندسي السابق لجداء شعاعين)

هذا ويمكن ان نحسب ، استناداً الى العلاقة (10) ، الجداء الشعاعي لمجموعين من الاشعة كما نجري ذلك في الجبر .

٤٣ — حساب الجداء الخارجي لشعاعين تحليلياً : ليكن $v(x, y, z)$ و $v'(x', y', z')$ الشعاعين المفروضين . نعلم ان :

$$v = x\,i + y\,j + z\,k \qquad\qquad v' = x'\,i + y'\,j + z'\,k$$

فيكون :

$$v \wedge v' = (x\,i + y\,j + z\,k) \wedge (x'\,i + y'\,j + z'\,k)$$

وبما ان :

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{o}$$

$$\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \text{و}$$

فيكون :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = (y z' - z y')\,\mathbf{i} + (z x' - x z')\,\mathbf{j} + (x y' - y x')\,\mathbf{k} \qquad (11)$$

واذا رمزنا بـ (L, M, N) لمركبات هذا الجداء على المحاور الاحداثية لكان :

$$L = y z' - z y' \qquad M = z x' - x z' \qquad N = x y' - y x'$$

وكان :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = L\,\mathbf{i} + M\,\mathbf{j} + N\,\mathbf{k}$$

هذا ونلاحظ ان العلاقة (11) تكتب أيضاً :

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

التقسيم الشعاعي لشعاعين :

٤٤ ـ **تعريف :** التقسيم الشعاعي عملية معاكسة للجداء الشعاعي . فتقسيم شعاع c على آخر b هو ايجاد شعاع a يحقق العلاقة :

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

نرى ان امكان الحل يستلزم تعامد الشعاعين b و c .

لنفرض ان الاشعة منبعثة من نقطة واحدة o . لننشىء ثلاثية قائمة ومباشرة $o\,x\,y\,z$ بحيث ينطبق المحوران $o\,y$ و $o\,z$ على الشعاعين b و c ويتحدان معهما في الاتجاه . فالشعاع المطلوب a الذي يتعامد مع c (بحسب التعريف) يقع في المستوي $x\,o\,y$. نعلم ان مسقط a على مستو عمودي على b هو شعاع a′ يحقق العلاقة :

$$a \wedge b = a' \wedge b$$

فقياسه هو $\left|\frac{c}{b}\right|$ ومنحاه واتجاهه يتعينان بحيث تكون الثلاثية القائمة (a′, b, c) مباشرة. اذن الشعاع المطلوب a قياسه $\left|\frac{c}{b}\right|$ واتجاهه اتجاه المحور $o\,x$.

نرى ان هنالك اشعة كثيرة تحقق هذا الطلب. فكل شعاع مبدؤه o ومنتهاه احدى نقط المستقيم الذي نرسمه من نهاية a′ موازياً للشعاع b هو حل مقبول ويمكن اعتباره هو الشعاع المطلوب a . فالمسألة اذن عدد غير منتاه من الحلول .

حالات خاصة : (١) اذا فرضنا $c = o$ و $b \neq o$ يكون $a' = o$ فاي شعاع يوازي b (مهما كان طوله واتجاهه) هو حل مقبول ، ويعتبر هو الشعاع a .

(٢) واذا فرضنا $c = o$ و $b = o$ فأي شعاع في الفراغ (مهما كان طوله واتجاهه ومنحاه) هو حل مقبول .

(٣) اما اذا كان $c \neq o$ و $b = o$ فالمسألة مستحيلة والتقسيم غير ممكن .

والخلاصة : نرى ان التقسيم يكون ممكناً اذا كان $b \neq o$ وكان b عمودياً على c . وفي خلاف ذلك يكون التقسيم مستحيلا او غير معين .

٤٥ ـ التقسيم الشعاعي تحليلياً : لتكن o x y z مجموعة المحاور الاحداثية (القائمة والمباشرة) و b (X, Y, X) و c (L, M, N) الشعاعين المفروضين المنبعثين من مبدأ الاحداثيات o ، و a (x, y, z) الشعاع المطلوب والمنبعث أيضاً من o .

بما أن

$$a \wedge b = c$$

فالاحداثيات (x, y, z) لنهاية الشعاع a تحقق العلاقات :

$$(12) \qquad yZ - zY = L \qquad zX - xZ = M \qquad xY - yX = N$$

نرى انه لو جمعنا هذه المعادلات طرفاً الى طرف بعد ضرب طرفي الاولى بـ X والثانية بـ Y والثالثة بـ Z لوجدنا :

$$(13) \qquad LX + MY + NZ = o$$

وهذه العلاقة تكتب $b.c = o$ ، ويستدل منها على ان الشعاعين b و c متعامدان (وهو الشرط الذي ذكرناه سابقاً) .

نعلم (في الهندسة التحليلية) ان المعادلات (12) تمثل ثلاثة مستويات موازية للشعاع b (X, Y, Z) ومتلاقية في مستقيم واحد (اعتماداً على العلاقة 13) . اذن لا يوجد حل وحيد للمعادلات (12) ، اي لا توجد قيمة وحيدة لكل من الاحداثيات x و y و z ، وبالتالي لايوجد شعاع وحيد a (x, y, z) بل أشعة عديدة ترسم نهاياتها مستقيماً يوازي b .

حالات خاصة : (١) اذا فرضنا $L = M = N = o$ (اي $c = o$) ولم تكن المركبات (X, Y, Z) مساوية للصفر (أي $b \neq o$) تصبح المعادلات (12) :

$$\frac{x}{X} = \frac{y}{Y} = \frac{z}{Z}$$

وهي تمثل مستقيماً ماراً من o ويوازي b ، وهو المحل الهندسي لنهاية الشعاع a .

(٢) واذا فرضنا $L = M = N = 0$ (أي $c = o$) و $X = Y = Z = 0$ (اي $b = o$) فالمعادلات (12) تغدو مطابقات. فهي تتحقق مهما كانت قيم الاحداثيات (x, y, z) . فكل نقطة في الفراغ يمكن اعتبارها نهاية الشعاع a .

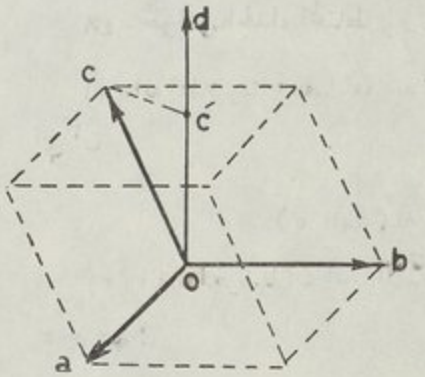
(٣) اما اذا كان $X = Y = Z = 0$ (اي $b = o$) ولم تكن المركبات (L, M, N) مساوية جميعها للصفر (اي $c \neq o$) فالمعادلات (12) تصبح مستحيلة الحل .

الجداء المختلط لثلاثة أشعة :

٤٦ ـ **تعريف** : نقول جداء مختلط لثلاثة اشعة a و b و c ، ونرمز له بـ (a, b, c) العدد P الذي يحقق العلاقة :

$$P = (a \wedge b).c$$

نرى ان $a \wedge b$ هو شعاع، وليكن d (شكل ١٢) ، قيمته المطلقة تقدر بسطح متوازي الاضلاع المنشأ على a و b . وان P الذي يساوي $d.c$ يساوي ايضاً $c'.d$ (c' مسقط c على d).



(شكل ١٢)

واذا لاحظنا ان oc' هو ارتفاع متوازي السطوح المنشأ على الاشعة المفروضة a و b و c ، لكانت القيمة المطلقة للعدد P تقدر بحجم متوازي السطوح المذكور . أما اشارة P فهي

موجبة او سالبة حسبما تكون الزاوية cod حادة او منفرجة ، او حسبما تكون الثلاثية o a b c موجبة أو سالبة .

٤٧ - نتائج: ينتج من تعريف الجداء المختلط :

(١) ان الجداء المختلط لثلاثة اشعة يصبح مساوياً للصفر اذا وازت هذه الاشعة مستوياً واحداً .

(٢) ان الجداء المختلط للاشعة a و b و c لا يتغير حين نجري على هذه الاشعة تبديلاً دائرياً ، أي ان :

$$(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$$

لان القيمه المطلقة للجداء (وهي حجم متوازي السطوح) لا يتغير، كما ان اشارته لا تتغير أيضاً (وهي اشارة الثلاثية o a b c) .

(٣) ان تغيير ترتيب شعاعين من الجداء المختلط (a, b, c) يغير اشارة الجداء فقط ، اي ان :

$$(a, b, c) = -(b, a, c)$$

٤٨ - خواص الجداء المختلط : نرى بسهولة :

(١) انه اذا ضربنا أحد اشعة جداء مختلط بعدد، فالجداء يضرب بهذا العدد، أي أن :

$$(m\,a, b, c) = m(a, b, c)$$

(٢) انه اذا فرضنا ان احد الاشعة وليكن c ، يساوي مجموع شعاعين c′ و c″ :

$$c = c' + c''$$

فالجداء المختلط (a, b, c) يصبح :

$$(a \wedge b) . c = (a \wedge b) . (c' + c'')$$

$$= (a \wedge b) . c' + (a \wedge b) . c''$$

ونستخلص من ذلك ان :

$$(a, b, c' + c'') = (a, b, c') + (a, b, c'')$$

٤٨ - حساب الجداء المختلط تحليلياً: لتكن $v(x, y, z)$ و$v'(x', y', z')$ و $v''(x'', y'', z'')$ الاشعة المفروضة . فمركبات الشعاع $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{V}'$$

هي :

$$L = y z' - z y' \qquad M = z x' - x z' \qquad N = x y' - y x'$$

فالجداء المختلط :

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'') = (\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}') . \mathbf{V}''$$

يصبح اذن :

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'') = L x'' + M y'' + N z''$$

أو

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'') = (y z' - z y') x'' + (z x' - x z') y'' + (x y' - y x') z''$$

ونلاحظ أن هذه القيمة هي نشر المعين :

$$(14) \qquad (\mathbf{V}, \mathbf{V}', \mathbf{V}'') = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

تمارين

١ — لدينا شكل رباعي اطوال أضلاعه AA′ و BB′ و AB معلومة وتساوي a و b و d، وزاويتاه A و B معلومتان ، الاولى تساوي α والثانية β .

احسب طول ضلعه A′B′ .

٢ — A و B و C و D أربع نقط في الفراغ برهن العلاقة :

$$AB \cdot CD + AC \cdot DB + AD \cdot BC = 0$$

٣ — برهن أنه اذا تعامد زوجان من الاحرف المتقابلة من رباعي وجوه لتعامد الزوج الثالث أيضاً .

٤ — بفرض أن oA هو شعاع مثبت ، عين المحل الهندسي لنهاية الشعاع oM في الحالتين التاليتين :

(١) الجداء الداخلي $oA \cdot oM$ يبقى ثابتاً

(٢) الجداء الخارجي $oA \wedge oM$ يبقى ثابتاً .

٥ — لدينا العلاقة :

$$V = oA \wedge oB + oB \wedge oC + oC \wedge oA$$

(١) برهن أن الشعاع V يبقى ثابتاً مهما تغير موضع النقطة o . عين هذا الشعاع .

(٢) كيف يصبح المثلث ABC حين ينعدم V .

٦ — كيف تصبح المسألة السابقة اذا كانت لدينا العلاقة :

$$V = oA \wedge oB + oB \wedge oC + oC \wedge oD + oD \wedge oA$$

٧ – لدينا رباعي وجوه ABCD . فاذا رسمنا أشعة عمودية على وجوهه ومتناسبة مع سطوح هذه الوجوه ، فالمجموع الهندسي لهذه الأشعة يساوي الصفر حين تكون هذه الاشعة متجهة جميعها نحو داخل الشكل أو نحو خارجه .

٨ — برهن صحة المساواة :

$$(a \wedge b) \wedge c = (a.c)b - (b.c)a$$

٩ ـ تحقق من صحة المساواة :

$$(a \wedge b).(c \wedge d) = c.[d \wedge (a \wedge b)]$$

١٠ — استنتج أن :

$$(a \wedge b).(c \wedge d) = (a.c)(b.d) - (a.d).(b.c)$$

كيف تصبح هذه المساواة اذا فرض أن :

$$a = c \qquad \text{و} \qquad b = d$$

١١ – A و B نقطتان ثابتتان . ما هو المحل الهندسي لنقطة M بحيث يكون الجداء $MA \wedge MB$ مساوياً لشعاع معلوم . ناقش .

* * *

الفصل الرابع

عزم شعاع

٤٩ - تمهيد: حين بحثنا في العمليات المختلفة على الاشعة من جمع وطرح وضرب وتقسيم ، قلنا اننا نجري هذه العمليات على أشعة طليقة ، وكانت نتائج العمليات أشعة طليقة أيضاً . سنرى في بحث العزم أن الاشعة التي ترد فيه هي أشعة منزلقة أو مثبتة .

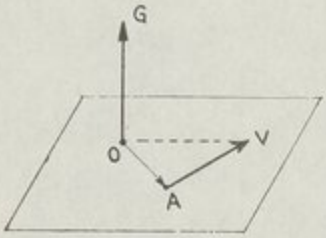
هذا وقد رأينا كيف نعين تحليلياً الشعاع الطليق بمركباته (X, Y, Z) على المحاور الاحداثية $oxyz$. وندرك بسهولة أن الشعاع المثبت يتعين بمركباته (X, Y, Z) وبأحداثيات مبدئه (x, y, z) . سنرى الآن في بحث العزم كيف نعين الشعاع المنزلق .

عزم شعاع بالنسبة لنقطة :

٥٠ — تعريف : نفرض شعاعاً $\mathbf{V}$ (مبدؤه A) ونقطة ما o في الفراغ (شكل ١٣) . نسمي الشعاع المثبت $\mathbf{G}$ الذي مبدؤه o والمعين بالعلاقة :

$$\mathbf{G} = oA \wedge \mathbf{V} \qquad (1)$$

بعزم $\mathbf{V}$ بالنسبة لنقطة o (أو في o) ، ونرمز اليه بـ $(\mathbf{V}, o)$ ، ونسمي o بمركز العزم .



(شكل ١٣)

٥١ — نتائج : ينتج من تعريف العزم :

(١) ان عزم شعاع V في o هو شعاع عمودي على المستوي المعين بالشعاع V والنقطة o ، يقاس بنصف مساحة المثلث الذي رأسه o وقاعدته V ، ويتجه بحيث يدور حوله V بدوران موجب (أو مباشر) .

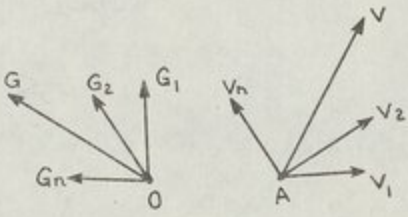
(٢) ان عزم شعاع بالنسبة لنقطة لا يتغير اذا زلق الشعاع على حامله .

(٣) ان العزم ينعدم اذا انعدم الشعاع أو مرّ حامله من مركز العزم .

٥٢ ــ ملاحظة : راينا أن العزم G يتجه بحيث اذا دار حوله V (باعتبار G محوراً للدوران) كان اتجاه الدوران مباشراً . لكننا نلاحظ بالمقابل ، أن هذا العزم يتجه ايضاً بحيث اذا دار G نفسه حول V (أي باعتبار V محوراً للدوران) لكان هذا الدوران مباشراً . اذن يمكننا ان نقول ان G يتجه بحيث يكون اتجاه دوران أحد الشعاعين V أو G حول الآخر مباشراً .

٥٣ ــ نظرية فارينيون : حاصلة العزوم في نقطة ما o في الفراغ لأشعة متلاقية في نقطة مفروضة A تساوي العزم في o لحاصلة الاشعة المتلاقية المفروضة .

لتكن V_1 و V_2 و ... و V_n مجموعة الاشعة المفروضة والمتلاقية في النقطة A ، و G_1 و G_2 و ... و G_n عزوم هذه الاشعة في o (شكل ١٤) فيكون :



(شكل ١٤)

$$G_1 = oA \wedge V_1$$

$$G_2 = oA \wedge V_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$G_n = oA \wedge V_n$$

واذا جمعنا هذه العلاقات طرفاً الى طرف يكون :

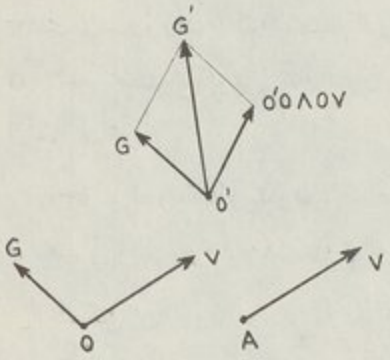
$$\mathbf{G_1 + G_2 + \cdots + G_n = oA \wedge (V_1 + V_2 + \cdots + V_n)}$$

واذا رمزنا بـ $\mathbf{V}$ لحاصلة الاشعة المفروضة (المتلاقية في A) ، و بـ $\mathbf{G}$ لحاصلة عزوم هذه الاشعة في o ، لكان :

$$\mathbf{G = oA \wedge V}$$

أي أن حاصلة العزوم في o للأشعة المفروضة المتلاقية في A تساوي العزم في o لحاصلة هذه الاشعة المفروضة .

٥٤ ـ عزما شعاع بالنسبة لنقطتين : لنقارن بين عزمي شعاع $\mathbf{V}$ في مركزين o و o' .



(شكل ١٥)

ليكن o مبدأ الشعاع المفروض $\mathbf{V}$ و $\mathbf{G}$ و $\mathbf{G'}$ عزمي $\mathbf{V}$ في o و o' (شكل ١٥) . نعلم أن :

$$\mathbf{G = o\,A \wedge V}$$

و

$$\mathbf{G' = o'A \wedge V}$$

وبما أن :

$$\mathbf{o'A = o'o + oA}$$

يكون :

$$\mathbf{o'A \wedge V = o'o \wedge V + oA \wedge V}$$

أو

$$\mathbf{G' = o'o \wedge V + G} \qquad (2)$$

وهي العلاقة بين عزمي الشعاع $\mathbf{V}$ بالنسبة للنقطتين o و o' .

٥٥ — نتيجة : اذا لاحظنا أن $\mathbf{o'o \wedge V}$ هو العزم في o' لشعاع مبدؤه o ويساوي الشعاع $\mathbf{V}$ ، أي :

$$\mathbf{o'o \wedge V = (oV, o')}$$

فالعلاقة (2) تكتب بالشكل التالي :

$$G' = G + (oV, o') \qquad (3)$$

أو بالشكل :

$$(V, o') = (V, o) + (oV, o') \qquad (3)'$$

ويتج من هذه العلاقة أنه يمكن الحصول على عزم شعاع في نقطة ما o' من عزم الشعاع نفسه بالنسبة لنقطة معينة o . فعزم شعاع في o' يساوي حاصلة عزمين ، أحدهما العزم في o للشعاع المفروض ، والثاني العزم في o' لشعاع مبدؤه o ويساوي الشعاع المفروض .

٥٦ — ملاحظة : نلاحظ في العلاقة (2) أن عزمي شعاع V في نقطتين o و o' لا يكونان بوجه عام متساويين . ويتم التساوي اذا انعدم الجداء الشعاعي $V \wedge o'o$ ، أي اذا وازى المستقيم $o'o$ الشعاع V . ومنه النتيجة الآتية :

٥٧ — نتيجة : ان عزم شعاع لا يتغير (أي يبقى مساوياً لنفسه) حين يتنقل مركز العزم على مستقيم موازٍ للشعاع .

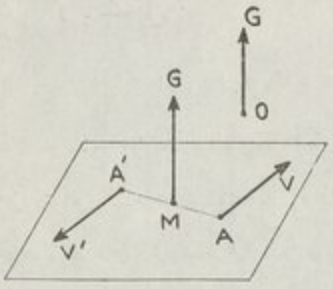
حالة خاصة :

٥٨ — المزدوجة : نسمي المجموعة المؤلفة من شعاعين متعاكسين بمزدوجة بسيطة ، أو اختصاراً مزدوجة . ونسمي طول العمود المشترك بين شعاعي المزدوجة بذراع المزدوجة . أما حاصلة عزمي شعاعي المزدوجة بالنسبة لنقطة فندعوها بعزم المزدوجة أو محورها .

لقد رأينا أنه حين يتنقل مركز العزم في الفراغ فعزم كل من شعاعي المزدوجة يتغير بوجه عام . سنرى الآن أن عزم المزدوجة (اي حاصلة عزمي شعاعيها) يبقى ثابتاً مهما تغير مركز العزم في الفراغ .

لنفرض أن المزدوجة مؤلفة من الشعاعين V و V′ (شكل ١٦) . نعلم أن :

$$V' = -V$$



(شكل ١٦)

فعزم V في نقطة ما o هو :

$$(V, o) = oA \wedge V$$

وعزم V′ في o هو :

$$(V', o) = oA' \wedge V' = -oA' \wedge V$$

فحاصلة العزمين تكون :

$$G = (V, o) + (V', o) = (oA - oA') \wedge V$$

وبما أن

$$oA - oA' = A'A$$

يكون :

$$G = A'A \wedge V \qquad (4)$$

وتدل هذه العلاقة على أن محور المزدوجة ، وهو G ، هو شعاع مستقل عن النقطة o فلا يتغير بتغيرها .

ونلاحظ أن هذا المحور عمودي على مستوي شعاعي المزدوجة ، ويقدر بسطح متوازي الاضلاع المنشأ على هذين الشعاعين .

هذا واذا اتخذنا منتصف A′A ، وليكن M ، مركزاً للعزم ، لغدا محور المزدوجة محوراً للدوران . فشعاعا المزدوجة يعينان اتجاهاً واحداً للدوران حول هذا المحور يدعى اتجاه دوران المزدوجة .

والخلاصة : ان محور المزدوجة هو شعاع طليق :

(١) عمودي على مستوي شعاعي المزدوجة .

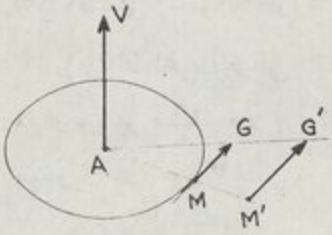
(٢) يتجه بحيث يكون اتجاه دوران المزدوجة حوله (باعتباره محوراً للدوران) هو الاتجاه الموجب (أو المباشر) .

(٣) تقدر قيمته العددية بجداء طول أحد شعاعي المزدوجة بذراعها .

٥٩ — توزيع العزوم في الفراغ : رأينا ان عزم شعاع هو تابع لموضع مركز العزم في الفراغ . سندرس تغيرات عزم شعاع منزلق مفروض عندما يتنقل مركز العزم في الفراغ . اي سندرس توزيع عزوم هذا الشعاع في الفراغ .

ليكن **V** الشعاع المنزلق المفروض ، و M مركز العزم . لكي نبحث عن تغيرات عزم **V** حين يتغير M في الفراغ ، يكفي ان ندرس هذه التغيرات حين يتنقل M في مستو P عمودي على **V** (لأن عزم شعاع لا يتغير حين يتنقل مركز العزم على مستقيم مواز للشعاع ، بند ٥٧) .

لنفرض ان مبدأ **V** ، وليكن A ، في المستوي P (شكل ١٧) ، ولنرمز بـ r لبعد M عن A و بـ r للشعاع **AM** . نعلم ان عزم **V** في M ، وليكن **G** ، يعين بالعلاقة :



(شكل ١٧)

$$\mathbf{G} = \mathbf{MA} \wedge \mathbf{V}$$

او

$$\mathbf{G} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{V}$$

نرى ان العزم **G** يقع في المستوي P ، وان قياسه :

$$G = r \cdot V$$

(بفرض ان r و V و G هي القيم المطلقة للأشعة r و **V** و **G**) ، وانه يتجه بحيث اذا دار حول **V** يكون اتجاه الدوران مباشراً .

نلاحظ ان قياس العزم G يتناسب مع البعد r . فعندما يزداد r من الصفر الى ما لا نهاية ، بأن يرسم المركز M مستقيماً في المستوي P ماراً من A ، فان قيمة G تزداد ايضاً من الصفر الى ما لا نهاية ، وترسم نهاية **G**

مستقيماً ماراً ايضاً من A (المثلثات AMG و AM'G' و ... متحاكية ، مركز التحاكي A) . وعندما يرسم المركز M دائرة مركزها A ، يبقى قياس العزم G ثابتاً ويبقى حامله مماساً لهذه الدائرة .

نستخلص مما تقدم :

(١) ان عزوم الشعاع V بالنسبة لنقط المستوي P تغلف دوائر مراكزها منطبقة على A . اما بالنسبة لنقط الفراغ فان هذه العزوم تغلف دوائر محاورها منطبقة على حامل V .

(٢) ان المحل الهندسي لنقط المستوي P حيث يكون فيها لعزوم V قياس ثابت مفروض هو دائرة مركزها A . فبالنسبة لنقط الفراغ يكون المحل الهندسي اسطوانة محورها حامل V .

(٣) ان المحل الهندسي لنقط P حيث يكون فيها لعزوم V منحى ثابت مفروض هو مستقيم مار من A . فبالنسبة لنقط الفراغ يكون المحل الهندسي مستوياً ماراً من V .

(٤) ان المحل الهندسي لنقط المستوي حيث تكون فيها عزوم V مساوية لشعاع مفروض (عمودي على V) هو نقطة . فبالنسبة لنقط الفراغ يكون المحل الهندسي مستقيماً موازياً للشعاع V .

٦٠ - عزم شعاع بالنسبة لنقطة تحليلياً : نفرض مجموعة محاور احداثية قائمة ومباشرة oxyz . وليكن V (X, Y, Z) الشعاع المفروض ، و A (x, y, z) مبدأه ، و G (L, M, N) عزمه بالنسبة لمبدأ الاحداثيات o .

لنعين مركبات هذا العزم على المحاور الاحداثية . نعلم ان :

$$G = OA \wedge V$$

فمركبات G تكون :

$$\begin{cases} L = y\,Z - z\,Y \\ M = z\,X - x\,Z \\ N = x\,Y - y\,X \end{cases} \qquad (5)$$

ولحساب المركبات (L', M', N') لعزم $\mathbf{V}$ بالنسبة لنقطة ما O' احداثياتها (x', y', z') ، يكفي ان نلاحظ ان هذا العزم ، وليكن $\mathbf{G}'$ ، يتعين من العلاقة :

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G} + \mathbf{O'O} \wedge \mathbf{V}$$

او

$$\mathbf{G}' = \mathbf{G} - \mathbf{OO'} \wedge \mathbf{V}$$

فمركبات $\mathbf{G}$ على المحاور الاحداثية تكون :

$$\begin{cases} L' = L - y'\,Z + z'\,Y \\ M' = M - z'\,X + x'\,Z \\ N' = N - x'\,Y + y'\,X \end{cases} \qquad (6)$$

نرى ان مركبات عزم شعاع بالنسبة لنقطة ما هي توابع خطية للكميات الست (X, Y, Z) و (L, M, N) ، اي لمركبات $\mathbf{V}$ و $\mathbf{G}$.

٦١ـ **ملاحظة** : لقد رأينا (بند٥٩) كيف ندرس توزيع العزوم في الفراغ بطريقة شعاعية . سنرى الآن كيف ندرس هذا التوزيع بطريقة تحليلية . فندرس كيف يتغير عزم شعاع مفروض حين يتغير مركز العزم .

وتسهيلاً لهذه الدراسة ، نأخذ الشعاع المفروض ، وليكن $\mathbf{V}$ ، منطبقاً على المحور oz ومتحداً معه في الاتجاه . فاذا رمزنا بـ V لقياس هذا الشعاع ، لكانت مركبات $\mathbf{V}$ على المحاور الاحداثية هي $(0, 0, V)$.

واذا فرضنا ان $A(x, y, z)$ هو مركز العزم ، وان $\mathbf{G}(L, M, N)$ هو عزم $\mathbf{V}$ في A لكان :

$$\mathbf{G} = \mathbf{AO} \wedge \mathbf{V} = -\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}$$

وكان بالتالي :

$$L = -yV \qquad M = xV \qquad N = o$$

واذا رمزنا بـ (r, θ, z) للأحداثيات الاسطوانية لنقطة A لكانت هذه المركبات :

$$L = -rv\sin\theta \qquad M = rv\cos\theta \qquad N = o$$

ونستنتج من هذه المركبات ما يلي :

(١) بما ان $N = o$ فالعزم G يوازي المستوي xoy . فهو يتعامد اذن مع oz او V (وهذا ما رأيناه في البند ٥١) .

(٢) بما ان مركبات العزم مستقلة عن z ، فالعزم G لا يتغير بتغير z . فاذا اعطينا x و y (فصل وترتيب A) قيمتين ثابتتين ، واعطينا z (راقم A) قيماً متغيرة ، فمركبات العزم تبقى ثابتة ، وبالتالي يبقى شعاع العزم ثابتاً (أي مساوياً لنفسه) .

وينتج من ذلك انه اذا تنقل مركز العزم A على مستقيم موازٍ للشعاع V ، فالعزم G يبقى مساوياً لنفسه (وهذا ما رأيناه في البند ٥٧) .

كما ينتج ايضاً ان المحل الهندسي للنقط التي تكون فيها عزوم شعاع مفروض V ، متساوية فيما بينها ، ومساوية لشعاع معلوم $K(a, b, o)$ عمودي على V ، يتعين بالمعادلتين :

$$-vy = a \qquad \text{و} \qquad vx = b$$

أو

$$x = \frac{b}{v} \qquad \text{و} \qquad y = -\frac{a}{v}$$

فهو مستقيم يوازي V .

(٣) بما أن $G^2 = L^2 + M^2$

فيكون $G^2 = (x^2 + y^2)\,V^2 = r^2 . V^2$

واذا فرضنا $r > o$ (وهذا ما سنفرضه في أبحاثنا في الميكانيك) ، يصبح r هو بُعد A عن oz (او عن V) ، ويصبح بالتالي قياس العزم :

$$G = r \cdot V$$

فقياس العزم يتناسب مع بُعد A عن V . فاذا أعطينا r قيمة ثابتة ، واعطينا θ و z قيماً متغيرة ، يبقى G ثابتاً .

وينتج من ذلك أنه اذا تنقلت A على اسطوانة دورانية محورها oz (أو حامل V) فقياس العزم يبقى ثابتاً .

وندرك بسهولة ان المحل الهندسي للنقط التي تكون فيها لعزوم شعاع مفروض V قياسات متساوية ومساوية لقياس معلوم k ، يتعين بالمعادلة :

$$x^2 + y^2 = \frac{k^2}{V^2}$$

وهو اسطوانة دورانية محورها oz (او حامل V) ونصف قطرها $\frac{k}{V}$.

(٤) بما ان $\frac{M}{L} = \frac{x V}{-y V} = -\frac{x}{y}$

أو $\frac{M}{L} = -\cot g\, \theta = tg\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

فالعزم G يتعامد مع المستوي المعين بالنقطة A والمحور oz . فاذا اعطينا θ قيمة ثابتة واعطينا r و z قيماً متغيرة ، يبقى شعاع العزم G موازياً لنفسه وعمودياً على مستو مار من المحور oz ويصنع مع المحور ox الزاوية الثابتة θ .

ينتج من ذلك أنه اذا تنقلت A في مستو مار من oz (أو V) فالعزم G يبقى موازياً لنفسه وعمودياً على هذا المستوي .

ونستخلص بسهولة ، ان المحل الهندسي للنقط التي تكون فيها عزوم شعاع مفروض V متوازية فيابينها وموازية لاستقامة معلومة (H (α, β, o عمودية على V ، يتعين بالمعادلة :

$$\frac{-yV}{\alpha} = \frac{xV}{\beta}$$

او $$y = -\frac{\alpha}{\beta}x$$

فهو مستو مار oz (او من V) وعمودي على الاستقامة H .

٦٢ — تعيين شعاع منزلق : لقد رأينا ان عزم شعاع V ($V \neq o$) بالنسبة لنقطة ما o في الفراغ ، لا يتغير حين نزلق الشعاع V على حامله . ورأينا أيضاً ان هذا الشعاع وعزمه متعامدان ، او يحققان العلاقة :

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{G} = o \qquad (7)$$

لنفرض بالمقابل ان V هو شعاع طليق (لا يساوي الصفر) ، و G شعاع مثبت بنقطة مفروضة o ، وان G عمودي على V (او $V \cdot G = o$) . لنعين موضع الشعاع الطليق V في الفراغ بحيث يكون عزمه في o هو الشعاع المثبت G .

المسألة تؤول لتعيين مبدأ V ، وليكن A ، بحيث يكون :

$$\mathbf{G} = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}$$

ويتم ذلك بتقسيم الشعاع المثبت G على الشعاع الطليق V . وقد وجدنا (في التقسيم الشعاعي ، بند ٤٤) ان A ترسم مستقيماً يوازي V . وهذا يدل على ان V هو شعاع منزلق معادلة حامله :

$$\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V} - \mathbf{G} = o$$

واذا فرضنا ان (X, Y, Z) هي مركبات الشعاع الطليق V على المحاور الاحداثية oxyz (القائمة والمباشرة) و (x, y, z) احداثيات مبدئه A ، و (L, M, N) مركبات عزمه G ، فالمقادير الجبرية (X, Y, Z, L, M, N) التي تحقق العلاقة :

$$L X + M Y + N Z = o$$

تعين شعاعاً منزلقاً محمولاً على المستقيم المعين بالمعادلات :

$$y\,Z - z\,Y - L = o$$
$$z\,X - x\,Z - M = o$$
$$x\,Y - y\,X - N = o$$

نسمي هذه المقادير الستة بأحداثيات الشعاع المنزلق .

عزم شعاع بالنسبة لمحور :

٦٣ — تعريف : عزم شعاع V بالنسبة لمحور د (او حول محور د) ، ونرمز له بـ (د ,V) ، هو المسقط على هذا المحور لعزم الشعاع بالنسبة لنقطة ما من المحور .

(شكل ١٨)

فاذا فرضنا ان o هي نقطة ما من المحور ، و u هو شعاع واحدة د ، ورمزنا بـ G لعزم V في o ، وبـ g لمسقط G على د ، لكان :

$$g = G \,.\, u$$

واذا فرضنا ان A هو مبدأ الشعاع V لكان :

$$g = (OA \wedge V) \,.\, u$$

او
$$g = (OA\,,\,V\,,\,u) \qquad (8)$$

نرى ان هذا التعريف لايكون صحيحاً الا اذا برهنا ان قيمة المسقط g لاتتغير بتغير النقطة o على المحور . فاذا اخذنا نقطة ثانية o' على د ، لكان :

$$g' = (O'A\,,\,V\,,\,u)$$

واذا لاحظنا ان :

$$OA = OO' + O'A$$

لكان :

$$(OA, V, u) = (OO', V, u) + (O'A, V, u)$$

وبما أن :

$(OO', V, u) = o$ لتوازي الشعاعين OO' و u

فيكون :

$$(OA, V, u) = (O'A, V, u)$$

أو $g = g'$

اي ان المسقطين على د لعزمي الشعاع V بالنسبة للنقطتين O و O' من المحور متساويان وهو المطلوب .

٦٤ ــ نتائج : ينتج من تعريف العزم حول محور :

(١) ان عزم شعاع حول محور هو مقدار جبري يقدر بالجداء المختلط لثلاثة اشعة ، هي الشعاع المفروض ، وشعاع واحدة المحور ، والشعاع الواصل بين مبدئي هذين الشعاعين :

$$(V, \Delta) = (ou, OA, AV) \qquad (9)$$

فقيمته المطلقة تقدر بحجم متوازي السطوح المنشأ على هذه الاشعة ، واشارته تكون موجبه أو سالبة حسبما تكون الثلاثية (u, OA, V) مباشرة أو رجعية .

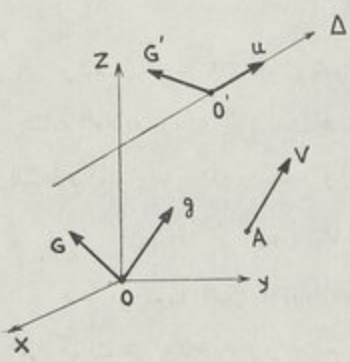
(٢) ان عزم شعاع حول محور لا يتغير حين نزلق الشعاع على حامله .

(٣) ان العزم ينعدم حين يكون الشعاع والمحور في مستو واحد .

٦٥ ــ ملاحظة : لقد رأينا ان العزم في نقطة هو شعاع مثبت في النقطة . ونرى الآن ان العزم حول محور هو قياس جبري لشعاع منزلق على المحور .

٦٦ - العزم حول محور بدلالة العزم في نقطة مفروضة : لنعين عزم شعاع V حول محور Δ بدلالة العزم في نقطة ما o في الفراغ .

ليكن A مبدأ V (شكل ١٩)، و u شعاع واحدة Δ ، و o' نقطة ما من Δ . نعلم ان :



(شكل ١٩)

$$(\mathbf{V}, \Delta) = (\mathbf{u}, \mathbf{o'A}, \mathbf{V})$$

واذا لاحظنا ان :

$$\mathbf{o'A} = \mathbf{o'o} + \mathbf{oA}$$

لكان :

$$(\mathbf{V}, \Delta) = (\mathbf{u}, \mathbf{o'o}, \mathbf{V}) + (\mathbf{u}, \mathbf{oA}, \mathbf{V})$$

وهذه العلاقة تكتب :

$$(\mathbf{V}, \Delta) = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{oo'} \wedge \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{oA} \wedge \mathbf{V})$$

او

$$(\mathbf{V}, \Delta) = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{o}) + \mathbf{u} \cdot (\mathbf{V}, \mathbf{o}) \qquad (10)$$

واذا رمزنا بـ G لعزم V في o ، وبـ g لعزم u في o ، فالعلاقة الاخيرة تكتب :

$$(\mathbf{V}, \Delta) = \mathbf{V} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{G}$$

وهذه العلاقة تعين عزم شعاع حول محور بدلالة العزم في نقطة ما في الفراغ للشعاع المفروض وشعاع واحدة المحور .

٦٧ — عزم شعاع حول محور تحليلياً : نفرض مجموعة محاور احداثية قائمة ومباشرة oxyz . وليكن V (X, Y, Z) الشعاع المفروض ، و A (x, y, z) مبدأه ، و G (L, M, N) عزمه في مبدأ الاحداثيات o .

ان عزوم $\mathbf{V}$ حول المحاور الاحداثيـة (ox, oy, oz) هي المساقط على هذه المحاور لعزم $\mathbf{V}$ في o . فهي اذن مركبات $\mathbf{G}$ على هذه المحاور :

$$L = yZ - zY \qquad M = zX - xZ \qquad N = xY - yX$$

ولتعيين عزم $\mathbf{V}$ حول محور Δ شعاع واحدته $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ ، يكفي كتابة العلاقة (10) التي تعين هـذا العزم بدلالة العزم في مبدأ الاحداثيات o للشعاع المفروض $\mathbf{V}$ وشعاع واحدة المحور $\mathbf{u}$:

$$(\mathbf{V}, \Delta) = \mathbf{u} \,.\, (\mathbf{V}, o) + \mathbf{V} \,.\, (\mathbf{u}, o)$$

فاذا فرضنـا ان (ℓ, m, n) هي عزوم $\mathbf{u}$ حول المحاور الاحداثية (أو المركبات على هذه المحاور لعزم $\mathbf{u}$ في o) لكان :

$$(\mathbf{V}, \Delta) = \alpha L + \beta M + \gamma N + \ell X + mY + nZ \qquad (11)$$

فعزم شعاع منزلق $\mathbf{V}$ حول محور ما هو اذن تابع خطي لاحداثياته (X, Y, Z, L, M, N) .

العزم النسبي لشعاعين :

٦٨ – تعريف: اذا فرضنا شعاعين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ ، مبدأ الاول A والثاني A' ، فانا نسمي الجداء الداخلي $\mathbf{V}' \,.\, (\mathbf{V}, A')$ بعزم $\mathbf{V}$ بالنسبة للشعاع $\mathbf{V}'$ ، ونرمز اليه بـ $(\mathbf{V}, \mathbf{V}')$.

واذا قارنا بين عزم $\mathbf{V}$ بالنسبـة لـ $\mathbf{V}'$ وعزم $\mathbf{V}'$ بالنسبـة لـ $\mathbf{V}$ ، لوجدنا ان :

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \mathbf{V}' \,.\, (\mathbf{V}, A') = (\mathbf{A'V'}, \mathbf{A'A}, \mathbf{AV})$$

و

$$(\mathbf{V}', \mathbf{V}) = \mathbf{V} \,.\, (\mathbf{V}', \mathbf{A}) = (\mathbf{AV}, \mathbf{AA'}, \mathbf{A'V})$$

أي ان

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = (\mathbf{V}', \mathbf{V})$$

فعزم $\mathbf{V}$ بالنسبة لـ $\mathbf{V}'$ يساوي عزم $\mathbf{V}'$ بالنسبة لـ $\mathbf{V}$.

لذلك نقول بوجه عام ، انه اذا فرضنا شعاعين في الفراغ ، فانا نسمي عزم احدهما بالنسبة للآخر بالعزم النسبي لهذين الشعاعين .

٦٩ — نتائج : ينتج من تعريف العزم النسبي لشعاعين :

(١) ان العزم النسبي لشعاعين هو مقدار جبري ، قيمته المطلقة تقدر بـ ٦ أمثال حجم رباعيّ الوجوه المنشأ بحيث ينطبق حرفان متقابلان منه على الشعاعين المفروضين ، واشارته تكون موجبة او سالبة حسبما يكون اتجاه دوران احد الشعاعين حول الآخر موجباً او سالباً .

(٢) ان العزم النسبي لشعاعين لا يتغير حين نزلق الشعاعين على حامليهما .

(٣) ان العزم النسبي ينعدم حين يكون الشعاعان في مستو واحد .

٧٠ — ملاحظة : لقد رأينا ان عزم شعاع $\mathbf{V}$ بالنسبة لمحور Δ شعاع واحدته $\mathbf{u}$ ، هو :

$$(\mathbf{V}, \Delta) = (\mathbf{u}, \mathbf{OA}, \mathbf{V})$$

بفرض ان A هو مبدأ $\mathbf{V}$ وان O هي نقطة ما من Δ . واذا لاحظنا ان $(\mathbf{u}, \mathbf{oA}, \mathbf{V})$ هو العزم النسبي للشعاعين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{u}$ ، فنرى ان عزم $\mathbf{V}$ حول Δ يساوي العزم النسبي للشعاعين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{u}$:

$$(\mathbf{V}, \Delta) = (\mathbf{V}, \mathbf{u}) \qquad (12)$$

فعزم شعاع بالنسبة لمحور يساوي العزم النسبي لشعاعين احدهما الشعاع المفروض والثاني شعاع واحدة المحور .

٧١ — العزم النسبي بدلالة العزم في نقطة مفروضة : ينتج من الملاحظة السابقة انه يمكن تعيين العزم النسبي لشعاعين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ بدلالة العزمين في نقطة ما O في الفراغ للشعاعين المفروضين .

فنجد ، اعتماداً على العلاقتين (10) و (12) ، ان :

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{V}', o) + \mathbf{V}' \cdot (\mathbf{V}, o) \qquad (13)$$

وهي العلاقة المطلوبة .

٧٢ – العزم النسبي لشعاعين تحليلياً : نفرض مجموعة محاور احداثية $oxyz$ (قائمة ومباشرة) . ليكن $\mathbf{V}(x, y, z)$ و $\mathbf{V}'(x', y', z')$ الشعاعين المفروضين ، و $\mathbf{G}(L, M, N)$ و $\mathbf{G}'(L', M', N')$ عزميهما في مبدأ الاحداثيات o .

رأينا ان العزم النسبي للشعاعين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ يتعين بدلالة عزمي هذين الشعاعين في o بالعلاقة (13) :

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = \mathbf{V} \cdot \mathbf{G}' + \mathbf{V}' \cdot \mathbf{G}$$

اذن يكون :

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V}') = X L' + Y M' + Z N' + X' L + Y' M + Z' N$$

وينتج من هذه العلاقة انه يمكن تعيين العزم النسبي لشعاعين $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ اذا علمت الاحداثيات (X, Y, Z, L, M, N) و (X', Y', Z', L', M', N') للشعاعين المنزلقين المفروضين .

عزم شعاع حول مستقيم :

تمهيد : بما ان المحور هو مستقيم موجّه ، فلا يختلف التعريف بين العزم حول مستقيم والعزم حول محور . وجميع خواص العزم حول مستقيم يمكن استنتاجها ، كما سنرى ، من خواص العزم حول محور .

٧٣ – تعريف : عزم شعاع بالنسبة لمستقيم (او حول مستقيم) هو المسقط على هذا المستقيم لعزم الشعاع بالنسبة لنقطة ما من المستقيم .

نرمز لعزم شعاع V بالنسبة لمستقيم D بـ (V, D) .

واذا فرضنا ان D هو المستقيم الحامل لمحور د لكان عزم شعاع V حول د هو القياس الجبري لعزم V حول D .

وبما ان العزم حول محور هو قياس جبري لشعاع منزلق على المحور ، فالعزم حول مستقيم هو شعاع منزلق على المستقيم .

واذا رمزنا بـ u لشعاع واحدة المحور د لكان :

$$(V, D) = (V, د)\, u \qquad (14)$$

هـذه العلاقة تساعد في معرفة خواص العزم حول مستقيم بعـد ان عرفنا خواص العزم حول محور .

نرى انه لو ضربنا هذه المساواة (داخلياً) بالشعاع u لوجدنا :

$$(V, د) = (V, D) \,.\, u \qquad (15)$$

٧٤ ـ ملاحظة : اذا فرضنا o نقطة ما من المحور د (او المستقيم D) لكان :

$$(V, د) = (OA \wedge V) \,.\, u$$

أو

$$(V, د) = OA \,.\, (V \wedge u)$$

واذا انشأنا من A مستوياً P عمودياً على u (او على D) ورمزنا بـ V′ لمسقط V على P لكان (بند ٤٠،٤) :

$$V \wedge u = V' \wedge u$$

وبالتالي :

$$(V, د) = OA \,.\, (V' \wedge u)$$

أو

$$(V, د) = (OA \wedge V') \,.\, u$$

نرى ان الجداء $V' \wedge OA$ هو عزم V′ في o ، ولنرمز له بـ g :

$$g = (V', o)$$

فالعزم حول Δ يكون اذن :

$$(V, \Delta) = g \cdot u$$

فاذا اخترنا o في نقطة تلاقي المحور Δ مع المستوي P ، لأصبح g عمودياً على P ، وبالتالي محمولاً على D . واذا أدركنا أن :

$$(V, \Delta) = (V, D) \cdot u$$

وان (V, D) محمول على D لكان :

$$(V, D) = g$$

$$(V, D) = (V', o) \qquad \text{او} \qquad (16)$$

فعزم V حول D يساوي اذن عزم V' (مسقط V على P) في o (نقطة تلاقي D مع P) . ومنه :

٧٥ — نظرية : عزم شعاع حول مستقيم يساوي العزم في نقطة من المستقيم لمسقط الشعاع على مستو عمودي على المستقيم في النقطة المفروضة .

أو نقول ، ان المسقط على مستقيم لعزم شعاع في نقطة من المستقيم يساوي العزم في تلك النقطة لمسقط الشعاع على مستو عموديّ على المستقيم في النقطة المفروضة .

٧٦ — ملاحظة : نرى أنه اذا فرضنا ان θ هي الزاوية الحادة الكائنة بين الشعاع V والمستقيم D ، و d هو بعد o عن حامل V' (وهو ايضاً البعد الاصغري بين المستقيم D وحامل V) ، وأشرنا بـ V و V' و g للقيم المطلقة للأشعة V و V' و g لكان :

$$g = V' \cdot d$$

وبما أن $\qquad V' = V \cdot \sin\theta$

فيكون :

$$g = V \cdot d \cdot \sin \theta \qquad (17)$$

٧٧ — نتائج : ينتج مما تقدم :

(١) أن عزم شعاع بالنسبة لمستقيم هو شعاع منزلق على المستقيم ، قياسه يقدر بجداء المضاريب (طول الشعاع ، البعد الاصغري بين حامل الشعاع والمستقيم ، جيب الزاوية بين الشعاع والمستقيم) ، واتجاهه يتعين بحيث يدور حوله الشعاع المفروض باتجاه مباشر .

فعزم شعاع حول مستقيم يتعين اذن حين يعلم وضع المستقيم في الفراغ ، ويعلم طول الشعاع واتجاهه وحامله (أي عناصر الشعاع باعتباره شعاعاً منزلقاً) .

(٢) ان عزم شعاع حول مستقيم لا يتغير حين نزلق الشعاع على حامله (اعتماداً على النتيجة السابقة) .

(٣) ان العزم حول مستقيم يصبح صفراً اذا انعدم البعد بين المستقيم وحامل الشعاع (أي حين يتلاقى المستقيم وحامل الشعاع) ، او اذا توازى المستقيم والشعاع . او نقول باختصار ان العزم يصبح صفراً اذا وقع الشعاع والمستقيم في مستو واحد .

٧٨ — تغيرات العزم حول مستقيم : لقد رأينا ان عزم شعاع في نقطة هو تابع لموضع تلك النقطة . وقد درسنا كيف يتغير عزم شعاع حين يتنقل مركز العزم في الفراغ . سنرى الآن كيف يتغير عزم شعاع حول مستقيم (او محور) حين يتنقل هذا المستقيم في الفراغ .

واذا لاحظنا ان عزم شعاع حول مستقيم هو المسقط على المستقيم لعزم الشعاع بالنسبة لنقطة من هذا المستقيم ، لأدركنا أن دراسة تغير عزم شعاع حول مستقيم متغير في الفراغ تؤول لدراسة هذه التغيرات حين يدور هذا المستقيم حول نقطة منه .

ليكن V الشعاع المفروض ، و o نقطة ما في الفراغ (غير واقعة على حامل V) ، و D مستقيماً ماراً من o . لنرمز بـ G لعزم V في o وبـ g لعزم V حول D .

فاذا جعلنا المستقيم D يدور حول o ، فنهاية الشعاع g ، وهي مسقط نهاية الشعاع G على D ، تتنقل على كرة قطرها oG .

فالمحل الهندسي لنهاية عزم شعاع V حول مستقيم D يدور حول o هو كرة قطرها oG .

نرى أن العزم g يبلغ نهايته العظمى ، وهي G ، حين ينطبق D على G ، ويبلغ نهايته الصغرى ، وهي الصفر ، حين يتعامد D مع G .

ونلاحظ ان المحل الهندسي للمستقيمات D التي ينعدم حولها عزوم V ، والتي نسميها بالمستقيمات الفاقدة للعزوم ، هو مستو عمودي على G في النقطة o .

كما نلاحظ أن المحل الهندسي للمستقيمات D التي يكون للعزوم حولها قياس مفروض h ($h < G$) هو مخروط دوراني ، رأسه o ، ومحوره حامل G ، ونصف زاويته الرأسية φ تحقق العلاقة :

$$\cos \varphi = \frac{h}{G}$$

ونرى هنا ايضاً أنه حين ينعدم قياس العزم h تصبح الزاوية φ قائمة، ويغدو المخروط مستوياً عمودياً على G في النقطة o . وهذا المستوي هو المحل الهندسي للمستقيمات المارة من o والفاقدة لعزوم V .

حالة خاصة : لقد فرضنا في الدراسة السابقة أن النقطة o غير واقعة على حامل V . فلو كانت o على هذا الحامل ، لكان G صفراً ، وكان بالتالي g صفراً ايضاً مهما كان منحى D .

وينتج من ذلك ان مستقيمات الفراغ القاطعة لحامل V هي مستقيمات فاقدة لعزوم V .

واذا لاحظنا ان النقطة o قد تكون في موضع محدود على حامل V او في اللانهاية ، لاضحت المستقيمات الفاقدة لعزوم V هي المستقيمات التي تلاقي حامل V أو توازيه .

أو نقول باختصار ان كل مستقيم يقع و V في مستو واحد هو مستقيم فاقد لعزم V .

٧٩ — **ملاحظة** : لما كان عزم شعاع حول محور (أو مستقيم) هو المسقط على هذا المحور لعزم الشعاع بالنسبة لنقطة من المحور ، فنظريات العزم حول نقطة يمكن تعميمها على العزم حول محور او مستقيم . وسنقصر التعميم على نظرية فارينيون ، والنظرية التي تعين عزم شعاع في نقطة ما بدلالة العزم في نقطة مفروضة ، فنستخلص بذلك النتيجتين الآتيتين :

٨٠ — **النتيجه الاولى** : ليكن V_1 و V_2 و ... و V_n اشعة متلاقية في نقطة A ، و V حاصلتها :

$$\Sigma V_i = V$$

وليكن Δ محوراً شعاع واحدته u و o نقطة ما من المحور . نعلم (حسب نظرية فارينيون) ان :

$$\Sigma (V_i , o) = (V, o)$$

لنضرب طرفي هذه المساواة (الشعاعية) بالشعاع u (الضرب داخلي) ، فيكون :

$$\Sigma (V_i , o) . u = (V, o) . u$$

وبالتالي يكون :

$$\Sigma (V_i , \Delta) = (V, \Delta) \qquad (18)$$

فحاصلة العزم حول محور ما د لاشعة متلاقية في نقطة مفروضة A يساوي العزم حول د لحاصلة الاشعة المتلاقية المفروضة .

واذا فرضنا ان D هو المستقيم الحامل للمحور د ، فالمساواة الاخيرة (وهي عددية) تصبح بعد ضرب طرفيها بالشعاع u :

$$\Sigma (V_i , \Delta) u = (V, \Delta) u$$

او

$$\Sigma (V_i , D) = (V, D) \qquad (19)$$

اي ان حاصلة العزم حول مستقيم ما D لاشعة متلاقية في نقطة مفروضة A يساوي العزم حول D لحاصلة الاشعة المتلاقية المفروضة .

٨١ — النتيجه الثانيه : ليكن V شعاعاً مفروضاً (مبدؤه A) و د محوراً مفروضاً (شعاع واحدته u) ، و د′ محوراً يوازي د ويتحد معه في الاتجاه . فاذا فرضنا ان o هي نقطة ما من د و o′ نقطة ما د′ فيكون :

$$(V, \Delta) = (V, o) . u$$

$$(V, \Delta') = (V, o') . u$$

وقد رأينا (بند ٥٥) ان :

$$(V, o') = (V, o) + (oV, o')$$

فاذا ضربنا طرفي هذه المساواة (الشعاعية) بالشعاع u (الضرب داخلي) يكون :

$$(V, o') . u = (V, o) . u + (oV, o') . u$$

او

$$(V, \Delta') = (V, \Delta) + (oV, \Delta') \qquad (20)$$

و هي العلاقة بين عزمي شعاع V حول محورين د و د′ متوازيين ومتحدين في الاتجاه .

واذا فرضنا ان D و D′ هما المستقيمان الحاملان للمحورين د و د′ فالمساواة الاخيرة تغدو بعد ضرب طرفيها بالشعاع u :

$$(\mathbf{V}, D') = (\mathbf{V}, D) + (o\mathbf{V}, D') \qquad (21)$$

وهي العلاقة بين عزمي شعاع V حول مستقيمين متوازيين D و D′ .

نرى ، اعتماداً على العلاقة (20) ، انه يمكن الحصول على عزم شعاع حول محور ما د′ من عزم الشعاع نفسه حول محور د يوازي د′ ويتحد معه في الاتجاه ويمر من نقطة مفروضة o . كما نرى اعتماداً على العلاقة (21) ، انه يمكن الحصول على عزم شعاع حول مستقيم ما D′ من عزم الشعاع نفسه حول مستقيم D يوازي D′ ويمر من نقطة o .

فعزم شعاع حول مستقيم D′ يساوي حاصلة عزمين ، احدهما عزم الشعاع نفسه حول D والثاني العزم حول D′ لشعاع مبدؤه o ويساوي الشعاع المفروض .

ونلاحظ ان عزمي شعاع V حول مستقيمين متوازيين لا يكونان بوجه عام متساويين . ويتم التساوي اذا انعدم (oV, D′) ، اي اذا وقع oV و D′ في مستو واحد . ومنه الخاصة التالية :

٨٢ - **خاصه** : لا يتغير عزم شعاع حول مستقيم ، حين يبقى المستقيم موازياً لنفسه ، ويتنقل في مستو مواز للشعاع المفروض .

★ ★ ★

تمارين

١ ـ أوجد قياس عزم شعاع **AB** بالنسبة لنقطة o اذا علم أن :

$$oA = 7 \quad و \quad oB = 8 \quad و \quad (\mathbf{oA}, \mathbf{oB}) = \frac{\pi}{6}$$

٢ ـ **AB** و **BC** شعاعان متعامدان . أوجد حاصلة عزمي هذين الشعاعين بالنسبة لنقطة ما M من AC اذا علم ان $AB = 3$ و $BC = 4$.

برهن ان هذه الحاصلة تبقى ثابتة (اي تبقى مساوية لنفسها) حين تتنقل M على المستقيم AC .

٣ ـ لدينا ستة أشعة متساوية في القياس ، ومحمولة على أضلاع مسدس منتظم ، وموجهة باتجاه دوري واحد . أوجد حاصلة عزوم هذه الاشعة بالنسبة لنقطة ما في الفراغ اذا علم ان قياس احد الاشعة يساوي v ، وطول ضلع المسدس يساوي a .

٤ ـ ABC مثلث مفروض ، و M نقطة ما من الضلع BC (او من امتداد هذا الضلع) . أوجد حاصلة عزوم الاشعة **BA** و **BC** و **MA** و **MC** بالنسبة لكل من منتصفي **AC** و **BM** .

٥ ـ **AB** و **AD** و **CB** و **CD** أشعة مؤلفة من أضلاع مستطيل ABCD . أوجد حاصلة عزوم هذه الاشعة بالنسبة لنقطة ما في الفراغ .

٦ ـ لدينا رباعي الوجوه ABCD والاشعة **AB** و **BC** و **CD** و **DA** . المطلوب :

(١) برهن ان حاصلة عزوم هذه الاشعة بالنسبة لاية نقطة في الفراغ هي عمودية على AC و BD .

(٢) احسب قياس هذه الحاصلة بفرض ان رباعي الوجوه منتظم طول

ضلعه a ، وان قياس احد الاشعة المتساوية المفروضة يساوي V .

٧ ـ ABCD مستطيل طول ضلعه AB يساوي a وطول ضلعه BC يساوي b . نفرض على ضلعين من هذا المستطيل شعاعين يمران من A ، قياس احدهما 3 P ويتجه من A الى B ، وقياس الثاني 4 P ويتجه من D الى A . احسب بُعد حاصلة هذين الشعاعين عن الرأس C .

٨ ـ أعد المسألة السابقة بعد ان تفرض ان الشعاع الثاني متجه من A الى D .

٩ ـ ABCD رباعي وجوه . M و N منتصفا حرفيه AC و BD :

(١) أوجد حاصلة عزوم الاشعة **AB** و **AD** و **CB** و **CD** بالنسبة للمستقيم MN ، ثم بالنسبة لكل من النقطتين M و N .

(٢) أوجد شعاعاً **V** بحيث يساوي عزمه في نقطة ما في الفراغ حاصلة عزوم هذه الاشعة في تلك النقطة .

١٠ ـ لدينا رباعي وجوه ABCD وأشعة **AB** و **AC** و **AD** و **BC** و **CD** و **DB** :

(١) أوجد حاصلة عزوم هذه الاشعة بالنسبة لاحد اقطار المثلث BCD ، وليكن BH .

(٢) اوجد حاصلة عزوم هذه الاشعة بالنسبة لكل من B و H بفرض ان رباعي الوجوه منتظم طول ضلعه a .

١١ ـ ABCDA'B'C'D' متوازي سطوح . C' نهاية القطر المار من A . اوجد حاصلة عزوم الاشعة **AB** و **AD** و **AA'** و **C'B** و **C'D** و **C'A'** بالنسبة للمستقيم BD' .

١٢ ـ oxyz ثلاثية قائمة ومباشرة . اوجد عزم شعاع **V** (0, 1, 3) مبدؤه A (0, 2, 0) بالنسبة لمحور يمر من النقطة C (0, 0, 5) ويوازي الشعاع **H** (7, —7, 0) ويتحد مع هذا الشعاع في الاتجاه .

الفصل الخامس

التوابع الشعاعية ومشتقاتها

التابع الشعاعي :

٨٣ – تعريف : نقول عن شعاع طليق $\mathbf{U}$ انه تابع شعاعي لمتحول t (او وسيط t) اذا كانت عناصر الشعاع (الطول والمنحى والاتجاه) متغيرة وكانت تغيرات هذه العناصر تابعة لتغيرات المتحول t ، او كانت المركبات (x, y, z) للشعاع $\mathbf{U}$ على المحاور الاحداثية $oxyz$ ، هي توابع عددية للمتحول t .

نرمز للشعاع $\mathbf{U}$ التابع للمتحول t بـ $\mathbf{U}(t)$.

٨٤ – النهاية والاستمرار : اذا تناهت المركبات (x, y, z) لشعاع طليق $\mathbf{U}$ الى (x_o, y_o, z_o) عندما يتناهى t الى t_o ، نقول عندئذ بأن الشعاع $\mathbf{U}(x, y, z)$ تناهى الى الشعاع $\mathbf{U}_o(x_o, y_o, z_o)$.

وان كانت المركبات (x, y, z) هي توابع مستمرة للمتحول t ، فعندها نقول بأن الشعاع $\mathbf{U}$ هو تابع مستمر لـ t .

ان نظريات النهايات والاستمرار في التوابع العددية يمكن تطبيقها على التوابع الشعاعية .

٨٥ – راسم الخطى : ليكن $\mathbf{U}$ شعاعاً تابعاً لـ t . لننشىء من نقطة ما o في الفراغ شعاعاً $\mathbf{oM}$ يساوي $\mathbf{U}$. فعندما يتغير الوسيط t ترسم النقطة M منحنياً نسميه براسم خطى الشعاع $\mathbf{U}$ بالنسبة للنقطة o .

واذا اعتبرنا o مبدأ للاحداثيات ، فمركبات $\mathbf{U}$ على المحاور الاحداثية :

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

تؤلف تمثيلاً وسيطياً لراسم خطى U .

٨٦ - ملاحظة : ان المتغير (او المتحول) الذي أوردناه في تعريف التابع الشعاعي هو متغير عددي (غير موجّه) . وقد يكون هذا المتغير شعاعاً مثل V . فنرمز للشعاع U التابع للشعاع V بـ U(V) .

فاذا فرضنا مثلاً شعاعاً V مبدؤه ثابت في الفراغ ، فان عزم هذا الشعاع في نقطة ما o هو تابع للشعاع V . وسنرى في ابحاثنا في الميكانيك ان النقطة المادية المتحركة في وسط مقاوم تكون خاضعة (بالاضافة الى القوى المؤثرة فيها) الى قوة ناشئة عن مقاومة الوسط الذي تتحرك فيه . هذه القوة تابعة لسرعة النقطة . فاذا مثلنا القوة بالشعاع F والسرعة بالشعاع V ، فالشعاع F يكون تابعاً للشعاع V .

هذا وقد يكون الشعاع U تابعاً لعدة متغيرات، بعضها عددي مثل q و t ، والبعض الآخر شعاعي مثل V . ونرمز للشعاع U التابع للمتحولات V و q و t بـ U(V, q, t) .

وسنرى في علم التحريك مثلاً ان حاصلة القوى المؤثرة في نقطة مادية هي تابعة بوجه عام لسرعة النقطة (ونمثل هذه السرعة بالشعاع V) ، ولموضع النقطة (ويتعين الموضع بأحداثياته) ، وللزمن (ونرمزله بـ t) .

التابع النقطي :

٨٧ - تعريف : نقول عن نقطة M انها تابع نقطي لمتحول t ، اذا كان موضع النقطة متغيراً وكانت تغيرات هذا الموضع في الفراغ تابعة للمتحول t ، او كانت الاحداثيات (x, y, z) للنقطة M هي توابع للمتحول t .

نرمز للنقطة M التابعة للمتحول t بـ M(t) .

٨٨ ـ النهاية والاستمرار : اذا تناهت الاحداثيات (x, y, z) للنقطة M الى (x_0, y_0, z_0) عندما يتناهى t الى t_0 ، نقول عندئذ بأن النقطة $M(x, y, z)$ تناهت الى النقطة $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

وان كانت الاحداثيات (x, y, z) هي توابع مستمرة لـ t ، فعندها نقول بأن النقطة M هي تابع مستمر للمتحول t .

ان نظريات النهايات والاستمرار في التوابع العددية او الشعاعية يمكن تطبيقها على التوابع النقطية .

٨٩ ـ شعاع الفراغ : عندما يتغير الوسيط t ، ترسم النقطة $M(t)$ منحنياً . فاذا فرضنا o نقطة ما في الفراغ ، فالشعاع $\overrightarrow{oM}$ نسميه بشعاع الفراغ لهذا المنحني .

فالمنحني في الفراغ يتعين اذن باحداثيات نقطة متحولة منه M ، او بمركبات شعاعه الفراغي $\overrightarrow{oM}$.

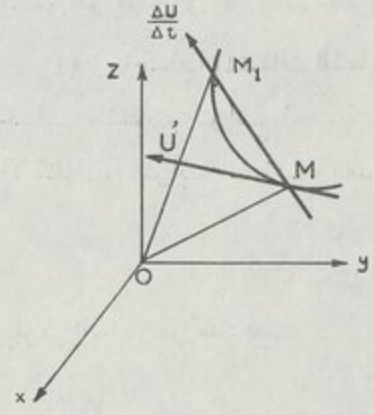
٩٠ ـ ملاحظة : اذا فرضنا $\vec{U}$ شعاعاً طليقاً يساوي $\overrightarrow{oM}$ ، فالمنحني الذي ترسمه النقطة $M(t)$ هو راسم خطى الشعاع $\vec{U}$.

فكل منحن ترسمه نقطة $M(t)$ في الفراغ يمكن اعتباره راسم خطى شعاع الفراغ $\overrightarrow{oM}$.

المشتق الشعاعي :

٩١ ـ التزايد الشعاعي : ليكن $\overrightarrow{oM} = \vec{U}$ شعاعاً موافقاً لقيمة ما t للمتحول ، و $\overrightarrow{oM_1} = \vec{U_1}$ الشعاع الموافق للقيمة $t_1 = t + \Delta t$ (بفرض ان Δt هو تزايد t) ، فالشعاع $\vec{U_1} - \vec{U} = \overrightarrow{MM_1}$ الموافق للتزايد Δt نسميه بتزايد الشعاع $\vec{U}$ الموافق لتزايد t ، ونرمز اليه بـ $\Delta \vec{U}$ (شكل ٢٠) .

واذا فرضنا ان (x, y, z) هي مركبات U تكون $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ هي مركبات ΔU . وهي تزايدت التوابع (x, y, z) الموافقة للتزايد Δt .



(شكل ٢٠)

٩٢ ـ المشتق الشعاعي : نقول بأن التابع الشعاعي $U(t)$ قابل للاشتقاق من اجل القيمة t اذا كان للشعاع $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ نهاية عندما يتناهى Δt الى الصفر .

نرمز لهذه النهاية بـ $U'(t)$ ونسميها بمشتق الشعاع U بالنسبة للمتحول t ، ونكتب :

$$U'(t) = \frac{dU}{dt}$$

مركبات هذا الشعاع على المحاور الاحداثية $oxyz$ هي :

$$x' = \frac{dx}{dt} \qquad y' = \frac{dy}{dt} \qquad z' = \frac{dz}{dt}$$

ولو فرضنا ان للشعاع U' (وهو تابع للمتحول t) مشتقاً شعاعياً بالنسبة لـ t ، لقلنا ان هذا المشتق هو المشتق الثاني لـ U بالنسبة لـ t ، ولرمزنا له بـ :

$$U''(t) = \frac{d^2U}{dt^2}$$

مركبات هذا الشعاع على المحاور $oxyz$ هي :

$$x'' = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \qquad z'' = \frac{d^2z}{dt^2}$$

وهكذا نعرف المشتقات المتتالية للشعاع U .

٩٣ - نتيجة : ينتج من تعريف مشتق الشعاع $U = oM$ ان حامل المشتق هو المماس في M لراسم خطى الشعاع U .

٩٤ - حساب المشتقات الشعاعية : يمكن تعميم النظريات الواردة في حساب مشتقات التوابع العددية على التوابع الشعاعية (وتبرهن نظريات الاشتقاق في التوابع الشعاعية والعددية بمحاكمات متشابهة) . لنذكر منها :

$$(\Sigma U)' = \Sigma (U)' \qquad (3)$$

$$(a U)' = a U' \qquad (4)$$

بفرض ان a هو عدد ثابت .

$$(\lambda U)' = \lambda' U + \lambda U' \qquad (5)$$

بفرض ان λ هو تابع عددي للوسيط t .

$$(U_1 . U_2)' = U'_1 . U_2 + U_1 . U'_2 \qquad (6)$$

$$(U_1 \wedge U_2)' = U'_1 \wedge U_2 + U_1 \wedge U'_2 \qquad (7)$$

مع مراعاة الترتيب .

$$(U_1 , U_2 , U_3)' = (U'_1 , U_2 , U_3) + (U_1 . U'_2 , U_3) + (U_1 , U_2 , U'_3) \qquad (8)$$

٩٥ - نتائج : ينتج مما تقدم الخواص الآتية :

الخاصة الاولى : مشتق شعاع طليق ثابت يساوي الصفر .

اذا فرضنا شعاعاً طليقاً ثابتاً $U(t)$ ، فتزايده ΔU يساوي الصفر . والنسبة $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ تساوي الصفر مهما كانت قيمة التزايد Δt ($\Delta t \neq o$) . وبالتالي نهاية هذه النسبة (عندما يتناهى Δt الى الصفر) تساوي ايضاً الصفر ، اي :

$$U'(t) = \frac{dU}{dt} = o$$

الخاصة الثانية : مشتق شعاع ثابت في القياس هو شعاع عمودي على الشعاع نفسه .

ليكن $\mathbf{U}(t)$ شعاعا قياسه ثابت ويساوي a ، اي $|\mathbf{U}| = a$ فيكون :

$$\mathbf{U}^2 = a^2 \qquad \text{وبالتالي} \qquad (\mathbf{U}^2)' = 0$$

ولما كان $(\mathbf{U}^2)' = (\mathbf{U} . \mathbf{U})' = 2\,\mathbf{U} . \mathbf{U}'$

فيكون $\mathbf{U} . \mathbf{U}' = 0$ وبالتالي يكون $\mathbf{U}'$ عمودياً على $\mathbf{U}$.

الخاصة الثالثة : مشتق شعاع ثابت في المنحى هو شعاع يوازي الشعاع نفسه .

ليكن $\mathbf{U}(t)$ شعاعاً موازياً لمحور ثابت شعاع واحدته $\mathbf{u}$. فيكون :

$$\mathbf{U} = U . \mathbf{u} \qquad (U \text{ القياس الجبري لـ } \mathbf{U})$$

وبأخذ المشتق :

$$\mathbf{U}' = U' . \mathbf{u} + U . \mathbf{u}'$$

وبما ان $\mathbf{u}'$ يساوي الصفر (اعتماداً على الخاصة الاولى) فيكون :

$$\mathbf{U}' = U' . \mathbf{u}$$

أي ان الشعاع $\mathbf{U}'$ يوازي الشعاع الثابت $\mathbf{u}$ ، وبالتالي يوازي الشعاع نفسه $\mathbf{U}$.

٩٦ — ملاحظة : نستخلص من الخواص السابقة انه اذا فرضنا نقطة ما o ثابتة في الفراغ ، ونقطة M تابعة لوسيط t :

(١) فاذا كانت $\mathbf{M}(t)$ ثابتة يكون $\mathbf{M}'(t) = o$.

(٢) وان كانت $M(t)$ تتحرك على منحن مرسوم على كرة مركزها o ، يكون الشعاع $\mathbf{M}'(t)$ عمودياً على نصف القطر oM ، وبالتالي واقعاً في المستوي المماس للكرة في النقطة M .

(٣) وان كانت $M(t)$ تتحرك على مستقيم D مارٍّ من o ، فالشعاع $\mathbf{M}'(t)$ يكون ماراً ايضاً من o ، ومحمولاً على D .

٩٧ - مشتق تابع التابع : اذا فرضنا ان الشعاع $\mathbf{U}$ هو تابع لوسيط θ ، وان θ تابع لمتحول t ، فالشعاع $\mathbf{U}$ يكون تابعاً شعاعياً للمتحول t ، ونسميه بالشعاع التابع لتابع .

واذا كان للشعاع $\mathbf{U}$ مشتق بالنسبة لـ θ ، وكان للوسيط θ مشتق بالنسبة لـ t ، لكان للشعاع $\mathbf{U}$ مشتق بالنسبة لـ t يتعين من العلاقة :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \frac{d\mathbf{U}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \qquad (9)$$

وتبرهن هذه النظرية كما تبرهن نظرية مشتق التابع العددي لتابع .

٩٨ - دستور تايلور : ان دستور تايلور في التوابع العددية يمكن تطبيقه على التوابع الشعاعية .

فاذا فرضنا ان التابع الشعاعي $\mathbf{U}(t)$ هو قابل للاشتقاق حتى المرتبة n يكون :

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(t_0) + \frac{t-t_0}{1!}\mathbf{U}'(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\left[\mathbf{U}^{(n)}(t_0) + \varepsilon\right]$$

بفرض ان ε هو شعاع يتناهى الى الصفر عندما يتناهى t الى t_0 . وتكتب هذه العلاقة بشكل مختصر :

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{U} - \mathbf{U}_0 = \frac{\Delta t}{1!}\mathbf{U}'_0 + \cdots + \frac{(\Delta t)^n}{n!}\left[\mathbf{U}_0^{(n)} + \varepsilon\right]$$

٩٩ - مشتق شعاع تحليلياً : لقد وجدنا (بند ٩٢) مركبات مشتق شعاع في الاحداثيات الديكارتية . لنعين مركبات هذا المشتق في الاحداثيات القطبية المستوية ، ثم في الاحداثيات الاسطوانية .

١٠٠ - مشتق شعاع في الاحداثيات القطبية المستوية : قبل ان نعين مشتق شعاع ما $\mathbf{U}$ ، سنبدأ بتعيين مشتق شعاع $\mathbf{u}$ قياسه الواحدة .

(١) مشتق شعاع الواحدة : ليكن ox المحور القطبي و ox و oy محورين

معينين بالزاويتين القطبيتين θ و $\theta + \frac{\pi}{2}$ (شكل ٢١) . لنرمز بـ i و j لشعاعي واحدة المحورين ox و oy ، وبـ I و J لشعاعي واحدة المحورين oX و oY ، فيكون :

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta$$

$$\mathbf{J} = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

لنحسب مشتقي I و J بالنسبة لـ θ :

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

$$\frac{d\mathbf{J}}{d\theta} = -\mathbf{i}\cos\theta - \mathbf{j}\sin\theta$$

فنجد أن :

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = \mathbf{J} \qquad (10)$$

$$\frac{d\mathbf{J}}{d\theta} = -\mathbf{I} \qquad (11)$$

هذا واذا لاحظنا ان العلاقة :

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta$$

يمكن كتابتها ايضاً بالشكل :

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\theta} = \mathbf{i}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{j}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

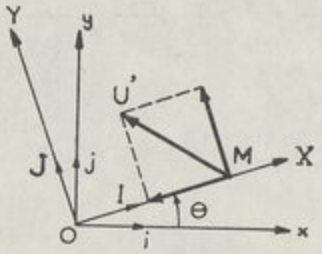
لأدركنا انه اذا فرضنا بوجه عام شعاعاً u قياسه الواحدة وزاويته القطبية φ فمشتق هذا الشعاع بالنسبة لـ φ ، هو شعاع قياسه الواحدة ايضاً ، وزاويته القطبية $\frac{\pi}{2} + \varphi$.

ونقول باختصار ، ان مشتق شعاع الواحدة بالنسبة لزاويته القطبية هو شعاع ينشأ من دوران الشعاع نفسه بقدر ($+\frac{\pi}{2}$) .

فاعتماداً على هذه الخاصة ، نجد ايضاً ان :

$$\frac{d\,I}{d\,\theta} = J \qquad \text{و} \qquad \frac{d\,J}{d\,\theta} = -I$$

(٢) مشتق شعاع ما : ليكن $U = oM$ الشعاع المفروض ، و (r, θ) الاحداثيين القطبيين لنقطة M (شكل ٢١) . لنعين مركبتي الشعاع $\frac{d\,U}{d\,\theta}$ على المحورين oX و oY (المعين بالزاويتين θ و $\theta + \frac{\pi}{2}$.



(شكل ٢١)

فاذا فرضنا ان I و J هما شعاعا واحدة المحورين oX و oY فيكون :

$$U = r\,I \qquad (12)$$

لنحسب مشتق U بالنسبة لـ θ :

$$\frac{d\,U}{d\,\theta} = \frac{d\,r}{d\,\theta}\,I + r\,\frac{d\,I}{d\,\theta}$$

واعتماداً على العلاقة (10) يكون :

$$\frac{d\,U}{d\,\theta} = \frac{d\,r}{d\,\theta}\,I + r\,J \qquad (13)$$

١٠١ – ملاحظة ١ : لقد عينا مركبتي مشتق U بالنسبة للوسيط θ . ولو فرضنا ان θ تابع لوسيط ما t واردنا حساب مركبتي المشتق بالنسبة للوسيط t لوجدنا (من العلاقة 12) :

$$\frac{d\,U}{d\,t} = \frac{d\,r}{d\,t}\,I + r\,\frac{d\,I}{d\,t}$$

$$= \frac{d\,r}{d\,t}\,I + r\,\frac{d\,I}{d\,\theta}\cdot\frac{d\,\theta}{d\,t}$$

أو

$$U'(t) = r'\,I + r\,\theta'\,J \qquad (14)$$

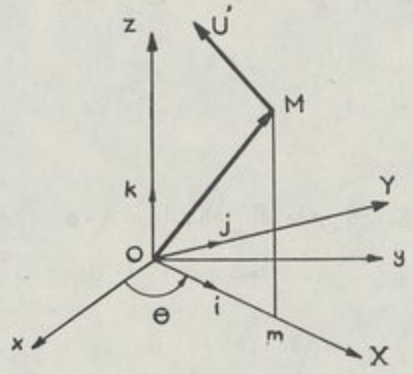
١٠٢ - ملاحظة ٢ : لو أردنا حساب مركبتي المشتق الثاني للشعاع $\mathbf{U}$ بالنسبة للزاوية القطبية θ لوجدنا :

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{d\theta^2} = \left(\frac{d^2 r}{d\theta^2} - r\right)\mathbf{I} + 2\frac{dr}{d\theta}\mathbf{J}$$

ونجد بسهولة ان مركبتي المشتق الثاني للشعاع $\mathbf{U}$ بالنسبة لوسيط ما t تتعينان من العلاقة :

$$\mathbf{U}'' = (r'' - r\theta'^2)\mathbf{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\mathbf{J} \qquad (15)$$

١٠٣ - مشتق شعاع في الاحداثيات الاسطوانية : لتكن $oxyz$ ثلاثية (قائمة ومباشرة) و $\mathbf{U} = o\mathbf{M}$ الشعاع المفروض، و (r, θ, z) الاحداثيات الاسطوانية لنقطة M (شكل ٢٢) .



(شكل ٢٢)

ليكن m مسقط M على المستوي xoy ، فأحداثيا m القطبيان في المستوي xoy هما (r, θ) . نعلم ان :

$$o\mathbf{M} = o\mathbf{m} + \mathbf{m}\,\mathbf{M}$$

فاذا فرضنا ان oX و oY هما محوران في المستوي xoy معينان بالزاويتين θ و $\theta + \frac{\pi}{2}$ ، ورمزنا بـ $\mathbf{I}$ و $\mathbf{J}$ و $\mathbf{K}$ لاشعة واحدة المحاور oX و oY و oZ (oZ ينطبق على oz) ، لكان :

$$\mathbf{U} = r\mathbf{I} + z\mathbf{K}$$

لنحسب مشتق $\mathbf{U}$ بالنسبة لـ t ، فنجد (اعتماداً على العلاقة 14) :

$$\mathbf{U}' = r'\mathbf{I} + r\theta'\mathbf{J} + z'\mathbf{K} \qquad (16)$$

واذا حسبنا المشتق الثاني لـ U بالنسبة لـ t ايضاً لوجدنا (اعتماداً على العلاقة 15) :

$$(16)\quad \mathbf{U}'' = (r'' - r\theta'^2)\,\mathbf{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\,\mathbf{J} + z''\,\mathbf{K}$$

التفاضل الشعاعي والتكامل الشعاعي :

١٠٤ – التفاضل الشعاعي : تفاضل التابع الشعاعي $\mathbf{U}(t)$ ، ويرمز له بـ $d\mathbf{U}$ ، هو الشعاع :

$$d\mathbf{U} = \mathbf{U}'\,.\,dt$$

فاذا كانت (x, y, z) هي مركبات $\mathbf{U}$ تكون مركبات $d\mathbf{U}$ هي :

$$dx = x'\,.\,dt$$
$$dy = y'\,.\,dt$$
$$dz = z'\,.\,dt$$

١٠٥ – التكامل الشعاعي : تكامل التابع الشعاعي $\mathbf{U}(t)$ ، ويرمز له بـ $\int \mathbf{U}\,dt$ ، هو الشعاع :

$$\int \mathbf{U}\,dt = \mathbf{i}\int x\,dt + \mathbf{j}\int y\,dt + \mathbf{k}\int z\,dt$$

بفرض ان $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ هي أشعة واحدات المحاور $oxyz$.

ان خواص التكامل في التوابع العددية يمكن تطبيقها على التوابع الشعاعية .

١٠٦ – نتائج : سنذكر بعض خواص تنتج مباشرة ، وذلك اعتماداً على التكامل الشعاعي .

لنفرض شعاعاً $o\mathbf{M}$ ، مبدؤه o ثابت ، ومنتهاه M تابع لوسيط t . لنبحث عن المنحنيات التي ترسمها النقطة $M(t)$ وفقاً للشروط التي يتقيد بها المشتق $\mathbf{M}'$:

الخاصة الاولى : اذا كان $M'(t)$ يطابق الصفر (اي يساوي الصفر مهما كانت قيمة t) ، فالنقطة $M(t)$ تبقى ثابتة في الفراغ .

بالحقيقة ، بما ان $M'(t) = o$ فاذا رجعنا الى التابع الاصلي يكون :

$$oM = oM_o \qquad \text{أو} \qquad M(t) = M(t_o)$$

فالنقطة M تبقى منطبقة على M_o مهما تغير الوسيط t .

الخاصة الثانية : اذا كان $M'(t)$ عمودياً أبداً على oM ، فالنقطة $M(t)$ ترسم منحنياً على كرة مركزها o .

بما ان $M'(t)$ عمودي على oM يكون $oM \cdot M' = o$.

فاذا فرضنا ان $oM = r \cdot u$ (u شعاع واحدة المحور oM) ، يكون :

$$M'(t) = r' \cdot u + r \cdot u'$$

وبالتالي يكون $oM \cdot M' = r \cdot r'$ (لان $u \cdot u' = o$)

واذا لاحظنا ان $oM \cdot M' = o$ يكون $r \cdot r' = o$

فاذا لم تكن M منطبقة على o (اي $r \neq o$) يكون $r' = o$

ويكون بالتالي r (وهو بُعد M عن o) ثابتاً :

فالنقطة $M(t)$ ترسم منحنياً على كرة مركزها o .

الخاصة الثالثة : اذا كان الشعاع $M'(t)$ يمر ابداً من نقطة ثابتة o ، فالنقطة $M(t)$ ترسم مستقيماً ماراً من o .

بما ان $M'(t)$ يمر من o يكون $oM \wedge M' = o$

فاذا فرضنا ان $oM = r \cdot u$ يكون $M'(t) = r' \cdot u + r \cdot u'$

وبالتالي يكون $oM \wedge M' = r^2 (u \wedge u')$ (لان $u \wedge u = o$)

واذا لاحظنا ان $oM \wedge M' = o$ يكون $r^2 (u \wedge u) = o$

فاذا لم تكن M منطبقة على o (اي $r \neq o$) يكون $u \wedge u' = o$ ، ويكون بالتالي $u' = o$ (لان u لا يساوي الصفر ولا يوازي u') فالشعاع u يغدو اذن ثابتاً في الفراغ :

فالنقطة M (t) تتحرك على مستقيم يمر من النقطة الثابتة o ويوازي الشعاع الثابت u .

الخاصة الرابعة : اذا كان الشعاع M'(t) موازياً لشعاع ثابت k ، فالنقطة M (t) ترسم مستقيماً يوازي k .

بما ان M'(t) يوازي k يكون $M' \wedge k = o$

وتكتب هذه العلاقة بالشكل $(oM \wedge k)' = o$

وبعد التكامل (او الرجوع الى التابع الاصلي) يكون :

$oM \wedge k = c$ (c شعاع ثابت)

واعتماداً على التقسيم الشعاعي ، نجد ان M (t) ترسم مستقيماً يوازي k .

هذا ويمكن كتابة العلاقة السابقة كما يلي :

$$oM \wedge k = oM_o \wedge k$$

كما تكتب ايضاً $(oM - oM_o) \wedge k = o$

أو $M_o M \wedge k = o$

وتدل هذه العلاقة ايضاً ان M (t) ترسم مستقيماً يوازي k .

١٠٧ — ملاحظة : نرى ان الخواص الاربع السابقة ، هي نظريات العكس للخواص الواردة (في البند ٩٦) . ويلاحظ ايضاً ان للخاصة الثالثة (في البند ٩٦) نظريتي عكس (الخاصة الثالثة والخاصة الرابعة ، بند ١٠٦). ونستخلص من الخواص الواردة (في البندين ٩٦ ، ١٠٦) النظريات التالية :

النظرية الأولى : الشرط اللازم والكافي لكي تبقى النقطة $M(t)$ ثابتة في الفراغ ، هو ان يكون $M'(t)$ مطابقاً للصفر .

او نقول بوجه عام ، ان الشرط اللازم والكافي ليكون الشعاع الطليق $U(t)$ ثابتاً ، هو ان يكون $U'(t)$ مطابقاً للصفر .

النظرية الثانية : الشرط اللازم والكافي لكي ترسم النقطة $M(t)$ منحنياً على كرة مركزها نقطة مفروضة o ، هو ان يكون $M'(t)$ عمودياً ابداً على oM .

النظرية الثالثة : الشرط اللازم والكافي لكي ترسم $M(t)$ مستقيماً في الفراغ ، هو ان يكون $M'(t)$ ماراً ابداً من نقطة ثابتة ، او موازياً لشعاع ثابت .

أو نقول باختصار ، ان الشرط اللازم والكافي لكي تتحرك النقطة $M(t)$ على مستقيم ، هو ان يمر الشعاع $M'(t)$ دوماً من نقطة ثابتة تقع في موضع محدود على هذا المستقيم أو في اللانهاية .

١٠٨ – تطبيق : لقد بحثنا فيما سبق (٩٥ ، ٩٦) في الخواص المتعلقة بمشتق شعاع $U(t)$ حينما يكون الشعاع $oM = U(t)$ ثابتاً ، او يكون قياسه ثابتاً ، او منحاه ثابتاً . ثم بحثنا بالمقابل (بند ١٠٦) في الخواص المتعلقة بالشعاع $oM = U(t)$ عندما يكون الشعاع $M'(t)$ مطابقاً للصفر ، او عمودياً على oM ، او ماراً من نقطة ثابتة ، او موازياً لشعاع ثابت .

سنبحث الآن في الخاصة المتعلقة بالشعاع $U'(t)$ عندما يكون الشعاع $oM = U(t)$ موازياً لمستو ثابت (او عمودياً على شعاع ثابت) ، ثم نبحث بالمقابل في الخاصة المتعلقة بالشعاع $oM = U(t)$ حينما يكون الشعاع $U'(t)$ موازياً لمستو ثابت . وتؤول الخاصتان الى النظرية الشاملة الآتية :

نظرية : الشرط اللازم والكافي لكي ترسم نقطة $M(t)$ منحنياً مستويا ، هو ان يكون $M'(t)$ عمودياً على شعاع ثابت .

اللزوم : لنفرض ان النقطة $M(t)$ ترسم منحنياً واقعاً في مستو π . ليكن k شعاعاً عمودياً على π ، و o نقطة ما من هذا المستوي .

بما ان oM عمودي على k يكون $oM \cdot k = o$

وبأخذ المشتق يكون $M' \cdot k = o$

فالشعاع $M'(t)$ يقع في المستوي π ويكون عمودياً على الشعاع الثابت k .

الكفاية : لنفرض ان الشعاع $M'(t)$ عمودي على الشعاع الثابت k ، فيكون $oM' \cdot k = o$

وتكتب هذه العلاقة بالشكل $(oM \cdot k)' = o$

فاذا كاملنا نجد $oM \cdot k = c$ (c عدد ثابت)

وتدل هذه العلاقة ان النقطة $M(t)$ ترسم منحنياً واقعاً في مستو عمودي على k .

هذا ويمكن كتابة العلاقة السابقة بالشكل التالي :

$$oM \cdot k = oM_o \cdot k$$

(M_o هو موضع النقطة M الموافق للقيمة t_o) . كما يمكن كتابتها ايضاً كما يلي :

$$(oM - oM_o) \cdot k = o$$

أو $M_oM \cdot k = o$

فنرى ايضاً ان النقطة $M(t)$ ترسم منحنياً واقعاً في مستو عمودي على k .

١٠٩ — حساب التكاملات الشعاعية : يمكن تعميم بعض النظريات الواردة في حساب تكاملات التوابع العددية على التوابع الشعاعية (وتبرهن نظريات التكامل في التوابع العددية والشعاعية بمحاكمات متشابهة) .

سنذكر بعض العلاقات التي قد ترد في أبحاثنا القادمة ، وسنضع بجانب كل منها العلاقة الناتجة بعد التكامل :

من العلاقة	$\frac{dU}{dt} = \Sigma \frac{dV_i}{dt}$	ينتج	$U(t) = \Sigma V_i(t) + c$
»	$\frac{dU}{dt} = a \frac{dV}{dt}$	»	$U(t) = a V(t) + c$
»	$\frac{dU}{dt} = A$	»	$U(t) = A t + c$
»	$\frac{dU}{dt} = A \frac{df}{dt}$	»	$U(t) = A f(t) + c$
»	$A \cdot \frac{dU}{dt} = \frac{df}{dt}$	»	$A \cdot U(t) = f(t) + c$
»	$A \wedge \frac{dU}{dt} = \frac{dV}{dt}$	»	$A \wedge U(t) = V(t) + c$

وذلك بفرض ان a عدد ثابت معلوم ، و A شعاع ثابت معلوم ، و c عدد ثابت (ثابت التكامل) ، و c شعاع ثابت (ثابت التكامل الشعاعي).

تطبيقات هندسية للمشتق الشعاعي

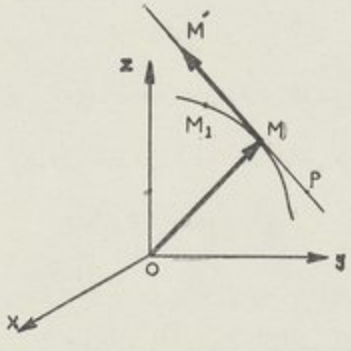
١١٠ — المماس لمنحن : رأينا ان المماس لمنحن في نقطة ما M (t) ، هو حامل المشتق M′(t) . وتتعين نقطة ما P من هذا المماس من شرط توازي الشعاعين M′ و MP (شكل ٢٣) . فالمعادلة الشعاعية لهذا المماس تكون اذن :

$$MP \wedge M' = o$$

او

$$MP = \rho \cdot M'$$

بفرض ان ρ هو وسيط متحول ، قيمته تعين موضع P .



(شكل ٢٣)

فاذا فرضنا ان (x, y, z) هي أحداثيات M ، و (X, Y, Z) أحداثيات P ، فمعادلات المماس الديكارتية تكون :

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'}$$

ومعادلاته الوسيطية :

$$X = x + \rho x' \qquad Y = y + \rho y' \qquad Z = z + \rho z'$$

١١١ — ملاحظة : نقول عن النقطة M_1 من المنحني الموافقة للقيمة t_1 للوسيط t ، بأنها نقطة عادية اذا كان $M'_1 \neq o$.

أما اذا كان $M'_1 = o$ فعندها نقول عن النقطة انها شاذة (او فريدة) ، وفي هذه الحالة يتعين المماس في M_1 للمنحني من المشتق الثاني M''_1 .

ويتضح ذلك من دستور تايلور (الذى يغدو بعد ان نرمز بـ h لـ Δt) :

$$\Delta M = oM - oM_1 = \frac{h}{1!} M'_1 + \frac{h^2}{2!} M''_1 + \ldots + \frac{h^n}{n!} \left[M_1^{(n)} + \varepsilon \right]$$

وبما ان $M'_1 = o$ فالعلاقة السابقة تكتب :

$$\Delta M = \frac{h^2}{2!} M''_1 + \ldots + \frac{h^n}{n!} \left[M_1^{(n)} + \varepsilon \right]$$

فعندما يتناهى h الى الصفر ، يتناهى ΔM الى قسمه الاساسي $\frac{h^2}{2!} M''_1$ ، ويتناهى القاطع $M_1 M$ الى المماس للمنحني في النقطة M_1 .

وينتج من ذلك ان المماس في M_1 هو حامل الشعاع M''_1 .

هذا ونجد بسهولة ان المماس يتعين بحامل M'''_1 اذا كان $M'_1 = M''_1 = o$ ، وهكذا ...

١١٢ — المستوي الناظم لمنحن : المستوي الناظم في نقطة M لمنحن ، هو المستوي المنشأ من M عمودياً على المماس للمنحني في تلك النقطة .

معادلة المستوي الناظم تنشأ من شرط تعامد $\mathbf{M'}(t)$ و $\mathbf{MP}$ ، بفرض ان P هي نقطة ما من المستوي . فالمعادلة الشعاعية لهذا المستوي تكون اذن :

$$\mathbf{MP} \cdot \mathbf{M'} = 0$$

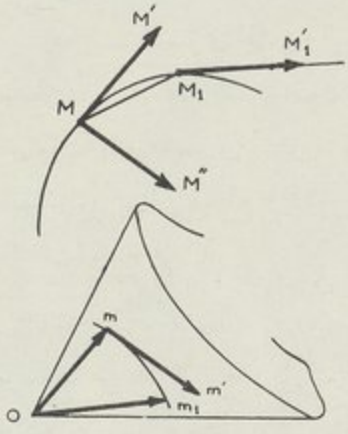
والمعادلة الديكارتية :

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0$$

١١٣ – المستويات المماسة والنواظم لمنحن : كل مستو يحوي المماس لمنحن في نقطة منه هو مستو مماس له في تلك النقطة . وكل عمود على المماس في نقطة من منحن هو ناظم للمنحني في تلك النقطة .

فهنالك عدد غير متناه من مستويات مماسة لمنحن في نقطة منه ، وعدد غير متناه من نواظم لمنحن في نقطة منه تقع جميعها في مستو واحد هو المستوي الناظم للمنحني في تلك النقطة .

١١٤ – المستوي الملاصق لمنحن : المستوي الملاصق لمنحن في نقطة M هو مستو مماس خاص نعرفه كما يلي : نفرض مستوياً π مماساً للمنحني في نقطة M وموازياً لمماس في نقطة مجاورة M_1 . فعندما تتناهى M_1 الى M يتناهى المستوي π الى مستو ندعوه بالمستوي الملاصق للمنحني في النقطة M (شكل ٢٤) .



(شكل ٢٤)

نعلم ان المماس في النقطة $M(t)$ هو حامل الشعاع $\mathbf{M'}(t)$. فاذا أنشأنا من نقطة ما o شعاعاً $\mathbf{om} = \mathbf{M'}$ ، لرأينا انه حين يتغير الوسيط t ترسم M المنحني المفروض ، وترسم m راسم خطى $\mathbf{M'}$ ، ويولد المستقيم om مخروطاً نسميه بمخروط المماسات .

فاذا فرضنا ان t و $t_1 = t + \Delta t$ هما

قيمتا الوسيط الموافقتان للنقطتين M و M_1 ، وان om و om_1 الشعاعان المساويان لـ M' و M'_1 على الترتيب ، فالمستوي mom_1 يكون موازياً المستوي π . عندما يتناهى Δt الى الصفر ، تتناهى M_1 الى M ويتناهى القاطع mm_1 الى المماس في m لراسم الخطى (وهو حامل الشعاع m') ، ويتناهى المستوي mom_1 الى المستوي المماس في m لمخروط المماسات . وهذا المستوي يوازي المستوي الملاصق المطلوب .

نرى أن المستوي المماس في m لمخروط المماسات يحوي الشعاعين om و m' . فالمستوي الملاصق في $M(t)$ يتعين اذن بالشعاعين M' و M'' ، وتكون معادلته الشعاعية :

$$(MP, M', M'') = o$$

بفرض ان P هي نقطة ما من المستوي .

١١٥ — الناظم الأساسي وثنائي الناظم لمنحن : نسمي الناظم الكائن في المستوي الملاصق لمنحن في نقطة منه بالناظم الاساسي للمنحني في تلك النقطة . ونسمي الناظم العمودي على المستوي الملاصق بثنائي الناظم .

١١٦ — المستوي المماس والناظم لسطح : اذا أنشأنا من نقطة ما M من سطح Σ ، مماسات لمنحنيات مرسومة على Σ ومارة من M ، فان هذه المماسات تقع جميعها في مستو واحد (كما سنبرهن ذلك فيما يلي) ، نسميه بالمستوي المماس للسطح في M . ونسمي العمود في M على هذا المستوي بالناظم للسطح في M .

لتكن $f(x, y, z) = o$ معادلة السطح Σ . فلكي نعين منحنياً ما Γ مرسوماً على هذا السطح ومارا من النقطة $M(x, y, z)$ ، يكفي اختيار ثلاثة توابع x, y, z لوسيط q :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q)$$

تحقق معادلة السطح ، مهما كانت قيمة الوسيط q . اي يكفي ان تتحقق المطابقة :

$$f[x(q)\ ,\ y(q)\ ,\ z(q)] = 0$$

فاذا اشتققنا طرفي هذه المطابقة بالنسبة لـ q لوجدنا :

$$f'_x \cdot \frac{dx}{dq} + f'_y \cdot \frac{dy}{dq} + f'_z \cdot \frac{dz}{dq} = 0$$

وتدل هذه العلاقة على انه اذا فرضنا شعاعاً n مركباته على المحاور الاحداثية (القائمة) هي (f'_x , f'_y , f'_z) ، لكان :

$$n \cdot \frac{dM}{dq} = 0$$

ولكان بالتالي n عمودياً على $M'(q)$ او عمودياً على المماس في M للمنحني r المعين بالوسيط q .

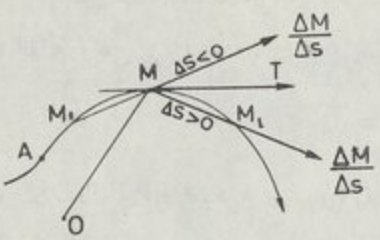
ولو فرضنا منحنياً آخر r_1 مرسوماً على Σ ومارّاً من M ، ومعيناً بوسيط q_1 ، ثم منحنياً r_2 معيناً بوسيط q_2 ، وهكذا... لوجدنا أيضاً ان الشعاع n نفسه يكون عمودياً على $M'(q_1)$ ، و $M'(q_2)$ ، و... ، وبالتالي عمودياً على المماسات للمنحنيات r_1 و r_2 و ... فالشعاع n يكون اذن عمودياً على جميع المماسات للمنحنيات المرسومة على السطح والمارة من M .

نستخلص من ذلك ان المماسات للمنحنيات المرسومة على السطح والمارة من M تقع جميعها في مستو واحد هو المستوي المماس للسطح في M . اما العمود على المستوي المماس ، وهو حامل الشعاع $n(f'_x , f'_y , f'_z)$ فهو الناظم للسطح في M .

١١٧ – المستويات الناظمة والمماسات لسطح : كل مستو يمر من ناظم لسطح في نقطة منه هو مستو ناظم له في تلك النقطة . والمماس في نقطة من منحن مرسوم على سطح هو مماس للسطح في تلك النقطة .

نرى ان هنالك عددا غير متناه من مستويات ناظمة لسطح في نقطة منه ، وعدداً غير متناه أيضاً من مماسات للسطح في نقطة منه، تقع جميعها في المستوي المماس للسطح في تلك النقطة .

١١٨ – توجيه المماس لمنحن : لقد رأينا ان موضع نقطة ما M من منحن موجه تتعين بفصلها المنحني $s = \overset{\frown}{AM}$ ، باعتبار ان A هو مبدأ الفصول . لنعين عناصر مشتق الشعاع oM بفرض ان المتحول هو القوس s .



(شكل ٢٥)

رأينا ان حامل الشعاع M' هو المماس للمنحني في M . أما قياسه واتجاهه فيتعينان كما يلي : ان $\frac{dM}{ds}$ هو نهاية $\frac{\Delta M}{\Delta s}$ عندما يتناهى Δs الى الصفر ، او نهاية $\frac{MM_1}{\Delta s}$ عندما تتناهى M_1 الى M . ونرى بسهولة ان نهاية $\left|\frac{\Delta M}{\Delta s}\right|$ هي الواحدة ، وان اتجاه $\frac{\Delta M}{\Delta s}$ هو الاتجاه الموجب للمنحني سواء كان Δs موجباً او سالباً (شكل ٢٥) .

فالمشتق $\frac{dM}{ds}$ ، ونرمز له بـ T ، هو شعاع حامله المماس للمنحني في M ، وقياسه الواحدة ، واتجاهه الاتجاه الموجب للمنحني .

واذا اعتبرنا المماس في M محوراً شعاع واحدته T ، لسمينا هذا المماس بالمماس الموجب للمنحني في النقطة M .

واذا رمزنا بـ (α, β, γ) لمركبات T على المحاور الاحداثية لكان :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} \qquad (18)$$

$$\alpha = \frac{dx}{ds} \qquad \beta = \frac{dy}{ds} \qquad \gamma = \frac{dz}{ds}$$

١١٩ — ملاحظة : اذا كان المتحول هو الوسيط t ، فحامل المشتق

$\mathbf{M}'(t)$ هو ايضاً المماس للمنحني في النقطة M . اما اتجاه هـذا المشتق على المماس الموجب فيتعين من العلاقة :

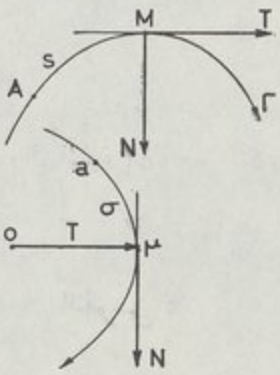
$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{d\mathbf{M}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \mathbf{T} \cdot \frac{ds}{dt}$$

أو

$$\mathbf{M}'(t) = \mathbf{T} \cdot s'(t) \qquad (19)$$

فنرى ان هذا الاتجاه يتوقف على اشارة الكمية $s'(t)$. فيكون للشعاع $\mathbf{M}'$ اتجاه $\mathbf{T}$ او الاتجاه المعاكس حسبما يكون s' موجباً او سالباً .

١٢٠ – توجيه الناظم الاساسي : لننشىء راسم خطى الشعاع $\mathbf{T}$ بالنسبة لنقطة ما o . فالنقطة μ ، نهاية الشعاع $\mathbf{T} = o\mu$ ، ترسم منحنياً واقعاً على كرة نصف قطرها الواحدة ، نسميه بالدليل الكروي للماس .



(شكل ٢٦)

نرى ان المستوي المعين بالشعاع $o\mu$ والمماس في μ للدليل هو مستو مواز للمستوي الملاصق في M للمنحني Γ ، وان المماس في μ (وهو عمودي على $o\mu$) يوازي الناظم الاساسي في M للمنحني Γ (شكل ٢٦) .

لنوجه الدليل بحيث اذا سارت M على Γ في اتجاه موجب ، سارت μ باتجاه موجب ايضاً على الدليل .

لنرمز بـ σ للفصل المنحني لنقطة μ على الدليل الموجه ، ولنعين مشتق $\mathbf{T} = o\mu$ بالنسبة لـ σ . ان المشتق $\frac{d\mathbf{T}}{d\sigma}$ هو شعاع حامله المماس للدليل في μ (فهو يوازي الناظم الاساسي للمنحني Γ في M)، اتجاهه هو الاتجاه الموجب للدليل ، وطوله الواحدة .

واذا اعتبرنا ان الناظم الاساسي في M هو محور موجهه الاساسي $\mathbf{N}$ ، لسمينا هذا الناظم بالناظم الاساسي الموجب للمنحني Γ في النقطة M .

واذا رمزنا بـ $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ لمركبات $\mathbf{N}$ على المحاور الاحداثية لكان :

$$\mathbf{N} = \frac{d\,\mathbf{T}}{d\,\sigma} \qquad (20)$$

$$\alpha_1 = \frac{d\,\alpha}{d\,\sigma} \qquad \beta_1 = \frac{d\,\beta}{d\,\sigma} \qquad \gamma_1 = \frac{d\,\gamma}{d\,\sigma}$$

١٢١ — ملاحظة : نرى ، اعتماداً على الطريقة التي اتبعناها في توجيه الدليل ، ان الناظم الاساسي الموجب يتجه نحو المنطقة التي يتقعر نحوها المنحني.

١٢٢ — توجيه ثنائي الناظم : نوجه ثنائي الناظم في M لمنحن Γ بحيث تكون الثلاثية MTNB مباشرة .

واذا فرضنا ان $\mathbf{B}$ هو الموجه الاساسي لثنائي الناظم الموجب لكان :

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{N} \qquad (21)$$

واذا رمزنا بـ $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ لمركبات $\mathbf{B}$ على المحاور الاحداثية (القائمة والمباشرة) oxyz لكان :

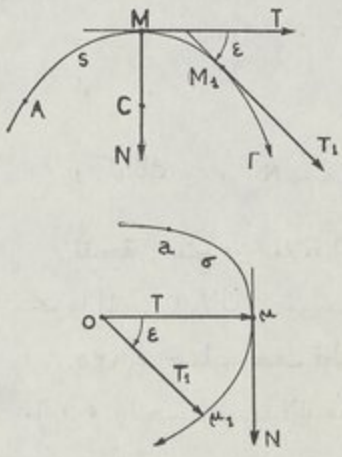
$$\alpha_2 = \beta\,\gamma_1 - \gamma\,\beta_1 \qquad \beta_2 = \gamma\,\alpha_1 - \alpha\,\gamma_1 \qquad \gamma_2 = \alpha\,\beta_1 - \beta\alpha_1$$

التقوس :

١٢٣ — تعريف : اذا فرضنا على منحن Γ نقطتين متجاورتين M و M_1 ، وكانت ε هي زاوية المماسين الموجبين في هاتين النقطتين (شكل ٢٧) ، فانا نسمي النسبة $\frac{\varepsilon}{\widehat{MM_1}}$ بالتقوس الوسطي للقوس $\widehat{MM_1}$ ، ونسمي مقلوب هذه النسبة بنصف قطر التقوس الوسطي للقوس $\widehat{MM_1}$.

عندما تتناهى M_1 الى M ، تتناهى النسبة $\frac{\varepsilon}{\widehat{MM_1}}$ الى التقوس في M للمنحني ، ويتناهى مقلوبها الى نصف قطر التقوس في تلك النقطة .

١٢٤ – **تعيين التقوس** : لنفرض ان المنحني Γ والدليل الكروي للمماسات موجهان (كما رأينا في البند ١٢٠) . وليكن μ و μ_1 النقطتين من الدليل الموافقتين للنقطتين M و M_1 من المنحني Γ . لنرسم في المستوي $\mu o \mu_1$ دائرة نصف قطرها الواحدة ومركزها o ، فالقوس الدائرية $\mu\mu_1$ تساوي ε . عندما تتناهى M_1 و M (وتتناهى بالتالي μ_1 الى μ) ، تتناهى القوس الدائرية $\mu\mu_1$ الى القوس $d\sigma$ من الدليل . فالتقوس في M ، وهو نهاية $\frac{\varepsilon}{\Delta s}$ ، يصبح اذن $\frac{d\sigma}{ds}$. ويصبح بالتالي نصف قطر التقوس في M :



(شكل ٢٧)

$$\rho = \frac{ds}{d\sigma} \qquad (22)$$

وهذه الكمية موجبة ، لأن ds و $d\sigma$ من اشارة واحدة (الاتجاه الموجب للدليل يوافق الاتجاه الموجب للمنحني Γ) .

نسمي النقطة C من الناظم الاساسي في M للمنحني Γ والمحققة للعلاقة :

$$\mathbf{MC} = \rho \cdot \mathbf{N} \qquad (23)$$

بمركز التقوس في M للمنحني المفروض .

١٢٤ – **ملاحظة** : نعلم ان $\frac{d\mathbf{M}}{ds} = \mathbf{T}$

فاذا اشتققنا طرفي هذه العلاقة بالنسبة للقوس s لوجدنا :

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{ds^2} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{ds}$$

فيكون

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\mathbf{N}}{\rho} \qquad (24)$$

هذا واذا حسبنا مشتق M بالنسبة لوسيط t لوجدنا :

$$\frac{d\,\mathbf{M}}{d\,t} = \frac{d\mathbf{M}}{d\,s} \cdot \frac{d\,s}{d\,t}$$

او $$\mathbf{M}' = s' \cdot \mathbf{T} \qquad (25)$$

وكذلك $$\mathbf{M}'' = s'' \cdot \mathbf{T} + \frac{s'^2}{\rho}\,\mathbf{N} \qquad (26)$$

نتيجة : ينتج من العلاقة الاخيرة ان الشعاع $\mathbf{M}''$ يتجه نحو المنطقة التي يتقعر نحوها المنحني ، لان ρ موجب و $\mathbf{N}$ يتجه نحو هذه المنطقة .

١٢٥ - حساب نصف قطر التقوس : لنفرض ان النقطة M تابعة لوسيط ما t ، ولنحسب ρ بدلالة هذا الوسيط .

من العلاقتين (25) و (26) نجد :

$$\mathbf{M}' \wedge \mathbf{M}'' = s' \cdot \mathbf{T} \wedge \left(s'' \cdot \mathbf{T} + \frac{s'^2}{\rho}\,\mathbf{N} \right) = \frac{s'^3}{\rho}\,\mathbf{B}$$

فيكون $$\rho = \frac{|\ s'^3\ |}{|\ \mathbf{M}' \wedge \mathbf{M}''\ |} = \frac{|\ \mathbf{M}'^3\ |}{|\ \mathbf{M}' \wedge \mathbf{M}''\ |} \qquad (27)$$

واعتماداً على هذه العلاقة يمكن حساب ρ بدلالة احداثيات النقطة M . سنوضح ذلك في الحالتين التاليتين :

(١) المنحني في المستوي xoy ومعين بالمعادلتين الوسيطيتين :

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

فيكون $$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ x'y'' - y'x''\ |}$$

(٢) المنحني معين بالمعادلة : $y = f(x)$

نعتبر x هو الوسيط فيكون :

$$\rho = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|\ y''\ |}$$

توابع النقط :

تمهيد : نصادف في الميكانيك (وفي الفيزياء الرياضية) مقادير تتعلق بمواضع النقط (وقد تتعلق ايضاً بمتحول آخر ، هو الزمن) . وهـذه المقادير اما ان تكون غير موجهة ، فتغدو توابع عددية للنقط ، أو تكون موجهة فتصبح توابع شعاعية للنقط . ففي الحالة الاولى نقول ان هنالك ساحـة عددية ، وفي الحالة الثانية ساحه شعاعية .

فلو فرضنا مثلاً جسماً غير متجانس ، فكثافة نقطة ما من هـذا الجسم هي تابـع عددي للنقطة ، وثقل هذه النقطة هو تابـع شعاعي لها .

١٢٦ — الساحة الشعاعية : اذا فرضنـا ان كل نقطة من منطقة معينة في الفراغ، يوافقها شعاع تابـع لهذه النقطة ، لقلنا ان هنالك ساحة أشعة .

واذا اشرنا بـ M لاحدى نقط المنطقة ، وبـ F للتابع الشعاعي الموافق للنقطة M ، لقلنا ان هذه الساحة تتعين بالشعاع F(M) .

ولو رمزنا بـ (x, y, z) لاحداثيات M ، وبـ (X, Y, Z) لمركبات F على المحاور الاحداثية ، لغدت هذه المركبات توابع عددية لاحداثيات M :

$$X = X(x, y, z) \qquad Y = Y(x, y, z) \qquad Z = Z(x, y, z)$$

هذا ونقول عن ساحة اشعة انها منتظمة اذا كان شعاعها F(M) ثابتاً (اي اذا كانت اشعة الساحة في مختلف النقط متساوية فيما بينها) .

ونقول عن ساحة أشعة انهـا مستوية اذا كانت الاشعة F(M) في مستو واحد (او موازية جميعها لمستو واحد) ، وليكن المستوي xoy مثلاً ، وكانت المركبتان (X,Y) للشعاع F تابعين للأحداثين (x, y) للنقطة M :

$$X = X(x, y) \qquad Y = Y(x, y)$$

مثال : ان عزم شعاع مفروض V بالنسبة لنقطة ما في الفراغ ، هو شعاع تابع لـ M . فعزوم شعاع بالنسبة لنقط الفراغ تؤلف ساحة عزوم . ونلاحظ ان ساحة العزوم للشعاع V هي ساحة مستوية (بند ٦١) ، كما نلاحظ ايضاً ان ساحة العزوم لمزدوجة هي ساحة منتظمة (بند ٥٨) . وسنرى ان ساحة العزوم لمجموعة أشعة ما ، لا تكون بوجه عام منتظمة أو مستوية ، وانما تتصف بخاصة تتميز بها عن غيرها من الساحات (كما سنرى ذلك في بحث مجموعات الاشعة) .

١٢٧ ـ خطوط القوى : هي الخطوط (او المنحنيات) التي يكون المماس لها في كل نقطة منها منطبقاً على شعاع الساحة في تلك النقطة .

ولايجاد معادلات هذه المنحنيات ، يكفي كتابة شرط توازي شعاع الساحة F (M) مع شعاع المشتق M' ، او شعاع التفاضل d M :

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{dM} = \mathbf{O} \tag{28}$$

فالمعادلات التفاضلية لهذه المنحنيات تكون :

$$\begin{cases} Y\,dz - Z\,dy = o \\ Z\,dx - X\,dz = o \\ X\,dy - Y\,dx = o \end{cases} \tag{29}$$

وتكتب هذه المعادلات ايضاً بالشكل :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} \tag{30}$$

تطبيقات : لنعين خطوط القوى في بعض الساحات الشهيرة :

١٢٨ ـ خطوط القوى في ساحة منتظمة : نفرض ، تسهلاً للحل ، ان شعاع الساحة F يوازي المحور oz ويساوي قياسه الجبري العدد k ($k \neq o$) ، فيكون :

$$X = c \qquad Y = o \qquad Z = K$$

فمن مجموعة المعادلات (29) ينتج :

$$dx = o \qquad dy = o$$

وبالتالي $x = a \qquad y = b$ (a و b ثابتا التكامل)

فخط القوى في نقطة ما $M(x, y, z)$ يتعين بالمعادلات :

$$x = a \qquad y = b \qquad z = z$$

وهو مستقيم يوازي المحور oz (أو الشعاع F) .

فخطوط القوى في ساحة منتظمة هي اذن مستقيمات متوازية فيما بينها وموازية لشعاع الساحة .

١٢٩ – ملاحظة : اذا كان شعاع الساحة ثابتاً في المنحى ومتغيراً في القياس ، فانا نجد بسهولة ان خطوط القوى هي أيضاً مستقيمات متوازية وموازية لشعاع الساحة .

١٣٠ – خطوط القوى في ساحة مركزية : لنفرض ساحة شعاعها يمر أبداً من نقطة ثابتة ، نسميها المركز .

ليكن o هو المركز ، و $\mathbf{F}(M)$ شعاع الساحة . لنفرض أن :

$\mathbf{oM} = r \cdot \mathbf{u}$ (u شعاع واحدة المحور oM)

بما ان $\mathbf{F}(M)$ يمر من o ، فيكون محمولاً على المحور oM ، ويكون بالتالي :

$\mathbf{F} = F \cdot \mathbf{u}$ (F القياس الجبري للشعاع F)

نعلم ان المعادلة الشعاعية التي تعين خطوط القوى هي :

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{dM} = o$$

وتكتب $F\mathbf{u} \wedge (dr \cdot \mathbf{u} + r \cdot \mathbf{du}) = o$

أو $F \cdot r(\mathbf{u} \wedge \mathbf{du}) = o$ (لان $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = o$)

فاذا فرضنا أن كلاً من F و r لا يساوي الصفر ، فيكون $\mathbf{u} \wedge \mathbf{du} = o$.

وبما أن du لا يوازي u ، فيكون $\mathbf{du} = o$ ، ويكون بالتالي u ثابتاً .

فخط القوى في M هو مستقيم مارّ من o . وخطوط القوى في مختلف النقط تكون اذن مستقيمات مارة جميعها من المركز o .

١٣١ - خطوط القوى في ساحة مستوية : لنفرض ساحة مستوية شعاعها :

$$\mathbf{F} = X(x, y)\,\mathbf{i} + Y(x, y)\,\mathbf{j}$$

نرى (اعتماداً على المعادلات 29 أو 30) ان خطوط قوى هـذه الساحة تتعين بالمعادلتين :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y}$$

$$z = c \qquad (c \text{ ثابت التكامل})$$

فخطوط القوى في ساحة مستوية هي اذن منحنيات تقع جميعها في مستويات متوازية فيما بينها وموازية لاشعة الساحة .

تمرين : لنبحث عن خطوط القوى في ساحة معينة بالشعاع :

$$\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

نعلم أن المعادلات التفاضلية لخطوط القوى هي :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

اذن يكون

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{zx} = \frac{dz}{xy}$$

وبالتالي يكون :

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} \qquad \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$$

أو

$$x\,dx = y\,dy = z\,dz$$

فنجد (بعد التكامل) :

$$x^2 - y^2 = c_1 \qquad y^2 - z^2 = c_2$$

فخطوط القوى هي اذن منحنيات تنشأ من تقاطع مجموعتين من الاسطوانات.

هذا وان الحلول التي وجدناها تستلزم عدم انطباق M على o .

١٣٢ — تدرج التابع : اذا فرضنا U تابعاً عددياً لنقطة ما M (x, y, z) من ساحة مفروضة ، فانا نسمي الشعاع **F** الذي يحقق العلاقة :

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M}$$

بتدرج التابع U ، ونرمز اليه بـ **gradU** ، فيكون :

$$dU = \mathbf{gardU} \cdot d\mathbf{M} \qquad (31)$$

واذا اشرنا بـ (X, Y, Z) لمركبات تدرج U على المحاور الاحداثية ، لكان :

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \qquad (32)$$

واذا لاحظنا ان :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$$

لكان :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z} \qquad (33)$$

واذا حسبنا بطريقتين قيم المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع U (x, y, z) ، حصلنا على العلاقات :

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \qquad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} \qquad (34)$$

هذه الشروط الثلاثة اذن لازمة ليكون شعاع **F** (X, Y, Z) تدرجاً لتابع . ويبرهن على أنها كافية (ضمن قيود معينة) .

مثال : لنبحث ان كان الشعاع :

$$\mathbf{F} = yz\,\mathbf{i} + zx\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$$

(الوارد في التمرين السابق) تدرجاً لتابع .

ان مركبات هذا الشعاع على المحاور الاحداثية ، هي :

$$X = yz \qquad Y = zx \qquad Z = xy$$

نرى أن :

$$\frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z} = y$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} = z$$

فالشعاع $\mathbf{F}$ هو تدرج لتابع $U(x, y, z)$ ، لان مركباته تحقق العلاقات (34).

وبما ان $\mathbf{F}.\mathbf{dM} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$

أو $\mathbf{F}.\mathbf{dM} = yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$

فنجد بسهولة أن $\mathbf{F}.\mathbf{dM} = d(xyz)$

فالشعاع $\mathbf{F}$ هو تدرج التابع $U = xyz + C$

١٣٣ — ملاحظة : لنفرض ساحة أشعة معينة بالشعاع $\mathbf{F}(M)$ ، ولنفرض ان $\mathbf{F}$ هو تدرج لتابع $U(M)$.

اذا تنقلت النقطة من موضعها M الى موضع مجاور M_1 بحيث أن :

$$M_1 = M + \mathbf{dM}$$

أو $\mathbf{oM_1} = \mathbf{oM} + \mathbf{dM}$ (o نقطة ما في الفراغ)

فيكون $dU = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dM}$

واذا رمزنا بـ ds للشعاع الذي ترسمه النقطة في تنقلها من M الى M_1 ، وبـ Fs لمسقط $\mathbf{F}$ على الشعاع ds (باعتباره محوراً) لكان :

$dU = Fs \cdot ds$ (ds قياس الشعاع ds)

وبالتالي $\frac{dU}{ds} = Fs$ (35)

نسمي $\frac{dU}{ds}$ بمشتق U باستقامة ds .

نرى ان مشتق التابع U باستقامة ds يساوي مسقط شعاع التدرج على هذه الاستقامة .

هذا ولو كان انتقال M هو باستقامة التدرج نفسه ، ورمزنا لهذا الانتقال الجزئي بـ dn لكان :

$$dU = F \cdot dn$$

و $\frac{dU}{dn} = F$ (36)

نسمي $\frac{dU}{dn}$ بمشتق U باستقامة التدرج .

نرى ان مشتق U باستقامة التدرج ، يساوي التدرج نفسه .

نستخلص مما تقدم ، ان قيمة مشتق U تختلف بحسب الاستقامات . فتبلغ نهايتها العظمى ، وهي قياس التدرج ، من اجل استقامة التدرج نفسه . وتبلغ نهايتها الصغري ، وهي الصفر ، من اجل استقامة عمودية على التدرج .

هذا ونستخلص ايضاً ، ان مشتقات التابع $U(x, y, z)$ باستقامات المحاور الاحداثية ox و oy و oz (وهي $\frac{\partial U}{\partial x}$ و $\frac{\partial U}{\partial y}$ و $\frac{\partial U}{\partial z}$) تساوي مساقط الشعاع F على هذه المحاور (وهي X و Y و Z) . وهذا ماوجدناه سابقاً .

١٣٤ – نتيجة : لنفرض ساحة اشعة مستوية ، وليكن $F(M)$ الشعاع الموافق للنقطة M المعينة بالاحداثيين القطبين (r, θ) . فاذا فرضنا ان F هو تدرج لتابع $U(r, \theta)$ ، ورمزنا بـ F_r و F_θ لمركبتي F على المحورين المعينين بالزاويتين القطبيتين θ و $\theta + \frac{\pi}{2}$ ، لكان :

$$dM = dr \cdot I + r\, d\theta \cdot J$$

و $\mathbf{F} = F_r \mathbf{I} + F_\theta \cdot \mathbf{J}$

وكان بالتالي $dU = F_r \cdot dr + F_\theta \cdot r\, d\theta$

واذا لاحظنا ان $dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta$

لوجدنا ان :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = F_r \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = r \cdot F_\theta$$

هذا واذا ادركنا ان مشتق $U(r, \theta)$ باستقامة $oM = r$ (وهو $\frac{\partial U}{\partial r}$) يساوي مسقط $\mathbf{F}$ على oM (وهو F_r) ، لوجدنا ايضاً ان :

$$\frac{\partial U}{\partial r} = F_r$$

١٣٥ — سطوح السوية : اذا فرضنا ساحة اشعة ، وفرضنا ان شعاعها F الموافق لنقطة $M(x, y, z)$ هو تدرج لتابع $U(x, y, z)$ ، فالسطوح المعينة بالمعادلة :

$$U(x, y, z) = C$$

نسميها بسطوح السوية .

نرى أنه يمر من كل نقطة من الساحة ، مثل $M_o(x_o, y_o, z_o)$ ، سطح سوية واحد ، معادلته :

$$U(x, y, z) = U_o(x_o, y_o, z_o)$$

١٣٦ — نتيجة : لنفرض ساحة معينة بالشعاع $\mathbf{F}(M)$ ، وليكن Σ سطح السوية المار من النقطة $M(x, y, z)$ ، والمعين بالمعادلة :

$$U(x, y, z) = C$$

فاذا تنقلت M على هذا السطح ، كان $dU = o$ ، وكان بالتالي $\mathbf{F} \cdot \mathbf{dM} = o$

فالشعاع F ، وهو تدرج U ، يكون اذن عمودياً على dM ، ويكون بالتالي عمودياً على السطح Σ .

نستخلص من ذلك ان خط القوى في M يكون عمودياً على سطح السوية في تلك النقطة .

هذا ويمكن تعيين جميع عناصر الشعاع F (M) ، وهو تدرج U ، بوساطة سطح السوية في M .

فقد وجدنا ان منحى الشعاع F الموافق للنقطة M هو الناظم لسطح السوية في M .

ونعلم (بند ١٣٣) ان قياس F يتعين من العلاقة :

$$\frac{dU}{dn} = F$$

بفرض ان dn هو انتقال M باستقامة التدرج، او استقامة الناظم للسطح Σ .

فقياس F يتعين اذن بمشتق U باستقامة الناظم لسطح السوية في M .

اما اتجاه F فيتعين من العلاقة :

$$dU = F.\, dn$$

فاذا تنقلت M على الناظم لسطح السوية Σ في اتجاه يتزايد فيه التابع U (اي من الموضع M على سطح السوية $U = C$ الى الموضع M_1 من سطح السوية $U = C_1$ بحيث يكون C_1 اكبر من C) ، كان dU موجباً ، وكان بالتالي F و dn من اتجاه واحد .

فاذا فرضنا ان سطح السوية في M ، وهو :

$$\Sigma = U - C = o$$

يقسم الفراغ الى منطقتين ، يكون U في احداهما اكبر من C (او $\Sigma > o$) ويكون في الثانية اصغر من C ، فالشعاع F (M) يتجه نحو المنطقة التي يتزايد فيها التابع U (او يكون فيها $\Sigma > o$) .

نستخلص من ذلك ان تدرج U ، وهو شعاع الساحة $\mathbf{F}(M)$ ، ينطبق على الناظم لسطح السوية في M ، ويقاس بمشتق U باستقامة هذا الناظم ، ويتجه نحو المنطقة التي يتزايد فيها التابع U .

تطبيقات : لنعين سطوح السوية في بعض الساحات الشهيرة :

١٣٧ — سطوح السوية في ساحة منتظمة : اذا فرضنا ان شعاع الساحة F يوازي المحور oz ويساوي قياسه الثابت K ($K \neq o$) يكون:

$$\mathbf{F}.\mathbf{dM} = K.dz = d(K.z)$$

فسطوح السوية تتعين بالمعادلة :

$$z = c$$

وهي مستويات موازية للمستوي xoy .

نرى ان هذه المستويات عمودية على المحور oz وبالتالي على الشعاع F . فهي اذن عمودية على خطوط القوى (وهي مستقيمات موازية للشعاع F) . وهذا يؤيد ما اوردناه في الملاحظة السابقة (بند ١٣٣) .

١٣٨ — ملاحظة : اذا كان شعاع الساحة $\mathbf{F}(M)$ ثابتاً في المنحى ، بأن نفرضه مثلاً موازياً أبداً للمحور oz ، وكان قياسه الجبري غير ثابت :

$$X = o \qquad Y = o \qquad Z = Z(x,y,z)$$

فلكي يكون هنالك سطوح سوية ، يجب ان يكون الشعاع F تدرجاً لتابع U ، أي ان يكون $\mathbf{F}.\mathbf{dM} = Z.dz$ تفاضلاً تاماً . ويتم ذلك اذا كان Z تابعاً للراقم z فحسب . وعندئذ يصبح :

$$\frac{dU}{dz} = Z(z)$$

ويصبح بالتالي $U(z)$ التابع الاصلي لـ $Z(z)$.

فسطوح السوية ، وتتعين بالمعادلة $U(z) = C$ ، تكون اذن مستويات متوازية عمودية على شعاع الساحة . ونرى ان هذه السطوح عمودية على خطوط القوى (وهي مستقيمات متوازية وموازية للشعاع ، بند ١٢٩) .

١٣٩ – سطوح السوية في ساحة مركزية : لنفرض ساحة شعاعها $\mathbf{F}(M)$ يمر ابداً من نقطة ثابتة o . لنرمز بـ r لنصف القطر الشعاعي oM ، وبـ u لشعاع واحدة المحور oM ، فيكون :

$$\mathbf{oM} = r \, . \, u \qquad \text{و} \qquad \mathbf{dM} = dr \, . \, u + r \, . \, du$$

$$\mathbf{F} = F \, . \, u \qquad \text{و} \qquad \mathbf{F} \, . \, \mathbf{dM} = F \, . \, dr \quad \text{ويكون}$$

فلكي يكون هنالك سطوح سوية ، يجب ان يكون الشعاع $\mathbf{F}$ تدرجاً لتابع U ، أي ان يكون $\mathbf{F} \, . \, \mathbf{dM} = F \, . \, dr$ تفاضلا تاماً . ويتم ذلك اذا كان F تابعاً لـ r فحسب . وعندئذ يصبح :

$$F(r) = \frac{dU}{dr}$$

ويصبح بالتالي $U(r)$ التابع الاصلي لـ $F(r)$.

فسطوح السوية ، وتتعين بالمعادلة $U(r) = C$ ، تكون اذن كرات مراكزها منطبقة على النقطة الثابتة o .

ونرى هنا ايضاً ان هذه السطوح عمودية على خطوط القوى (وهي مستقيمات مارة من o ، بند ١٣٠) . وهذا يؤيد ما جاء في الملاحظة (١٣٣) .

١٤٠ – ملاحظة : اذا كان شعاع ساحة يساوي مجموع عدة أشعة ، وكانت هذه الاشعة تدرجات لتوابع ، فان شعاع الساحة يكون ايضاً تدرجاً لتابع . وان هذا التابع يساوي مجموع التوابع .

ليكن $\mathbf{F}(M)$ شعاع الساحة ، ولنفرض ان :

$$\mathbf{F} = \Sigma \, \mathbf{F}_i$$

فيكون $\mathbf{F} . d\mathbf{M} = \Sigma (\mathbf{F}_i . d\mathbf{M})$

وبما ان $\Sigma (\mathbf{F}_i . d\mathbf{M}) = \Sigma U_i$

فاذا رمزنا بـ U للمجموع الجبري ΣU_i ، يكون :

$$\mathbf{F} . d\mathbf{M} = dU$$

ويكون بالتالي $\mathbf{F}$ هو تدرج التابع U .

١٤١ـ خطوط السوية: اذا كان لدينا ساحة مستوية، وفرضنا ان شعاعها:

$$\mathbf{F} = X(x, y)\,\mathbf{I} + Y(x, y)\,\mathbf{J}$$

هو تدرج لتابع $U(x, y)$ ، فالمعادلة :

$$U(x, y) = C$$

تعين منحنيات نسميها بخطوط السوية .

تمرين : لدينا ساحة مستوية شعاعها $\mathbf{F}(M)$ يساوي مجموع شعاعين ، أحدهما $\mathbf{F}_1(M)$ يمر من نقطة ثابتة o_1 ويتجه من o_1 الى M ، والثاني $\mathbf{F}_2(M)$ يمر من نقطة ثابتة ثانية o_2 ويتجه من o_2 الى M . فاذا كان للشعاعين قياس واحد ثابت k ، فانه يطلب تعيين خطوط القوى وخطوط السوية .

لنرمز بـ u_1 و u_2 لشعاعي واحدة المحورين oM_1 و oM_2 فيكون :

$$\mathbf{F}_1 = k\,u_1 \qquad \text{و} \qquad \mathbf{F}_2 = k\,u_2$$

وبما أن $\mathbf{F}(M) = \mathbf{F}_1(M) + \mathbf{F}_2(M)$

فيكون $\mathbf{F}(M) = K(u_1 + u_2)$

خطوط القوى : لتعيين خطوط القوى يكفي كتابة شرط توازي الشعاعين $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{M}$ ، او توازي شعاع المجموع $(u_1 + u_2)$ والشعاع $d\mathbf{M}$. وبما ان الشعاع $(u_1 - u_2)$ عمودي على الشعاع $(u_1 + u_2)$ ، فيكفي اذن

كتابة شرط تعامد الشعاعين $(u_1 - u_2)$ و dM أي :

$$(u_1 - u_2) . dM = o$$

أو $$u_1 . dM - u_2 . dM = o$$

واذا فرضنا ان o منتصف $o_1 o_2$ يكون :

$$oM = o o_1 + o_1 M = o o_2 + o_2 M$$

أو $$oM = o o_1 + r_1 = o o_2 + r_2$$

ويكون $$dM = dr_1 = dr_2$$

فالمعادلة التفاضلية السابقة تصبح اذن $u_1 . dr_1 - u_2 . dr_2 = o$

وتكتب $dr_1 - dr_2 = o$ أو $d(r_1 - r_2) = o$

فخطوط القوى تتعين اذن بالمعادلة $r_1 - r_2 = C$

وهي قطوع زائدة محرقا كل منها النقطتان الثابتتان o_1 و o_2 .

خطوط السوية : ليكون هناك خطوط سوية يجب ان يكون F تدرجاً لتابع ، اي ان يكون $F . dM$ تفاضلاً تاماً .

نرى ، اعتماداً على خطوط السوية في ساحة مركزية ، أن F_1 هو تدرج لتابع (لان قياس F_1 ثابت) . فاذا اشرنا بـ U_1 لهذا التابع ، كان :

$$dU_1 = F_1 . dr_1 = K . dr_1$$

ونرى ايضاً ان F_2 هو تدرج لتابع . فاذا كان هذا التابع هو U_2 ، لكان :

$$dU_2 = F_2 . dr_2 = K . dr_2$$

فالشعاع F (وهو حاصلة الشعاعين F_1 و F_2)، يكون اذن تدرجاً للتابع U (بند ١٤٠) ويكون $dU = dU_1 + dU_2$ أو $dU = K . d(r_2 + r_2)$

فخطوط السوية ، وهي المنحنيات التي تتعين بالمعادلة :

$$r_1 + r_2 = c$$

هي قطوع ناقصة محرقا كل منها النقطتان الثابتتان o_1 و o_2 .

ملاحظة : نلاحظ في التمرين السابق الأمور التالية :

١ً — يمكن حل التمرين السابق بطريقة هندسية بسيطة :

فنرى ان خط القوى في M هو قطع زائد ، محرقاه o_1 و o_2 ، لأن الشعاع $F(M)$ (وهو حاصلة شعاعين متساويين في القياس) يقع على المنصف الداخلي للزاوية $o_1 M o_2$ من جهة ، وينطبق على المماس لخط القوى في M من جهة ثانية . فخطوط قوى الساحة تكون اذن قطوع زائدة محرقا كل منها o_1 و o_2 .

ونرى أيضاً ان خط السوية في M (وندرك بسهولة ان F هو تدرج لتابع) هو قطع ناقص محرقاه o_1 و o_2 ، لان حامل F (وهو الناظم لخط السوية في M) ينصف الزاوية $o_1 M o_2$. فخطوط السوية في الساحة المفروضة تكون اذن قطوع ناقصة محرقا كل منها o_1 و o_2 .

٢ً — نرى بسهولة ، ان النتائج التي وجدناها في التمرين السابق لا تتغير ، حين نعكس اتجاه كل من الشعاعين F_1 و F_2 .

أما اذا عكسنا اتجاه احد الشعاعين ، فعندئذ تصبح خطوط القوى قطوعاً ناقصة ، وتغدو خطوط السوية قطوعاً زائدة .

٣ً — لقد وجدنا في التمرين السابق خطوط القوى وخطوط السوية في مستو مار من النقطتين o_1 و o_2 .

أما في الفراغ ، فخطوط القوى تكون ايضاً قطوعاً زائدة كائنة في مستويات مارة من المستقيم $o_1 o_2$ (محرقا كل منها o_1 و o_2) ، وسطوح السوية مجسمات دورانية للقطع الناقص (محرقا كل منها o_1 و o_2) .

تمارين

١ - عين مركبات المشتق $\mathbf{M}'(t)$ في الاحداثيات القطبية .

٢ - لدينا المنحني المعين بالمعادلات الوسيطية :

$$x = t \qquad y = t^2 + 1 \qquad z = t^2 + 3t$$

(١) اكتب معادلة المماس في $M(t)$ لهذا المنحني .

(٢) أوجد معادلة المستوي الناظم للمنحني في النقطة الموافقة للقيمة $t = 0$.

(٣) أوجد معادلة المستوي الملاصق للمنحني في النقطة الموافقة للقيمة $t = -\frac{1}{2}$.

٣ - لدينا المنحني المعين بشعاع الفراغ :

$$\mathbf{oM} = a\left(1 + \frac{3}{2}t^2\right)\mathbf{i} + at^2\mathbf{j}$$

والموجّه وفق القيم المتزايدة لـ t . فاذا فرضنا ان مبدأ الاقواس هو النقطة الموافقة للقيمة $t = 0$ ، فانه يطلب :

(١) حساب $\mathbf{M}'(t)$ و $S'(t)$ ثم تعيين الشعاع $\mathbf{T}$ في نقطة ما $M(t)$ من المنحني .

(٢) حساب القوس S والزاوية φ التي يصنعها $\mathbf{T}$ مع ox (بدلالة t) ثم تعيين $\mathbf{N}$ في النقطة $M(t)$.

(٣) حساب نصف قطر التقوس في النقطة من المنحني الموافقة للقيمة $t = 1$.

٤ - لدينا مجسم القطع الناقص :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

أوجد معادلة المستوي المماس في نقطة ما $M(x, y, z)$ من هذا المجسم ، ثم معادلة الناظم في تلك النقطة .

٥ – لدينا ساحة معينة بالشعاع :

$$\mathbf{F} = \lambda \cdot o\mathbf{M} + \mathbf{K}$$

λ مقدار جبري ثابت ، و $\mathbf{K}$ شعاع ثابت في الفراغ .

(١) أوجد خطوط القوى .

(٢) بيّن ان الشعاع $\mathbf{F}$ هو تدرج لتابع ، ثم عين سطوح السوية .

٦ – لدينا ساحة مستوية معينة بمركبتي شعاعها $\mathbf{F}(M)$:

$$X = 2xy \qquad Y = x^2$$

برهن ان الشعاع $\mathbf{F}$ هو تدرج لتابع . عين خطوط السوية وخطوط القوى .

٧ – أوجد خطوط القوى في الساحة المستوية المعينة بمركبتي الشعاع $\mathbf{F}(M)$:

$$X = -x \qquad Y = -4y$$

بين ان $\mathbf{F}(M)$ هو تدرج لتابع . عين خطوط السوية .

٨ – لدينا ساحة معينة بالشعاع :

$$\mathbf{F} = (y+z)\mathbf{i} + (z+x)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$

(١) أوجد خطوط القوى .

(٢) برهن ان الشعاع $\mathbf{F}$ هو تدرج لتابع . أوجد هذا التابع .

(٣) أوجد سطوح السوية .

٩ – لدينا الساحة المعينة بمركبات شعاعها $\mathbf{F}(M)$:

$$X = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad Y = \frac{y}{x^2+y^2} \qquad Z = o$$

برهن ان $\mathbf{F}$ هو تدرج لتابع . عين خطوط القوى وسطوح السوية .

١٠ – لدينا ساحة مستوية شعاعها $\mathbf{F}(M)$ هو تدرج للتابع :

$$U = -\frac{\cos\theta}{r}$$

r و θ هما الأحداثيان القطبيان لنقطة M . المطلوب :

(١) حساب مركبتي $\mathbf{F}$ على المحورين المعينين بالزاويتين القطبيتين θ و $\theta + \frac{\pi}{2}$.

(٢) عين خطوط القوى وخطوط السوية .

الباب الثاني

علم الحركة

الفصل الاول

السرعة العددية

معلومات أولية :

تمهيد : ان علم الحركة يبحث في حركات الاجسام دون التعرض للعوامل المسببة لها . فهو يبحث في الحركة على اعتبار انها مجرد علاقة بين الزمان والمكان.

سندرس حركة النقطة المادية ، وهي ابسط الاجسام، ونعتبرها عديمة الحجم كنقطة هندسية .

والجسم الصلب يتكون من نقط مادية متلاصقة بعضها ببعض و متماسكة فيما بينها.

هنالك أجسام غير صلبة كالسوائل والغازات لا تحافظ على اشكالها وأبعاد نقطها بالنسبة لبعضها البعض .

هذا وليس في الطبيعة جسم ينطبق عليه تعريف الجسم الصلب تماماً ، لأن أي جسم مهما كانت مقاومته يمكن ان تختلف ابعاد نقطه بعضها عن بعض اذا تأثر بقوة مناسبة . غير أن النتائج العملية لهذا التعريف تنطبق على كثير من الاجسام الطبيعية كالحديد والخشب والحجر .

١٤١ – الحركة والسكون : نقول عن نقطة إنها متحركة بالنسبة لجسم اذا كانت ابعادها عن نقط الجسم متغيرة مع الزمن .

وتكون النقطة ساكنة بالنسبة للجسم اذا بقيت ابعادها عن جميع نقط الجسم ثابتة لا تتغير مع الزمن .

الحركة والسكون حادثان نسبيان ، فلا تتعين حركة جسم او سكونه إلا بالنسبة لجسم آخر يدعى جملة المقارنة .

قد يكون جسم متحركاً بالنسبة لجملة مقارنة وساكناً بالنسبة لأخرى ، كراكب قطار ، فهو متحرك بالنسبة لاشجار الطريق ، وساكن بالنسبة للقطار نفسه .

١٤٢ – قياس الزمن : يُقاس الزمن ، كما تقاس الاشعة على محور ، بعدد جبري بالنسبة لمبدأ زمني معين . فيقدر زمن حصول حادثة ما بعدد موجب او سالب حسبما تقع هذه الحادثة بعد لحظة المبدأ او قبله . فاذا اعتبرنا الساعة ٣ والدقيقة ٢٠ مبدأ للزمن ، وجرت حادثة في الساعة ٣ والدقيقة ٢٥ ، قلنا ان الحادثة جرت في الزمن ٥ (اذا اعتبرنا الدقيقة واحدة لتقدير الزمن) . واذا جرت حادثة في الساعة ٣ والدقيقة ١٢ ، قلنا ان زمن حدوثها (– ٨) .

١٤٣ – مسار النقطة : لنفرض ثلاثة محاور احداثية متعامدة oxyz نعتبرها مجموعة للمقارنة . لتكن M نقطة في الفراغ احداثياتها (x, y, z) . عندما تتحرك هذه النقطة تكون احداثياتها توابع للزمن t :

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t) \qquad (1)$$

فاذا علمت هذه التوابع الثلاثة ، امكن تتبع المواضع المتعاقبة للنقطة حين يتغير الزمن . نسمي هذه المعادلات الثلاث بمعادلات الحركة . ونسمي المنحني الذي ترسمه النقطة اثناء حركتها بالنسبة لمجموعة المقارنة بمسار النقطة . فمعادلات الحركة تعطي التمثيل الوسيطي للمسار .

نسمي الحركة ، بحسب شكل مسارها ، فنقول حركة مستقيمة او منحنية (دائرية او لولبية او غير ذلك) .

هذا واذا اسقطنا النقطة المتحركة M على مستو او محور ، كان لمسقطها ،

وليكن m ، حركة نسميها بمسقط حركة M . فان كان الاسقاط على مستوي الاحداثيات xoy اصبحت حركة المسقط معينة بالمعادلتين :

$$x = x(t) \qquad y = y(t)$$

وان كان الاسقاط على المحور ox ، غدت حركة المسقط معينة بالمعادلة :

$$x = x(t)$$

هذا واذا اعتبرنا المسار موجهاً ، وأخذنا عليه نقطة ثابتة A نعتبرها مبدأ لقياس الاقواس ، وكان M موضع المتحرك في لحظة ما t ، و s الفصل المنحني للنقطة M ، فالمعادلة : $s = s(t)$ (2)

التي تعين قانون حركة النقطة على مسارها تدعى بالمعادلة الزمنية للحركة . هذه المعادلة تعين موضع المتحرك في كل لحظة على المسار .

ونقول عن الحركة انها مباشرة (او تقدمية) ، اذا سار المتحرك في الاتجاه الموجب للمسار . ونقول في الحالة المعاكسة ان الحركة رجعية (او تقهقرية) .

نسمي الحركة ايضاً بحسب قانون حركتها . فنقول حركة منتظمة او اهتزازية مثلاً ، كما سنرى ذلك فيما بعد .

١٤٤ ـ مخطط الفصول : قد يكون من المفيد ، توضيحاً لمعرفة مواضع المتحرك في كل آن على مساره الموجه ، ان نمثل بيانياً تغيرات فصل المتحرك على مساره بدلالة الزمن ، سواء كان المسار مستقيماً او منحنياً .

نسمي المنحني البياني الذي يوضح هذه التغيرات والذي يتعين من المعادلة الزمنية للحركة بمخطط الفصول او مخطط المسافات .

ان جهاز موران يعطينا طريقة عملية لتسجيل مخطط الفصول لجسم يسقط في الفراغ امام اسطوانة تدور بحركة منتظمة حول محورها . وهناك اجهزة غيرها تسجل حوادث طبيعية كثيرة .

تفيد مخططات الفصول لدرس الحركات وحل مسائل مختلفة عليها ، كايجاد

زمن ومكان التقاء متحركين او اكثر . ويكثر استعمال هـذه المخططات في حركات القطر الحديدية .

١٤٥ – ملاحظة : نرى ان حركة نقطة تتعين بطريقتين :

(١) بمعادلات الحركة ، وهي : $x = x(t)$ $y = y(t)$ $z = z(t)$

فيتعين بذلك المسار وقانون الحركة .

(٢) بالمعادلة الزمنية $s = s(t)$ اذا كان المسار معلوماً . وفي هـذه الحالة تؤول دراسة الحركة لدرس تغيرات التابع $s = s(t)$. فلا فرق في هـذه الدراسة بين حركة مستقيمة وحركة منحنية ما .

سنعين عناصر الحركة مبتدئين بالطريقة الثانيـة (وهي الطريقة الذاتية للحركة ، وهي عددية) ، ثم ننتقل بعدها الى الدراسة الشعاعية للحركة .

الحركة المنتظمة

١٤٦ – تعريف : يكون لنقطة مادية حركة منتظمة على مسار موجه ما (مستقيم او منحن) ، اذا كانت المسافات الجبرية المقطوعة على مسارها متناسبة مع الازمنة اللازمة لقطعها . بمعنى انها تقطع مسافات جبرية متساوية في فترات زمنية متساوية .

١٤٧ – السرعة العددية : لتكن M نقطة مادية تتحرك على مسارها بحركة منتظمة . نعلم ان موضع M يتعين على مسارها الموجه ، بالفصل المنحني s المقدر اعتباراً من نقطة ثابتة A نختارها مبدأ للفصول .

لنفرض ان المتحرك كان في لحظة t_1 في موضع M_1 فصله المنحني s_1 ، ثم اصبح في لحظة ما t في موضع M فصله s . فعندما يزداد الزمن من t_1 الى t ، تقطع النقطة القوس الجبرية $\overset{\frown}{M_1M}$ في الفترة الزمنية $t - t_1$ ، ويكون :

$$\overset{\frown}{M_1M} = \overset{\frown}{AM} - \overset{\frown}{AM_1} = s - s_1$$

فحركة M تكون منتظمة ، اذا كانت النسبة بين المسافة المقطوعة ، وهي $s - s_1$ ، والفترة الزمنية اللازمة لقطعها ، وهي $t - t_1$ ، ثابتة .

نسمي هذه النسبة الثابتة بالسرعة العددية للنقطة ونرمز لها بـ v ، فيكون :

$$\frac{s - s_1}{t - t_1} = v \qquad (3)$$

ونرى ان هذه السرعة هي القيمة الجبرية للمسافة التي يقطعها المتحرك على مساره في واحدة الزمن .

١٤٨ — **واحدة السرعة** : ان واحدة السرعة هي سرعة متحرك يسير بحركة منتظمة ويقطع مسافة قدرها واحدة الطول في مدة قدرها واحدة الزمن.

فاذا اعتبرنا المتر مثلاً واحدة للطول ، والثانية واحدة للزمن ، فواحدة السرعة تكون المتر في الثانية . وهي سرعة متحرك يسير بحركة منتظمة ويقطع متراً في ثانية واحدة . فيقال مثلاً ان سرعة متحرك هي ٣٢ متراً في الثانية ، ويكتب ٣٢ م/ثا .

هذا ونلاحظ ان السرعة تقدر بطول مقسوم على زمن .

تمرين : قطعت سيارة بحركة منتظمة مسافة ٣٦٠ كم في ٥ ساعات . عين سرعة السيارة بفرض ان الثانية هي واحدة الزمن والمتر هو واحدة المسافة .

اذا اعتبرنا واحدة الطول الكيلومتر ، وواحدة الزمن الساعة ، فواحدة السرعة تكون الكيلومتر في الساعة ، وسرعة السيارة تصبح :

$$\frac{٣٦٠}{٥} = ٧٢ \text{ كيلومتر في الساعة}$$

اما اذا اعتبرنا المتر هو واحدة الطول والثانية واحدة الزمن ، فواحدة السرعة تكون المتر في الثانية ، والسرعة تصبح :

$$\frac{١٠٠٠ \times ٣٦٠}{٥ \times ٦٠ \times ٦٠} = ٢٠ \text{ متر في الثانية}$$

١٤٨ — **معادلة الحركة** : ان المعادلة (3) التي وجدناها سابقاً ، والتي تكتب بالشكل

$$s - s_1 = v(t - t_1) \qquad (4)$$

هي المعادلة الزمنية للحركة المنتظمة .

نستنتج من هذه المعادلة ان s (t) هو تابع للزمن من الدرجة الاولى .

ونلاحظ ان عكس هذه النتيجة صحيح . بمعنى ان كل حركة معينة بالمعادلة :

$$s = at + b \qquad (5)$$

هي حركة منتظمة . ويتضح ذلك اذا ادركنا ان كل تزايد للزمن، وليكن Δt ، يوافقه تزايد للفصل ، وليكن Δs ، وان $\Delta s = a \Delta t$. اي ان تزايد s متناسب مع تزايد t .

هذا واذا فرضنا ان المتحرك كان في لحظة البدء (اي في مبدأ الزمن $t = o$) في موضع M_o فصله s_o ، فمعادلة الحركة (4) او (5) تصبح :

$$s = vt + s_o \qquad (6)$$

١٥٠ - درس الحركة : لدرس الحركة المنتظمة نبحث عن اتجاه سير المتحرك على مساره. ويعرف ذلك من اتجاه تغير التابع $s = vt + s_o$. فنرى ان الحركة تكون مباشرة او رجعية حسبما تكون السرعة موجبة او سالبة .

واذا رسمنا مخطط الفصول ، وهو مستقيم ميله v ، فنرى ان الحركة تكون مباشرة او رجعية حسبما يكون ميل المستقيم موجباً او سالباً ، او حسبما تكون الزاوية الحادة الكائنة بين المستقيم والمحور ot موجبة او سالبة . ونلاحظ ان السرعة تكون عظيمة حين يكون الميل شديداً . وعندما يصبح الميل صفراً ، يغدو المخطط مستقيماً موازياً محور الزمن ، وتصبح السرعة معدومة ، والنقطة ثابتة .

هذا واذا رسمنا الخط البياني الممثل لتغيرات السرعة العددية v بدلالة الزمن ، وهو ما نسميه بمخطط السرع ، لوجدنا ان هذا المخطط هو مستقيم مواز لمحور الزمن .

تمرين : المسافة بين بلدتين A و B تساوي ١٤٥ كم . مرت دراجة من بلدة

A في الساعة الثامنة وهي تسير بسرعة ثابتة قدرها ٣٥ كم/سا متجهة نحو B . وبعد ثلث ساعة مرت دراجة ثانية من B ، وهي تسير بسرعة ثابتة ايضاً قدرها ١٥ كم/سا متجهة نحو A . عين زمن ومكان تلاقي الدراجتين .

الحل : لنختر اتجاهاً موجباً على الطريق ، وليكن الاتجاه من A الى B ، ومبدأ للفصول ، وليكن A ، ومبدأ للزمن ، وليكن الساعة الثامنة . ولنعتبر الكيلومتر واحدة للاطوال والساعة واحدة للزمن . ولنرمز للسيارة الاولى بـ M وللثانية بـ N .

نرى ان حركة M مباشرة ، فسرعتها $v = 35$ ، وان حركة N رجعية ، فسرعتها $v = -15$. وبما ان المعادلة الزمنية للحركة المنتظمة هي :

$$s = v\,t + s_0$$

فمعادلة M تكون $s = 35\,t$ (لان $s_0 = 0$)

اما معادلة N فتكتب $s = -15\,t + s_0$. ولتعيين s_0 نلاحظ ان الدراجة N مرت في الزمن $t = \frac{1}{3}$ من الموضع B (145) ، فيكون :

$145 = -15 \times \frac{1}{3} + s_0$ اذن يكون $s_0 = 150$. فمعادلة حركة N تصبح اذن $s = -15\,t + 150$

ولتعيين زمن ومكان تلاقي الدراجتين يكفي حل مجموعة معادلتي الحركتين :

$$s = 35\,t \qquad \text{و} \qquad s = -15\,t + 150$$

او ايجاد احداثيي نقطة تقاطع المستقيمين الممثلين لمخططي الحركتين . فنجد :

$$t = 3 \qquad s = 105$$

فالدراجتان تلتقيان بعد مرور الاولى من A بثلاث ساعات وبعد مرور الثانية من B بساعتين و ٤٠ دقيقة . ويتم اللقاء في موضع يبعد عن A بقدر ١٠٥ كم ، وعن B بقدر ٤٠ كم .

الحركة المتغيرة :

١٥١ — تعريف : يكون لنقطة مادية حركة متغيرة على مسار ما ، اذا قطعت النقطة على مسارها الموجّه مسافات جبرية غير متساوية بفترات زمنية متساوية. أو اذا كانت المسافات المقطوعة غير متناسبة مع الازمنة الموافقة لقطعها.

١٥٢ — السرعة العددية : لتكن M نقطة مادية تتحرك على مسارها الموجه بحركة متغيرة معادلتها الزمنية $s = s(t)$. لنفرض ان النقطة كانت في لحظة ما t في موضع M فصله s ، ثم اصبحت في لحظة ثانية $t_1 = t + \Delta t$ في موضع M_1 فصله $s_1 = s + \Delta s$. فحركة M تكون متغيرة ، اذا كانت النسبة بين المسافة الجبرية المقطوعة ، وهي $\overset{\frown}{MM_1} = s_1 - s = \Delta s$ ، والفترة الزمنية الموافقة لقطعها ، وهي $t_1 - t = \Delta t$ غير ثابتة اثناء الحركة . نسمي هذه النسبة بالسرعة العددية الوسطى في الفترة الزمنية Δt ، ونرمز لها بـ v_m ، ويكون :

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad (7)$$

فالسرعة الوسطى في الفترة الزمنية Δt ، هي سرعة متحرك وهمي يسير على مسار M بحركة منتظمة ويقطع المسافة الجبرية Δs في الفترة الزمنية Δt .

ان السرعة الوسطى لا تعين السرعة الآنية للمتحرك (اي السرعة في آن ما) بل تعين معدل سرعته في فترة زمنية محدودة . وتتقارب هذه السرعة من السرعة الآنية ، بقدر ما تكون الفترة الزمنية Δt صغيرة .

فاذا تناهى Δt الى الصفر ، آلت السرعة الوسطى v_m الى السرعة الآنية v في اللحظة t ، وآلت النسبة $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ الى مشتق s بالنسبة للزمن . اذن يكون :

$$v = s'(t) \qquad (8)$$

فالسرعة العددية الآنية لمتحرك تساوي مشتق فصل المتحرك (على مساره) بالنسبة للزمن .

١٥٣ — دراسة الحركة : لدراسة الحركة المتغيرة المعنية بالمعادلة $s = s(t)$

١ـ نبحث عن اتجاه سير المتحرك على مساره. ويعرف ذلك من اتجاه تغير التابع $s(t)$ ، او من اشارة مشتقة $s'(t)$. اي من اشارة السرعة العددية v .

فاذا كان $v > 0$ ، فالتابع s متزايد والحركة مباشرة .

واذا كان $v < 0$ فالتابع s مناقص والحركة رجعية .

٢ـ نبحث فيما اذا كانت الحركة آخذة بالتسارع او بالتباطؤ . ويعرف ذلك من تزايد او تناقص القيمة المطلقة للسرعة . فان زادت القيمة المطلقة للسرعة فالحركة متسارعة ، وان نقصت فالحركة متباطئة .

واذا رسمنا مخطط الفصول ، وهو المنحني المعين بالمعادلة $s = s(t)$ ، فميل المماس في نقطة مامن هذا المنحني يعين مقدار السرعة واشارتها في الزمن الموافق للنقطة المفروضة على المخطط (لأن ميل المماس يساوي s' او v) .

ونرى ان الحركة تكون في لحظة ما t مباشرة او رجعية اذا كان ميل المماس في النقطة من المخطط الموافقة للزمن t ، موجباً او سالباً . او اذا كانت الزاوية الحادة الكائنة بين المماس في تلك النقطة ومحور الزمن موجبة أو سالبة .

وعندما ينعدم ميل المماس في لحظة t_1 ، بأن يصبح المماس موازياً لمحور الزمن ، تنعدم السرعة في تلك اللحظة .

ونلاحظ انه عندما يتغير اتجاه سير المتحرك على مساره في لحظة ما ، يتغير اتجاه تغير التابع s ، ويبلغ التابع في تلك اللحظة نهاية عظمى او صغرى ، وتغدو النقطة الموافقة من المخطط ذروة او قاعاً .

هذا ونلاحظ ايضاً ان الحركة تكون في مجال ما ، متسارعة او متباطئة ، اذا كانت القيمة المطلقة لميل المماس على المخطط ، في المجال المفروض ، آخذة في التزايد او في التناقص .

وعندما تتغير طبيعة الحركة في لحظة t ، من تسارع الى تباطؤ او بالعكس ، يتغير اتجاه تحول القيمة المطلقة للسرعة ، او القيمة المطلقة للميل من تزايد الى تناقص او بالعكس . وتبلغ القيمة المطلقة للسرعة في تلك اللحظة نهاية

عظمى او صغرى . وتصبح النقطة الموافقة من المخطط نقطة انعطاف .

ولو رسمنا مخطط السرع (وهو منحن أو مستقيم غير مواز لمحور الزمن) فان هذا المخطط يساعد في درس الحركة . فيتبين من قيم السرع ، في مجال ما ، اتجاه الحركة (مباشرة او رجعية) ونوعها (متسارعة أو متباطئة) .

مثال : ادرس الحركة المستقيمة المعينة بالمعادلة الزمنية $x = (t-1)^3$

الحل : لتحسب السرعة العددية في اللحظة t : $v = x' = 3(t-1)^2$

بما ان $v \geqslant 0$ فالقيمة المطلقة للسرعة تساوي السرعة نفسها .

ونرى ان التابع $v(t)$ يكون متزايداً أو متناقصاً حسبما يكون $(t-1)$ موجباً أو سالباً ، او حسبما يكون t اكبر من 1 أو اصغر من 1 .

فمن جدول تغيرات التابع $x(t)$ ، وهو :

t	$-\infty$		1		$+\infty$
v	$+\infty$	$+ \searrow$	0	$+ \nearrow$	$+\infty$
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

أو من مخطط الفصول ، أو من مخططي الفصول والسرع معاً ، نستخلص الدراسة الآتية :

١ ـ عندما يزداد الزمن من $t = -\infty$ الى $t = 1$ ، يأتي المتحرك من موضع بعيد على مساره ($x = -\infty$) بسرعة عظيمة جداً ، فيسير بحركة مباشرة ومتباطئة حتى يصل الى مبدأ الفصول o بدون سرعة (ميل المماس يأخذ في التناقص من اللانهاية الى الصفر ، او الزاوية بين المماس والمحور ot تأخذ في التناقص من قيمة قريبة من القائمة الى الصفر) .

٢ ـ وعندما يزداد الزمن من $t = 1$ الى $t = \infty$ تبدأ النقطة بالسير بعد وقوفها في o ، وتكون حركتها مباشرة ومتسارعة (بعد ان كانت مباشرة ومتباطئة).

نلاحظ ان النقطة من المخطط الموافقة للقيمة $t = 1$ والتي تتحول فيها الحركة من متباطئة الى متسارعة هي نقطة انعطاف للمخطط .

تمارين

١ — M و N نقطتان تتحركان على محور ox بحركتين معينتين بالمعادلتين:
$x = t(t+3)^2$ و $x = 3t + t^3$. ارسم مخططي الحركتين .
بين كيف تتحرك النقطتان حين يزداد الزمن من $t = -\infty$ الى $t = +\infty$.
عين زمن ومكان التقائهما .

٢ — نقطة تتحرك في المستوي xoy على منحن معادلته $y = x^2 - 4x + 4$
بين كيف تتحرك النقطة على مسارها اذا فرض ان معادلة حركة مسقطها على على ox هي $x = 2 + \sin t$.

٣ — نقطة تتحرك في المستوى xoy بحيث ان مسقطيها على ox و oy يتحركان وفق المعادلتين $x = t - 2$ و $y = t^2 - 3t + 2$
ارسم مسار النقطة وبين كيف تتنقل على مسارها حين يتغير الزمن .

٤ — M نقطة تتحرك على دائرة مثلثية مفروضة . A نقطة ثابتة من محيط هذه الدائرة نعتبرها مبدأ لقياس الفصول المنحنية على الدائرة . بين كيف تتنقل M على مسارها اذا فرض ان قانون حركتها هو $s = \cos t$.

٥ — M نقطة تتحرك على محور ox بحركة منتظمة. مرت في اللحظة $t = -3$ من موضع فصله $x = -2$ ، ثم وصلت في اللحظة $t = 1$ الى موضع فصله $x = -4$. N نقطة ثانية تتحرك على المحور نفسه بحركة رجعية منتظمة. مرت من مبدأ الفصول في اللحظة $t = -1$ بسرعة قيمتها المطلقة 5 . عين زمن ومكان تلاقي النقطتين (جبرياً وبيانياً) .

٦ — مرت سيارة من بلدة A في الساعة ٩ وسارت في طريق بسرعة ٤٥ كم/سا. وبعد ساعة ونصف مرت سيارة ثانية من A وسارت في الطريق ذاتها بسرعة ٦٥ كم/سا متجهة نحو السيارة الاول لتلحق بها . عين زمن ومكان تلاقي السيارتين .

الفصل الثاني

التسارع العددي

الحركة المتغيرة بانتظام :

١٥٤ ـ تعريف : يكون لنقطة مادية حركة متغيرة بانتظام على مسار موجّه ما (مستقيم أو منحن) اذا كانت سرعتها متغيرة ، وكانت مقادير تغيراتها متناسبة مع الفترات الزمنية الموافقة لها .

١٥٥ ـ التسارع العددي : لتكن M نقطة مادية تتحرك على مسارها الموجّه بحركة متغيرة بانتظام . لنفرض ان النقطة كانت في لحظة ما في موضع M_1 بسرعة v_1 ، ثم اصبحت في لحظة ما t في موضع M بسرعة v . فعندما يزاد الزمن من t_1 الى t تتغير السرعة ويكون تزايدها (وهو تزايد جبري) في الفترة الزمنية $t_1 - t$ هو $v - v_1$. فحركة M تكون متغيرة بانتظام ، اذا كانت النسبة بين تزايد السرعة ، وهو $v - v_1$ ، والفترة الزمنية الموافقة لهذا التزايد ، وهو $t_1 - t$ ، ثابتة . نسمي هذه النسبة الثابتة بالتسارع العددي للنقطة . ونرمز له بـ γ ، فيكون :

$$\frac{v - v_1}{t - t_1} = \gamma \qquad (9)$$

ونرى ان هذا التسارع هو مقدار تزايد السرعة في واحدة الزمن .

١٥٦ ـ واحدة التسارع : ان واحدة التساع هي تسارع متحرك يسير بحركة متغيرة بانتظام بحيث تزداد سرعته بقدر واحدة السرعة في مدة قدرها واحدة الزمن .

فاذا اعتبرنا المتر مثلا واحدة للطول ، والثانية واحدة للزمن ، فواحدة السرعة تكون المتر في الثانية . اما واحدة التسارع فتكون المتر في الثانية ، في الثانية . وهي تسارع متحرك يسير بحركة متغيرة بانتظام بحيث تزداد سرعته في الثانية بقدر متر واحد في الثانية .

ويقال مثلا ان التسارع الارضي يساوي (تقريباً) ٩٨١ سنتمتراً في الثانية ، في الثانية . ويكتب ٩٨١ سم/ثا/ثا او ٩٨١ سم/ثا٢ .

تمرين : قطار يسير بحركة متغيرة بانتظام . كانت سرعته ٤٨ كم/سا في الساعة ٦ ، ثم اصبحت ١٢٠ كم/سا في الساعة ١١ . عين تسارعه العددي باعتبار المتر واحدة للطول ، والدقيقة واحدة للزمن .

الحل : اذا اعتبرنا الكيلومتر واحدة للطول والساعة واحدة للزمن ، يكون الكيلومتر في الساعة واحدة للسرعة ، والكيلومتر في الساعة ، في الساعة واحدة للتسارع . فتسارع القطار يكون :

$$\frac{١٢٠ - ٤٨}{١١ - ٦} = \frac{٧٢}{٥} = ١٤\frac{٢}{٥} \text{ كم/سا}^٢$$

أما اذا اعتبرنا المتر واحدة للطول ، والدقيقة واحدة للزمن يصبح المتر في الدقيقة واحدة للسرعة ، والمتر في الدقيقة ، في الدقيقة واحدة للتسارع . فتسارع القطار يكون

$$\frac{١٠٠٠ \times ٧٢}{٥ \times ٣٦٠٠} = ٤ \text{ م/ثا}^٢$$

١٥٧ - معادلة الحركة : ان المعادلة (9) التي وجدناها سابقاً ، والتي تكتب :

$$v - v_1 = \gamma (t - t_1) \qquad (10)$$

تفيد في تعيين السرعة العددية v بدلالة الزمن t .

نستنتج من هذه المعادلة ان السرعة تابع للزمن من الدرجة الاولى .

ونلاحظ ان عكس هذه النتيجة صحيح ، بمعنى ان كل حركة تكون سرعتها تابعاً خطياً للزمن (اي من الدرجة الأولى) :

$$v = at + b \qquad (11)$$

هي حركة متغيرة بانتظام . ويتضح ذلك اذا ادركنا ان كل تزايد للزمن ، وليكن Δt ، يوافقه تزايد للسرعة ، وليكن Δv ، وان $\Delta v = a \cdot \Delta t$. اي ان تزايدات السرعة متناسبة مع التزايدات الموافقة للزمن .

هذا واذا فرضنا ان سرعة البدء (اي السرعة في لحظة البدء $t = 0$) هي v_0 ، فالمعادلة (10) تصبح :

$$v = \gamma t + v_0 \qquad (12)$$

وبما ان الفصل s هو التابع الاصلي للسرعة v ، يكون :

$$s = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + c$$

c عدد ثابت ، ويتعين حين يعلم موضع المتحرك في لحظة ما .

فاذا فرضنا ان المتحرك كان في لحظة البدء في موضع فصله s_0 يكون :

$$s = \frac{1}{2} \gamma t^2 + v_0 t + s_0 \qquad (13)$$

وهذه المعادلة هي المعادلة الزمنية للحركة المتغيرة بانتظام .

ونستنتج من هذه المعادلة ان الفصل $s(t)$ هو تابع من الدرجة الثانية .

ونلاحظ ان عكس هذه النتيجة صحيح . بمعنى ان كل حركة معينة بالمعادلة :

$$s = at^2 + bt + c \qquad (14)$$

هي حركة متغيرة بانتظام ، لان السرعة العددية لهذه الحركة ، وهي : $v = s' = 2at + b$ هي تابع للزمن من الدرجة الاولى .

مثال ١ : اوجد المعادلة الزمنية لحركة متغيرة بانتظام اذا علم ان التسارع العددي ٨٠ ، وسرعة البدء (ـ٥) ، والفصل في لحظة البدء (ـ٣).

الحل : بما ان $\gamma = 8$ و $v_0 = -5$ و $s_0 = -3$

فاذا عوضنا هـذه القيم في معادلة الحركة $s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$

نحصل على المعادلة المطلوبة : $s = 4t^2 - 5t - 3$.

مثال ٢ : اوجد المعادلة الزمنية لحركة مستقيمة متغيرة بانتظام معينـة بالشروط التالية :

من اجل $t = -1$ يكون $x = 3$

ومن اجل $t = 3$ يكون $x = 0$ و $v = -6$

الحل : المعادلة العامة للحركة المتغيرة بانتظام هي $x = at^2 + bt + c$

من الشرط الاول $t = -1$ ، $x = 3$ نجد $3 = a - b + c$

ومن الشرط الثاني $t = 3$ ، $x = 0$ نجد $0 = 9a + 3b + c$

ومن أجل الشرط الثالث $t = 3$ ، $v = -6$ نحسب السرعة :

$v = 2at + b$. وبعد التعويض نجد $-6 = 6a + c$

ومن المعادلات الثلاث التي حصلنا عليها نجد :

$$a = -1 \qquad b = 0 \qquad c = 9$$

فالمعادلة المطلوبة تكون $x = -t^2 + 9$.

ونلاحظ في هذه المعادلة ان $\gamma = -2$ و $v_0 = 0$ و $x_0 = -9$.

١٥٨ - مخططات الحركة : مخطط الفصول قطـع مكافىء معادلته

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$$

ومخطط السرع مستقيم معادلته $v = \gamma t + v_0$ (يعين ميله قيمة التسارع العددي)

ومخطط التسارعات مستقيم يوازي محور الزمن .

١٥٩ - دراسة الحركة : نعلم ان المعادلة الزمنية للحركة المتغيرة بانتظام هي :

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$$

لدرس هذه الحركة نفرض $\gamma > 0$ (لا تختلف الدراسة حين يكون $\gamma < 0$) ،

فالسرعة $v = \gamma t + v_0$ متزايدة مع الزمن . نميز حالتين حسب اشارة v_0 :

(١) $v_0 \geqslant 0$ السرعة في بدء الزمن موجبة او معدومة ، فتزداد مع الزمن وتبقى موجبة أبداً . فالمتحرك يسير باتجاه واحد بحركة مباشرة .

وبما ان السرعة موجبة ومتزايدة ، فالحركة متسارعة .

اذن حين يكون لسرعة البدء والتسارع العددي اشارة واحدة، فالمتحرك يسير باتجاه واحد وبحركة متسارعة .

(٢) $v_0 < 0$ تبدأ الحركة من موضع البدء M_0 بسرعة سالبة ، فالحركة رجعية . ثم تزداد القيمة الجبرية للسرعة ، لكن قيمتها المطلقة تتناقص حتى تنعدم . فالحركة متباطئة .

تنعدم السرعة في اللحظة $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$ في الموضع M_1 $\left(s_1 = s_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}\right)$ وهو أبعد نقطة يبلغها المتحرك في حركته الرجعية المتباطئة .

وبعد هذه اللحظة تزداد السرعة ، فتصبح موجبة ، فالمتحرك يسير بحركة مباشرة على مساره . وبما ان السرعة متزايدة وموجبة ، فالحركة متسارعة .

اذن حين يكون v_0 و γ من اشارتين مختلفتين ، فالمتحرك يسير من M_0 بحركة متباطئة الى ان تنعدم سرعته في اللحظة t_1 و في الموضع M_1 . وبعد هذه اللحظة يتغير اتجاه سير المتحرك ، فيعود من حيث أتى بحركة متسارعة ويتباعد بلا تناه على مساره .

ملاحظة : لقد بينا دراسة الحركة المتغيرة بانتظام بطريقة جبرية . ويمكن دراستها بطريقة بيانية اعتماداً على مخططات الحركة .

١٦٠ – العلاقة بين المسافة والسرعة : اذا حذفنا t بين العلاقتين (12) و (13) نحصل على علاقة (مستقلة عن الزمن) بين السرعة v والفصل s :

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \gamma(s - s_0) \qquad (15)$$

نرى في هذه المعادلة انه اذا اعطيت s قيمة معينة نتج لـ v قيمتان متناظرتان . فعندما يمر المتحرك من نقطة معينة على المسار باتجاهين متعاكسين ، يكون لسرعته في تلك النقطة قيمتان متناظرتان .

ونلاحظ ان العلاقة (15) هي المعادلة التي تنتج من معادلة القوى الحية (كما سنرى ذلك في علم التحريك) بعد تقسيم طرفيها على كتلة النقطة .

١٦١ ـ حالة خاصة : اذا اعتبرنا لحظة البدء اللحظة t_1 التي تنعدم فيها السرعة ، ومبدأ الفصول الموضع M_1 الموافق لهذه اللحظة ، يكون :

$$v_0 = 0 \quad \text{و} \quad s_0 = 0$$

وتصبح المعادلات (12) و (13) و (15) :

$$v = \gamma t \qquad s = \frac{1}{2}\gamma t^2 \qquad v^2 = 2\gamma s$$

وينتج من هذه المعادلات :

(١) ان s و γ من اشارة واحدة .

(٢) ان المتحرك يمر من أية نقطة P من مساره ، مرتين في لحظتين متناظرتين . مرة قبل لحظة البدء ، ومرة بعدها . ويستغرق زمناً واحداً للذهاب من M_1 الى P أو من P الى M_1 . ويكون للسرعة في هاتين اللحظتين قيمة مطلقة واحدة .

(٣) ان السرعة متناسبة مع مدة الحركة (اعتباراً من لحظة البدء) ، وان المسافة المقطوعة متناسبة مع مربع هذه المدة .

١٦٢ ـ تطبيق : حركة نقطة مادية في الفراغ : لقد دلت التجربة على انه اذا تركت نقطة مادية في الفراغ بدون سرعة ، أو قذفت باتجاه شاقولي ما ، صاعد أو هابط ، يكون للنقطة حركة مستقيمة متغيرة بانتظام . فتسارع

النقطة ، ونرمز اليه بـ g ، نسميه بالثقالة ، ويكون ثابتاً (بوجه التقريب) ، وتقدر قيمته التقريبية بـ ٩٨١ سم /ثا٢

واذا وجهنا مسار النقطة واعتبرنا الشاقول الصاعد هو الاتجاه الموجب للمسار ، فالثقالة (الناشئة من جذب الارض للاجسام) تكون سالبة . فالحركة تكون متسارعة حين تترك النقطة بدون سرعة أو تقذف باتجاه شاقولي هابط ، ومتباطئة حين تقذف الى الاعلى .

الحركة المتغيرة :

١٦٣ – تعريف : يكون لنقطة مادية حركة متغيرة ما (غير منتظمة ولا متغيرة بانتظام) على مسار مستقيم او منحن ، اذا كانت مقادير تغيرات السرعة غير متناسبة مع الفترات الزمنية الموافقة لهذه التغيرات .

١٦٤ – التسارع العددي : لتكن M نقطة مادية تتحرك على مسارها الموجّه بحركة متغيرة ما (فصلها s تابع للزمن ، من غير الدرجة الاولى أو الثانية) .

لنفرض ان سرعة النقطة كانت في لحظة ما t هي v ، ثم أصبحت في لحظة ثانية $t_1 = t + \Delta t$ هي $v_1 = v + \Delta v$. فحركة M تكون متغيرة بوجه عام ، اذا كانت النسبة بين تزايد السرعة ، وهو $v_1 - v = \Delta v$ والفترة الزمنية الموافقة لهذا التزايد ، وهي $t_1 - t = \Delta t$ ، غير ثابتة اثناء الحركة . نسمي هذه النسبة بالتسارع العددي الوسطي في الفترة الزمنية Δt ، ونرمز له بـ γ_m ، ويكون :

$$\gamma_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (16)$$

فالتسارع العددي الوسطي في الفترة الزمنية Δt ، هو تسارع متحرك وهمي يسير على مسار M بحركة متغيرة بانتظام ، فتتغير سرعته بقدر Δv في فترة زمنية قدرها Δt .

ان التسارع الوسطي لا يعين التسارع الآني (اي التسارع في آن ما) بل يعين معدل التسارع في فترة زمنية محدودة . ويتقارب هـذا التسارع من التسارع الآني بقدر ما تكون الفترة الزمنية صغيرة .

فاذا تناهى Δt الى الصفر ، تنـاهى التسارع الوسطي γ_m الى التسارع الآني γ في اللحظة t ، وتناهت النسبة $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ الى مشتق v بالنسبة للزمن . اذن يكون :

$$\gamma = v'(t) \qquad (17)$$

فالتسارع العددي الآني يساوي اذن مشتق السرعة العددية بالنسبة للزمن .

١٦٥ – نتيجة : لقد رأينا ان السرعة العددية تساوي مشتق الفصل بالنسبة للزمن $v = s'(t)$. فالتسارع الآني يساوي اذن المشتق الثاني للفصل :

$$\gamma = v' = s''(t)$$

١٦٦ – دراسة الحركة : رأينا ان اتجاه الحركة يتعين من اشارة السرعة v . ورأينا ايضاً ان نوعها يتعين من اتجاه $|v|$. ونعلم ان التابعين $|v|$ و v^2 يتغيران باتجاه واحد . فاتجاه تغير $|v|$ يتعين اذن من اشارة مشتق v^2 بالنسبة للزمن ، وهو $2v.v'$ او $2v.\gamma$. فالحركة تكون متسارعة او متباطئة حسبما يكون الجداء $v.\gamma$ موجباً او سالباً .

والخلاصة ، ان اشارة v تعين اتجاه الحركة (مباشرة او رجعية) ، واشارة $v.\gamma$ تعين نوعها (متسارعة او متباطئة) .

مثال : لندرس الحركة المستقيمة المعينة بالمعادلة $x = (t-5)(t+1)^2$

لذلك نحسب السرعة $v = x' = 3(t+1)(t-3)$

ثم نحسب التسارع $\gamma = v' = 6(t-1)$

ثم نضع جدولاً نبين فيه اشارات v و $v.\gamma$ (فيعرف اتجاه الحركة ونوعها) :

t	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
v		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
γ		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$v.\gamma$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
x	$-\infty$	↗	0	↘	-16	↘	-32	↗	$+\infty$

نستخلص من هذا الجدول ، او من مخططات الحركة ، ما يلي :

تأتي النقطة منذ زمن بعيد ($t = -\infty$) من مواضع بعيدة على مسارها ($x = -\infty$) وتسير بحركة مباشرة ($v > 0$) ومتباطئة ($v.\gamma < 0$) حتى تنعدم سرعتها في اللحظة $t = -1$ في مبدإ الفصول o .

وعندما يزداد الزمن من $t = -1$ الى $t = 1$ ، تصبح الحركة رجعية ($v < 0$) ومتسارعة ($v.\gamma > 0$) ، من المبدأ o الى موضع فصله (-16) .

ثم عندما يزداد الزمن من $t = 1$ الى $t = 3$ تتابع النقطة حركتها الرجعية ($v < 0$) ، ولكن بصورة متباطئة ($v.\gamma < 0$) حتى تنعدم سرعتها في اللحظة $t = 3$ في موضع فصله (-32) .

وبعد اللحظة $t = 3$ تغدو الحركة مباشرة ($v > 0$) ومتسارعة ($v.\gamma > 0$) فتبتعد النقطة على مسارها بلا تناه .

❀ ❀ ❀

تمارين

١ - ادرس الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام المعينة بالشروط الآتية :
من أجل $t = o$ يكون $x = 4$ و $v = 3$ و $\gamma = -2$

٢ - اوجد المعادلة الزمنية لحركة منحنية متغيرة بانتظام معينة بالشروط الآتية :
من أجل $t = o$ يكون $s = -1$
ومن اجل $t = 1$ يكون $s = o$ و $v = 2$

٣ - ادرس الحركة المتغيرة بانتظام اذا علم ان مخطط الفصول يمر من النقط $(o, 2)$ و $(-1, o)$ و $(1, 6)$ ، وان المسار هو المستقيم $x - y = 1$ ، وان الاتجاه الموجب للمسار هو الاتجاه نحو الاعلى ، وان مبدأ الفصول على المسار هو نقطة تقاطع المسار مع oy .

٤ - ادرس (بطريقة جبرية ثم بيانية) الحركة المستقيمة المعينة بالمعادلة :

$$x = 3t^4 - 4t^3$$

٥ - ادرس حركة نقطة سرعتها معينة بالمعادلة $v = 3(t-1)^2$ اذا فرض ان النقطة كانت في لحظة البدء في مبدأ الفصول .

٦ - نقطة تسير على محور ox بحركة تسارعها العددي $\gamma = 6t - 2$. اوجد سرعة النقطة وفصلها (بدلالة الزمن) اذا فرض ان $v_o = 1$ و $x_o = -1$.

٧ - المسافة بين بلدتين A و B هي ٢ كم . يقوم قطار من A بدون سرعة وبحركة متسارعة بانتظام ، فيقطع مسافة ٤٠٠ م حين تصبح سرعته ٦٠ كم/سا ، ثم تغدو حركته منتظمة . وفي المرحلة الاخيرة من رحلته تصبح حركته متباطئة بانتظام ، فيصل الى B بدون سرعة بعد ان يكون قد قطع في هذه المرحلة ٦٠٠ م .

اكتب المعادلات الزمنية الموافقة للمراحل الثلاث وارسم مخططات الحركة .

الفصل الثالث

الدراسة الشعاعية للحركة

تمهيد : لقد بينا فيما سبق حين بحثنا في الحركات المنتظمة والمتغيرة بوجه عام ، ان تعاريف هذه الحركات وخواصها لا تتقيد بشكل المسار سواء أكان مستقيماً او منحنياً . واعتمدنا في دراستنا على تغيرات فصل المتحرك وسرعته العددية وتسارعه العددي دون تمييز بين أشكال مساراته . فلم نميز مثلاً بين الحركة المنتظمة على دائرة والحركة المنتظمة على مستقيم طالما أن لكل منهما سرعة عددية ثابتة او معادلة زمنية واحدة .

سنبين في بحثنا الآن الفوارق بين الحركات ذوات المعادلات الزمنية الواحدة والمسارات المختلفة .

شعاع السرعة :

تمهيد : لقد بينا في الفصل الاول كيف ان السرعة تتعين بقيمة عددية دعيت السرعة العددية . لكن للسرعة ، فضلاً عن قيمتها العددية ، عناصر اخرى مماثلة لعناصر الشعاع . سنرى الآن كيف نمثل السرعة بشعاع نسميه شعاع السرعة .

١٦٧ — شعاع السرعة في الحركة المستقيمة : يمكن تمثيل سرعة نقطة تتحرك على مستقيم بشعاع محمول على المستقيم ، مبدؤه موضع النقطة في تلك اللحظة ، اتجاهه اتجاه الحركة ، قياسه القيمة المطلقة للسرعة العددية في اللحظة المفروضة . وان كانت النقطة تتحرك على محور ، وليكن ox مثلاً ، فشعاع سرعتها يقدر بعدد جبري ، هو السرعة العددية للنقطة . فاذا فرضنا ان $M(x)$ هي النقطة المفروضة ، ورمزنا بـ v لسرعتها العددية ، وبـ $\mathbf{V}$ لشعاع سرعتها ، لكان

$$\mathbf{V} = v\,\mathbf{i} = x'\,\mathbf{i} \qquad \text{و} \qquad \mathbf{oM} = x\,\mathbf{i}$$

ونرى ان $$V = \frac{dM}{dt}$$

١٦٨ - حالة خاصة : عندما تكون الحركة المستقيمة منتظمة يكون شعاع السرعة ثابتاً في طوله واتجاهه ومنحاه .

١٦٩ - شعاع السرعة في الحركة المنحنية : لتكن M نقطة تتحرك على منحن موجّه بحركة معادلتها الزمنية $s = s(t)$. لنفرض ان النقطة كانت في لحظة ما t في موضع M فصله s ، ثم اصبحت في لحظة ثانية $t_1 = t + \Delta t$ في موضع $M_1 = M + \Delta M$ ، فصله $s_1 = s + \Delta s$. فعندما يزداد الزمن من t الى t_1 تقطع النقطة على مسارها القوس $\overset{\frown}{MM_1} = \Delta s$ في الفترة الزمنية Δt .

لنتصور متحركاً وهمياً يسير على المستقيم MM_1 بحركة منتظمة ويقطع الوتر MM_1 في الفترة الزمنية Δt . فشعاع سرعة المتحرك ، وهو $\frac{MM_1}{\Delta t}$ او $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ ، نسميه بشعاع السرعة الوسطى للمتحرك M في الفترة الزمنية Δt ، ونرمز اليه بـ V_m . ويكون :

$$V_m = \frac{\Delta M}{\Delta t} \qquad (18)$$

عندما يتناهى Δt الى الصفر يتناهى شعاع السرعة الوسطى في الفترة Δt الى شعاع السرعة في اللحظة t ، ويتناهى $\frac{\Delta M}{\Delta t}$ الى المشتق $\frac{dM}{dt}$.

فاذا رمزنا بـ V لشعاع السرعة في اللحظة t لكان :

$$V = \frac{dM}{dt} \qquad (19)$$

واذا اشرنا بـ T لشعاع واحدة المماس الموجب للمسار لكان :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{dM}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \cdot T$$

وكان بالتالي $$V = s' \cdot T = v \cdot T \qquad (20)$$

اذن يمكن تمثيل سرعة M بشعاع مبدؤه M ، حامله المماس للمسار في M ، قياسه الجبري (على المماس الموجب) السرعة العددية لـ M في اللحظة t .

هذا واذا اسقطنا M على مستو ثابت او مستقيم ثابت ، ورمزنا لمسقطها بـ M_1 ولمسقط سرعتها بـ V_1 لوجدنا (بعد اسقاط العلاقة 19) :

$$V_1 = \frac{d M_1}{d t}$$

وتدل هذه العلاقة انه لو اسقطنا نقطة متحركة في الفراغ على مستو ثابت او مستقيم (او محور) ثابت ، فسرعة حركة المسقط تساوي مسقط سرعة الحركة في الفراغ .

١٧٠ - مركبات السرعة على المحاور الاحداثيـة : لنعين مركبات السرعة على المحاور الاحداثية في الحالات التالية :

(١) النقطة M معينة في الفراغ بالاحداثيات الديكارتية (x, y, z) .

نعلم ان $\mathbf{oM} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$. فسرعة M تكون :

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}'(t) = x'\,\mathbf{i} + y'\,\mathbf{j} + z'\,\mathbf{k} \qquad (21)$$

اذن مركبات السرعة على المحاور (ox, oy, oz) تكون (x', y', z') .

(٢) النقطة معينة في مستو بالاحداثيين القطبيين (r, θ) .

نعلم ان $\mathbf{oM} = r\,\mathbf{I}$. فسرعة M تكون (بند ١٠١) :

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}'(t) = r'\,\mathbf{I} + r\,\theta'\,\mathbf{J} \qquad (22)$$

اذن مركبتا السرعة على المحورين (OX , OY) هما (r', r θ') .

(٣) النقطة معينة في الفراغ بالاحداثيات الاسطوانية (r, θ, z) .

نعلم ان $\mathbf{oM} = r\,\mathbf{I} + z\,\mathbf{K}$. فسرعة M تكون (بند ١٠٣) :

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}'(t) = r'\,\mathbf{I} + r\,\theta'\,\mathbf{J} + z'\,\mathbf{K} \qquad (23)$$

ومركبات V على المحاور (oX, oY, oZ) تكون (r', r θ', z') .

شعاع التسارع :

تمهيد : لقد رأينا كيف نمثل سرعة نقطة متحركة بشعاع قياسه الجبري (على المماس الموجب للمسار) السرعة العددية للنقطة .

سنرى الآن ان تسارع النقطة يمثل ايضاً بشعاع ؛ لكن قياس هذا الشعاع لا يقدر بالتسارع العددي للنقطة فحسب ؛ بل يتوقف على شكل المسار ايضاً .

١٧١ — شعاع التسارع : لتكن M نقطة مادية تتحرك على مسار ما (منحن او مستقيم) بحركة معينة بالمعادلة $s = s(t)$. لنفرض ان النقطة كانت في لحظة ما t في موضع M وبسرعة V ، ثم اصبح في لحظة ثانية $t_1 = t + \Delta t$ في موضع $M_1 = M + \Delta M$ وبسرعة $V_1 = V + \Delta V$. فعندما يزداد الزمن من t الى t_1 يتغير شعاع السرعة من V الى V_1 . بمعنى انه حين يزداد الزمن بقدر $t_1 - t = \Delta t$ يتزايد شعاع السرعة بقدر $V_1 - V = \Delta V$. نسمي الشعاع $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ بشعاع التسارع الوسطي في الفترة الزمنية Δt ونرمز اليه بـ Γ_m

ويكون:

$$\Gamma_m = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (24)$$

عندما يتناهى Δt الى الصفر ، يتناهى شعاع التسارع الوسطي الى شعاع التسارع في اللحظة t ، ويتناهى الشعاع $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ الى مشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن . فاذا رمزنا لشعاع التسارع بـ Γ يكون :

$$\Gamma = \frac{dV}{dt} \qquad (25)$$

١٧٢ — ملاحظة : عندما تتحرك M على مسارها ترسم النقطة m ، نهاية الشعاع $om = V$ ، راسم خطى الحركة (او راسم خطى V) . ونرى ان سرعة m (في حركتها على راسم الخطى) تساوي تسارع M .

١٧٣ — التسارع المماسي والتسارع الناظمي : رأينا ان $V = pT$

فيكون $$\Gamma = \frac{d\,v}{d\,t}\,\mathbf{T} + v\,\frac{d\,\mathbf{T}}{d\,t}$$

وبما ان $$\frac{d\,\mathbf{T}}{d\,t} = \frac{d\,\mathbf{T}}{d\,s}\cdot\frac{d\,s}{d\,t} = \frac{\mathbf{N}}{\rho}\,v$$ (ρ نصف قطر التقوس في M)

فيكون $$\Gamma = \frac{d\,v}{d\,t}\,\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\,\mathbf{N} \qquad (26)$$

ان $\frac{d\,v}{d\,t}$ ، وهو التسارع العددي للنقطة M ، هو القياس الجبري لمسقط شعاع التسارع على المماس الموجب للمسار في النقطة M ، ونسميه بالتسارع المماسي، ونرمز اليه بـ Γ_T . و $\frac{v^2}{\rho}$ هو مسقط شعاع التسارع على الناظم الاساسي الموجب ونسميه بالتسارع الناظمي ، ونرمز اليه بـ Γ_N .

فلشعاع التسارع مركبتان ، احداهما مماسية ، قياسها الجبري التسارع العددي γ ، والاخرى ناظمية قياسها الجبري $\frac{v^2}{\rho}$:

$$\Gamma_T = \gamma = \frac{d\,v}{d\,t} \qquad \text{و} \qquad \Gamma_N = \frac{v^2}{\rho} \qquad (27)$$

ونلاحظ ان التسارع العددي لا يساوي قياس التسارع بل مسقط التسارع على المماس الموجب للمسار ، اي يساوي التسارع المماسي .

ونلاحظ أيضاً ان شعاع التسارع يقع في المستوي الملاصق للمنحني في النقطة M (لان مركبتيه واقعتان في هذا المستوي) ، وانه يتجه نحو المنطقة التي ينقعر نحوها المنحني في M (لان المركبة الناظمية موجبة) .

١٧٤ - **ملاحظة** : نلاحظ في مركبتي التسارع ، ان التسارع المماسي يتوقف قياسه الجبري على تزايد السرعة او تناقصها او ثبوت قيمتها ، او على تسارع الحركة او تباطئها او انتظامها . اما التسارع الناظمي فيتوقف قياسه على قياس السرعة وعلى تقوس المسار ، وبالتالي على شكل المسار .

ففي الحركة المنتظمة مثلاً ، السرعة العددية ثابتة ، والتسارع المماسي معدوم . اما التسارع الناظمي (ويساوي التسارع نفسه) فمتغير ، وهو يتغير مع التقوس فحسب (ويتناسب معه) .

وفي الحركة المتغيرة بانتظام ، التسارع المماسي ثابت . اما التسارع الناظمي فمتغير مع التقوس ايضاً (وهو تابع لشكل المسار وقياس السرعة) .

نستخلص من ذلك ان العنصر الحركي في التسارع هو التسارع المماسي الذي يعين تغيرات السرعة العددية . أما التسارع الناظمي فهو مرتبط بعنصر هندسي هو شكل المسار .

١٧٥ – الانحراف : لتكن M نقطة متحركة مسارها منحن معلوم . لنفرض ان النقطة كانت في لحظة ما t_0 في موضع M_0 واصبحت في لحظة ثانية t في موضع M . فاذا فرضنا ان احداثيات M هي توابع قابلة للنشر في جوار اللحظة t_0 ، فيكون :

$$M = M_0 + (t - t_0)\,M'_0 + \frac{(t - t_0)^2}{2}\,M''_0 + \dots$$

لتكن m النقطة المعينة بالعلاقة :

$$m = M_0 + (t - t_0)\,M'_0$$

وهي النقطة التي يصل اليها المتحرك في اللحظة t فيما لو سار في اللحظة t_0 بحركة منتظمة وبسرعة تساوي M'_0 . نسمي هذه الحركة بالحركة المنتظمة المماسة في اللحظة t لحركة M .

من العلاقتين السابقتين ينتج (بعد الطرح) :

$$M = m + \frac{(t - t_0)^2}{2}\,M''_0 + (t - t_0)^2\,\varepsilon$$

بفرض ان ε هو شعاع يتناهى الى الصفر مع $(t - t_0)$. والعلاقة الاخيرة تكتب :

$$2\,\frac{m\,M}{(t-t_0)^2} = M''_0 + 2\,\varepsilon$$

فعندما يتناهى t الى t_0 يتناهى $\frac{2\,m\,M}{(t - t_0)^2}$ الى M''_0 .

نسمي الشعاع $\overrightarrow{mM}$ بالانحراف. وهو يمثل تباعد الحركة الحقيقية للنقطة M عن الحركة المماسة في M_0. ونرى انه يمكن بوساطة الانحراف تعيين شعاع التسارع بوجه التقريب (ويكون التعيين اقرب الى الصحة بقدر مايكون $t - t_0$ صغيراً).

هذا ويتضح من العلاقة السابقة كيف ان الحركة التي لا ينطبق تسارعها على حامل سرعتها لا تكون حركة مستقيمة ، بل منحنية . والمسار منحن يتجه تقعره باتجاه التسارع . اما اذا انطبق التسارع في كل لحظة على حامل السرعة فالحركة تكون مستقيمة .

١٧٦ – ملاحظة : نرى ان دستور تايلور السابق يمكن كتابته بالشكل الآتي :

$$M = M_0 + (t - t_0)\,\mathbf{V}_0 + \frac{1}{2}(t - t_0)^2\,\Gamma_0 + \dots$$

ونلاحظ ان هذا الدستور يكتب في الحركة المستقيمة :

$$x = x_0' t + \frac{1}{2} x_0'' t^2 + \dots$$

وذلك بفرض ان المسار هو المحور ox ، ومبدأ الزمن هو اللحظة t_0 ، ومبدأ الفصول هو موضع النقطة في تلك اللحظة (وهو M_0) .

فاذا اخذنا التقريب الاول بالنسبة للزمن t (بفرض t غير متناه في الصغر) لوجدنا (بعد اهمال مافوق المرتبة الأولى لـ t) :

$$x = x'_0\, t$$

فالحركة (في الفترة الزمنية الصغيرة t) تكون منتظمة سرعتها x'_0 (سرعة النقطة في M_0) .

واذا اخذنا التقريب الثاني ، بأن نهمل ما فوق المرتبة الثانية لـ t ، لوجدنا:

$$x = x_0' t + \frac{1}{2} x_0'' t^2$$

فالحركة (في الفترة الزمنية القصيرة t) تكون متغيرة بانتظام ، سرعتها في لحظة البدء x_0' (سرعة النقطة في M_0) وتسارعها x_0'' (تسارع النقطة في M_0) .

١٧٧ – العلاقة بين عزمي السرعة والتسارع : نعلم ان عزم السرعة في نقطة ما o هو :

$$(\mathbf{V}, o) = o\mathbf{M} \wedge \mathbf{V}$$

لنأخذ المشتق بالنسبة للزمن :

$$(\mathbf{V},o)' = \mathbf{M}' \wedge \mathbf{V} + o\mathbf{M} \wedge \mathbf{V}'$$

وبما ان $\mathbf{M}' \wedge \mathbf{V} = \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = o$ فيكون :

$$(\mathbf{V}, o)' = (\mathbf{\Gamma}, o) \qquad (28)$$

أي ان المشتق بالنسبة للزمن لعزم السرعة في نقطة ما o ، يساوي عزم التسارع في تلك النقطة .

١٧٨ – مركبات التسارع على المحاور الاحداثية : تتعين هذه المركبات من العلاقات (21) و (22) و (23) بعد اشتقاقها .

ففي الاحداثيات الديكارتية نجد :

$$\mathbf{\Gamma} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} = x''\,\mathbf{i} + y''\,\mathbf{j} + z''\,\mathbf{k} \qquad (29)$$

وفي الاحداثيات القطبية المستوية نجد :

$$\mathbf{\Gamma} = (r'' - r\theta'^2)\,\mathbf{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\,\mathbf{J} \qquad (30)$$

وفي الاحداثيات الاسطوانية نجد :

$$\mathbf{\Gamma} = (r'' - r\theta'^2)\,\mathbf{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\,\mathbf{J} + z''\,\mathbf{K} \qquad (31)$$

١٧٩ – نتيجة : ينتج مما تقدم ان الحركة تتعين بالعناصر الشعاعية التالية :

شعاع الفراغ oM (ويعين وضع المتحرك في الفراغ) ، ومشتق هذا الشعاع بالنسبة للزمن (ويعين سرعة المتحرك)، والمشتق الثاني لهذا الشعاع (او مشتق شعاع السرعة) بالنسبة للزمن (ويعين تسارع المتحرك).

واذا اسقطنا هذه الاشعة على المحاور الاحداثية نحصل على العناصر التحليلية التي تعين مساقط الحركة على المحاور الاحداثية والمستويات الاحداثية .

١٨٠ - دراسة الحركة : رأينا فيما سبق ان اشارة السرعة العددية v تعين اتجاه الحركة ان كانت مباشرة او رجعية . وبما ان $v = \mathbf{V} . \mathbf{T}$ ، فنرى ان الحركة تكون مباشرة او رجعية حسبما يكون الجداء $\mathbf{V}.\mathbf{T}$ موجباً او سالباً .

ورأينا ايضاً ان اشارة الجداء $v.\gamma$ يعين نوع الحركة ان كانت متسارعة او متباطئة . وبما ان $v . \gamma = v . \Gamma_T = \mathbf{V} . \Gamma$ ، فالحركة تكون متسارعة او متباطئة حسبما يكون الجداء $\mathbf{V}.\Gamma$ موجباً او سالباً .

السرعة الزاوية والتسارع الزاوي

١٨١ - السرعة الزاوية : ليكن oX محوراً يدور في مستو موجه حول نقطة ثابتة o ، و ox محوراً ثابتاً في المستوي نعتبره المحور القطبي . ان وضع المحور oX يتعين في هذا المستوي بزاويته القطبية θ (التابعة للزمن) .

لنفرض ان المحور الدائر كان في لحظة ما t في موضع معين بالزاوية θ ، ثم اصبح في لحظة ثانية $t_1 = t + \Delta t$ في موضع معين بالزاوية $\theta_1 = \theta + \Delta\theta$. فعندما يزداد الزمن من t الى t_1 يدور المحور في الفترة الزمنية $\Delta t = t_1 - t$ بقدر الزاوية $\Delta\theta = \theta_1 - \theta$.

فالنسبة بين الزاوية التي يدورها المحور والفترة الزمنية الموافقة لدورانه ،

وهي $\frac{\theta_1 - \theta}{t_1 - t}$ او $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ، اما ان تكون ثابتة فالدوران منتظم ، او غير ثابتة فالدوران متغير .

(١) فان كانت النسبة ثابتة ، فنسميها بالسرعة الزاوية للمحور ، ونرمز لها بـ ω ، ويكون :

$$\omega = \frac{\theta_1 - \theta}{t_1 - t} \qquad (32)$$

ونرى ان السرعة الزاوية تعين مقدار دوران المحور في واحدة الزمن .

(٢) وان كانت النسبة متغيرة ، فنسميها بالسرعة الزاوية الوسطى للمحور في الفترة الزمنية Δt ، ونرمز لها بـ ω_m ، ويكون :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (33)$$

عندما يتناهى Δt الى الصفر تتناهى السرعة الزاوية الوسطى الى السرعة الزاوية في اللحظة t ، وتتناهى النسبة $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ الى المشتق $\frac{d\theta}{dt}$ ، ويكون :

$$\omega = \theta'(t) \qquad (34)$$

فالسرعة الزاوية في اللحظة t ، هي اذن سرعة دوران المحور حول o .

١٨٢ ـ واحدة السرعة الزاوية : هي سرعة محور يدور بحركة منتظمة ، بحيث تكون الزاوية التي يدورها في واحدة الزمن مساوية لواحدة الزوايا .

فاذا اعتبرنا الراديان واحدة للزوايا ، والثانية واحدة للزمن ، فواحدة السرعة الزاوية تكون الراديان في الثانية . فيقال مثلاً ان السرعة الزاوية لمحور هي ٣ راديان في الثانية .

وقد يستعاض عن السرعة الزاوية ، حين تكون هذه السرعة عظيمة ، بالتواتر . وهو عدد الدورات في واحدة الزمن ، ونرمز اليه بـ n ، فيكون :

$$\omega = 2\pi n \qquad \text{او} \qquad n = \frac{\omega}{2\pi}$$

١٨٣ – شعاع السرعة الزاوية : رأينا كيف نمثل سرعة نقطة على منحن بشعاع . ونرى الآن انه يمكن تمثيل السرعة الزاوية بشعاع ايضاً .

فاذا فرضنا ان ω هي السرعة الزاوية للمحور oX الدائر في مستو موجه حول النقطة الثابتة o ، فانه يمكن تمثيل سرعة دوران هذا المحور بشعاع $o\omega$ عمودي على مستوي الحركة ، قياسه $|\omega|$ ، ويتجه بحيث يدور OX حوله بدوران مباشر . نسمي الشعاع $o\omega$ بشعاع الدوران .

واذا فرضنا محوراً oz عمودياً على مستوي الحركة ومتجهاً بحيث يكون الدوران حوله مباشراً ، فالشعاع $o\omega$ يقدر حينئذ على هذا المحور بعدد جبري يساوي ω . اشارة ω تعين اتجاه الدوران . فالمحور oX يدور في المستوي الموجه بدوران مباشر او رجعي حسبما يكون ω موجباً او سالباً .

١٨٤ – التسارع الزاوي : نسمي مشتق السرعة الزاوية بالنسبة للزمن اي ω' ، بالتسارع الزاوي للمحور .

رأينا ان اتجاه الدوران يتعين من اشارة السرعة الزاوية ω . ونلاحظ ان تزايد او تناقص ω يعرف من اشارة التسارع الزاوي ω' ، وان تسارع او تباطؤ الدوران يعرف من اشارة الجداء $\omega' . \omega$.

السرعة السطحية والتسارع السطحي :

١٨٥ – السرعة السطحية : لتكن M نقطة مادية تتحرك في مستو موجه oxy . نعلم ان M تتعين على مسارها بالقوس $\overset{\frown}{AM}$ (A نقطة ثابتة من المسار) ، وتتعين في مستوي الحركة بالشعاع OM (o نقطة ثابتة في المستوي) .

ليكن a السطح الجبري للقطاع المعين بالشعاعين OA و OM والقوس $\overset{\frown}{AM}$ (ويقدر هذا السطح بعدد موجب او سالب حسبما يكون دوران OM حول o مباشراً او رجعياً) .

لنفرض في لحظة ما t ، المتحرك في o ، وسطح القطاع الموافق (المعين بـ OA و OM و $\widehat{AM}$) هو a ، ثم في لحظة ثانية $t_1 = t + \Delta t$ ، المتحرك في $M_1 = M + \Delta M$ ، وسطح القطاع الموافق (ويتعين بـ OA و OM_1 و $\widehat{AM_1}$)هو $a_1 = a + \Delta a$. فعندما يزداد الزمن من t الى t_1 ، يمسح الشعاع OM ، في الفترة الزمنية $t_1 - t = \Delta t$ ، القطاع المعين بـ OM و OM_1 و $\widehat{MM_1}$ والذي يقدر سطحه بـ $a_1 - a = \Delta a$.

فالنسبة بين السطح الذي يمسحه OM والفترة الزمنية الموافقة لذلك ، وهي $\frac{a_1 - a}{t_1 - t}$ او $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ ، اما ان تكون ثابتة او متغيرة .

( ) فان كانت النسبة ثابتة ، فنسميها بالسرعة السطحية للمتحرك M حول o ، ونرمز لها بـ W ، ويكون :

$$W = \frac{a_1 - a}{t_1 - t} \qquad (35)$$

وفي هذه الحالة نقول ان حركة M خاضعة لقانون السطوح .

(٢) وان كانت النسبة متغيرة ، فنسميها بالسرعة السطحية الوسطى حول o في الفترة الزمنية Δt ، ونرمز لها بـ W_m . ويكون :

$$W_m = \frac{\Delta a}{\Delta t} \qquad (36)$$

عندما يتناهى Δt الى الصفر تتناهى السرعة السطحية الوسطى الى السرعة السطحية في اللحظة t ، وتتناهى النسبة $\frac{\Delta a}{\Delta t}$ الى المشتق $\frac{da}{dt}$ ، ويكون :

$$W = a'(t) \qquad (37)$$

١٨٦ - تعيين السرعة السطحية شعاعياً: لنفرض محوراً oz عمودياً على مستوي الحركة ، ومتجهاً بحيث يكون الدوران حوله مباشراً . فاذا لاحظنا ان السطح الجبري للمثلث المعين بالشعاعين OM و Om_1 ، (بفرض $m_1 = M + dM$) او بالشعاعين OM

و Mm_1 ، يقدر بالقياس الجبري لشعاع الجداء $\frac{1}{2}\ OM \wedge d\,M$ المحمول على المحور oz ، لأدركنا ان السطح الجزئي da يقدر بالقياس الجبري للجداء $\frac{1}{2}\ OM \wedge dM$ ، وان السرعة السطحية $\frac{da}{dt}$ تقدر بالقياس الجبري للجداء $\frac{1}{2}\ OM \wedge \frac{dM}{dt}$ ، أو للجداء $\frac{1}{2}\ OM \wedge V$. وبما ان $OM \wedge V$ هو عزم V في O ، فاذا رمزنا بـ k لشعاع واحدة المحور oz لكان :

$$a'\,k = \frac{1}{2}\,(M', O)$$

او

$$Wk = \frac{1}{2}\,(V, O) \qquad (38)$$

١٨٧ – تعيين السرعة السطحية تحليلياً : اذا كانت M معينة في المستوي الموجه oxy بالاحداثيين الديكارتين (x, y) فالعلاقة (38) تكتب :

$$W = \frac{1}{2}\,(xy' - yx') \qquad (39)$$

وان كانت M معينة بالاحداثيين القطبيين (r, θ) فالعلاقة السابقة تكتب :

$$W = \frac{1}{2}\,r^2\,\theta' \qquad (40)$$

ونرى انه يمكن الوصول الى العلاقة الاخيرة مباشرة اذا لاحظنا ان سطح القطاع الجزئي da يساوي $\frac{1}{2}\,r^2 d\theta$ فيكون :

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\,\frac{d\theta}{dt}$$

١٨٨ – التسارع السطحي : نسمي مشتق السرعة السطحية بالنسبة للزمن بالتسارع السطحي .

ونرى ان التسارع السطحي يتعين شعاعياً من العلاقة (38) بعد اخذ المشتق :

$$W'\,k = \frac{1}{2}\,(\Gamma, o)$$

اما تحليلياً ،فنجد في الاحداثيات الديكارتية :

$$W' = \frac{1}{2}(x y' - y x')' = \frac{1}{2}(x y'' - y x'')$$

وفي الاحداثيات القطبية :

$$W' = \frac{1}{2}(r^2 \theta')' = r r' \theta' + \frac{1}{2} r^2 \theta''$$

١٨٩ – ملاحظة : عندما تتحرك نقطة M في مستو موجه ، نلاحظ :

(١) ان النقطة M ترسم منحنياً مستوياً بوجه عام ، وان وضعها على هذا المنحني ، يتعين بالمعادلة : $s = s(t)$

وحركتها على مسارها تتعين بالسرعة العددية :

$$v = s'(t)$$

وبالتسارع العددي $\gamma = v'(t)$

او ان النقطة M تتعين في مستوي الحركة ، بالمعادلة :

$$M = M(t)$$

وحركتها تتعين في هذا المستوي بالسرعة :

$$\mathbf{V} = \mathbf{M}'(t)$$

وبالتسارع $\Gamma = \mathbf{V}'(t)$

(٢) ان المحور oM يدور حول o ، وان وضعه في المستوي يتعين بالمعادلة:

$$\theta = \theta(t)$$

وحركته تتعين بالسرعة الزاوية :

$$\omega = \theta'(t)$$

وبالتسارع الزاوي $\omega' = \omega'(t)$

(٣) ان الشعاع oM يمسح قطاعاً ، وان سطح هذا القطاع يتعين بالمعادلة

$$a = a(t)$$

وحركة هذا السطح (او تغيراته) تتعين بالسرعة السطحية :

$$w = a'(t)$$

وبالتسارع السطحي $w' = w'(t)$

تمارين

١ - نقطة تتحرك في المستوي xoy ، احداثياها :

$$x = t + 1 \qquad y = t^2 + 2t$$

عين مسار النقطة ، وراسم الخطى ، ثم ادرس الحركة .

٢ - M نقطة تتحرك في المستوي xoy ، مسقطاها A و B على المحورين يتعينان بالعلاقتين :

$$x = \frac{1}{1 + t^2} \qquad y = \frac{t}{1 + t^2}$$

ادرس حركة كل من A و B وارسم مخططي الفصول . ثم ادرس حركة M.

٣ - M نقطة تتعين في المستوى xoy بالمعادلتين :

$$x = 3 \cos 2t \qquad y = 4 \cos (2t - \varphi) \qquad (\varphi \text{ زاوية ثابتة})$$

عين ، بحسب القيم المختلفة للزاوية φ ، مسارات M . ثم ادرس الحركة .

٤ - M نقطة تتحرك في الفراغ ، تسارعها $\Gamma = -gk$ (k شعاع واحدة المحور oz و g مقدار موجب ثابت) . في لحظة البدء M_0 في o ، وسرعتها V_0 في المستوي xoz وتصنع مع ox زاوية α .

عين مسار M . وادرس الحركة . ثم ناقش بحسب قيم α $(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2})$.

٥ - ادرس حركة نقطة اذا علم ان راسم الخطى هو دائرة مارة من القطب وان سرعتها متناسبة مع الزمن .

٦ - نقطة ترسم القطع المكافىء $r\cos^2 \frac{\theta}{2} = a$ بسرعة متناسبة مع نصف القطر الشعاعي r . ادرس الحركة . احسب التسارعين المماسي والناظمي .

٧ - M نقطة ترسم القطع المكافىء $y^2 = 2px$. عين راسم الخطى وادرس حركة M اذا علم ان حركة مسقطها على oy معينة بالمعادلة $y = p \cos \omega t$. (p و ω ثابتان موجبان) .

الفصل الرابع

الصفات المميزة لبعض الحركات

تمهيد : لقد رأينا كيف نسمي الحركات بحسب اشكال المسارات ، أو بحسب قوانين الحركة (مهما كان شكل المسار) . سنذكر الان الصفات المميزة لبعض الحركات الشهيرة .

الحركة المنتظمة :

١٩٠ – صفاتها المميزة : لقد رأينا ان الحركة تكون منتظمة اذا كانت المسافات الجبرية التي يقطعها المتحرك على مساره الموجّه ، متناسبة مع الفترات الزمنية الموافقة لقطعها .

ورأينا في الحركة المنتظمة الخواص التالية :

(١) الفصل s (للمتحرك على مساره الموجّه) تابع خطي للزمن :

$$s = v.t + s_0$$

والمخطط مستقيم (لايوازي محور الزمن ot) .

(٢) السرعة العددية v ثابتة . فالمتحرك يسير باتجاه واحد على مساره.

وشعاع السرعة $\mathbf{V}$ ثابت في القياس . فراسم الخطى منحن مرسوم على كرة.

(٣) التسارع العددي γ يساوي الصفر . فالتسارع المماسي يساوي الصفر ، والتسارع الناظمي ينطبق على التسارع نفسه .

هذا ونلاحظ ان هذه الخواص هي صفات مميزة للحركة المنتظمة :

فكل حركة يكون فيها الفصل تابعاً خطياً للزمن ، او تكون السرعة العددية ثابتة ، او يكون التسارع العددي صفراً (او التسارع ناظمياً) ، هي حركة منتظمة .

الحركة المتغيرة بانتظام :

١٩١— صفاتها المميزة: لقد رأينا ان الحركة تكون متغيرة بانتظام اذا كانت مقادير تغيرات السرعة العددية متناسبة مع الفترات الزمنية الموافقة لهذه التغيرات.

ورأينا في الحركة المتغيرة بانتظام الخواص التالية :

(١) الفصل s تابع للزمن من الدرجة الثانية :

$$s = \frac{1}{2}\gamma t^2 + v_0 t + s_0$$

فمخطط الفصول قطع مكافىء .

(٢) السرعة العددية v تابع خطي للزمن :

$$v = \gamma t + v_0$$

ومخطط السرع مستقيم (لايوازي محور الزمن ot) .

(٣) التسارع العددي ثابت . فالتسارع المماسي ثابت .

ونلاحظ ان هذه الخواص هي صفات مميزة للحركة المتغيرة بانتظام :

فكل حركة يكون فيها الفصل تابعاً للزمن من الدرجة الثانية ، او تكون السرعة العددية تابعاً خطياً للزمن (بند ١٥٧) ، او يكون التسارع المماسي ثابتاً هي حركة متغيرة بانتظام .

الحركة المستقيمة :

١٩٢— صفاتها المميزة : لقد عرفنا الحركة المستقيمة بان المسار مستقيم. فاذا اعتبرنا المستقيم محوراً ، وليكن ox ، فان موضع المتحرك يتعين على مساره اذا علم فصله x بدلالة الزمن . اي اذا علمت المعادلة الزمنية للحركة :

$$x = x(t)$$

ونرى في الحركة المستقيمة الخواص التالية :

١ً — شعاع السرعة محمول على المسار. فمنحاه ثابت ، وقياسه الجبري $v = x'$.

اذن يكون :

$$\mathbf{V} = v\,\mathbf{i} = x'\,\mathbf{i}$$

٢° – شعاع السرعة يمر أبداً من أية نقطة ثابتة من المسار ، ولتكن مبدأ الفصول o مثلاً .

٣° – راسم الخطى في o ينطبق على المسار . فشعاع التسارع محمول على المسار ، وقياسه الجبري $\gamma = v'$ هو التسارع العددي . اذن يكون :

$$\mathbf{\Gamma} = \gamma\,\mathbf{i} = v'\,\mathbf{i} = x''\,\mathbf{i}$$

ففي الحركة المستقيمة ينطبق شعاع التسارع على التسارع المماسي ، وينعدم التسارع الناظمي .

هذا ونلاحظ ان هذه الخواص هي صفات مميزة للحركة المستقيمة ، بمعنى ان :

(١) كل حركة يكون شعاع سرعتها ثابتاً في المنحى هي حركة مستقيمة (الخاصة الرابعة ، بند ١٠٦) .

(٢) وكل حركة يكون حامل سرعتها ماراً أبداً من نقطة ثابتة هي حركة مستقيمة (الخاصة الثالثة ، بند ١٠٦) .

(٣) وكل حركة ينطبق تسارعها على حامل سرعتها (اي يكون تسارعها مماسياً) هي حركة مستقيمة .

بالحقيقة ، بما ان التسارع مماسي ، فالتسارع الناظمي وهو $\frac{v^2}{\rho}$ ، يساوي الصفر ، وبالتالي التقوس $\frac{1}{\rho}$ (في كل نقطة من المسار) يساوي الصفر . فالمسار مستقيم ، والحركة مستقيمة .

١٩٣ – نتيجة : ينتج من الخاصة الأخيرة النتيجة التالية :

اذا كان شعاع ما $\mathbf{U}(t)$ موازياً أبداً لمشتقه $\mathbf{U}'(t)$ ، فالشعاع $\mathbf{U}(t)$ يكون ثابتاً في المنحى .

هذا ونرى انه يمكن الوصول الى هذه النتيجة مباشرة من الخاصة الثالثة (بند ١٠٦) .

ملاحظة : نلاحظ في الحركة المستقيمة الخاصتين التاليتين :

شعاع التسارع يوازي استقامة ثابتة ، ويمر أبداً من أية نقطة ثابتة من المسار . لكن هاتين الخاصتين غير مميزتين للحركة المستقيمة . فسنرى ان كل حركة يكون شعاع تسارعها موازياً لاستقامة ثابتة، أو ماراً من نقطة ثابتة، هي حركة مستوية بوجه عام .

اما في الحالة الخاصة ، حين تكون سرعة المتحرك في لحظة ما ، ولتكن لحظة البدء ، مساوية للصفر ، او منطبقة على حامل التسارع ، فالحركة تغدو آنئذ مستقيمة .

١٩٤ – الحركة المستقيمة المنتظمة : في الحركة المستقيمة المنتظمة شعاع السرعة ثابت . فراسم الخطى نقطة ، وشعاع التسارع يساوي الصفر .

ان هذه الخواص هي صفات مميزة للحركة المستقيمة المنتظمة . فنرى بسهولة ، ان كل حركة يكون شعاع سرعتها ثابتاً ، أو راسم خطاها نقطة ، او شعاع تسارعها معدوماً هي حركة مستقيمة منتظمة .

١٩٥ – الحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام : في هذه الحركة شعاع التسارع ثابت .

وهذه الخاصة ليست مميزة للحركة المستقيمة المتغيرة بانتظام . فسنرى ان الحركة التي يكون شعاع تسارعها ثابتاً هي حركة مستوية والمسار قطع مكافىء محوره يوازي التسارع . اما في الحالة الخاصة ، حين تكون السرعة في لحظة ما ، ولتكن لحظة البدء ، مساوية للصفر ، أو موازية للتسارع فالحركة تصبح مستقيمة .

الحركة المستوية :

١٩٦ – الحركة المنحنية والحركة المستوية : قلنا ان الحركة تكون منحنية اذا كان المسار خطاً منحنياً. فان كان المسار مستوياً (اي واقعاً في مستو) فالحركة نسميها مستوية .

سنورد بعض الحالات الخاصة التي تكون فيها الحركة مستوية .

١٩٧ – السرعة موازية لمستو ثابت : لقد رأينا (بند١٠٨) الخاصة التالية : عندما ترسم نقطة M(t) منحنياً كائناً في مستو مفروض ، فالمشتق M'(t) ، وهو سرعه M ، يكون واقعاً في هذا المستوي .

ونلاحظ ان هذه الخاصة هي صفة مميزة للحركة المستوية . فقد رأينا (بند ١٠٨) أنه عندما يكون الشعاع M'(t) موازياً ابداً لمستو مفروض (أو عمودياً على شعاع مفروض) ، فالنقطة M(t) ترسم منحنياً كائناً في مستو يوازي المستوي المفروض (او عمودي على الشعاع المفروض) .

١٩٨ – السرعة تلاقي مستقيماً ثابتاً : عندما تتحرك نقطة M(t) في مستو مفروض، فسرعتها V=M'(t) تقع في هذا المستوي (بند١٩٧) .فهي تلاقي ابداً اي مستقيم من المستوي في نقطة محدودة من المستقيم او في اللانهاية .

هذه الخاصة هي صفة مميزة للحركة المستوية. بمعنى ان كل حركة يكون حامل سرعتها ملاقياً أبداً لمستقيم مفروض ، تقع في مستو مار من المستقيم المفروض.

بالحقيقة ، بما ان السرعة V=M'(t) تلاقي أبداً مستقيماً مفروضاً ، وليكن المحور oz ، فمسقط M على المستوي xoy ، وليكن m ، يتحرك على مستقيم مار من o ، لان سرعة m (وهي مسقط سرعة M) تمر أبداً من o (بند١٩٢) . اذن النقطة M تتحرك في مستو مار من المحور oz ، أو من المستقيم المفروض.

هذا ويمكن برهان هذه النظرية مباشرة . فاذا فرضنا ان k هو شعاع واحدة المحور oz ، فسرعة M تلاقي oz اذا كان :

$$(oM , M' , k) = o$$

واذا لاحظنا ان :

$$(oM \wedge k) \wedge (M' \wedge k) = (oM,M',k)k - (k,M',k)oM$$

وان $(k,M',k) = o$

فيكون $(oM \wedge k) \wedge (M' \wedge k) = o$

ولما كان $M' \wedge k$ هو مشتق $oM \wedge k$ ، فاذا فرضنا ان $oM \wedge k$ لايطابق الصفر ، فشعاع الجداء $oM \wedge k$ يكون ثابتاً في المنحى (بند١٩٣) . فالنقطة M تتحرك اذن في مستو مار من المحور oz ، او من المستقيم المفروض .

واذا فرضنا $oM \wedge k$ مطابقاً للصفر ، فالنقطة M تتحرك على المحور oz ، والنظرية تبقى صحيحة .

١٩٩ — **التسارع ثابت** : لتكن M نقطة متحركة تسارعها ثابت، ويساوي g مثلاً ، فيكون :

$$\frac{dV}{dt} = g$$

وبالتالي يكون $V = g\,t + V_o$

وبما ان $V = \frac{doM}{dt}$

فيكون : $oM = \frac{1}{2} g t^2 + V_o\, t + oM_o$

أو $M_oM = \frac{1}{2} g t^2 + V_o t$

M_o و V_o وضع النقطة وسرعتها في لحظة البدء $t = o$ ، و o نقطة ما في الفراغ.

نستخلص من احدى العلاقتين الاخيرتين ، انه اذا فرضنا V_o لايساوي الصفر ولايوازي g ، فالنقطة M تتحرك في مستو معين بالشعاعين V_o و g ،

والمسار قطع مكافىء محوره يوازي g وتقعره يتجه باتجاه g .

واذا رسمنا محورين احدهما ox (o منطبقة على M_o) يوازي V_o والآخر oy يوازي g ، فالمسار المنسوب لهذين المحورين (المائلين او القائمين) يتعين وسيطياً بالمعادلتين :

$$x = v_o t \qquad y = \frac{1}{2} g t^2$$

(v_o و g القياسان الجبريان للشعاعين V_o و g) او بالمعادلة الديكارتية (في الاحداثيات المائلة او القائمة) :

$$y = \frac{g}{2v_o^2} x^2$$

اما في الحالة الخاصة ، حين يكون الشعاعان V_o و g متوازيين ، فالحركة تغدو مستقيمة ، والنقطة تتحرك على مستقيم يوازي g (او V_o) . فاذا رسمنا محوراً oy (o منطبقة على M_o) يوازي g ، فالمعادلة الزمنية للحركة تكون :

$$y = \frac{1}{2} g t^2 + v_o t$$

والحركة تكون متغيرة بانتظام .

هذا واذا كان $V_o = o$ فالحركة تكون ايضاً مستقيمة (والمسار يوازي g)، وتكون معادلتها الزمنية :

$$y = \frac{1}{2} g t^2$$

وهي ايضاً حركة متغيرة بانتظام .

٢٠٠ - التسارع ثابت في المنحى : اذا فرضنا نقطة M تسارعها يوازي ابداً شعاعاً ثابتاً K ، فيكون :

$$\frac{dV}{dt} \wedge K = o$$

وبالتالي يكون (بعد التكامل) :

$$\mathbf{V} \wedge \mathbf{K} = \mathbf{C} \qquad (\mathbf{C} \text{ شعاع ثابت})$$

فاذا فرضنا $\mathbf{C} \neq o$ فشعاع السرعة $\mathbf{V}$ يكون عمودياً ابداً على الشعاع الثابت $\mathbf{C}$ (او موازياً لمستو ثابت) . فالحركة تكون اذن مستوية (بند١٩٧) والنقطة تتحرك في مستو عمودي على $\mathbf{C}$.

اما اذا كان $\mathbf{C} = o$ فشعاع السرعة $\mathbf{V}$ يكون موازياً ابداً للشعاع الثابت $\mathbf{K}$ ، فالحركة تغدو مستقيمة ، والنقطة تتحرك على مستقيم يوازي $\mathbf{K}$

٢٠١ — **التسارع مركزي** : لتكن M نقطة متحركة يمر تسارعها دوماً من نقطة ثابتة نسميها المركز .

لنفرض o هو المركز . فقد رأينا (بند١٧٧) ان :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V}, o) = (\Gamma, o)$$

وبما ان التسارع يمر أبداً من o ، فعزمه في o يطابق الصفر . اذن يكون :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{V}, o) = o$$

وبالتالي يكون :

$$(\mathbf{V}, o) = \mathbf{K} \qquad (\mathbf{K} \text{ شعاع ثابت})$$

او

$$o\mathbf{M} \wedge \mathbf{V} = \mathbf{K}$$

واذا رمزنا بـ M_o لموضع النقطة في لحظة ما ، ولتكن t_o ، و بـ V_o لسرعة النقطة في تلك اللحظة ، فيكون :

$$o\,\mathbf{M}_o \wedge \mathbf{V}_o = \mathbf{K}$$

(١) فاذا كان $\mathbf{K} = o$ ، بان كانت السرعة $\mathbf{V}_o$ في لحظة ما t_o مساوية للصفر ، او مارة من o ، فيكون :

$$o\mathbf{M} \wedge \mathbf{V} = o$$

فالسرعة $\mathbf{V}$ تمر ابداً من المركز o ، والنقطة M تتحرك على مستقيم يمر من o (بند ١٩٢) .

اذن الحركة مستقيمة ، والمسار مستقيم يمر من o (ويتعين هـذا المستقيم بموضع النقطة في لحظة ما) .

(٢) واذا كان $\mathbf{K} \neq o$ ، فالنقطة M تقع في مستو يمر من النقطة الثابتة o ، ويتعامد مع الشعاع الثابت $\mathbf{K}$.

اذن الحركة مستويه ، والمسار منحن كائن في مستو يمر من o (ويتعين هذا المستوي بموضع النقطة في لحظة ما وبسرعة المتحرك في تلك اللحظة) .

واذا لاحظنا (بند١٨٦) ان السرعة السطحية حول o ، وهي W ، تقدر بالقيمة الجبرية للشعاع $\frac{1}{2}(\mathbf{V}, o)$ ، لادركنا ان السرعة السطحية W ثابتة وان الحركة خاضعة لقانون السطوح حول o (بند ١٨٥).

نستخلص من ذلك ، انه عندما يكون التسارع مركزياً، فالحركة تكون بوجه عام مستوية وخاضعة لقانون السطوح . اما في الحالة الخاصة ، حين تكون السرعـة في لحظة ما معدومة او مارة من المركز ، فالحركة تغدو مستقيمة .

٢٠٢ ـ المستوي الملاصق يمر من نقطة ثابتة : لتكن o النقطة الثابتة ، فالمستوي الملاصق لمسار M يمر ابداً من o اذا كان :

$$(\mathbf{oM}, \mathbf{V}, \Gamma) = o$$

او

$$(\mathbf{oM}, \mathbf{V}, \mathbf{V}') = o$$

واذا لاحظنا ان :

$$(\mathbf{oM} \wedge \mathbf{V}) \wedge (\mathbf{oM} \wedge \mathbf{V}') = (\mathbf{oM}, \mathbf{V}, \mathbf{V}')\,\mathbf{oM} - (\mathbf{oM}, \mathbf{V}, \mathbf{oM})\mathbf{V}'$$

وان

$$(\mathbf{oM}, \mathbf{V}, \mathbf{oM}) = o$$

فيكون

$$(\mathbf{oM} \wedge \mathbf{V}) \wedge (\mathbf{oM} \wedge \mathbf{V}') = o$$

وبما ان $\mathbf{oM} \wedge \mathbf{V}'$ (وهو عزم التسارع في o) يساوي مشتق $\mathbf{oM} \wedge \mathbf{V}$ (وهو عزم السرعـة في o) ، فاذا فرضنا ان $(\mathbf{V}, o)$ لا يطابق الصفر ،

فالشعاع $V \wedge oM$ يكون ثابتاً في المنحى (بند ١٩٣) ، اي موازياً لشعاع ثابت، وليكن K . فالنقطة M تتحرك في مستو يمر من o ويتعامد مع K .

اما اذا كان عزم V في o مطابقاً للصفر ، فحامل السرعة يمر ابداً من o والحركة تغدو مستقيمة (بند ١٩٢) .

٢٠٣ – المستوي الملاصق يوازي مستقيماً ثابتاً : ليكن oz المستقيم (او المحور) الثابت . فالمستوي الملاصق لمسار M يوازي المحور oz ، او يوازي شعاع واحدته k ، اذا كان :

$$(V, \Gamma, k) = o$$

او

$$(V, V', k) = o$$

نلاحظ ان :

$$(V \wedge k) \wedge (V' \wedge k) = (V, V', k)\, k - (k, V', k)\, V = o$$

وبما ان $V' \wedge k$ يساوي مشتق $V \wedge k$ ، فاذا فرضنا ان $V \wedge k$ لا يطابق الصفر ، فالشعاع $V \wedge k$ يكون اذن ثابتاً في المنحى (بند ١٩٣)، اي موازياً لشعاع ثابت ، وليكن i ، ويكون بالتالي V عمودياً على الشعاع الثابت i . فالنقطة M تتحرك في مستو عمودي على الشعاع i . ويتعين هذا المستوي بالشعاعين k و V_o .

اذن الحركة مستوية ، والمسار منحن كائن في مستو موازٍ للمستقيم المفروض (ويتعين هذا المستوي بموضع النقطة في لحظة ما ، وبسرعة المتحرك في تلك اللحظة) .

اما اذا كان الشعاع $V \wedge k$ مطابقاً للصفر ، فالسرعة V توازي دوماً الاستقامة الثابتة k ، والنقطة تتحرك على مستقيم يوازي المستقيم المفروض .

٢٠٤ – المستوي الملاصق يلاقي مستقيماً ثابتاً : اذا كان المستوي الملاصق

لمسار النقطة M يلاقي ابدا مستقيماً مفروضاً ، فنجد بسهولة (اعتماداً على البند ١٩٨ او ٢٠٢ او ٢٠٣) ان الحركة بوجه عام مستوية، وان المسار كائن في مستو مار من المستقيم المفروض .

٢٠٥ - المستوي الملاصق يوازي مستوياً ثابتاً: اذا كان المستوي الملاصق لمسار M يوازي ابداً مستوياً مفروضاً ثابتاً (او يتعامد مع مستقيم ثابت)، فنجد بسهولة (اعتماداً على البند ١٩٧ او ٢٠٤) ان الحركة بوجه عام مستوية، وان المسار كائن في مستو يوازي المستوي المفروض (او يتعامد مع المستقيم الثابت المفروض).

الحركة الخاضعة لقانون السطوح :

٢٠٦ - خواصها : لقد رأينا في الحركة المستوية (بند ١٨٥) ان حركة نقطة M تكون خاضعة لقانون السطوح حول نقطة ما من مستويها ، ولتكن o ، اذا كان السطح الجبري الذي يمسحه نصف القطر الشعاعي oM ، متناسباً مع مدة الحركة .

ونرى في الحركة الخاضعة لقانون السطوح الخواص التالية :

(١) السطح الجبري a للقطاع المحصور بين شعاع ثابت oA (A نقطة ما ثابتة من المسار) والشعاع oM والقوس $\overset{\frown}{AM}$ هو تابع خطي للزمن :

$$a = wt + a_0$$

فالمتحرك M ، وبالتالي المحور oM ، يدوران حول o باتجاه واحد ثابت.

(٢) السرعة السطحية W حول o ثابتة .

فاذا اعتبرنا o مبدأ للاحداثيات، ورمزنا بـ (x , y) او بـ (r , θ) لاحداثيي M في مستوي الحركة ، لكان (بند ١٨٧) :

$$W = \frac{1}{2}(x y' - y x')$$

او

$$W = \frac{1}{2} r^2 \theta'$$

وكان بالتالي $x y' - y x' = c$ (41)

او $r^2 \theta' = c$ (42)

c مقدار ثابت ، نسميه بثابت السطوح .

واذا لاحظنا (بند ١٨٦) ان :

$$W k = \frac{1}{2} (V , o)$$

لوجدنا ان عزم V في o هو شعاع ثابت .

(٣) التسارع السطحي W' يطابق الصفر .

واذا لاحظنا (بند ١٨٨) ان :

$$W' k = \frac{1}{2} (\Gamma , o)$$

لوجدنا ان عزم التسارع في o يطابق الصفر . فالتسارع يمر ابداً من النقطة الثابتة o (اي التسارع مركزي) او يساوي الصفر .

هذا ونلاحظ ان هذه الخواص هي صفات مميزة للحركة الخاضعة لقانون السطوح : فكل حركة يكون فيها السطح الجبري a (للقطاع الذي يمسحه oM) تابعاً خطياً للزمن ، او تكون السرعة السطحية W ثابتة ، او يكون التسارع مركزياً او مساوياً للصفر ، هي حركة خاضعة لقانون السطوح .

٢٠٧ — دستورا بينه : عندما تكون الحركة خاضعة لقانون السطوح يمكن حساب قيمتي السرعة والتسارع في الاحداثيات القطبية بدلالة r و θ فحسب (اي مستقلتين عن الزمن) . وبذلك يكون الاشتقاق بالنسبة للزاوية θ عوضاً عن الزمن t .

رأينا ان $r^2 \theta' = c$

فاذا فرضنا ان $u = \frac{1}{r}$ ، فالعلاقة السابقة تصبح $\theta' = cu^2$

لنعين الآن سرعة المتحرك وتسارعه بدلالة u ومشتقات u بالنسبة للزاوية القطبية θ .

تعيين السرعة : نعلم (بند ١٧٠) ان :

$$\mathbf{V} = r' \mathbf{I} + r\,\theta' \mathbf{J}$$

وبما ان $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{du} \cdot \frac{du}{d\theta} \cdot \theta' = - c \frac{du}{d\theta}$

فيكون $r'(t) = - cu'(\theta)$

ويكون بالتالي $\mathbf{V} = c(- u' \mathbf{I} + u \mathbf{J})$ (43)

و $V^2 = c^2 (u'^2 + u^2)$ (44)

تعيين التسارع : بما ان التسارع مركزي (اي محمول على نصف القطر الشعاعي oM) ، فيكون :

$$\Gamma = (r'' - r\theta'^2) \mathbf{I}$$

وتكون قيمة التساع (المقدرة على نصف القطر الشعاعي oM) :

$$\Gamma = r'' - r\theta'^2$$

وبما ان $r'' = \frac{dr'}{dt} = \frac{dr'}{d\theta} \cdot \theta' = - c^2 u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$

فيكون $r''(t) = - c^2 u^2 u''(\theta)$

ويكون بالتالي $\Gamma = - c^2 u^2 (u'' + u) \mathbf{I}$ (45)

و $\Gamma = - c^2 u^2 (u'' + u)$ (46)

الحركة الكروية :

٢٠٨- خواصها : رأينا ان حركة نقطة M تكون كروية اذا كان مسار M منحنياً مرسوماً على كرة ، او اذا كان الشعاع oM (o نقطة ثابتة في في الفراغ) ثابتاً في القياس .

ونرى في الحركة الكروية الخاصة التالية :

عندما تتحرك نقطة M على كرة مركزها o تكون سرعة M ، وهي $\mathbf{M'(t)}$ ، عمودية أبداً على oM (بند ٩٥ ، الخاصة الثانية) .

ونلاحظ ان هذه الخاصة هي صفة مميزة للحركة الكروية :

فاذا كانت سرعة نقطة M عمودية أبداً على نصف القطر الشعاعي oM (o نقطة ثابتة في الفراغ) ، فحركة M تكون كروية ، ومسار M يقع على كرة مركزها o (بند ١٠٦ ، الخاصة الثانية) .

٢٠٩ — الحركة الدائرية : اذا اعتبرنا الدائرة هي مقطع كرة بمستو ، فحركة نقطة M تكون دائرية اذا كانت هذه الحركة مستوية وكان الشعاع oM (o نقطة ثابتة في مستوي الحركة) ثابتاً في القياس .

ونرى في الحركة الدائرية ان سرعة المتحرك M عمودية ابداً على الشعاع oM (o مركز الدائرة) .

ونرى بالمقابل ، ان كل حركة مستوية سرعتها $\mathbf{V = M'(t)}$ عمودية أبداً على الشعاع oM (o نقطة ثابتة في مستوي الحركة) هي حركة دائرية مركزها o .

وفي الحالة الخاصة ، حين تكون الحركة الدائرية منتظمة ، يكون التسارع ناظمياً ، وبالتالي ماراً من مركز الدائرة .

ففي الحركة الدائرية المنتظمة ، التسارع مركزي والحركة خاضعة لقانون السطوح حول مركز الدائرة .

ونرى بالمقابل ، ان كل حركة يكون تسارعها مركزياً وسرعتها عمودية أبداً على تسارعها هي حركة دائرية منتظمة .

٢١٠ — ملاحظة : في حركة نقطة على كرة ، حين يكون التسارع عمودياً على سطح الكرة ، يصبح التسارع مركزياً ، ويغدو المسار دائرة عظمى للكرة.

ونرى في هذه الحركة الخاصة الخواص التالية :

(١) الحركة منتظمة (التسارع المماسي يساوي الصفر) .

(٢) التسارع ناظمي (شعاع التسارع ينطبق على التسارع الناظمي) .

(٣) الناظم الاساسي في أية نقطة من المسار (وهو الحامل للتسارع الناظمي) ينطبق على الناظم للكرة في تلك النقطة (وهو الحامل للتسارع) .

نسمي المسار في هذه الحالة بخط جيوديزي للكرة . فالخطوط الجيوديزية للكرة هي دوائر عظمى لها .

هذا ونقول بوجه عام، ان مسار متحرك على سطح ما، هو خط جيوديزي لهذا السطح ، اذا كان تسارع المتحرك عمودياً أبداً على السطح.

ونلاحظ في الخطوط الجيوديزية لسطح ان الناظم الاساسي في أية نقطة من هذه الخطوط يكون منطبقاً على الناظم للسطح في تلك النقطة ، أوأن المستوي الملاصق في أية نقطة من الخطوط الجيوديزية ، يحوي الناظم للسطح في تلك النقطة .

فالخطوط الجيوديزية لاسطوانة دورانية مثلاً ، هي مولداتها ، ودوائرها المتوازية ، ومنحنياتها اللولبية (كما سنرى ذلك في الحركة اللولبية) .

ويبرهن أن طول قوس من خط جيوديزي (أو طول قطعة مستقيمة حين يكون الخط مستقيماً) هو اقصر الاقواس المرسومة على السطح والواصلة بين نهايتي القوس المفروضة (مع إختيار مناسب للقوس حين يكون الخط مغلقاً) .

أو نقول باختصار ، ان اقصر طريق يسلكه متحرك للانتقال بين نقطتين من خط جيوديزي لهذا السطح ، هو الخط الجيوديزي نفسه (مع اختيار مناسب للطريق حين يكون الخط مغلقاً .

سنرى في علم التحريك ان النقطة المادية المتحركة على سطح صقيل (بدون احتكاك) ترسم خطاً جيوديزياً حين لا تكون النقطة خاضعة لاية قوة مفروضة (في هذه الحالة جداء كتلة النقطة في تسارعها يساوي رد فعل السطح في النقطة) .

تمارين

١ — M نقطة مادية تتحرك على الدائرة $r = a\cos\theta$ بحركة معينة بالمعادلة:

$$t = \frac{1}{4}(2\theta + \sin 2\theta)$$

(١) احسب السرعة السطحية لنقطة M حول o .

(٢) احسب سرعة M (بدلالة r) وعين تسارع M ، ثم ادرس الحركة .

٢ — oX محور يدور حول o في مستو P بدوران منتظم . فيدور ٣ دورات بدقيقة واحدة .

(١) لتكن M نقطة ثابتة من المحور oX تبعد عن o بقدر ١٠ سم . عين سرعة M وتسارعها .

(٢) لتكن m مسقط M على مستو ⊥ مار من o ويصنع مع P زاوية قدرها ٤٥° . عين مسار m . أوجد راسم خطى حركتها . برهن أن حركتها خاضعة لقانون السطوح حول o . عين تسارع m وادرس حركتها .

(٣) oY محور يدور حول o في المستوي P بدوران منتظم ، فيدور دورة كاملة في ١٤ ثانية . N نقطة من المحور oY تبعد عن o بقدر ١٠ سم . في لحظة البدء كانت النقطتان M و N منطبقتين على نقطة مفروضة A من المستوي P . ففي أي زمن يعود انطباقهما من جديد في نقطة A . عين الفترة الزمنية الفاصلة بين انطباقيهما المتتاليين في A ، ثم لحظات تلاقيهما في مواضع أخرى غير A .

٣ — M نقطة تتحرك على محور oy بحركة منتظمة سرعتها العددية b . ($b > o$) N نقطة تتحرك في المستوي xoy بحركة منتظمة سرعتها متجهة أبداً نحو M ويساوي قياسها a . عين مسار N ، ثم بيّن متى يستطيع المتحرك N اللحاق بالمتحرك M .

٤ — ادرس الحركة المستوية لنقطة سرعتها العددية ثابتة وتساوي v ،

وسرعتها الزاوية حول o (o نقطة ثابتة في مستوي الحركة) ثابتة وتساوي ω .

٥ — M نقطة مادية تسارعها يلاقي ابداً المحور oz . ادرس حركة النقطة اذا علم ان مسار $M(x, y, z)$ هو المنحني :

$$x^2 y = 1 \qquad z\,x = 1$$

وأنه في لحظة البدء $t = o$: $x_o = 1$ و $x'_o = 1$

٦ — M نقطة تسارعها $\Gamma = a.oM$ (a مقدار جبري ثابت ، و o نقطة ثابتة في الفراغ) .

في اللحظة $t = o$ كانت النقطة في الموضع M_o وكانت سرعتها V_o . ادرس حركة M في الحالات التالية :

(١) V_o عمودي على oM_o

(٢) V_o ينطبق على حامل oM_o

(٣) V_o يساوي الصفر .

٧ — نقطة مادية تسارعها مركزي قياسه الجبري $\frac{b}{r^2}$ (b عدد جبري ثابت ، و r بعد النقطة عن المركز) . عين مسار النقطة وادرس حركتها . ناقش بحسب شروط البدء .

٨ — ادرس حركة نقطة مسارهـــا هو القطع المكافئ $2y = x^2$ وراسم خطى حركتها هو المستقيم $y = ax + b$.

٩ — احداثيات نقطة M معينة بدلالة الزمن بالعلاقات :

$$x = a\frac{\cos t}{t} \qquad y = a\frac{\sin t}{t} \qquad z = a\frac{t}{2} \qquad (a \text{ طول مفروض})$$

(١) برهن أن مسار M هو منحن مرسوم على سطح دوراني يطلب تعيينه . عين مسار مسقط M على المستوي xoy .

(٢) عين سرعة M ، وقياس القوس من المسار حين يزداد الزمن من $t = \sqrt{2}$ الى $t = t_1$ ، ثم عين تسارعي M المماسي والناظمي ، واحسب نقوس المسار في النقطة الموافقة للزمن $t = t_1$.

الفصل الخامس

درس بعض الحركات الشهيرة

الحركة النوسية :

٢١١ – تعريف : يكون لنقطة مادية M حركة نوسية (أو اهتزازية) بسيطة على مسار مستقيم ، وليكن المحور ox ، اذا كانت معادلتها الزمنية من الشكل :

$$x = a\cos(\omega t - \varphi) \qquad (1)$$

بفرض ان a و ω و φ هي مقادير ثابتة .

نسمي الفصل $x = \overline{oM}$ بمطال الحركة ، والعدد الموجب a بسعتها . ونسمي العدد الحسابي ω بنبضة الحركة ، والمقدار $(\omega t - \varphi)$ بطور الحركة او صفحتها . ونسمي مبدأ الفصول o بمركز النوسان .

نرى أن الفصل x هو تابع دوري للزمن ، دوره $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ، وان مخطط الفصول منحن جيبي. فالمتحرك M يتردد على مساره بين موضعين ، فصل احدهما (+ a) والثاني (− a) . فالنهاية العظمى للمطال x هي السعة a .

واذا حسبنا سرعة المتحرك وتسارعه في لحظة ما ، لوجدنا :

$$v = x' = -\omega\, a \sin(\omega t - \varphi) \qquad (2)$$

$$\gamma = v' = -\omega^2 a\cos(\omega t - \varphi) \qquad (3)$$

نرى ان السرعة العددية للمتحرك وتسارعه العددي تابعان دوريان ايضاً (كالمطال) ، دور كل منهما $\frac{2\pi}{\omega}$ ، وهو دور المطال نفسه . فعندما يزداد الزمن t بقدر الدور T ، يعود المتحرك الى نفس موضعه في اللحظة t ، ويكون له نفس سرعته السابقة ونفس تسارعه . فالحركة النوسية هي اذن حركة دورية ، دورها $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

نسمي انتقال المتحرك مدة دور واحد بالنوسة الكاملة (أو اختصاراً بالنوسة) ، ونسمي عدد النوسات في واحدة الزمن بالتواتر ، ونرمز له بـ n ، ويكون

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (4)$$

نرى أنه يكفي لدرس الحركة ، ان نغير الزمن مدة دور واحد. ولو رسمنا مخطط الحركة، لوجدنا أنه يمكن الحصول على هذا المخطط من المنحني الذي معادلته:

$$x = a\cos\omega t \qquad (5)$$

بانسحاب مواز لمحور الزمن ، قدره $\frac{\varphi}{\omega} = \tau$ (شكل ٣٨) .

نسمي الزاوية φ بفرق الصفحة بين الحركتين (1) و (5) .

فان كانت الزاوية φ موجبة فالحركة (5) تكون متأخرة عن الحركة (1) مدة قدرها τ . وان كانت φ سالبة فالحركة (5) تكون متقدمة على (1) مدة قدرها $|\tau|$.

واذا كان $\varphi = 2k\pi$ (k عدد صحيح موجب او سالب أو يساوي الصفر)، أو $\tau = kT$ فالحركة (1) تصبح :

$$x = a\cos\omega t$$

والحركتان (1) و (5) تكونان اذن متطابقتين .

واذا كان $\varphi = 2k\pi + \pi$ أو $\tau = kT + \frac{T}{2}$ فالحركة (1) تصبح :

$$x = -a\cos\omega t$$

والحركتان (1) و (5) تكونان متضادتين .

أما اذا كان $\varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ أو $\tau = kT + \frac{T}{4}$ فالحركة (1) تغدو :

$$x = a\sin\omega t$$

٢١٢ – ملاحظة : نرى أنه يمكن كتابة التابع (1) كما يلي :

$$x = a\cos\varphi\cos\omega t + a\sin\varphi\sin\omega t$$

أو

$$x = a_1\cos\omega t + a_2\sin\omega t \qquad (6)$$

وذلك بفرض أن :

(7) $a_1 = a\cos\varphi \qquad a_2 = a\sin\varphi$

ونرى بالمقابل أن الحركة المعينة بالمعادلة الزمنية (6) يمكن ردها الى الحركة (1). فالسعة a وفرق الصفحة φ يتعينان من العلاقتين (7)، فنجد :

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a_2}{a_1}$$

٢١٣ — السرعة : رأينا ان السرعة العددية للحركة (1) هي :

(2) $$v = -a\omega\sin(\omega t - \varphi)$$

ونرى أنه يوجد بين السرعة والمطال علاقة مستقلة عن الزمن، هي :

(8) $$x^2 + \frac{v^2}{\omega^2} = a^2$$

وهي معادلة قطع ناقص منسوب لمحوريه التناظريين : أحدهما محور الفصول، والثاني محور السرع. فعندما يزداد الزمن t بقدر دور واحد T، ترسم النقطة $P(x, v)$ جميع القطع.

ان تنقل P على القطع يُبين لنا كيف تتغير السرعة حين تتحرك النقطة على مسارها. فترتيب P يعين لنا سرعة المتحرك في اية نقطة $M(x)$ من المسار. فمن اشارة السرعة يعرف اتجاه حركة النقطة على مسارها، ومن تزايد القيمة المطلقة للسرعة أو تناقصها يعرف تسارع الحركة او تباطؤها. وبذلك يمكن درس الحركة بكاملها اعتماداً على هذا القطع.

هذا ونلاحظ في المعادلة (8) أنه حين يأخذ المطال x قيمة معينة يكون للسرعة v قيمتان متناظرتان : فالنائس يمر من كل نقطة من مساره مرتين في دور واحد، ويكون لسرعته في تلك النقطة قيمتان متناظرتان.

ونلاحظ أيضاً أنه حين تأخذ السرعة v قيمة معينة يكون للفصل x قيمتان متناظرتان : فعندما يمر النائس، أثناء حركته المباشرة او الرجعية، من نقطتين متناظرتين بالنسبة لمركز النوسان، يكون لسرعته قيمة حسابية واحدة.

٢١٤ — التسارع : نعلم ان التسارع العددي للحركة (1) ، هو :

$$\gamma = x'' = -a\omega^2 \cos(\omega t - \varphi) \qquad (3)$$

ونرى أنه يوجد بين التسارع العددي والمطال علاقة مستقلة عن الزمن هي :

$$\gamma = -\omega^2 x \qquad (9)$$

فالتسارع العددي γ يتناسب مع المطال x .

واذا لاحظنا ان $\mathbf{oM} = x\mathbf{i}$

وان $\boldsymbol{\Gamma} = x''\mathbf{i} = \gamma\mathbf{i}$

فيكون $\boldsymbol{\Gamma} = -\omega^2 \mathbf{oM} \qquad (10)$

فشعاع التسارع اذن يتجه ابداً نحو مركز النوسان o ، ويتناسب قياسه مع بُعد المتحرك عن o .

ونرى بالمقابل ان كل حركة مستقيمة معينة بالمعادلة :

$$x'' = -\omega^2 x$$

هي حركة نوسية . ويتضح ذلك اذا لاحظنا ان الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$x'' + \omega^2 x = 0$$

هو $$x = a\cos(\omega t - \varphi) \qquad (1)$$

او $$x = a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega \qquad (6)$$

a و φ ، و a_1 و a_2 هي ثوابت التكامل .

هذا ويمكن تعيين الثابتين a_1 و a_2 في المعادلة (6) اعتماداً على شروط البدء . فاذا فرضنا ان x_0 هو فصل المتحرك في لحظة البدء ، و v_0 سرعته في تلك اللحظة ، فمن العلاقتين :

$$x = a_1 \cos\omega t + a_2 \sin\omega t$$

و $$v = -a_1 \omega \sin\omega t + a_2 \omega \cos\omega t$$

نجد ان $x_0 = a_1 \qquad v_0 = a_2 \omega$

وبالتالي يكون :

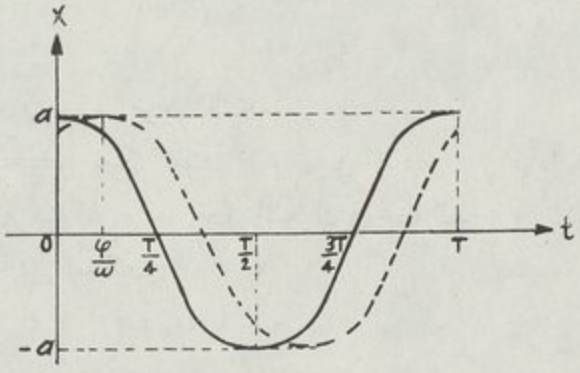
$$x = x_0 \cos t + \frac{p_0}{\omega} \sin \omega t \qquad (11)$$

٢١٥ – درس الحركة : لما كانت الحركة العامة (1) تؤول الى الحركة (5) باختيار مناسب لمبدأ الزمن ، فيكفي اذن ان ندرس الحركة بشكلها البسيط (5) :

$$x = a \cos \omega t \qquad (5)$$

وذلك عندما يزداد الزمن بقدر دور واحد ، اعتباراً من لحظة البدء . فنكتب جدول تغييرات عناصر الحركة ، ثم نرسم مخطط الفصول :

t	0		$\frac{T}{4}$		$\frac{T}{2}$		$\frac{3}{4}T$		T
ωt	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3}{2}\pi$		2π
p	0		$-\omega a$		0		$+\omega a$		0
x	a	↘	0	↘	$-a$	↗	0	↗	a



(شكل ٢٨)

نرى أن النقطة M تتردد على مسارها بين موضعين ، احدهما A فصله a والثاني A′ فصله a — (شكل ٢٨) . فتسير النقطة من A الى A′ ، وتتم بذلك نوسة بسيطة بمدة نصف دور ، ثم تعود من A′ الى A بمدة نصف دور ايضاً ، وتتم بذلك نوسة كاملة للحركة بمدة دور واحد .

هذا ونستخلص من جدول التغيرات أو من مخطط الفصول (شكل ٢٨) الدراسة الآتية للحركة :

في الربع الاول من الدور : يقوم المتحرك من A بدون سرعة ، فيسير نحو o بحركة رجعية متسارعة . وتبلغ سرعته في o قيمتها المطلقة العظمى ، وهي a ω .

في الربع الثاني : يتابع المتحرك سيره من o وتكون حركته رجعية متباطئة . فتتناقص القيمة المطلقة لسرعته حتى تنعدم في A′ .

في الربع الثالث : يعود المتحرك من A′ الى o بحركة مباشرة متسارعة ، وتبلغ سرعته من جديد في o قيمتها العظمى a ω .

في الربع الرابع : يتابع المتحرك سيره من o بحركة مباشرة ، لكنها متباطئة . فتتناقص سرعته حتى تنعدم في A .

يتضح من هذه الدراسة ، أن الحركة تكون متسارعة عندما يتجه النائس نحو مركز النوسان ، ومتباطئة حينما يتباعد عنه . فتبلغ سرعته قيمتها المطلقة العظمى في المركز o ، والصغرى (وهي الصفر) في نهايتي المسار A و A′ .

هذا ونلاحظ انه عندما يزداد الزمن من ∞ — الى ∞ + ينوس المتحرك ويهتز بلا تناه ، متردداً بين الموضعين A و A′ . لهذا سميت هذه الحركة بالحركة النوسية أو الاهتزازية .

٢١٦ — ملاحظة : اذا لاحظنا أن القوة التي تؤثر في نقطة مادية تكسبها تسارعاً متناسباً مع هذه القوة (كما سنرى ذلك في علم التحريك) ، لأدركنا

أن الحركة النوسية تنشأ من تأثير قوة متجهة نحو مركز النوسان o ، ومتناسبة مع بُعد النقطة المتحركة عن o . أو أن النقطة مجذوبة من o بقوة متناسبة مع بُعد النقطة عن o . وبذلك يمكن اعطاء تفسير ميكانيكي للحركة الاهتزازية كما يلي :

في لحظة البدء تركت النقطة في A بدون سرعة تحت تأثير قوة جاذبة منبعثة من o . فالنقطة تسير نحو o بحركة متسارعة .

وبعد ان تصل النقطة الى o تأخذ حركتها بالتباطؤ ، لان القوة تغير اتجاهها بعد أن تنعدم في o . فالقوة تصبح باتجاه يعاكس اتجاه الحركة . فتتناقص القيمة المطلقة للسرعة ، حتى تنعدم في A' .

وتبدأ النقطة حركتها من A' ، كما بدأت من A ، بدون سرعة تحت تأثير قوة تجذبها نحو o . فتسير متسارعة نحو مركز الجذب o .

وبعد وصولها الى o تتباعد عنها بحركة متباطئة حتى تتلاشى سرعتها في A .

وبذلك تتم النوسة الكاملة للحركة . ثم تبدأ من جديد النوسة الثانية ، وهكذا ...

الحركة الدائرية :

٢١٧ – تعريف : رأينا ان حركة نقطة M تكون دائرية اذا كان المسار دائرة . ليكن o مركز الدائرة ، و a نصف قطرها . لنوجّه هذه الدائرة باتجاه مثلثي ، ولنأخذ على محيطها نقطة A نعتبرها مبدأ للأقواس (شكل ٢٩) .

نعلم أن موضع المتحرك M يتعين على هذه الدائرة بفصله الدائري $s = \overset{\frown}{AM}$. فعندما يرسم المتحرك القوس $\overset{\frown}{AM}$ يدور نصف القطر oM بزاوية $\theta = (\mathbf{oA}, \mathbf{oM})$. ومن السهل ان نلاحظ ان θ تابعة للزمن ، وأنها حين تقدر بالراديان يكون :

$$s = a\theta \qquad (12)$$

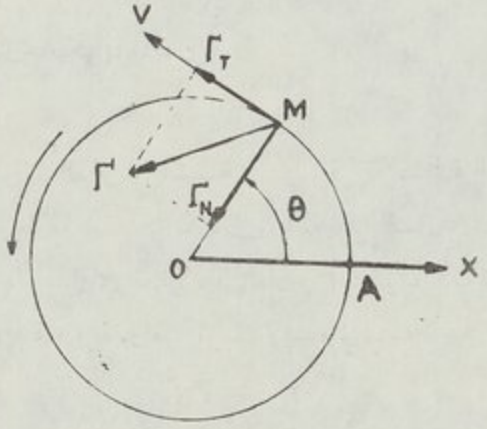
٢١٨ — السرعة الخطية والسرعة الزاويّة : لنحسب السرعة العددية للمتحرك في لحظة ما :

$$v = s' = a\,\theta'$$

ان θ' ، وهي مشتق الزاوية θ بالنسبة للزمن ، هي السرعة الزاوية للمتحرك . وتدل على سرعة دوران المستقيم oM حول المركز o (بند ١٨١) . واذا رمزنا للسرعة الزاوية بـ ω يكون :

$$v = a \cdot \omega \qquad (13)$$

وقد نسمي سرعة المتحرك v بالسرعة الخطية تمييزاً لها عن سرعته الزاوية .



(شكل ٢٩)

٢١٩ — شعاع السرعة : لقد رأينا (بند ١٨٣) كيف نمثل السرعة الزاوية ω بشعاع عمودي على مستوى الحركة ، يقاس بـ $|\omega|$ ، ويتجه بحيث يدور حوله المحور oM بدوران مباشر .

ونعلم أنه يمكن تمثيل سرعة M بشعاع مماس للدائرة في النقطة M (فهو عمودي على نصف القطر oM) ، يقاس بـ $|\omega|\,a$ ، ويتجه باتجاه الحركة (فهو يتجه بحيث يكون الدوران حول الشعاع ω مباشراً) .

نرى ان عزم شعاع الدوران ω بالنسبة لنقطة M يساوي شعاع سرعة M .

٢٢٠ – شعاع التسارع : نرى أن التسارع المماسي لنقطة M هو :

$$\Gamma_T = \frac{d\,v}{d\,t} = a\,\omega'$$

ω' (أو 0ω) هو التسارع الزاوي للنقطة M او لنصف القطر oM (بند ١٨٤) .

ونرى أن التسارع الناظمي يمر من المركز o ويتجه نحو o . أما قياسه فهو :

$$\Gamma_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2\,a^2}{a} = \omega^2\,a$$

فشعاع التسارع يكون اذن :

$$\Gamma = \omega'\,a\,\mathbf{T} + \omega^2\,a\,\mathbf{N} \qquad (15)$$

٢٢١ – الحركة الدائرية المنتظمة : في الحركة المنتظمة السرعة الخطية v ثابتة ، فالسرعة الزاوية ω تكون اذن ثابتة . والتسارع المماسي Γ_T (أو التسارع العددي γ) يساوي الصفر ، فالتسارع Γ يكون اذن ناظمياً (فينطبق على نصف قطر الدائرة ، ويغدو مركزياً) ويساوي قياسه $\omega^2\,a$. اذن يكون :

$$\Gamma = \omega^2\,a\,\mathbf{N}$$

أو

$$\Gamma = -\,\omega^2\,.\,\mathbf{oM} \qquad (16)$$

ففي الحركة الدائرية المنتظمة ، شعاع التسارع مركزي . فهو يتجه نحو المركز ، ويتناسب قياسه مع بُعد المتحرك عن المركز .

هذا ويمكن الوصول الى هذه النتيجة ، اعتماداً على راسم الخطى ، اذا لاحظنا ان نهاية الشعاع oV (وهي النقطة التي تعين راسم الخطى) ، ترسم دائرة بحركة منتظمة سرعتها الزاوية ω .

واذا رمزنا بـ T لمدة الدورة الكاملة للنقطة المتحركة على الدائرة ، فعندما يزداد الزمن بقدر T ، تزداد الزاوية θ أو تنقص بقدر 2π راديانياً ، حسبما

تسير النقطة في الاتجاه الموجب او الاتجاه السالب، ويكون :

$$\omega = \pm \frac{2\pi}{T}$$

ولحساب θ بدلالة الزمن ، نعلم ان السرعة الزاوية ω ثابتة ، فيكون :

$$\theta' = \omega$$

اذن يكون $\theta = \omega t + \theta_0$

θ_0 قيمة الزاوية الموافقة لمبدأ الزمن .

عندما يوافق مبدأ الزمن مبدأ المسافات ، بمعنى انه عندما يمر المتحرك من مبدأ الفصول A في مبدأ الزمن ، يكون $\theta_0 = o$ ، ويكون بالتالي :

$$\theta = \omega t$$

أو بفرض ان $\omega > o$ يكون :

$$\theta = \frac{2\pi}{T} t$$

مسقط الحركة الدائرية المنتظمة على قطر للدائرة :

٢٢٢ـ الحركة النوسية على مستقيم : لنفرض متحركاً يدور على محيط دائرة موجهة (مركزها o ونصف قطرها a) بسرعة زاوية موجبة وثابتة ω . ليكن M موضع المتحرك في لحظة ما t ، و m مسقط M على قطر الدائرة A'A (شكل ٣٠) . لنوجه A'A ولنفرض ox محوراً منطبقاً على القطر A'A . فبينما ترسم M محيط الدائرة ، يتردد مسقطها m بين A و A' .

واذا رمزنا بـ φ الزاوية الكائنة بين الشعاع oM_0 الموافق لمبدأ الزمن ومحور الاسقاط ox :

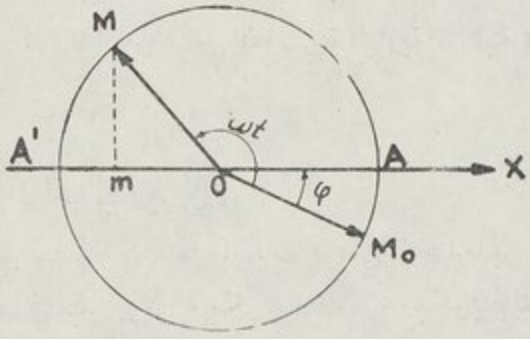
$$\varphi = (oM_0 , ox)$$

وأشرنا بـ x لفصل المسقط m ، لكان :

$$x = a \cos(\omega t - \varphi)$$

فالنقطة m تتحرك بحركة اهتزازية ، نبضها السرعة الزاوية ω للنقطة M ،

وسعتها نصف قطر الدائرة a ، وصفحتها في مبدأ الزمن الزاوية φ .



(شكل ٣٠)

٢٢٣ - تمثيل فرينل: عندما يعلم الدور T (وتعلم بذلك السرعة الزاوية ω)، فانه يمكن تمثيل المقدارين a و φ اللذين يعينان التابع x ، بشعاع oM_0 ، قياسه a ويصنع مع المحور ox الزاوية :

$$\varphi = (oM_0 , ox)$$

وقد اصطلح على تمثيل التابع الجيبي :

$$x = a \cos (\omega t - \varphi) \qquad (1)$$

بالشعاع oM_0 والمحور ox . وتعرف هذه الطريقة في التمثيل بطريقة فرينل .

فاعتماداً على هذه الطريقة ، نرى ان الحركة المعينة بالمعادلة :

$$x = a \cos \omega t \qquad (5)$$

تمثل بشعاع oM_0 ينطبق على المحور ox ويتحد معه في الاتجاه .

والحركة المعينة باحدى المعادلتين :

$$x = a \cos (\omega t - \pi)$$

$$x = a \cos (\omega t + \pi)$$

او بالمعادلة $x = - a \cos \omega$

وهي حركة مضادة للحركة (5) كما رأينا سابقاً ، تمثل بشعاع oM_o ينطبق على ox ويعاكسه في الاتجاه .

والحركة المعنية بالمعادلة :

$$x = a \cos (\omega t - \frac{\pi}{2})$$

أو بالمعادلة $x = a \sin \omega t$

تمثل بشعاع oM_o عمودي على ox ويتجه بحيث تكون الزاوية :

$$(oM_o , ox) = \frac{\pi}{2}$$

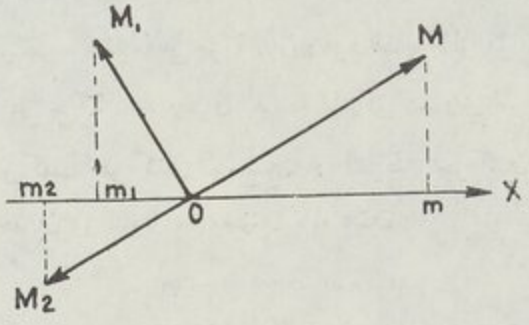
هذا ونلاحظ (اعتماداً على طريقة فرينل) ان الحركة (١) تكون متأخرة عن الحركة (5) أو متقدمة عليها، حسبما يكون $\pi > \varphi > 0$ أو $2\pi > \varphi > \pi$.

٢٢٤ — السرعة والتسارع : لنفرض ان حركة m على ox معينة بالمعادلة :

$$x = a \cos \omega t \qquad (5)$$

فقد رأينا أنه يمكن اعتبار om هو مسقط شعاع oM ، قياسه a ويصنع مع ox الزاوية :

$$(ox , oM) = \omega t$$



شكل (٣١)

ونعلم ان سرعة m تساوي مسقط سرعة M . فاذا رسمنا من o شعاعاً oM_1 يساوي سرعة M (شكل ٣١) ،فنرى ان قياس oM_1 يساوي ωa وان:

$$(oM , oM_1) = \frac{\pi}{2}$$

فسرعة m تساوي اذن مسقط oM_1 ، وليكن $\overline{om_1}$ ، ويكون :

$$\overline{om_1} = v(m) = \omega a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

فالنقطة m_1 تتحرك اذن على ox بحركة نوسية ، سعتها ωa . ونرى ان هذه الحركة هي متقدمة على حركة m (وفرق الصفحة الموافق لذلك يساوي $\frac{\pi}{2}$ -). ونرى ايضاً ان تسارع m يساوي مسقط تسارع M . ونعلم ان تسارع M :

$$\Gamma(M) = -\omega^2 . oM$$

فاذا رسمنا من o شعاعاً oM_2 ، يساوي تسارع M (شكل ٣١) ، فتسارع m يساوي اذن مسقط oM_2 ، وليكن $\overline{om_2}$ ، ويكون :

$$\overline{om_2} = \gamma(m) = -\omega^2 . x = -\omega^2 a \cos\omega t$$

أو

$$\overline{om_2} = \omega^2 a \cos(\omega t + \pi)$$

فالنقطة m_2 تتحرك اذن على ox بحركة نوسية ، سعتها $\omega^2 a$.

ونرى ان حركة m_2 متقدمة على حركة m_1 (وفرق الصفحة الموافق يساوي $\frac{\pi}{2}$ -)، ومتقدمة ايضاً على حركة m (وفرق الصفحة الموافق يساوي π -) .

٢٢٥ - تركيب حركتين نوسيتين : لنفرض حركتين نوسيتين على محور ox ، متحدتين في الدور ، ومعينتين بالمعادلتين :

$$x_1 = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1)$$

$$x_2 = a_2 \cos(\omega t - \varphi_2)$$

لنعين الحركة الحاصلة من تركيب هاتين الحركتين ، اي الحركة المعينة بالعلاقة :

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \cos (\omega t - \varphi_1) + a_2 \cos (\omega t - \varphi_2)$$

نعلم ان حاصل جمع هذين التابعين الجيبيين يمكن كتابته بالشكل :

$$x = a' \cos \omega t + a'' \sin \omega t$$

بفرض ان $a' = a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2$

و $a'' = a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2$

فالحركة الحاصلة يمكن كتابتها اذن بالشكل :

$$x = a \cos (\omega t - \varphi)$$

بفرض ان :

$$a^2 = a'^2 + a''^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

و $$tg \varphi = \frac{a''}{a'} = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2}$$

هذا ويمكن الوصول الى هذه النتائج مباشرة اذا لاحظنا ان الحركة النوسية على مستقيم هي مسقط حركة دائرية منتظمة على قطر للدائرة .

فالحركة النوسية $x_1 = a_1 \cos (\omega t - \varphi_1)$ يمكن اعتبارها مسقط حركة دائرية منتظمة معينة بشعاع دائر oM_1 ، قياسه a_1 ، ويصنع مع المحور ox الزاوية :

$$(ox , oM_1) = \omega t - \varphi_1$$

والحركة النوسية $x_2 = a_2 \cos (\omega t - \varphi_2)$ يمكن اعتبارها ايضاً مسقط حركة دائرية منتظمة معينة بشعاع دائر oM_2 ، قياسه a_2 ، ويصنع مع المحور ox الزاوية :

$$(ox , oM_2) = \omega t - \varphi_2$$

والحركة الحاصلة $x = x_1 + x_2$ يمكن اعتبارها (اعتماداً على نظرية المساقط) مسقط حركة دائرية معينة بالشعاع الدائر :

$$oM = oM_1 + oM_2$$

وبما ان الشعاعين oM_1 و oM_2 ثابتان في الطول ، ويدوران حول o بسرعة زاوية واحدة ω ، فالشكل $oM_1 MM_2$ (وهو متوازي اضلاع) يدور حول o متماسكا بعضه مع بعض بالسرعة الزاوية ω .

فاذا رمزنا لقياس الشعاع oM بـ a ، وللزاوية التي يصنعها هذا الشعاع مع المحور ox بـ $(\omega t - \varphi)$ اي :

$$(ox , oM) = \omega t - \varphi$$

فمعادلة حركة مسقط الشعاع الدائر oM على ox تكون :

$$x = a \cos(\omega t - \varphi)$$

ولتعيين a و φ نعتمد على تمثيل فرينل . فلحساب a ، نلاحظ ان الزاوية :

$$(oM_1 , oM_2)_o = \varphi_1 - \varphi_2$$

فطول $(oM)_o$ ، وهو قطر متوازي الاضلاع $(oM_1 MM_2)_o$ ، هو :

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \qquad (17)$$

ولحساب φ ، نعلم ان :

$$(oM)_o = (oM_1)_o + (oM_2)_o$$

فاعتماداً على نظرية المساقط (نسقط الاشعة على محورين متعامدين في مستوي الحركة ، احدهما المحور ox نفسه) ، فنجد :

$$tg\,\varphi = \frac{a_1 \sin \varphi_1 + a_2 \sin \varphi_2}{a_1 \cos \varphi_1 + a_2 \cos \varphi_2} \qquad (18)$$

ينتج من ذلك القاعدة المعروفة بقاعدة فرينل : نحصل على الشعاع الممثل للهزة الحاصلة من تركيب هزتين جيبيتين متحدتين في الدور والمنحى ، بجمع هندسي للشعاعين الممثلين للهزتين المركبتين .

هذا ويمكن تعميم هذه القاعدة من اجل عدة هزات متحدة في الدور والمنحى . ويتم ذلك بانشاء المجموع الهندسي للاشعة الممثلة للهزات المركبة .

٢٢٦ — حالة خاصة : لنفرض ان للهزتين المركبتين سعة واحدة ، اي $a_1 = a_2$. فنجد :

$$x = x_1 + x_2 = a_1 [\cos(\omega t - \varphi_1) + \cos(\omega t - \varphi_2)]$$

أو
$$x = 2a_1 \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

اذن يكون :

$$a = 2a_1 \cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \qquad \varphi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

هذا ويمكن الوصول الى هذه النتائج اعتماداً على العلاقتين (17) و (18) ، او مباشرة بطريقة فرينل .

ونلاحظ ان سعة الهزة الحاصلة تابعة للفرق بين صفحتي الهزتين المركبتين . فتبلغ قيمتها العظمى ، وهي $2a_1$ ، عندما يكون :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2K\pi$$

اي عندما تتطابق الهزتان المركبتان (فيصبح الفرق الزمني بينهما مساوياً لعدد صحيح من الادوار) .

وتبلغ قيمتها الصغرى ، وهي الصفر ، عندما يكون :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2K + 1)\pi$$

اي عندما تتضاد الهزتان (فيصبح الفرق الزمني بينهما مساوياً لعدد فردي من انصاف الادوار) .

الحركة اللولبية :

٢٢٧— تعريف : نقول عن حركة انها حركة لولبية اذا كان المسار لولباً دائرياً .

ليكن a نصف قطر الاسطوانة التي يقع عليها اللولب ، فالاحداثيات الاسطوانية لنقطة من هذه الاسطوانة هي :

$$r = a \qquad \theta \qquad z$$

والاحداثيات الاسطوانية لنقطة M من اللولب هي :

$$r = a \qquad \theta \qquad z = b\,\theta$$

b مقدار ثابت نسميه بخطوة اللولب المختزلة . ونسمي المقدار $2\pi b$ بخطوة اللولب ، وهي البعد بين نقطتين من اللولب كائنتين على مولد واحدللاسطوانة وموافقتين لقيمتين للزاوية θ الفرق بينهما 2π ، اي :

$$\Delta z = b \,.\, \Delta\theta = b \,.\, 2\pi$$

هذا ونرى ان المعادلات الوسيطية لهذا اللولب هي :

$$x = a\cos\theta \qquad y = a\sin\theta \qquad z = b\,\theta$$

ونلاحظ ان مسقط حركة M على المستوي xoy هي حركة دائرية (مركز الدائرة o ، ونصف قطرها a) معينة بالزاوية :

$$\theta = \theta(t) \qquad (19)$$

ومسقط الحركة على المحور oz هي حركة مستقيمة معينة بالمعادلة :

$$z = b.\,\theta(t)$$

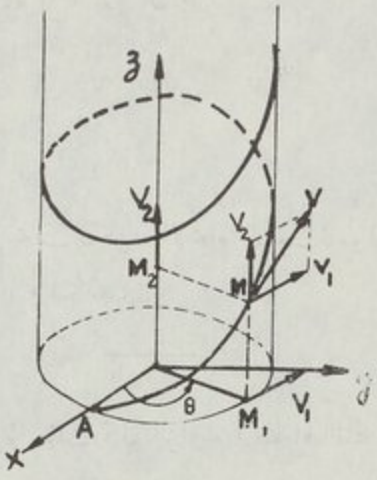
فنقطة M تتعين اذن على مسارها بالمعادلة الزمنية (19) .

٢٢٨ – السرعة : نعلم ان مركبات سرعة نقطة معينـــة بالاحداثيات الاسطوانية (بند ١٧٠) هي :

$$\mathbf{V} = r' \cdot \mathbf{I} + r\,\theta' \cdot \mathbf{J} + z' \cdot \mathbf{K}$$

فسرعة M تكون اذن :

$$\mathbf{V} = a\,\theta' \cdot \mathbf{J} + b\,\theta' \cdot \mathbf{K} \qquad (20)$$



شكل (٣٢)

فلسرعة M مركبتان (شكل٣٢) ، احداهما V_1 في المستوي xoy ، وهي سرعة M_1 (مسقط M على المستوي xoy) في حركته الدائرية، وقيمتها الجبرية :

$$v_1 = a\,\theta'$$

والثانية V_2 محمولة على المحور oz ، وهي سرعة M_2 (مسقط M على oz) في حركته المستقيمة ، وقيمتها الجبرية :

$$v_2 = b\,\theta'$$

ونرى ان $\frac{v_1}{v_2} = \frac{a}{b}$. فنسبة مركبتي السرعة ثابتة. وتدل هذه النتيجة على ان الزاوية الكائنة بين المماس للولب في نقطة ما منه والمولد للاسطوانة في تلك النقطة ، هي ثابتة . أو نقول باختصار ان المماسات للولب تصنع مع مولدات الاسطوانة ، او مع محورها ، زوايا متساوية .

وهذه النتيجة هي احدى خواص اللولب الهندسية .

ولتعيين قياس سرعة M ، نعلم ان :

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2$$

فنجد $$v^2 = (a^2 + b^2) \theta'^2$$

واذا وجهنا المسار بحيث يكون الاتجاه الموجب له موافقاً للدوران الموجب (او المباشر) حول oz ، لكان :

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}\, \theta' \qquad (21)$$

واذا رمزنا بـ c لوتر مثلث قائم الزاوية ، ضلعاه القائمان a و b ، لكان :

$$v = c\, \theta' \qquad ( )$$

نستخلص من ذلك ان :

$$v_1 = a\theta' \qquad v_2 = b\theta' \quad \cdot \quad v = c\, \theta'$$

واذا اعتبرنا A مبدأ لقياس الاقواس، ورمزنا بـ s للقوس $\overset{\frown}{AM}$ لوجدنا:

$$s = c\, \theta$$

واذا أشرنا بـ s_1 للقوس $\overset{\frown}{AM_1}$ لكان :

$$s_1 = a\, \theta$$

ونستخلص من ذلك ان :

$$\overset{\frown}{AM_1} = s_1 = a\,\theta \qquad \overline{oM_2} = z = b\,\theta \qquad \overset{\frown}{AM} = s = r\,\theta$$

وبالتالي $$\frac{s_1}{a} = \frac{z}{b} = \frac{s}{r} = \theta$$

٢٢٩- التسارع : نعلم ان تسارع نقطة معينة بالاحداثيات الاسطوانية (بند ١٧٨) هو :

$$\Gamma = (r'' - r\theta'^2)\,\mathbf{I} + (2r'\theta' + r\theta'')\,\mathbf{J} + z''\,\mathbf{K}$$

فتسارع M يكون اذن :

$$\Gamma = -a\theta'^2\,\mathbf{I} + a\theta''\,\mathbf{J} + b\theta''\,\mathbf{K} \qquad (22)$$

فلتسارع M مركبتان ، احداهما :

$$\Gamma_1 = -a\theta'^2\,\mathbf{I} + a\theta''\,\mathbf{J}$$

وهي تسارع المسقط M_1 (على المستوي xoy) في حركته الدائرية .
والمركبة الثانية :

$$\Gamma_2 = b\theta''\,\mathbf{K}$$

وهي تسارع المسقط M_2 (على oz) في حركته المستقيمة .

ونرى في العلاقة (22) أنه يمكن تفريق تسارع M الى مركبتين ، احداهما:

$$\Gamma_1 = a\theta''\,\mathbf{J} + b\theta''\,\mathbf{K} \qquad (23)$$

كائنة في المستوي المماس في M للاسطوانة ، وقياسها الجبري :

$$\Gamma_1 = r\theta''$$

والمركبة الثانية :

$$\Gamma_n = -a\theta'^2\,\mathbf{I} = \mathbf{MM_2}\,.\,\theta'^2 \qquad (24)$$

كائنة على الناظم لسطح الاسطوانة في M .

هذا ونعلم ان لتسارع M مركبتين ، احداهما مماسية (محمولة على المماس للمسار) :

$$\Gamma_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{\rho}\,\theta^{\cdot}$$

والثانية ناظمية (محمولة على الناظم الاساسي للمسار) :

$$\Gamma_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{\dot{\rho}^2\,\theta^{\cdot 2}}{\rho}$$

واذا لاحظنا ان المركبة Γ_1 هي محمولة على المماس للمسار (Γ_1 يوازي $\mathbf{V}$ اعتماداً على العلاقتين 20 و 23) وان قيمتها الجبرية (على المماس الموجّه) هي $\dot{\rho}\theta^{\cdot}$ لادركنا ان:

$$\Gamma_1 = \Gamma_\tau$$

ومن السهل ان ندرك أيضاً ان :

$$\Gamma_n = \Gamma_n$$

ونستخلص من العلاقة الاخيرة النتيجة التالية :

الناظم الاساسي للولب في نقطة منه M (وهو حامل Γ_n) ينطبق على الناظم للاسطوانة في تلك النقطة (وهو حامل Γ_n) . فاللولب هو خط جيوديزي للاسطوانة .

هذا ومن العلاقة $\Gamma_n = \Gamma_n$ يمكننا حساب نصف قطر تقوس اللولب في في نقطة ما منه . فنجد بسهولة ان :

$$\rho = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

٢٣٠ - الحركة اللولبية المنتظمة : في الحركة المنتظمة السرعة العددية تكون ثابتة . وبما أن السرعة العددية هي :

$$v = l\,\theta'$$

فالسرعة الزاوية $\theta' = \omega$ تكون ايضاً ثابتة . وبالتالي يكون :

$$\theta = \omega\,t + \theta_0$$

وباختيار مناسب لمبدأ الزمن يكون :

$$\theta = \omega\,t$$

وتصبح أحداثيات M :

$$x = a\cos\omega t \qquad y = a\sin\omega t \qquad z = b\,\omega t$$

ونرى أن سرعة M هي :

$$\mathbf{V} = (a\mathbf{J} + b\mathbf{K})\,\omega$$

أما تسارع M فهو :

$$\boldsymbol{\Gamma} = -a\omega^2\,\mathbf{I} \tag{25}$$

ونلاحظ أن $\Gamma_t = o$ و $\boldsymbol{\Gamma}_n = -a\omega^2\,\mathbf{I}$

وأن $\Gamma_T = o$ و $\boldsymbol{\Gamma}_N = \dfrac{a^2+b^2}{\rho}\,\omega^2\,\mathbf{N}$

اذن يكون : $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}_n = \boldsymbol{\Gamma}_N$ (26)

فتسارع M ينطبق على الناظم للأسطوانة من جهة، وعلى الناظم الاساسي للمسار من جهة ثانية .

فنستخلص من ذلك النتيجة الهندسية التي وجدناها سابقاً (في الحركة اللولبية العامة) وهي أن اللولب هو خط جيوديزي للأسطوانة .

كما نستخلص أيضاً قيمة التقوس مباشرة ، فنجد :

$$\rho = \frac{a^2+b^2}{a}$$

تمارين

١ - ادرس الحركات النوسية البسيطة المعينة بالمعادلات الآتية :

$$x = 2\cos 3t$$
$$x = 3\sin 2t$$
$$x = 5\cos t - 1$$

٢ - ارسم مخططات الحركة النوسية الآتية :

$$x = 2\cos\frac{3}{2}t - \sin\frac{3}{2}t + 1$$

ثم ادرس الحركة .

٣ - بيّن أن الحركة المستقيمة المعينة بالمعادلة الزمنية :

$$x = 4\cos^2 t$$

هي حركة نوسية بسيطة . عين دور الحركة وسعتها ومركز نوسانها .

٤ - ادرس الحركة المستقيمة المعينة بالمعادلة الزمنية :

$$x = 2\cos^2 t + \sin^2 t - 3$$

بين أن هذه الحركة ترد الى حركة نوسية بسيطة . عين دور هذه الحركة وسعتها ومركز نوسانها .

٥ - ادرس الحركة النوسية المعينة بالشروط الآتية :

مبدأ الفصول هو مركز النوسان، قيمة الدور $T = 7$. في اللحظة $t = \frac{7}{12}$ يكون $x = 0$ و $v = -\frac{6}{7}$.

وذلك بفرض أن المتر هو واحدة للطول ، والدقيقة واحدة للزمن .

٦ — M نقطة مادية تتحرك على دائرة نصف قطرها يساوي نصف متر ، بحركة منتظمة ، فتدور عشر دورات بدقيقه واحدة .

(١) احسب السرعة الزاوية مقدرة براديان ، ثانية .

(٢) احسب السرعة الخطية مقدرة بسنتمتر ، ثانية .

(٣) احسب قياس التسارع مقدراً بسنتيمتر ، ثانية ، ثانية .

٧ — ادرس الحركة المستقيمة الناتجة من تركيب الحركتين المستقيمتين المعينتين على المحور ox بالمعادلتين :

$$x_1 = 5 \cos \left(2t + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$x_2 = 3 \sin \left(2t - \frac{\pi}{4} \right)$$

بين أن الحركة الحاصلة :

$$x = x_1 + x_2$$

هي حركة نوسية بسيطة .

٨ — M نقطة تتحرك على اللولب المعين بالمعادلات :

$$x = 3 \cos \theta \qquad y = 3 \sin \theta \qquad z = \sqrt{3}\,\theta$$

و

$$\theta = 2t + 1$$

عين شعاعي سرعة وتسارع M .

★ ★

الباب الثالث

علم التوازن

الفصل الاول

المبادئ الأساسية في الميكانيك

تمهيد : لقد بينا أن علم الحركة يبحث في الحركة من حيث هي علاقة زمانية مكانية بحتة ، بصرف النظر عن المؤثرات المحدثة لها . بمعنى أن علم الحركة يعطي وصفاً للحركة ، دون أن يبحث في الاسباب التي أدت الى حدوثها .

فقد رأينا في علم الحركة مثلاً ، أنه عندما تترك نقطة مادية في الفراغ بدون سرعة ، فان هذه النقطة ترسم مستقيماً شاقولياً هابطاً ، وتسير بحركة متسارعة بانتظام . فعلم الحركة يبين شكل المسار الذي ترسمه النقطة أثناء حركتها في الفراغ ونوع هذه الحركة . لكنه لا يبين السبب الذي جعل الحركة مستقيمة من جهة ومتسارعة بانتظام من جهة أخرى .

أما علم الميكانيك الحقيقي فيتناول دراسة المؤثرات وعلاقتها بالحركة أو السكون . فهو يبين مثلاً سبب سقوط الاجسام على الارض ، وسبب توازن الاجسام الموضوعة على منضدة . كما يعطي تفسيراً لحركة السيارات حول الشمس وغيرها من الحركات الطبيعية . أي أن علم الميكانيك يبحث بوجه عام في جميع الحوادث الطبيعية التي تقع في هذا الكون من حركة أو سكون ، ويعلّل أسباب حدوثها . نسمي الفرع الخاص منه في الحركة بعلم التحريك ، والفرع الخاص بالسكون بعلم التوازن.

١٣١ - المبادىء في الميكانيك : يعتمد علم الميكانيك ، كغيره من العلوم ، على مبادىء أو موضوعات خاصة به . فالمبادىء التي يرتكز عليها علم الميكانيك ليست واضحة وضوح البديهيات التي لا تحتاج الى برهان . فلا بد للأخذ بهذه المبادىء من موافقة نتائجها للحوادث المشاهدة والتجريبية .

ولا تصح هذه المبادىء إلا اذا كانت الحركات التي ندرسها او نشاهدها منسوبة لمجموعة محاور ثابتة ، كمجموعة كوبرنيك التي مبدأها مركز المجموعة الشمسية ومحاورها باتجاه نجوم ثابتة .

إلا أن ما ينسب لمجموعة كوبرنيك يوافق الحوادث الفلكية ، أو بعض الحوادث الخاصة التي تجري على الارض كالمد والجزر ، أو بعض التجارب الخاصة كتجربة فوكو . أما الحوادث الطبيعية العامة التي تجري على سطح الارض ، والتي ننسبها لمجموعة متماسكة مع الارض ، فتكون المبادىء من أجلها محققة بتقريب قد يكون كافياً .

المبدأ الأول : مبدأ العطالة او القصور الذاتي : نقبل بأن النقطة المادية قاصرة من نفسها عن تبديل حالتها سواء أكانت هذه الحالة حركة أو سكونا . فان كانت النقطة بحالة سكون ولم يؤثر عليها أي مؤثر خارجي فانها تبقى ساكنة ؛ وان كانت بحالة حركة ولم يؤثر عليها أي مؤثر خارجي تكون حركتها مستقيمة ومنتظمة .

٢٣٢ - القوة والكتلة : ينتج من هذا المبدأ أنه اذا طرأ على حركة أو سكون نقطة مادية تبديل ما ، أو كانت حركتها غير مستقيمة ومنتظمة ، فانه يقال بأن النقطة خضعت لتأثير قوة . فالقوة مؤثر خاص يعمل في تحريك نقطة مادية ساكنة أو في تغيير حركتها (بتغيير مقدار أو منحى أو اتجاه سرعتها) أو في المحافظة على سكونها .

ولما كان التسارع مقياساً لتغير حركة النقطة المادية ، فالقوة اذن صلة وثيقة بتسارع النقطة التي تؤثر القوة فيها .

وقد عرف ، بالتجربة ، أنه اذا عملت قوى في نقطة واحدة تباعاً ، فهي

تكسبها تسارعات بحيث تبقى نسبة القوة في كل مرة الى تسارعها الناشيء عنها واحدة ، أي :

$$\frac{F}{\Gamma} = \frac{F'}{\Gamma'} = \frac{F''}{\Gamma''} = \cdots$$

وقد وصفت هذه النسبة الثابتة بأنها نتيجة طبيعة النقطة المادية في مقاومة القوى المختلفة التي تؤثر فيها فرادى . وسميت هذه النسبة $\frac{F}{\Gamma}$ بكتلة النقطة . فالكتلة تختلف من نقطة مادية لأخرى ، لاختلاف طبيعة كل نقطة في مقاومة القوى المؤثرة فيها .

٢٣٣ - تمثيل القوة بشعاع : ينتج مما تقدم أنه اذا أثرت قوة F بنقطة مادية كتلتها m وأكسبتها تسارعاً Γ فانه يمكن تمثيل القوة المؤثرة بشعاع مبدؤه النقطة ومعين بالعلاقة :

$$\mathbf{F} = m\,\boldsymbol{\Gamma} \qquad (1)$$

وهي العلاقة الاساسية في علم التحريك .

المبدأ الثاني : مبدأ تركيب التسارعات - اذا عملت مجموعة قوى في نقطة واحدة في آن واحد ، فهي تكسبها تسارعاً ، هو حاصلة التسارعات التي تكسبها النقطة من عمل هذه القوى فيها منفردة :

$$\boldsymbol{\Gamma} = \Sigma\, \boldsymbol{\Gamma}_i$$

وبما ان القوة تساوي جداء الكتلة في التسارع ، فاذا ضربنا طرفي هذه المساواة بكمية واحدة هي كتلة النقطة المادية نحصل على :

$$\mathbf{F} = \Sigma\, \mathbf{F}_i$$

نستخلص من هذا المبدأ ، أنه يمكن ان نستبدل بالقوى المؤثرة في نقطة مادية حاصلتها دون ان يطرأ أي تغيير في حالة النقطة الميكانيكية من حركة أو سكون .

وبذلك فاننا نجمع فعل القوى المؤثرة في نقطة مادية كما تجمع التسارعات .

المبدأ الثالث : مبدأ تساوي الفعل ورد الفعل - لقد قبلنا ، حسب مبدأ العطالة ، أن النقطة المادية قاصرة عن أن تبدل حالتها الميكانيكية من نفسها .

على أننا نقبل هنا ، أنه اذا وجدت نقطتان ماديتان فان كلًا منهما تؤثر في الاخرى بقوة ، وان هاتين القوتين متعاكستان مباشرة . نسمي احداهما بالفعل والاخرى برد الفعل .

مثال ذلك الكتاب الموضوع على منضدة لا تبدو عليه حركة سقوط ما . تلك الحركة التي تظهر لنا جلية فيما لو اذا أزحنا المنضدة من تحته . فعدم سقوط الكتاب ليس الا نتيجة رد فعل المنضدة رداً شاقولياً الى الأعلى مساوياً لثقل الكتاب.

يتفق لبعض الاجسام ان تقهر بتأثير الفعل فتتحطم ، كما لو وضعنا كمية من الصلب على منضدة رقيقة فانها لا تقوى على احتمالها فتنكسر .

٢٣٤ – ثقل جسم : لقد دلت التجربة على أنه اذا ترك جسم في الفراغ فانه يسقط شاقولياً وتكون حركته متغيرة بانتظام . فتسارع هذه الحركة ثابت ، ويدعى شدة التثاقل ، ويرمز له بـ g .

بما ان تسارع الحركة ثابت فالقوة المسببة لها تكون ثابتة أيضاً ، وتدعى ثقل الجسم . فاذا رمزنا بـ P لثقل الجسم وبـ m لكتلته ، يكون :

$$P = m \cdot g$$

ومن الواضح أنا اذا نقلنا نقطة مادية على سطح الارض ، فكتلتها لا تتغير ، والذي يتغير وحده هو g . ونجد أن ثقل النقطة المادية يختلف كثرة أو قلة بقربها من القطبين او من الاستواء على الترتيب . أما القيمة الوسطى للتثاقل فهي ٩٨١ سم/ثا٢ .

٢٣٥ – القياس العملي لكتلة جسم : لتكن m كتلة جسم مفروض ، و P ثقله ، و g شدة التثاقل . نعلم أن :

$$P = m \cdot g$$

هذه العلاقة تساعدنا على حساب الكتلة m بدلالة الثقل P والتثاقل g .

على انه يمكن قياس هذه الكتلة بدون حساب g وذلك بمقارنة ثقلها بثقل آخر بفضل التناسب :

$$\frac{P}{P'} = \frac{m\,g}{m'g} = \frac{m}{m'}$$

وهذا يستلزم أن تكون الكتلتان في مكان واحد من الارض . فلو فرضنا $m' = 1$ (واحدة الكتل) لنتج :

$$m = \frac{P}{P'}$$

وهكذا فان الكتلة التي رأينا عدم مساواتها لثقلها تحسب كنسبة لثقلين . أما الاثقال فتقدر بالميزان .

٢٣٦ ــ الواحدات القياسية : يضاف الى واحدتي الزمن والطول الاصليتين في علم الحركة ، واحدة الكتلة أو واحدة القوة . ففي المجموعة الاولى تكون المقادير (الطول ، والزمن ، والكتلة) اصلية والقوة مقداراً مشتقاً . وفي المجموعة الثانية تكون المقادير (الطول ، والزمن ، والقوة) اصلية ، والكتلة مقداراً مشتقا .

المجموعة الأولى : وفيها جملتان شهيرتان للواحدات :

(١) جملة C. G. S : وأحداتها الاصلية هي :

واحدة الطول السنتمتر .

واحدة الزمن الثانية .

واحدة الكتلة الغرام الكتلي ، ويعادل $\frac{١}{١٠٠٠}$ من كتلة الكيلوغرام العياري (وهو أسطوانة من البلاتين محفوظة في المكتب الدولي للمقاييس والاثقال . ويمثل كتلة دسمتر مكعب من ماء مقطر درجة حرارته ٤°) .

أما واحدة القوة فهي الدينة ، وهي واحدة مشتقة تتعين من الدستور $F = m\,\Gamma$ بفرض ان $m = 1$ و $\Gamma = 1$. فهي القوة التي اذا أثرت في واحدة الكتلة اكسبتها تزايداً في السرعة قدره ١ سم في الثانية .

(٢) جملة M. T. S : واحدتها الاصلية هي :

واحدة الطول السنتمتر .

واحدة الزمن الثانية .

واحدة الكتلة الطون ، ويعادل ١٠٠٠ كيلوغراماً عيارياً .

أما واحدة القوة ، وهي السنتين ، فهي واحدة مشتقة ، وتعادل 10^8 دينة . وهي القوة التي اذا أثرت في طون أكسبته ، في الثانية الواحدة ، تزايداً في السرعة قدره متر في الثانية .

المجموعة الثانية : وفيها جملة واحدة شهيرة هي :

جملة M.K.S : واحداتها الأصلية هي :

واحدة الطول المتر .

واحدة الزمن الثانية .

واحدة القوة الكيلوغرام الثقلي ، وهي ثقل كيلوغرام عياري .

أما واحدة الكتلة ، وهي واحدة مشتقة ، فهي كتلة جسم يتعين ثقله بالدستور $P = m\,g$ بفرض ، $m = 1$ ، فيكون $p = 1 \times g$. وبما أن :

$$g \# 9{,}81 \ m/sec^2 \quad \text{فيكون} \quad P \# 9{,}81 \ kg$$

أي ان ثقل واحدة الكتلة يعادل ثقل 9,81 كيلوغراما عياريا تقريبا . فواحدة الكتلة تساوي اذن 9,81 من كتلة الكيلوغرام العياري بوجه التقريب .

نرى في هذه الجملة أن واحدة القوة ، وهي احدى الواحدات الاصلية ، متغيرة حسب المكان (حسب العرض الجغرافي ، والارتفاع عن سطح البحر) لذلك يرجح استعمال جملتي المجموعة الاولى ، لان جميع واحداتهما الاصلية ثابتة في كل بقعة من الارض .

٢٣٧ — تجانس الدساتير ـ أبعاد المقادير : ان الدساتير في الميكانيك قد تعينت ، باعتبار ان واحدات القياس الاصلية اختيارية . فهذه الدساتير تبقى صحيحة عندما نغير الواحدات القياسية . لذلك نقول ان هذه الدساتير تخضع للتجانس الميكانيكي .

فلكي نجد في مجموعة جديدة من الواحدات قياس طول ، وكتلة ، وزمن ،

وقوة ، و ... ، نضرب قياسات هذه الكميات المقدرة بالواحدات القديمة ، بأمثال من الشكل L و M و T و F و ..... . هذه الأمثال هي قياسات الواحدات القديمة للكميات المذكورة مقدرة بالواحدات الجديدة . وتتعين جميع هذه الامثال بدلالة ثلاثة منها فقط .

فاذا اعتبرنا الواحدات الاصلية هي واحدات الطول والكتلة والزمن مثلاً (كما هو الحال في جملتي المجموعة الاولى) ، فان هذه الامثال تتعين بدلالة L و M و T ، ويصبح كل منها من الشكل $L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$. ونقول ان للمقدار الموافق لهذا المثل الابعاد $L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma}$.

هذا واذا اعتبرنا الواحدات الاصلية هي واحدات الطول والقوة والزمن ، فالامثال تتعين حينئذ بدلالة L و F و T .

سنوضح ذلك في الامثلة الآتية :

السطح والحجم : نعلم أن واحدة السطح هي المربع المنشأ على واحدة الطول . فاذا غيرنا واحدة الطول واعتبرنا L القياس الجديد لواحدة الطول القديمة ، لكان القياس الجديد لواحدة السطح القديمة هو L^2 .

نجد بنفس المحاكمة أن ابعاد الحجم هي L^3 .

مثال : حجم أسطوانة يساوي سبعة أمتار مكعبة . لنحسب قيمة هذا الحجم بفرض أن السنتمتر واحدة للطول .

نرى أن $L = 100$. فالحجم المقدر بسنتمترات مكعبة يكون 7×100^3 .

السرعة والتسارع : لما كان قياس السرعة مرتبطاً بقياسي الطول والزمن وفق العلاقة $v = \frac{ds}{dt}$ في الحركة المتغيرة ، أو العلاقة $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ في الحركة المنتظمة ، فاذا غيرنا واحدتي الطول والزمن واعتبرنا L و T القياسين الجديدين لواحدتي الطول والزمن القديمين ، لكان القياس الجديد لواحدة السرعة القديمة هو $\frac{L}{T}$ أو LT^{-1} . فابعاد السرعة اذن LT^{-1} .

ونجد ، بنفس المحاكمة ، ان ابعاد التسارع هي LT^{-2} .

مثال : اذا فرض ان شدة التثاقل (التسارع الارضي) في مدينة ما تساوي ٨٩١ في الجملة C.G.S ، فماذا تساوي قيمة هذا التثاقل اذا اعتبرت واحدة الطول هي الميليمتر وواحدة الزمن هي الدقيقة ؟

نعلم أن أبعاد التسارع هي LT^{-2} . فقيمة التثاقل في الواحدتين المفروضتين (السنتمتر والثانية) هي :

$$g = 981$$

وتصبح قيمة التثاقل بالنسبة لواحدتين جديدتين هي :

$$g = 981 \times \frac{L}{T^2}$$

فاذا كانت الواحدة الجديدة للطول هي الميلمتر ، والواحدة الجديدة للزمن هي الدقيقة ، يكون :

$$L = 10 \qquad T = \frac{1}{60}$$

وبالتالي يكون التثاقل في الواحدتين المطلوبتين (الميليمتر والدقيقة) :

$$g = 981 \times \frac{10}{(\frac{1}{60})^2} = 35\,316\,000$$

القوة والكتلة : نعلم ان $F = m \cdot \Gamma$. فقياس القوة مرتبط بقياس الكتلة وقياسي الطول والزمن .

فاذا اعتبرنا أن المقادير الاصلية هي الطول والكتلة والزمن ، فللقوة اذن الابعاد LMT^{-2} .

واذا اعتبرنا أن المقادير الاصلية هي الطول والقوة والزمن ، فللكتلة اذن الابعاد $L^{-1}FT^2$.

مثال : لدينا قوة F ثابتة في منحاها واتجاهها ، وثابتة في قيمتها التي تعادل ثقل ٦٠٠ غراماً عيارياً . أثرت هذه القوة في نقطة مادية ساكنة كتلتها ٣

كيلوغرامات كتلية . احسب ، في الجملة C.G.S ، القيمة العددية للسرعة الناشئة من تأثير القوة الوحيدة F في النقطة المادية المفروضة بعد مدة قدرها نصف دقيقة .

الحل : بما أن القوة المؤثرة ثابتة ، فالتسارع الناشيء من تأثير هذه القوة في النقطة يكون ثابتاً ايضاً . ويتعين هذا التسارع من العلاقة :

$$\mathbf{F} = m \cdot \Gamma$$

فالنقطة الساكنة تتحرك اذن بحركة مستقيمة ومتغيرة بانتظام . لنفرض ان مسار النقطة هو المحور ox الموجّه باتجاه القوة ، وان o هو موضع النقطة في لحظة البدء ، فيكون :

$$v = \Gamma \cdot t$$

لنحسب تسارع النقطة (ويتعين بقيمته العددية على المحور ، وهي موجبة كما فرضنا) . نعلم ان ثقل غرام عياري يساوي ٩٨١ دينة ، فيكون :

$$F = 600 \times 981$$

ثم ان $m = 3 \times 1000$

اذن $\Gamma = \frac{F}{m} = \frac{600 \times 981}{3 \times 1000} = 196{,}2$

فالسرعة تصبح اذن (في الجملة C.G.S) :

$$v = \Gamma \cdot t = 196{,}2 \times 30 = 5886$$

ملاحظة : سنورد أبعاد بعض المقادير المشتقة من المقدارين الاصليين (الطول والزمن) :

السطح	L^2	الحجم	L^3
السرعة	LT^{-1}	التسارع	LT^{-2}
السرعة الزاوية	T^{-1}	التسارع الزاوي	T^{-2}
السرعة السطحية	L^2T^{-1}	التسارع السطحي	L^2T^{-2}

وسنورد أبعاد بعض المقادير المشتقة بدلالة أبعاد المقادير الاصلية في كل من المجموعتين (L, M, T) و (L, F, T) :

المقدار	الابعاد في المجموعة L, M, T	الابعاد في المجموعة L, F, T
الكتلة	M	$L^{-1}FT^{2}$
القوة	LMT^{-2}	F
العمل	$L^{2}MT^{-2}$	LF
الضغط	$L^{-1}MT^{-2}$	$L^{-2}F$

خاصة : لما كانت الدساتير في الميكانيك قد تعينت باعتبار الواحدات القياسية الاصلية اختيارية ، فان هذه العلاقات تبقى صحيحة عندما نغير هذه الواحدات .

هذه الخاصة تفيدنا للتحقق من صحة علاقة نحفظها ، أو لايجاد أبعاد بعض العناصر التي قد نجهل أبعادها ، كما سنرى ذلك في الامثلة التالية :

المثال الأول : لنتحقق من دستور بينه :

$$F = -c^{2}u^{2}\left[u + \frac{d^{2}u}{d\theta^{2}}\right]$$

نعلم أن أبعاد الطرف الايسر من هذه العلاقة ، وهو F ، هي LT^{-2} . أما أبعاد الطرف الايمن : فأبعاد ثابت السطوح c ، أو ضعف السرعة السطحية ، هي $L^{2}T^{-1}$. وأبعاد $u = \frac{1}{r}$ (أو أبعاد $\frac{d^{2}u}{d\theta^{2}}$) هي L^{-1} . اذن أبعاد الطرف الايمن هي $(L^{2}T^{-1})^{2}(L^{-1})^{2}(L^{-1})$ أي LT^{-2} . فطرفا العلاقة لهما أبعاد واحدة هي LT^{-2} .

المثال الثاني : لو كنا نجهل أبعاد السرعة الزاوية ω مثلاً ، فمن العلاقة :

$$V = \omega a$$

التي تعين سرعة نقطة تتحرك على دائرة نصف قطرها a ، نجد أن أبعاد ω هي T^{-1} لأن بُعد a هو L وأبعاد V هي LT^{-1} .

المثال الثالث : لنفرض نقطة مادية خاضعة لقوة جاذبة متناسبة عكسا مع مربع بُعد النقطة عن مركز الجذب :

$$F = -\frac{\mu}{r^2}$$

لنعين أبعاد ثابت التناسب μ .

نعلم أن أبعاد F هي LMT^{-2} ، وبُعد r هو L ، فيكون أبعاد μ هي L^3MT^{-2} .

ونجد بسهولة أن أبعاد F في المجموعة L,F,T هي L^1F .

★ ★

تمارين

١ — احسب ثقل واحدة الكتل في كل من الجملتين : C. G. S و M. T. S .

٢ — ما هو قياس كيلوغرام كتلي في مجموعة واحداتها الاصلية هي : الكيلومتر ، والدقيقة ، والدينة .

٣ — جسم كتلته ١٠ طون بدأ يتحرك بعد أن كان ساكناً ، بتأثير قوة ثابتة عليه ، فاكتسب سرعة قدرها ٢٠ كم/سا بعد خمس ثوان . فما مقدار القوة المؤثرة في الجسم مقدرة في الجملتين C. G. S و M. T. S .

٤ — قانون الجذب العام : اذا وجدت نقطتان كتلة احداهما m والثانية m′ ، وتبعد إحداهما عن الاخرى بطول قدرة r ، فهاتان النقطتان تتجاذبان بقوتين متعاكستين مباشرة . فكل نقطة منهما تجذب الاخرى بقوة قياسها متناسب طرداً مع كتلتي النقطتين ، وعكساً مع مربع البعد بين النقطتين . فاذا رمزنا بـ F للقوة الجاذبة المؤثرة في احدى النقطتين ، وبـ f لامثال التناسب ، لكان :

$$F = -f \frac{m \cdot m'}{r^2}$$

فالمطلوب تعيين أبعاد أمثال التناسب f .

★ ★ ★

الفصل الثانى

توازن نقطة مادية طليقة

ساحة القوى والعمل :

٢٣٨ — ساحة القوى : اذا فرضنا في منطقة من الفراغ نقطة مادية خاضعة لقوة ، وفرضنا ان هذه القوة قد اكسبت النقطة تسارعاً تابعاً لموضع النقطة ، فعندئذ نقول ان هنالك ساحة قوى .

فساحة القوى هي ساحة أشعة . وجميع ما اوردناه في ساحة الاشعة ينطبق على ساحة القوى .

٢٣٩ — خطوط القوى : هي الخطوط (أو المنحنيات) التي يكون المماس لها في كل نقطة منهـا منطبقاً على القوة (وهو شعاع ساحة القوى) في تلك النقطة .

وقد رأينا (بند ١٣٧) أن هذه المنحنيات تتعين من المعادلات التفاضلية :

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}$$

وذلك بفرض أن (X, Y, Z) هي مركبات القوة $\mathbf{F}$ على المحاور الاحداثية وأن (x, y, z) هي أحداثيات النقطة M التي تؤثر فيها القوة .

٢٤٠ — تابع القوى : اذا فرضنا ساحة قوى ، وفرضنا أن القوة $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ المؤثرة في النقطة $M(x, y, z)$ ، وهي شعاع الساحة في M ، هي تدرج لتابع $U(x, y, z)$ ، فعندها نقول ان القوة $\mathbf{F}$ تشتق من تابع القوى U ، ونكتب :

$$d\mathbf{U} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{M}$$

أو

$$dU = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

ان جميع ما أوردناه في التدرج وسطوح السوية في مبحث ساحة أشعة بوجه عام ينطبق على ما يماثله في ساحة القوى .

٢٤١ - **العمل** : ان فكرة العمل مستوحاة من التجربة . فعندما يصعد رجل الى الدور الثالث من منزل وهو يحمل جسماً ثقيلاً ما ، فانه يقال بان الرجل قد قام بعمل يعادل ثلاثة امثال العمل الذي يقوم به حين يصعد الى الدور الاول فقط . كما يقال ايضاً بأن العمل الذي يقوم به رجل يصعد الى مكان مرتفع وهو يحمل اربعة اجسام متساوية في الثقل يعادل اربعة امثال ما يقوم به الرجل حين يصعد الى المكان نفسه وهو يحمل جسماً واحداً فقط .

يستدل مما سبق انه توجد علاقة بين القوة وانتقال النقطة التي تؤثر فيها القوة من جهة ، وبين العمل الناشيء من القوة والموافق لهذا الانتقال .

فاذا فرضنا قوة ثابتة تؤثر في نقطة مادية ، وفرضنا ان النقطة تتحرك في اتجاه القوة (كما هو الحال في سقوط جسم ثقيل في الفراغ) ، فانا نقول بأن عمل القوة الناشيء من انتقال النقطة المادية من موضع A الى موضع B يساوي الى جداء القوة بالمسافة المقطوعة AB . واذا رمزنا لقياس القوة المؤثرة بـ F ، وللعمل الناتج بـ ℭ لكان :

$$ℭ = F . AB$$

واذا فرضنا ان منحى القوة الثابتة غير منطبق على المستقيم الذي ترسمه النقطة ، ففي هذه الحالة يكون عمل القوة الناشيء عن انتقال النقطة من موضع A الى موضع B مساوياً الى جداء قياس القوة بمسقط الانتقال AB على القوة F (باعتبار F محوراً) ، أي يكون :

$$ℭ = \mathbf{F . AB}$$

فالعمل مقدار جبري . ونسميه بالعمل المحرك اذا كانت قيمته موجبة ، وبالعمل المقاوم اذا كانت قيمته سالبة .

٢٤٢ - **العمل الجزئي** : اذا فرضنا بوجه عام ان القوة المؤثرة في نقطة مادية

M هي متحولة ، أو أن انتقال النقطة غير واقع على مستقيم ، فعندها نبحث عن عمل القوة الموافق لانتقال جزئي للنقطة ، وهو ما نسميه بالعمل الجزئي .

فاذا فرضنا ان النقطة ترسم منحنياً ما ، وفرضنا أن M هو موضع النقطة في لحظة ما t على هذا المنحني ، و M_1 موضع النقطة في اللحظة $t_1 = t + dt$ يكون

$$M_1 = M + dM$$

واذا رمزنا بـ F للقوة المؤثرة في M ، وبـ $d\mathfrak{T}$ للعمل الجزئي للقوة F في الفترة الزمنية dt ، لكان :

$$d\mathfrak{T} = F \cdot dM \qquad (2)$$

واذا لاحظنا ان

$$V = \frac{dM}{dt}$$

لكان

$$d\mathfrak{T} = F \cdot V \cdot dt$$

ونرى أن العمل الجزئي يكتب بدلالة إحداثيات النقطة ومركبات القوة على المحاور الاحداثية القائمة oxyz كما يلي :

$$d\mathfrak{T} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \qquad (3)$$

٢٤٣ – العمل الكلي : لنفرض نقطة مادية M تتحرك على منحن c وخاضعة لقوة F . نسمي عمل F الناشىء من انتقال M على c من موضع M_1 الى آخر M_2 ، بالعمل الكلي الموافق للانتقال المذكور .

ولما كان العمل الكلي يساوي الى مجموع الاعمال الجزئية الموافقة ، فالعمل الكلي للقوة F يتعين اذن بالتكامل :

$$\mathfrak{T} = \int_{M_1}^{M_2} F \cdot dM$$

او

$$\mathfrak{T} = \int_{M_1}^{M_2} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

وبما ان القوة F تكون في الحالة العامة تابعة لموضع النقطة ، ولسرعتها ، وللزمن ، فمركبات القوة على المحاور الاحداثية تكون اذن توابع للمتغيرات :

$$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t$$

فلحساب العمل الكلي $\mathfrak{G}$ يجب أن تعلم اذن حركة M على مسارها c . ويتم ذلك اذا علمت إحداثيات النقطة بدلالة الزمن ، أي اذا علمت معادلات الحركة :

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

أو اذا علم المسار وقانون الحركة على المسار . فالمسار قد يتعين بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q)$$

وقانون الحركة على المسار يتعين بالمعادلة الزمنية :

$$q = q(t)$$

فاذا فرضنا ان النقطة كانت في اللحظة t_1 في الموضع M_1 ثم أضحت في اللحظة t_2 في الموضع M_2 ، فالعمل الكلي الناشىء من انتقال النقطة على مسارها من M_1 الى M_2 يكون :

$$\mathfrak{G} = \int_{t_1}^{t_2} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

واذا حسبنا العمل الجزئي بدلالة الزمن ، وكان :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = f(t)\,dt$$

فالعمل الكلي يصبح اذن :

$$\mathfrak{G} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

هذا ، واذا كانت هنالك ساحة قوى ، فمركبات القوة تكون توابع لاحداثيات النقطة فحسب . ولتعيين العمل الكلي في هذه الحالة ، يكفي معرفة مسار النقطة فقط (فلا حاجة لمعرفة قانون الحركة على المسار) .

فاذا كان المسار معيناً بالاحداثيات الوسيطية :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q)$$

وفرضنا ان q_1 هو قيمة الوسيط q في الموضع M_1 ، و q_2 قيمة الوسيط

في M_2 ، لكان العمل الناشىء من انتقال M على مسارها من الموضع M_1 الى M_2 هو :

$$\mathfrak{E} = \int_{q_1}^{q_2} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

واذا حسبنا العمل الجزئي بدلالة الوسيط q وكان :

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = Q(q)\,dq$$

لكان العمل الكلي :

$$\mathfrak{E} = \int_{q_1}^{q_2} Q(q)\,dq$$

وفي حالة أخص ، حين توجد ساحة قوى وتشتق القوة F من تابع قوى $U(x,y,z)$ ، فمركبات F تكون حينئذ مساوية للمشتقات الجزئية للتابع U :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

ويصبح العمل الجزئي :

$$d\mathfrak{E} = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz$$

أي

$$d\mathfrak{E} = dU$$

فاذا فرضنا ان U_1 هو قيمة تابع القوى في الموضع M_1 ، و U_2 قيمة التابع في M_2 ، فالعمل الكلي يصبح اذن :

$$\mathfrak{E} = U_2 - U_1$$

فالعمل الكلي يتعين في هذه الحالة ، اذا علم تابع القوى U ، وعلمت إحداثيات النقطة في الموضعين M_1 و M_2 .

ونلاحظ في هذه الحالة ، أن العمل الكلي لا يتوقف على شكل المسار الذي ترسمه النقطة ، كما لا يتوقف أيضاً على قانون الحركة الذي تسير بموجبه النقطة . فهو يتوقف على قيمتي التابع U في الموضعين M_1 و M_2 .

هذا ويمكن ان نقول في هذه الحالة أيضاً ، ان قيمة العمل الكلي لا تتغير

حين تنتقل النقطة المادية من اي موضع من سطح السوية $U = U_1$ الى اي موضع من السطح $U = U_2$.

النقطة الطليقة والنقطة المقيدة :

٢٤٤ – تعريف : نقول عن نقطة مادية انها طليقة ، اذا أمكنها التنقل دون عائق في جميع الجهات . ونقول عن نقطة مادية انها مقيدة اذا حال عائق دون حركتها في جهة واحدة أو في جهات متعددة .

فقطرة مطر مثلاً هي نقطة طليقة . وكرة صغيرة (اذا اعتبرت نقطة) موضوعة على مستو هي نقطة مقيدة ، والعائق هو المستوي .

ونرى أن القوى المؤثرة في نقطة مادية على نوعين :

(١) قوى مطبقة مباشرة في النقطة الطليقة أو المقيدة . وهي قوى معلومة ، وتدعى بالقوة المفروضة . كثقل النقطة (وهو قوة جذب الارض للنقطة) ، أو قوة الجذب (او الدفع) المغناطيسي للنقطة الموضوعة في ساحة مغناطيسية .

(٢) قوى ناشئة عن تأثير القيد في النقطة المقيدة . وهي قوى مجهولة . تختلف مقاديرها واتجاهاتها بحسب طبيعة القيد من جهة ، والقوى المفروضة المؤثرة في النقطة من جهة ثانية . وتدعى هذه القوى بقوى الرباط (أو قوى الصلة) ، كما تدعى أيضاً بردود الفعل . فالنقطة المربوطة بخيط تخضع لشد الخيط ، والكرة الموضوعة على منضدة تخضع لرد فعل المنضدة في النقطة .

توازن نقطة مادية :

٢٤٥ – تعريف : نقول عن نقطة مادية انها متوازنة ، اذا لم تكن خاضعة لأية قوة ، أو كانت خاضعة لمجموعة قوى ، وكانت حاصلة هذه القوى مساوية للصفر .

وينتج من هذا التعريف ، أنه في حالة التوازن يكون تسارع النقطة مساوياً للصفر .

نرى أنه حين تكون النقطة المتوازنة في لحظة ما ساكنة ، فانها تبقى أبداً ساكنة . أما ان كانت النقطة المتوازنة في لحظة ما متحركة ، فانها تبقى متحركة ، وتكون حركتها مستقيمة ومنتظمة .

نسمي الشكل الاول من التوازن بالتوازن السكوني ، والشكل الثاني منه بالتوازن الحركي .

٢٤٦ — أنواع التوازن : نقول عن النقطة المتوازنة الخاضعة لمجموعة قوى ان توازنها مستقر ، اذا زحزحت النقطة عن موضعها التوازني قليلاً ، فعادت اليه بفضل القوى المؤثرة فيها . وان لم تعد ، بل سارت مبتعدة عن موضعها التوازني ، فعندها نقول عن التوازن انه غير مستقر أو قلق .

مثال: لنعين مواضع توازن نقطة مادية M خاضعة لقوة جاذبة F ، منبعثة من مركز ثابت o ، ومتناسبة مع بعد النقطة عن o .

نرى بسهولة أن موضع توازن النقطة هو المركز o ، لأن القوة F تنعدم في o . ثم ان موضع التوازن هذا وحيد ، لان القوة لا تنعدم إلا في o .

ونلاحظ ان هذا التوازن مستقر ، لانه حينما نزيح النقطة قليلاً عن موضعها التوازني o ، فالقوة المؤثرة في M والمتجهة نحو o ، تعيد النقطة الى موضعها التوازني o .

هذا ولو كانت القوة المؤثرة في النقطة دافعة ، فالمركز o يكون أيضاً الموضع الوحيد للتوازن . لكن هذا التوازن لا يكون مستقراً بل قلقاً . فعندما نزيح النقطة قليلاً عن موضعها التوازني o ، تصبح خاضعة لقوة دافعة متجهة بحيث تبعد M عن o .

توازن نقطة مادية طليقة :

٢٤٧ — شروط التوازن : اذا توازنت نقطة مادية طليقة تحت تأثير مجموعة قوى كان تسارع النقطة صفراً ، وكانت بالتالي حاصلة القوى المؤثرة فيها (وهي القوى المفروضة) مساوية للصفر .

وعلى العكس ، اذا كانت حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في نقطة طليقة صفراً وفرضت النقطة ساكنة في لحظة ما ، فانها تبقى ساكنة أبداً (مبدأ العطالة) أي تكون متوازنة .

اذن الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية طليقة ، هو أن تكون حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في النقطة مساوية للصفر .

ملاحظة : نرى أنه حين تتوازن نقطة مادية ، يكون الخط المضلعي للقوى المفروضة المؤثرة في النقطة مغلقاً .

لذلك يمكن القول ، ان الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية ، هو أن يكون مضلع القوى المفروضة المؤثرة في النقطة مغلقاً .

٢٤٨ - الشروط التحليلية للتوازن : اذا فرضنا أن موضع النقطة المادية معين باحداثياته الديكارتية (x, y, z) ، وان القوى المفروضة $\mathbf{F}_i$ معينة بمركباتها (X_i, Y_i, Z_i) على المحاور الاحداثية (ox, oy, oz) ، فحاصلة هذه القوى تكون :

$$\mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}_i$$

ومركبات هذه الحاصلة على المحاور الاحداثية تكون :

$$X = \Sigma X_i \qquad Y = \Sigma Y_i \qquad Z = \Sigma Z_i$$

فالشروط التحليلية للتوازن تكون اذن :

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0$$

وبما أن مساقط القوى المؤثرة في النقطة ، تكون في حالة التوازن تابعة لاحداثيات النقطة (x, y, z) ، فحين تعلم القوى المؤثرة في النقطة ، تؤلف معادلات التوازن مجموعة ثلاث معادلات ذات ثلاث مجاهيل . وحل هذه المجموعة يعين قيم احداثيات مواضع توازن النقطة .

٢٤٩ - تعيين مواضع التوازن : لتعيين مواضع التوازن ، نبحث عن النقط التي تكون فيها حاصلة القوى في النقطة مساوية للصفر . ويتم ذلك إما بطريقة شعاعية ، أو بطريقة تحليلية اعتماداً على معادلات التوازن .

مثال : $A_1A_2A_3A_4$ معين ، طول قطره A_1A_2 يساوي $2a$ ، وطول قطره A_3A_4 يساوي $2b$. نفرض نقطة مادية M مجذوبة من رؤوس المعين بقوى متناسبة مع أبعاد النقطة عن مراكز الجذب :

$$\mathbf{F_1} = \lambda \mathbf{MA_1} \qquad \mathbf{F_2} = \lambda \mathbf{MA_2} \qquad \mathbf{F_3} = \lambda \mathbf{MA_3} \qquad \mathbf{F_4} = \lambda \mathbf{MA_4}$$

λ مقدار موجب معلوم . عين مواضع توازن النقطة M .

الحل : الطريقة الشعاعية : بما ان الرأسين A_1 و A_2 متقابلان قطرياً ، فحاصلة القوتين $\mathbf{F_1}$ و $\mathbf{F_2}$ تكون :

$$\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \lambda(\mathbf{MA_1} + \mathbf{MA_2}) = 2\lambda\,\mathbf{Mo}$$

بفرض أن o هو مركز المعين . وكذلك نجد أن حاصلة القوتين $\mathbf{F_3}$ و $\mathbf{F_4}$ هي :

$$\mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} = \lambda(\mathbf{MA_3} + \mathbf{MA_4}) = 2\lambda\,\mathbf{Mo}$$

فحاصلة القوى المفروضة جميعها تكون اذن :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} + \mathbf{F_3} + \mathbf{F_4} = 4\lambda\,\mathbf{Mo}$$

فالنقطة M يمكن اعتبارها كأنها مجذوبة من مركز المعين o بقوة متناسبة مع بعد النقطة عن هذا المركز .

فتوازن النقطة يستلزم اذن ان يكون :

$$\mathbf{Mo} = o$$

أي أن تقع النقطة M على المركز o . فمركز المعين هو موضع التوازن الوحيد للنقطة .

الطريقة التحليلية : لنختر مجموعة المحاور الاحداثية القائمة oxyz بحيث ينطبق المحوران ox و oy على الشعاعين $\mathbf{oA_1}$ و $\mathbf{oA_2}$ ، ويتحدان معهما في الاتجاه . فاحداثيات مراكز الجذب تكون :

$$A_1(a,0,0) \quad \text{و} \quad A_2(0,b,0) \quad \text{و} \quad A_3(-a,0,0) \quad \text{و} \quad A_4(0,-b,0)$$

واذا رمزنا لاحداثيات M بـ (x,y,z) ، ولاحظنا ان :

$$\mathbf{F}_i = \lambda \mathbf{M}\mathbf{A}_i = \lambda(o\mathbf{A}_i - o\mathbf{M})$$

لوجدنا أن مركبات القوى المفروضة على المحاور الاحداثية هي :

$$X_1 = \lambda(a - x) \qquad Y_1 = -\lambda y \qquad Z_1 = -\lambda z$$

$$X_2 = -\lambda x \qquad Y_2 = \lambda(b - y) \qquad Z_2 = -\lambda z$$

$$X_3 = -\lambda(a + x) \qquad Y_3 = -\lambda y \qquad Z_3 = -\lambda z$$

$$X_4 = -\lambda x \qquad Y_4 = -\lambda(b + y) \qquad Z_4 = -\lambda z$$

ولكانت مركبات الحاصلة $\mathbf{F}$ على المحاور الاحداثية هي :

$$X = -4\lambda x \qquad Y = -4\lambda y \qquad Z = -4\lambda z$$

ونعلم ان شروط التوازن هي :

$$X = o \qquad Y = o \qquad Z = o$$

اذن يجب ان يكون :

$$x = o \qquad y = o \qquad z = o$$

فمبدأ الاحداثيات o وهو مركز المعين ، هو موضع التوازن .

ملاحظة : نرى ان التوازن في o هو مستقر ، لان حاصلة القوى المؤثرة في النقطة M هي قوة جاذبة منبعثة من المركز o ومتناسبة مع بعد النقطة عن o . وقد رأينا في مثال سابق (صفحة ١٩٨) ان هذا التوازن مستقر .

٢٤٧ ـ حالات خاصة في التوازن : لقد بحثنا في شروط توازن نقطة مادية خاضعة لمجموعة ما من القوى . سندرس الآن بوجه خاص توازن نقطة في الحالات الخاصة التالية :

النقطة خاضعة لقوتين ، النقطة خاضعة لثلاث قوى ، النقطة خاضعة لقوى حاصلتها تشتق من تابع قوى .

الحالة الأولى : النقطة خاضعة لقوتين : نرى بسهولة ان الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة تحت تأثير قوتين ، هو ان تكون هاتان القوتان متعاكستين مباشرة .

مثال : لنعين توازن نقطة مادية ثقيلة M ، ثقلها P ، يجذبها مركز ثابت o بقوة متناسبة مع بعد النقطة عن المركز o .

الحل : نرى ان النقطة M خاضعة لقوتين هما الثقل ، والقوة الجاذبة :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{P} \qquad \mathbf{F}_2 = -\lambda P \cdot \mathbf{oM}$$

(بفرض ان λP امثال التناسب ، و λ مقدار موجب معلوم) .

فلكي تتوازن النقطة يجب ان تكون هاتان القوتان متعاكستين مباشرة . وبما ان منحى الثقل شاقولي دوماً ، فيجب اذن ان تقع M على الشاقول الهابط ، وفي موضع A بحيث يكون :

$$\lambda P \cdot oA = P$$

أو

$$oA = \frac{1}{\lambda}$$

فالنقطة A هو الموضع الوحيد للتوازن .

هذا ويمكن ، في هذه الحالة ، تعيين مواضع التوازن بطريقة شعاعية :

ان حاصلة القوتين المؤثرتين في النقطة هي :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -P\mathbf{K} - \lambda P\, \mathbf{oM}$$

(بفرض ان K هو شعاع الواحدة للمحور الشاقولي الصاعد oz) فيكون :

$$\mathbf{F} = -\lambda P \left(\frac{\mathbf{K}}{\lambda} + \mathbf{oM} \right)$$

فاذا اخذنا على المحور الشاقولي oz نقطة A بحيث يكون :

$$\mathbf{Ao} = \frac{\mathbf{K}}{\lambda}$$

أي اذا اخذنا على الشاقول الهابط oz' نقطة A تبعد عن o بقدر $\frac{1}{\lambda}$ ، فالقوة F تصبح :

$$\mathbf{F} = -\lambda P \left(\mathbf{Ao} + \mathbf{oM} \right) = -\lambda P\, \mathbf{AM}$$

فالنقطة M يمكن اعتبارها اذن خاضعة لقوة وحيدة F ، وهي قوة جاذبة

منبعثة من مركز ثابت A ، ومتناسبة مع بعد M عن المركز A .

فلكي تتوازن M يجب ان يكون $\mathbf{F} = o$

وبالتالي $\mathbf{AM} = o$

فمركز الجذب A هو نفسه موضع التوازن .

ملاحظة : نرى بسهولة ، انه لو كانت القوة $\mathbf{F}_1$ دافعة ، بأن كانت :

$$\mathbf{F}_1 = \lambda \mathbf{P} \cdot o\mathbf{M}$$

فالنقطة M تكون متوازنة في موضع A' ، هو نظير A بالنسبة للنقطة o .

الحالة الثانية : النقطة المادية خاضعة لثلاث قوى : كي تتوازن نقطة تحت تأثير ثلاث قوى يجب ان يكون مضلع هذه القوى مغلقاً ، او ان تكون احدى القوى الثلاث معاكسة مباشرة لحاصلة القوتين الباقيتين . فشروط التوازن هي اذن :

١ ـ أن تكون القوى الثلاث في مستو واحد .

٢ ـ أن يمكن انشاء مثلث من ثلاث قوى مساوية للقوى المفروضة $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$. ويتم ذلك اذا تحققت العلاقات الآتية :

$$\frac{\mathbf{F}_1}{\sin(\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3)} = \frac{\mathbf{F}_2}{\sin(\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_1)} = \frac{\mathbf{F}_3}{\sin(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2)}$$

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) + (\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3) + (\mathbf{F}_3, \mathbf{F}_1) = 2\pi$$

والخلاصة ، تتوازن النقطة الخاضعة لثلاث قوى ، اذا كانت هذه القوى في مستو واحد ، وكانت كل واحدة منها غير واقعة في زاوية القوتين الباقيتين ، وكان قياس كل منها متناسباً مع جيب زاوية القوتين الباقيتين .

مثال : برهن انه اذا فرضت ثلاث قوى مطبقة وفق المنصفات الداخلية لزوايا مثلث ومتناسبة مع جيوب تمام أنصاف زوايا المثلث الموافقة لهذه القوى ، ومتجهة نحو رؤوس المثلث ، فان هذه القوى تكون متوازنة .

الحل : ليكن ABC المثلث ، و F_a و F_b و F_c القوى المطبقة وفق منصفات الزوايا A و B و C على التوالي .

نرى ان هذه القوى تتلاقى في نقطة واحدة o ، هي نقطة تلاقي منصفات المثلث . فيمكن اذن اعتبار هذه القوى مؤثرة في النقطة o . فتوازن القوى يؤول الى توازن o .

ونعلم ان النقطة o تتوازن اذا تحققت الشروط التالية :

(١) ان تكون القوى الثلاث المؤثرة فيها في مستو واحد . وهذا الشرط محقق .

(٢) ان تقع كل من هـذه القوى خارج زاوية القوتين الباقيتين . ونرى بسهولة ان هذا الشرط قد تحقق ايضاً .

(٣) ان تحقق قياسات القوى ما يلي :

$$\frac{F_a}{\sin BoC} = \frac{F_b}{\sin CoA} = \frac{F_c}{\sin AoB}$$

ونرى ان هذا الشرط يتحقق ايضاً اذا ما رجعنا الى الفرض وهو :

$$\frac{F_a}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{F_b}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{F_c}{\cos \frac{C}{2}}$$

وادركنا ان $\widehat{BOC} = \pi - \frac{\hat{B}+\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\hat{A}}{2}$

وان $\sin BoC = \cos \frac{A}{2}$

وكذلك $\sin CoA = \cos \frac{B}{2}$

و $\sin AoB = \cos \frac{C}{2}$

الحالة الثالثة : حاصلة القوى تشتق من تابع قوى : لنفرض ان هنالك ساحة قوى ، وان حاصلة القوى المؤثرة في النقطة المادية $M(x,y,z)$ تشتق من تابع قوى $U(x,y,z)$. ففي هذه الحالة تكون مركبات القوة الحاصلة مساوية للمشتقات الجزئية للتابع U :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

فالشروط التحليلية لتوازن النقطة M ، وهي :

$$X = o \qquad Y = o \qquad Z = o$$

تصبح اذن :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = o \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = o \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = o$$

ونرى ان هذه العلاقات هي المعادلات التي نعمد الى حلها حين نبحث عن النهايات العظمى والصغرى للتابع $U(x, y, z)$.

هذا وسنبين كيف ان التوازن في موضع $P(a, b, c)$ يكون مستقراً حين يبلغ التابع $U(x, y, z)$ في النقطة P نهاية عظمى ، ويغدو قلقاً حين يبلغ التابع نهاية صغرى .

بالحقيقة، لنفرض ان التابع U يبلغ نهاية عظمى في موضع التوازن P . فاذا أزحنا النقطة عن P الى موضع مجاور M_1 ، يكون $U(M_1) < U(P)$. فالقوة المؤثرة في M_1 ، وهي عمودية على سطح السوية في M_1 ، تكون متجهة نحو P (اي نحو المنطقة التي يتزايد فيها التابع U ، بند ١٣٦) . اذن القوة في M_1 تعمل على اعادة النقطة الى موضع التوازن P . فالتوازن في P مستقر .

واذا فرضنا ان التابع U يبلغ نهاية صغرى في موضع التوازن Q ، وأزحنا النقطة عن Q الى موضع مجاور M_2 ، يكون $U(M_2) > U(Q)$. فالقوة في M_2 لا تتجه نحو Q ، بل تتجه بحيث تبعد النقطة عن Q . فالتوازن في Q قلق .

مثال : لندرس توازن نقطة M خاضعة لقوة متناسبة مع بعد M عن مركز ثابت o .

الحل : اذا رمزنا للشعاع $\mathbf{oM}$ بـ $\mathbf{r}$ ، فالقوة المؤثرة في M تكون :

$$\mathbf{F} = \lambda . \mathbf{r}$$

λ مقدار جبري ثابت ، وهو موجب اذا القوة دافعة ، وسالب اذا القوة جاذبة .

واذا لاحظنا ان العمل الجزئي للقوة هو :

$$d\mathcal{E} = \mathbf{F} . d\mathbf{M} = F . dr = \lambda r dr$$

لأدركنا ان القوة $\mathbf{F}$ تشتق من تابع القوى :

$$U = \lambda \frac{r^2}{2}$$

فاذا $\lambda < o$ يكون للتابع U نهاية واحدة ، وهي عظمى ، من اجل $r = o$. فالمركز o هو موضع توازن للنقطة ، والتوازن مستقر .

واذا $\lambda > o$ يكون للتابع U نهاية واحدة ، وهي صغرى ، من اجل $r = o$. فالمركز o هو موضع توازن ، والتوازن قلق .

والخلاصة : تتوازن النقطة في المركز o ، ويكون التوازن مستقراً او قلقا حسبما تكون القوة المؤثرة في النقطة جاذبة او دافعة .

★ ★

تمارين

١ — M نقطة مادية ترسم قوساً AB من منحن مفروض C ، وهي خاضعة لقوة مقاومة قياسها متناسب مع مربع سرعة النقطة واتجاهها يعاكس شعاع السرعة . فالمطلوب حساب العمل الناشىء من انتقال النقطة على القوس AB التي طولها ℓ ، وذلك في الحالتين التاليتين :

(١) حركة M منتظمة ، وسرعتها معلومة وتساوي v .

(٢) حركة M متغيرة بانتظام ، سرعتها في لحظة البدء (في الموضع A) تساوي الصفر ، وسرعتها في الموضع B يساوي v .

٢ — M نقطة مادية كائنة في مستوي الاحداثيات xoy ، وخاضعة لقوة مركبتاها هما : $X = y^2$ $Y = x^2$

احسب العمل الناشىء من انتقال النقطة على القطعة المستقيمة الواصلة بين $A(1, o)$ و $B(o, 1)$.

٣ — M نقطة مادية ثقيلة كتلتها الواحدة تتحرك على اللولب :

$$x = a\cos\theta \qquad y = a\sin\theta \qquad z = b\theta$$

وفق القانون $\theta = e^{-\lambda t}$

يؤثر في النقطة قوة جاذبة عمودية على المحور oz ، حاملها يلاقي ابداً oz ، وقياسها يتناسب مع بعد النقطة عن oz . ويؤثر في النقطة ايضاً قوة مقاومة قياسها يتناسب مع سرعة النقطة واتجاهها يعاكس شعاع السرعة . احسب عمل القوى المؤثرة حين تنتقل النقطة على اللولب وتدور دورة كاملة حول oz .

٤ — لدينا ساحة قوى تشتق من التابع :

$$U = \frac{x^2 + y^2}{x}$$

(١) عين خطوط القوى .

(٢) لتكن M نقطة مادية في ساحة القوى المفروضة . احسب العمل الناشىء من انتقال M على المنحني :

$$x + y^2 = 2$$

حين يزداد ترتيبها من الصفر الى الواحد .

٥ — نفرض نقطة مادية $M(x, y, z)$ خاضعة لقوة $F(X, Y, Z)$ تشتق من تابع قوى $U(x, y, z)$. عين F و U اذا علم :

(١) ان خطوط القوى هي القطوع المكافئة :

$$y = \lambda x \qquad z = \mu x^2 \qquad (\lambda \text{ و } \mu \text{ وسيطان})$$

(٢) ان مركبة F العمودية على المحور oz ليست تابعة إلا لبعد M عن هذا المحور .

٦ — M نقطة مادية ثقيلة تجذبها نقطتان ثابتتان A و B بقوتين شدتاهما $\frac{kp}{MA}$ و $\frac{kp}{MB}$ (k مقدار ثابت مفروض ، و P ثقل النقطة) . عين توازن M اذا فرض ان النقطتين A و B كائنتان على مستقيم أفقي ، وان البعد بينهما يساوي ℓ .

٧ — اذا فرضت ثلاث قوى مطبقة وفق ارتفاعات مثلث حاد الزوايا ، ومتناسبة مع الاضلاع العمودية على القوى ، ومتجهة الى رؤوس المثلث ، فان هذه القوى تكون متوازنة .

كيف يجب ان نوجه القوى لكي تتوازن حين يكون المثلث قائماً او منفرج الزاوية .

٨ — ما هي الشروط التي يجب ان تحققها ثلاث قوى مطبقة وفق اقطار مثلث ، لكي تتوازن هذه القوى .

٩ — عين مواضع توازن نقطة مادية تجذبها رؤوس مثلث بقوى متساوية .

١٠ — A و B و C ثلاث نقط موضوعة على التوالي على مستقيم $BA = 40\text{ m}$ و $BC = 20\text{ m}$. ننشىء من B مستقيماً Bz يصنع مع BC زاوية قدرها $\frac{\pi}{3}$ ، وننشىء من C عمودا CD على Bz . ثم نصل AD . نطبق في D قوة F قياسها 10 kg ، متجهة وفق المحور Bz . اوجد قياسي قوتين بحيث اذا طبقنا الاولى وفق DA والثانية وفق DC ، كانت النقطة D الخاضعة للقوى الثلاث متوازنة .

الفصل الثالث

توازن نقطة مادية مقيدة بدون احتكاك

٢٤٨ – النقطة الملازمة لسطح أو سلك : نقول عن نقطة إنها ملازمة لسطح او سلك اذا لم تستطع الحركة إلا في اتجاهات هذا السطح أو السلك .

ولتقريب فكرة ملازمة نقطة لسطح نتصور كرة صغيرة تنزلق بين سطحين يتباعدان على الدوام بمقدار قطر هذه الكرة . أما فكرة ملازمة نقطة لسلك فنتصورها في حلقة صغيرة تجري على السلك ، أو في كرة صغيرة تجري داخل أنبوب دقيق .

هذا وقد تكون النقطة المادية الملازمة لسطح او سلك موضوعة بحيث تستطيع الانفكاك عنه ، ككرة صغيرة موضوعة على منضدة ، او كرة صغيرة موضوعة على سلك دائري (داخل الدائرة أو خارجها) .

فنقول في هـذه الحالة إن الملازمة وحيدة الجانب ، تمييزاً لها عن الملازمة ذات الجانبين التي أوردناها سابقاً (كحالة الكرة الصغيرة التي تنزلق بين سطحين ، او داخل أنبوب) .

٢٤٩ – ملاحظة : قد تربط النقطة المادية M بخيط لدن غير قابل للتمدد ويكون هذا الخيط (الذي يهمل ثقله) مشدوداً بحيث ينتهي طرفه الآخر بنقطة ثابتة .

فيمكن اعتبار النقطة المربوطة بخيط مشدود كأنها موضوعة داخل كرة مركزها النقطة الثابتة ونصف قطرها طول الخيط ، بمعنى أنه يمكن اعتبار النقطة المربوطة بخيط مشدود كأنها ملازمة للكرة ، وأن الملازمة وحيدة الجانب .

فالنقطة تلازم السطح الداخلي للكرة طالما يكون الخيط مشدوداً ، وتنفك نحو داخل الكرة حين ينعدم الشد بأن يصبح الخيط رخواً .

نسمي القوة الناشئة من تأثير فعل الخيط بالنقطة M ، بشد الخيط ، ونرمز له بـ T . هذه القوة محمولة على الخيط ومتجهة نحو النقطة الثابتة . ونلاحظ ان شد الخيط يمثل رد فعل الكرة في النقطة M التي نعتبرها ملازمة لهذه الكرة .

٢٥٠ – توازن نقطة على سطح أو سلك صقيل : نقول عن سطح أو سلك بأنه صقيل اذا ساعد على توازن نقطة مادية واقعة عليه ، ما دامت حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في النقطة عمودية على هذا السطح أو هذا السلك .

نستنتج من ذلك أن توازن نقطة مادية على سطح أو سلك صقيل لا يتم إلا اذا كانت حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في النقطة صفراً أو عمودية على السطح أو السلك .

ولما كان للسطح في نقطة منه ناظم واحد ، وكان للسلك (اي المنحني) في نقطة منه نواظم عديدة (كائنة جميعها في مستو واحد هو المستوي الناظم للمنحني في تلك النقطة) ، فانا ندرك أن منحى حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في نقطة مادية والتي تحدث توازناً لها ، هو وحيد حالما تكون النقطة ملازمة لسطح ، ومتعدد اذا كانت النقطة ملازمة لسلك .

فشرط توازن نقطة مادية ملازمة لسلك او سطح صقيل (الملازمة ثنائية الجانب) هو أن تكون حاصلة القوى المفروضة والمؤثرة في النقطة ، صفراً أو ناظمية ، اي منطبقة على الناظم للسطح أو كائنة في المستوي الناظم للسلك في تلك النقطة .

هذا اذا كانت الملازمة ثنائية الجانب . أما في حالة الملازمة وحيدة الجانب فيضاف الى الشرط السابق ، الذي يحدد منحى حاصلة القوى المفروضة ، شرط آخر يعين اتجاه هذه الحاصلة بحيث تضغط النقطة على السطح أو السلك .

فشرط توازن نقطة مادية موضوعة على سطح أو سلك صقيل هو أن تكون

حاصلة القوى المفروضة والمؤثرة في النقطة صفراً أو عمودية على السطح أو السلك ومتجهة بحيث تضغط النقطة على السطح أو السلك .

٢٥١ — تعيين مواضع التوازن وردود الفعل : لتكن M نقطة مادية ملازمة لسطح أو سلك وخاضعة لقوى مفروضة حاصلتها F . لنفرق هذه الحاصلة الى قوتين : احداهما مماسية F_T (كائنة في المستوي المماس للسطح ، أو على المماس للسلك) ، والثانية ناظمية F_N (كائنة على الناظم للسطح ، أو في المستوي الناظم للسلك) .

وقد رأينا انه حين يكون السطح او السلك صقيلًا ، فالقوة الناظمية F_N يعاكسها رد الفعل (الذي يكون ناظمياً) فيفني عملها وأثرها في النقطة . أما القوة المماسية F_T فتغدو هي القوة المحركة للنقطة على السطح أو السلك .

فيمكن القول اذن ، ان شرط توازن نقطة على سطح او سلك صقيل هو ان تكون القوة المماسية صفرا .

فتعيين توازن نقطة على سطح او سلك صقيل يؤول اذن الى تعيين النقط التي تكون فيها القوة المماسية مساوية للصفر .

أما ردود الفعل فتتعين من القوى الناظمية . فاذا رمزنا بـ R لرد فعل السطح او السلك في النقطة يكون :

$$F_N + R = 0$$

والخلاصة ، ان مواضع التوازن تتعين مباشرة من العلاقة :

$$F_T = 0 \qquad (4)$$

ورد فعل السطح أو السلك في النقطة يتعين من العلاقة :

$$F_N + R = 0 \qquad (5)$$

مثال : M نقطة مادية ملازمة لقطع ناقص مفروض وخاضعة لقوتين منبعثتين من محرقي القطع C و C' . عين هاتين القوتين بحيث تتوازن النقطة في أي موضع من القطع .

الحل : رأينا أن النقطة تتوازن حين تكون حاصلة القوتين المفروضتين ناظمية . ونعلم ان الناظم للقطع الناقص ينصف داخلاً زاوية المحرقين CMC' . فلكي تتوازن النقطة يكفي اذن ان تكون القوتان المفروضتان متساويتين في القياس ومتجهتين معاً نحو المحرقين ، أو نحو الاتجاه المعاكس .

فالنقطة تتوازن اذن في أي موضع من القطع الناقص اذا كانت مجذوبة من محرقيه ، او مدفوعة منهما ، بقوتين متساويتين في القياس .

هذا ولو كانت ملازمة النقطة للقطع وحيدة الجانب ، بان كانت النقطة موضوعة على القطع ، إما داخله او خارجه ، فالنقطة تتوازن داخل القطع حين تكون القوتان دافعتين ، وتتوازن خارجه حين تكون القوتان جاذبتين .

٢٥٢ - الشروط التحليلية للتوازن : يمكن تعيين مواضع توازن نقطة مادية ملازمة لسطح او سلك صقيل ، وتعيين ردود الفعل ، بطريقة تحليلية .

سنبحث عن الشروط التحليلية لتوازن نقطة في الحالتين : التوازن على سلك صقيل ، ثم التوازن على سطح صقيل .

٢٥٣ - التوازن على سلك صقيل : لتكن $M(x, y, z)$ نقطة مادية خاضعة لقوة مفروضة $F(X, Y, Z)$ (او خاضعة لقوى مفروضة حاصلتها F) وملازمة لمنحن (او سلك) معين بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q) \qquad (6)$$

فقد رأينا ان النقطة تتوازن على سلك صقيل حين تكون القوة المماسية F_T معدومة ، او تكون القوة F ناظمية او معدومة .

واذا لاحظنا ان منحى المماس للمنحني في M يتعين بالشعاع $M'(q)$ (بفرض ان $M' \neq 0$) لأدركنا ان شرط التوازن يكون :

$$F \cdot M' = 0 \qquad (7)$$

او

$$X\frac{dx}{dq} + Y\frac{dy}{dq} + Z\frac{dz}{dq} = 0 \qquad (8)$$

لنفرض الآن ان القوة المفروضة F المطبقة في M هي تابعة لموضع M

فحسب ، فمركبات F على المحاور الاحداثية تكون تابعة لاحداثيات M ، وبالتالي للوسيط q . فاذا رمزنا للطرف الأيسر من العلاقة (8) بـ Q (q) لأصبح شرط التوازن :

$$Q(q) = 0 \qquad (9)$$

وحلول هذه المعادلة تعين مواضع التوازن على المنحني .

ونرى في هذه الحالة ان البحث عن مواضع التوازن يؤول الى البحث عن النهايات العظمى والصغرى لتابع للوسيط q . فاذا فرضنا ان :

$$U(q) = \int Q \cdot dq$$

او

$$dU = Q \cdot dq$$

فشرط التوازن يكون :

$$\frac{dU}{dq} = 0 \qquad (10)$$

والعلاقة الأخيرة تدل على أن تعيين شروط التوازن يؤول الى البحث عن النهايات العظمى والصغرى للتابع U (q) .

هذا واذا فرضنا ، بوجه خاص ، ان القوة F تشتق من تابع قوى U (x, y, z) ، فاننا نحصل على التابع U (q) بأن نستبدل بالاحداثيات (x, y, z) قيمها بدلالة q . ففي هذه الحالة يصبح سطح السوية المار من موضع للتوازن مماساً للمنحني في ذلك الموضع .

ونرى هنا ايضاً ان تعيين مواضع التوازن يرد الى البحث عن النهايات العظمى والصغرى للتابع U (q) . كما نرى ان النهايات العظمى يرافقها توازن مستقر ، والصغرى توازن قلق .

٢٥٤ - **ملاحظة :** لقد وجدنا ان مواضع توازن نقطة على سلك صقيل

تتعين بالمعادلة (9) . أما ردود الفعل في هـذه المواضع فتتعين من المعادلات الناتجة من إسقاط المعادلة العامة للتوازن ، وهي :

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0 \qquad (1)$$

على المحاور الاحداثية ، فنجد :

$$X + R_x = 0 \qquad Y + R_y = 0 \qquad Z + R_z = 0 \qquad (11)$$

والخلاصة ، ان مواضع التوازن وردود الفعل في هـذه المواضع تتعين بالمعادلة (9) وبمجموعة المعادلات (11) ، او من المعادلتين الشعاعيتين (7) و (1) .

٢٥٥ – التوازن على سطح صقيل : لتكن $M(x, y, z)$ نقطة مادية خاضعة لقوة $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ وملازمة لسطح S معين بمعادلته الديكارتية :

$$f(x, y, z) = 0 \qquad (12)$$

فقد رأينا ان النقطة تتوازن على سطح صقيل حين تكون القوة $\mathbf{F}$ ناظمية او معدومة .

واذا لاحظنا ان منحى الناظم في M للسطح S يتعين بالشعاع $\mathbf{n}(f'_x, f'_y, f'_z)$ (بفرض ان M نقطة عادية) فشرط التوازن يكون اذن :

$$\mathbf{F} \wedge \mathbf{n} = 0 \qquad (13)$$

او

$$\frac{X}{f'_x} = \frac{Y}{f'_y} = \frac{Z}{f'_z} \qquad (14)$$

اما ردود الفعل في مواضع التوازن فتتعين من المعادلات الناتجة من اسقاط المعادلة العامة للتوازن (1) على المحاور الاحداثية . ولما كانت مركبات ردّ الفعل في M متناسبة مع جيوب التمام الموجهة للناظم للسطح في M ، فالمعادلات المطلوبة تكون اذن :

$$X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (15)$$

ونرى ان شروط التوازن (14) تنتج من المجموعة (15) بحذف λ بين معادلات هذه المجموعة .

هذا ونلاحظ ان مواضع التوازن وردود الفعل في هـذه المواضع تتعين جميعها من المعادلة (12) والمعادلات (15) . فهـذه المعادلات الأربع تعين المجاهيل z و y و x و λ . بمعنى انهـا تعين مواضع التوازن وردود الفعل في تلك المواضع .

٢٥٦ - ملاحظة : رأينا ان النقطة M تتوازن على السطح S اذا حققت احداثياتها المعادلات (12) و (14) . لكن هذا التوازن يستلزم ان تكون ملازمة النقطة للسطح ثنائية الجانب .

أما اذا كانت الملازمة وحيدة الجانب ، بان كانت النقطة موضوعة على السطح بحيث تستطيع الانفكاك عنه نحو المنطقة التي يكون فيها التابع $f(x, y, z)$ سالباً مثلاً ، فانه يشترط لتوازن النقطة على السطح ان تكون القوة المفروضة F متجهة نحو المنطقة التي يكون فيها f موجباً ، وان يكون بالتالي رد الفعل (الذي يعاكس القوة) متجهاً نحو المنطقة التي يكون فيها f سالباً (اي نحو المنطقة التي تستطيع النقطة الانفكاك فيها عن السطح) .

وبما ان الشعاع $n(f'_x, f'_y, f'_z)$ يتجه (بالنسبة للسطح S) نحو المنطقة التي يكون فيها f موجباً (اعتماداً على النتيجة ، بند ١٣٦ ، بفرض ان $f(x, y, z) = C$ هو سطح سوية وان n هو تدرج التابع f) ، فيشترط اذن للتوازن ان يكون :

$$\lambda < 0$$

لأن $R = \lambda . n$

٢٥٧ — حالات خاصة : لنعين شروط التوازن وردود الفعل في الحالتين التاليتين :

(١) السلك معين بسطحين ، (٢) السطح معين بتمثيل وسيطي .

الحالة الأولى : لنفرض ان السلك معين بالسطحين :

$$f_1(x, y, z) = 0 \qquad f_2(x, y, z) = 0 \qquad (16)$$

نعلم ان رد فعل السلك في النقطة واقع في المستوي الناظم للسلك في تلك النقطة . فهو يقع اذن في المستوي المعين بالشعاعين :

$$n_1\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) \quad \text{و} \quad n_2\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)$$

العموديين على السطحين المفروضين . فاذا فرقنا رد الفعل $\mathbf{R}$ الى مركبتين $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ محمولتين على n_1 و n_2 ، فمواضع التوازن وردود الفعل تتعين آنئذ من المعادلات الناتجة من اسقاط المعادلة العامة للتوازن ، وهي :

$$\mathbf{F} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$$

على المحاور الاحداثية ، فنجد :

$$(17) \quad \begin{cases} X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

فاذا اضفنا الى هذه المعادلات معادلتي السلك (16) نحصل على مجموعة المعادلات التي تعين المجاهيل x و y و z و λ_1 و λ_2 .

واذا حذفنا λ_1 و λ_2 بين معادلات المجموعة (17) نحصل على المعادلة التي تعين شروط التوازن ، وهي :

$$(18) \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

ونرى أنه يمكن الحصول على هذه المعادلة مباشرة اذا ادركنا ان القوة $\mathbf{F}$ تقع (حين تتوازن النقطة) في المستوي الناظم للسلك ، او في المستوي المعين بالشعاعين n_1 و n_2 . فالأشعة $\mathbf{F}$ و n_1 و n_2 تقع في مستو واحد اذا كان :

$$(F , n_1 , n_2) = 0$$

أي اذا تحقق شرط التوازن (18) .

الحالة الثانية : لنفرض ان السطح S معين بالمعادلات الوسيطية :

$$x = x(q_1 , q_2) \qquad y = y(q_1 , q_2) \qquad z = z(q_1 , q_2)$$

نعلم ان النقطة M تتوازن على هذا السطح اذا كانت القوة المفروضة F عمودية في M على السطح ، اي عمودية على كل من المنحنيين المرسومين من M على S والمعينين بالوسيطين q_1 و q_2 على التوالي (اي بفرض ان q_2 و q_1 ثابتان على التوالي) . فشرط التوازن يكتب اذن :

$$\begin{cases} X\dfrac{\partial x}{\partial q_1} + Y\dfrac{\partial y}{\partial q_1} + Z\dfrac{\partial z}{\partial q_1} = 0 \\ X\dfrac{\partial x}{\partial q_2} + Y\dfrac{\partial y}{\partial q_2} + Z\dfrac{\partial z}{\partial q_2} = 0 \end{cases} \qquad (19)$$

كما يكتب بدلالة الوسيطين q_1 و q_2 بالشكل الآتي :

$$Q_1(q_1 , q_2) = 0 \qquad Q_2(q_1 , q_2) = 0 \qquad (20)$$

وحلول هاتين المعادلتين تعين مواضع التوازن .

وفي حالة خاصة اذا فرضنا ان الافادة : $Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$ هي تفاضل تام لتابع $U(q_1 , q_2)$ ، اي :

$$dU = Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2$$

فالشرط السابق للتوازن (20) يصبح في هذه الحالة :

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 \qquad (21)$$

ونرى في هذه الحالة ان البحث عن مواضع التوازن يرد الى البحث عن النهايات العظمى والصغرى للتابع $U(q_1 , q_2)$.

هذا واذا فرضنا بوجه خاص ان القوة F تشتق من تابع قوى $U(x, y, z)$ ، فانا نحصل على التابع $U(q_1 , q_2)$ بأن نستبدل بالاحداثيات (x, y, z) قيمها

بدلالة q_1 ، q_2 . ففي هـذه الحالة يصبح سطح السوية المار من موضع التوازن مماساً للسطح في ذلك الموضع (لان القوة F تكون عمودية في هـذا الموضع على سطح السوية وعلى السطح S معاً) .

٢٥٨ – ملاحظة : لتعيين ردود الفعل في مواضع التوازن ، يكفي ان نضيف الى شرط التوازن (20) او (21) المعـادلات الناتجة من اسقاط المعادلة العامة للتوازن ، وهي :

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$

على المحاور الاحداثية ، فنجد :

$$\begin{cases} X + R_x = 0 \\ Y + R_y = 0 \\ Z + R_z = 0 \end{cases} \qquad (22)$$

فمجموعة المعادلات (21) و (22) تعين المجاهيل الخمسة :

$$q_1 \, , \, q_2 \, , \, R_x \, , \, R_y \, , \, R_z$$

الوسيطان الهندسيان q_1 و q_2 يعينان موضع التوازن على السطح ، و R_x و R_y و R_z تعين رد الفعل في موضع التوازن .

★ ★

تمارين

١ — نقطة مادية ملازمة بدون احتكاك لقطع مكافىء وخاضعة لقوة ثابتة في الشدة منبعثة من نقطة ثابتة من محور القطع . عين توازن النقطة حين تكون ملازمتها للقطع ثنائية الجانب، ثم وحيدة الجانب .

٢ — M نقطة مادية ملازمة بدون احتكاك لقطع ناقص ومجذوبة من محرقيه C_1 و C_2 بقوتين :

$$F_1 = k.MC_1 \qquad F_2 = k.MC_2$$

k مقدار موجب ثابت . اوجد مواضع توازن M .

٣ — M نقطة مادية ملازمة بدون احتكاك لقطع ناقص (محوره الكبير AA' ، ومركزه o) وخاضعة للقوتين :

$$F_1 = k.MA \qquad F_2 = k.MO$$

k ثابت موجب . عين مواضع توازن M .

٤ — نقطة مادية ثقلها P ملازمة بدون احتكاك لدائرة شاقولية (مركزها o ونصف قطرها a) ومجذوبة من نقطة ثابتة C بقوة قياسها P . اوجد مواضع توازن النقطة في الحالات الآتية :

(١) C في مركز الدائرة . (٢) C في اعلى نقطة من الدائرة .

(٣) C على الشاقول الصاعد لمركز الدائرة، وتبعد عن المركز بقدر $3a$.

٥ — نقطة مادية ثقيلة ملازمة بدون احتكاك لقطع مكافىء (محوره شاقولي وذروته في اعلى نقطة منه) ومجذوبة من محرق القطع بقوة متناسبة مع بُعد النقطة عن محرق القطع . عين اوضاع توازن النقطة .

٦ — وضعت نقطة مادية ثقيلة (ثقلها P) على مستو مائل صقيل زاوية ميله x . عين الزاوية x بحيث تتوازن النقطة تحت تأثير ثقلها P وقوة ثانية قياسها $\frac{P}{2}$ متجهة بحيث تضغط النقطة على المستوي وتصنع مع الناظم للمستوي زاوية قدرها $2x$.

٧ – وضعت نقطة مادية ثقيلة (ثقلها P) بدون احتكاك على مستو مائل (زاوية ميله α) ، وقد ربطت بنقطة ثابتة (كائنة على خط الميل الاعظم للنقطة المفروضة) بوساطة خيط طوله ثابت ولا ثقل له .

(١) عين شد الخيط ورد فعل المستوي في النقطة .

(٢) اذا أعطيت الزاوية α قيماً متزايدة بدء من الصفر ، فالمطلوب تعيين α بحيث تستطيع النقطة الانفكاك عن المستوي .

٨ – M نقطة مادية ملازمة بدون احتكاك لكرة (نصف قطرها a ، ومركزها مبدأ الاحداثيات O) ، وخاضعة لساحة معينة بالمركبات :

$$X = \lambda m x \qquad Y = \lambda m y \qquad Z = -mg$$

m كتلة النقطة ، و λ عدد ثابت . عين مواضع توازن النقطة .

٩ – M نقطة مادية خاضعة لقوة F وملازمة بدون احتكاك لمنحن ثابت معين بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q)$$

ننشىء على هذا المنحني مماساً MT ونوجه هذا المماس باتجاه تتزايد فيه قيم الوسيط q . برهن ان جيب تمام الزاوية TMF هو من اشارة التابع $Q(q)$ او المشتق $U'(q)$ الواردين في البند ٢٥٣ . استنتج من ذلك ان موضع التوازن $q = q_1$ يكون مستقراً اذا انعدم Q (من اجل q_1) بعد ان تتغير قيمته (حين يزداد q) من قيمة موجبة الى سالبة ، او اذا كان للتابع U (من اجل q_1) نهاية عظمى .

١٠ – ادرس توازن نقطة مادية ثقيلة ملازمة للولب دائري مفروض (محور اللولب شاقولي) ومجذوبة من نقطة ثابتة من المحور بقوة متناسبة مع البعد .

١١ – ادرس توازن نقطة مادية M ملازمة بدون احتكاك لدائرة نصف قطرها a ، وخاضعة لقوة تمر ابداً من نقطة ثابتة A من محيط الدائرة وتقاس (باعتبار AM محوراً موجهاً) بالمقدار الجبري $\frac{a}{AM} - 1$.

الفصل الرابع

مبدأ العمل الافتراضي

العمل الافتراضي :

٢٥٩ – تعريف : اذا تحركت نقطة مادية M تحت تأثير قوة $\mathbf{F}$ وكان الانتقال الجزئي للنقطة هو $\mathbf{dM}$ ، فقد رأينا (بند ٢٤٢) ان عمل القوة $\mathbf{F}$ الموافق للانتقال الجزئي $\mathbf{dM}$ هو :

$$d\mathcal{E} = \mathbf{F} . \mathbf{dM}$$

واذا رمزنا بـ $\mathbf{V}$ لسرعة M ، وبـ dt للفترة الزمنية الموافقة للانتقال $\mathbf{dM}$ لكان :

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{dM}}{dt}$$

وكان بالتالي

$$d\mathcal{E} = \mathbf{F} . \mathbf{V} . dt$$

هذا واذا نقلنا النقطة M الخاضعة للقوة $\mathbf{F}$ وجعلناها ترسم مساراً اختيارياً ما ، ففي هذه الحالة نسمي الانتقال الجزئي للنقطة M بالانتقال الافتراضي ، ونرمز له بـ $\mathbf{\delta M}$ (تمييزاً له عن الانتقال الحقيقي $\mathbf{dM}$) ، ونسمي العمل الجزئي الموافق لهذا الانتقال بالعمل الافتراضي ، ونرمز له بـ $\delta\mathcal{E}$ ، ويكون

$$\delta\mathcal{E} = \mathbf{F} . \mathbf{\delta M}$$

واذا رمزنا بـ δt للفترة الزمنية الموافقة للانتقال $\mathbf{\delta M}$ ، وبـ $\mathbf{V}$ لسرعة M الموافقة لهذا الانتقال ، لكان :

$$\mathbf{\delta M} = \mathbf{V} . \delta t$$

وكان بالتالي :

$$\delta\mathcal{E} = \mathbf{F} . \mathbf{V} . \delta t$$

٢٦٠ ـ ملاحظة : نرى انه حين تكون نقطة ملازمة لسطح او سلك صقيل (الملازمة ثنائية الجانب) ، فالعمل الافتراضي لقوة الرباط (أي لرد فعل السطح او السلك في النقطة) من اجل انتقال افتراضي موافق للصلة (أي انتقال على السطح او السلك) يكون مساوياً للصفر (لأن رد الفعل عمودي على الانتقال) .

توازن نقطة طليقة أو مقيدة بدون احتكاك :

تمهيد : لقد وجدنا سابقاً شروط توازن نقطة مادية طليقة أو مقيدة بدون احتكاك ، اي الشروط التي يجب ان تحققها حاصلة القوى المفروضة لكي تتوازن النقطة .

سنبحث الآن عن هذه الشروط اعتماداً على مبدأ العمل الافتراضي .

٢٦١ ـ مبدأ العمل الافتراضي : الشرط اللازم والكافي لتوازن نقطة مادية طليقة او ملازمة لسطح او سلك صقيل (الملازمة ثنائية الجانب) هو ان يكون العمل الافتراضي لحاصلة القوى المفروضة (من أجل انتقال افتراضي موافق للصلة) مساوياً للصفر .

لزوم الشرط : لنفرض ان النقطة المادية M (الطليقة أو المقيدة) متوازنة ولنبرهن ان العمل الافتراضي لحاصلة القوى المفروضة $\mathbf{F}$ المطبقة في النقطة يساوي الصفر .

بالحقيقة ، عندما تتوازن M تكون حاصلة جميع القوى المؤثرة فيها (من قوى مفروضة وقوى رباط) مساوية للصفر ، أي :

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$

بفرض ان $\mathbf{R}$ هو قوة الرباط او رد الفعل (ويكون معدوماً حين تكون النقطة طليقة) . فمجموع الاعمال الافتراضية لهذه القوى ، من اجل انتقال افتراض ما يساوي الصفر :

$$\delta\mathfrak{W}(\mathbf{F}) + \delta\mathfrak{W}(\mathbf{R}) = 0$$

وبما ان العمل الافتراضي لرد الفعل (من اجل انتقال افتراضي موافق للصلة) يساوي الصفر ، فالعمل الافتراضي للقوة F يساوي اذن الصفر ، وهو المطلوب .

كفاية الشرط : لنفرض ان العمل الافتراضي لحاصلة القوى المفروضة F يساوي الصفر ، ولنبرهن ان النقطة M متوازنة .

بالحقيقة ، اذا لم تكن M متوازنة ، فتتحرك بتأثير القوى المؤثرة فيها (من قوى مفروضة وقوى رباط) ، وتكون حركتها حقيقية . فالعمل الجزئي لحاصلة هذه القوى يكون موجباً :

$$d\mathfrak{T}(\mathbf{F}) + d\mathfrak{T}(\mathbf{R}) > 0$$

وبما ان $d\mathfrak{T}(\mathbf{R}) = 0$

فيكون $d\mathfrak{T}(\mathbf{F}) > 0$

والعلاقة الناتجة تخالف الفرض الذي هو :

$$\delta\mathfrak{T}(\mathbf{F}) = 0$$

او $d\mathfrak{T}(\mathbf{F}) = 0$ (العمل الحقيقي هو عمل افتراضي خاص)

فالنقطة اذن لا تتحرك وتكون متوازنة وهو المطلوب .

٢٦٢ ـ تطبيقات : لنطبق مبدأ العمل الافتراضي للبحث عن شروط توازن نقطة مادية في الحالات التالية :

(١) النقطة طليقة ، (٢) النقطة ملازمة لسلك صقيل ، (٣) النقطة ملازمة لسطح صقيل .

٢٦٣ ـ النقطة طليقة : لنفرض نقطة طليقة $M(x, y, z)$ خاضعة لقوة $\mathbf{F}(X, Y, Z)$. فالعمل الافتراضي لهذه القوة هو :

$$\delta\mathfrak{T} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

فالنقطة M تتوازن اذا انعدم العمل الافتراضي للقوة F من اجل اي

انتقال افتراضي للنقطة (لان النقطة طليقة) ، أي اذا تحققت العلاقة :

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$$

مهما كان δx و δy و δz . ويتم ذلك اذا كان :

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0$$

وهذا ما وجدناه سابقاً .

٢٦٤ — النقطة ملازمة لسلك صقيل : لنبحث عن شروط التوازن حين يكون السلك معيناً : (١) بمعادلاته الوسيطية ، (٢) بسطحين .

١ — السلك معين بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q)$$

نعلم ان العمل الافتراضي لحاصلة القوى المفروضة $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ المطبقة في النقطة $M(x, y, z)$ هو :

$$\delta \mathfrak{T} = \mathbf{F} . \delta \mathbf{M} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

وان الانتقال الافتراضي الموافق للصلة (انتقال على السلك) هو :

$$\delta \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{M}}{dq}\,\delta q$$

مركبات هذا الانتقال على المحاور الاحداثية هي :

$$\delta x = \frac{dx}{dq}\,\delta q \qquad \delta y = \frac{dy}{dq}\,\delta q \qquad \delta z = \frac{dz}{dq}\,\delta q$$

فالنقطة M تتوازن اذن على السلك اذا تحققت العلاقة :

$$\left(X\frac{dx}{dq} + Y\frac{dy}{dq} + Z\frac{dz}{dq} \right) \delta q = 0$$

مهما كان δq .

واذا رمزنا لامثال δq في هذه العلاقة بـ $Q(q)$ ، فشرط التوازن يكون :

$$Q(q) = 0$$

وهذا ما وجدناه سابقاً (بند ٢٥٣) .

٢ — السلك معين بسطحين S_1 و S_2 ، معادلاتهما :

$$f_1(x, y, z) = 0 \qquad f_2(x, y, z) = 0$$

نعلم ان موضع نقطة ما $M(x, y, z)$ من السلك يتعين بوسيط واحد . فاذا اعتبرنا z مثلاً هو الوسيط ، لغدا الاحداثيان x و y تابعين لهذا الوسيط (اعتماداً على معادلتي السطحين) ، ولكان بين المركبات على المحاور الاحداثية للانتقال الافتراضي للنقطة الموافق للصلة ، العلاقتان :

$$\delta f_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0$$

$$\delta f_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0$$

واذا حسبنا δx و δy من هاتين العلاقتين لوجدنا :

$$\delta x = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}}\delta z$$

$$\delta y = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial z}}{\frac{\partial f_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x}}\delta z$$

فالنقطة M تتوازن على السلك اذا انعدم العمل الافتراضي لحاصلة القوى المفروضة $F(X, Y, Z)$ من اجل انتقال افتراضي موافق للصلة ، اي اذا تحققت العلاقة :

$$\left[X\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial z} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial y}\right) + Y\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial z}\right) + Z\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\right]\delta z = 0$$

مهما كان δz .

واذا لاحظنا ان امثال δz في هذه العلاقة هي مفكوك المعين :

$$\Delta = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}$$

فشرط التوازن يكون اذن $\Delta = 0$ ، او :

$$(\mathbf{F}\ ,\ \mathbf{n}_1\ ,\ \mathbf{n}_2) = 0$$

وهو الشرط الذي وجدناه سابقاً (بند ٢٥٧) .

٢٦٥ ـ **النقطة ملازمة لسطح صقيل** : لنبحث عن شروط التوازن حين يكون السطح معيناً : (١) بمعادلاته الوسيطية ، (٢) بمعادلته الديكارتية .

١ ـ السطح معين بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(q_1, q_2) \qquad y = y(q_1, q_2) \qquad z = z(q_1, q_2)$$

نعلم ان العمل الافتراضي للقوة المفروضة $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ المطبقة في النقطة $M(x, y, z)$ هو :

$$\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{M} = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

وان الانتقال الافتراضي الموافق للصلة (انتقال على السطح) هو :

$$\delta\mathbf{M} = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_2}\delta q_2$$

مركبات هذا الانتقال على المحاور الاحداثية هي :

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\delta q_2$$

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1}\delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\delta q_2$$

فالنقطة M تتوازن اذن على السطح اذا تحققت العلاقة :

$$\mathbf{F} \cdot \delta\mathbf{M} = \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} \cdot \delta q_1 + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_2}\delta q_2 = 0$$

مهما كان δq_1 و δq_2 .

واذا رمزنا لأمثال δq_1 في هذه العلاقة بـ Q_1 ، ولأمثال δq_2 بـ Q_2 :

$$Q_1 = \mathbf{F}.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_1} = X\frac{\partial x}{\partial q_1} + Y\frac{\partial y}{\partial q_1} + Z\frac{\partial z}{\partial q_1}$$

$$Q_2 = \mathbf{F}.\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial q_2} = X\frac{\partial x}{\partial q_2} + Y\frac{\partial y}{\partial q_2} + Z\frac{\partial z}{\partial q_2}$$

فشرط التوازن يكون :

$$Q_1 = 0 \qquad Q_2 = 0$$

وهو الشرط الذي وجدناه سابقاً (بند ٢٥٧) .

٢ — السطح معين بمعادلته الديكارتية :

$$f(x\,y\,z) = 0$$

نعلم ان موضع نقطة ما $M(x, y, z)$ من هذا السطح يتعين بوسيطين . فاذا اعتبرنا ان x و y هما الوسيطان لأضحى z تابعاً لهذين الوسيطين (اعتماداً على معادلة السطح) ، ولكان بين المركبات على المحاور الاحداثية للانتقال الافتراضي $\delta \mathbf{M}$ الموافق للصلة ، العلاقة :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$$

واذا حسبنا δz من هذه العلاقة لوجدنا :

$$\delta z = -\frac{f'_x}{f'_z}\delta x - \frac{f'_y}{f'_z}\delta y$$

فالنقطة M تتوازن على السطح اذا انعدم العمل الافتراضي للقوة المفروضة $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ من اجل انتقال افتراضي موافق للصلة ، اي اذا تحققت العلاقة :

$$(X f'_z - Z f'_x)\delta x + (Y f'_z - Z f'_y)\delta y = 0$$

مهما كان δx و δy . ويتم ذلك اذا كان :

$$X f'_z - Z f'_x = 0 \qquad Y f'_z - Z f'_y = 0$$

او

$$\frac{X}{f'_x} = \frac{Y}{f'_y} = \frac{Z}{f'_z}$$

وهو الشرط الذي وجدناه سابقاً (بند ٢٥٥) .

مثال : M نقطة مادية ملازمة بدون احتكاك للولب معادلاته :

$$x = a\cos\theta \qquad y = a\sin\theta \qquad z = b\theta$$

وخاضعة لقوة F معينة بمركباتها :

$$X = y \qquad Y = x \qquad Z = -P$$

P مقدار موجب معلوم ، و (x, y, z) احداثيات M . عين مواضع توازن M .

الحل : نعلم ان العمل الافتراضي للقوة المفروضة F هو :

$$\delta\mathfrak{C} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$$

او

$$\delta\mathfrak{C} = y\,\delta x + x\,\delta y - P\,\delta z$$

لنحسب قيمة هذا العمل بدلالة الوسيط θ :

$$\delta\mathfrak{C} = a\sin\theta\,(-a\sin\theta\,.\,\delta\theta) + a\cos\theta\,(a\cos\theta\,.\,\delta\theta) - P\,(b\,\delta\theta)$$

$$\delta\mathfrak{C} = (a^2\cos 2\theta - P\,b)\,\delta\theta$$

فالنقطة M تتوازن على اللولب اذا $\delta\mathfrak{C} = 0$ مهما كان $\delta\theta$ ، اي اذا :

$$a^2\cos 2\theta - P\,b = 0$$

فمواضع التوازن تتعين اذن بالمعادلة :

$$\cos 2\theta = \frac{P\,b}{a^2}$$

ويشترط لامكان الحل ان يكون $\frac{P\,b}{a^2} \leq 1$.

فاذا فرضنا ان $P\,b < a^2$ وان $\cos 2\alpha = \frac{P\,b}{a^2}$ تكون الحلول هي :

$$\theta = \pm\alpha + k\pi$$

وتكون مواضع التوازن على اللولب واقعة على اربعة مولدات من مولدات اسطوانة اللولب .

واذا فرضنا ان $P\,b = a^2$ تصبح الحلول : $\theta = k\pi$

وتكون مواضع التوازن واقعة على مولدين فقط .

مضاريب لاغرانج :

تمهيد : لقد بحثنا في شروط توازن نقطة ملازمة لسلك او سطح صقيل عندما كان السلك معيناً بوسيط q وكان السطح معيناً بوسيطين q_1 و q_2 ، او عندما كانت النقطة M (وبالتالي احداثياتها) تابعة لوسيط q او وسيطين q_1 و q_2 . ثم بحثنا في شروط توازن النقطة عندما كان السطح معيناً بمعادلة ديكارتية وكان السلك معيناً بمعادلتين ديكارتيتين ، او عندما كان بين احداثيات M علاقة واحدة (في حالة السطح) وعلاقتان (في حالة السلك) . ورددنا هاتين الحالتين الى سابقتيهما : فرددنا حالة السطح المعين بمعادلة ديكارتية الى حالة التمثيل الوسيطي للسطح (اعتماداً على معادلة السطح) ، ورددنا حالة السلك المعين بسطحين الى حالة التمثيل الوسيطي لسلك (اعتماداً على معادلتي السطحين ، او على العلاقتين بين احداثيات النقطة) . بمعنى أنا رددنا الحالة التي تكون فيها احداثيات النقطة غير مستقل بعضها عن بعض (بل مرتبطة فيما بينها بعلاقة او علاقتين) الى الحالة التي تكون فيها M تابعة لوسيط واحد او لوسيطين مستقلين .

سنبحث الآن في شروط التوازن حين تكون احداثيات M غير مستقلة (وذلك دون الرجوع الى الوسطاء المستقلة للنقطة) معتمدين بذلك على طريقة مضاريب لاغرانج .

سنبدأ بتطبيق هذه الطريقة على توازن نقطة على سطح ، ثم على سلك .

٢٦٦ - **التوازن على سطح** : لتكن $M(x, y, z)$ نقطة مادية خاضعة لقوة مفروضة $F(X, Y, Z)$ وملازمة لسطح صقيل S معين بالمعادلة :

$$f(x, y, z) = 0$$

نعلم ان :

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0 \qquad (23)$$

رأينا ان توازن M على S يستلزم ان يكون :

$$\delta \mathfrak{W} = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0 \qquad (24)$$

فاذا اضفنا الى العلاقة الاخيرة ، العلاقة (23) بعد ضرب طرفيها بوسيط λ ، لوجدنا :

$$\delta \mathfrak{W} + \lambda\,\delta f = 0$$

او

$$\left(X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}\right)\delta z = 0 \qquad (25)$$

وبما ان موضع M على S يتعين بوسيطين مستقلين فحسب ، فاذا اخترناهما x و y مثلا ، فالانتقال δz يصبح انتقالا تابعاً ، ويتعين من العلاقة (23) .

لنعين λ في العلاقة الاخيرة بحيث تنعدم امثال δz . وبما ان δx و δy هما انتقالان اختياريان ، فيجب اذن ان تكون امثال كل منهما مساوية للصفر . وهكذا نجد :

$$\begin{cases} X + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (26)$$

وهي المعادلات التي وجدناها سابقاً (بند ٢٥٥) .

نرى ان القوة الناشئة عن الصلة هي رد فعل السطح في النقطة . ويستدل ذلك من المعادلات (26) : فاذا اعتبرنا النقطة M طليقة ، فان هذه النقطة تتوازن تحت تأثير القوة المفروضة $F(X, Y, Z)$ وقوة ثانية مركباتها ($\lambda \dfrac{\partial f}{\partial x}$ و $\lambda \dfrac{\partial f}{\partial y}$ و $\lambda \dfrac{\partial f}{\partial z}$) . فهذه القوة الثانية ليست إلا رد الفعل الناظمي للسطح في النقطة . نسمي رد الفعل هذا بقوة الصلة ، وهي تنشأ عن القيد الذي تخضع اليه النقطة .

٢٦٧ — **التوازن على سلك** : لتكن $M(x, y, z)$ نقطة مادية خاضعة لقوة مفروضة $F(X, Y, Z)$ وملازمة لسلك صقيل c معين بالسطحين :

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0$$

نعلم انه يوجد بين المركبات δx و δy و δz العلاقتان :

$$(27) \quad \begin{cases} \delta f_1 = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f_1}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f_1}{\partial z}\delta z = 0 \\ \delta f_2 = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}\delta x + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}\delta y + \dfrac{\partial f_2}{\partial z}\delta z = 0 \end{cases}$$

وقد رأينا ان توازن M على c يستلزم ان يكون :

$$\delta \varpi = X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = 0$$

فاذا أضفنا الى العلاقة الاخيرة العلاقتين (27) بعد ان نضرب الاولى منهما بوسيط λ_1 والثانية بوسيط آخر λ_2 ، لوجدنا :

$$\delta \varpi + \lambda_1 \delta f_1 + \lambda_2 \delta f_2 = 0$$

او :

$$\left(X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}\right)\delta y +$$
$$\left(Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\delta z = 0$$

وبما ان موضع M على c يتعين بوسيط واحد فحسب ، فاذا اخترناه z مثلا ، فالانتقالان δx و δy يصبحان انتقالين تابعين ، ويتعينان من العلاقتين (27) .

لنعين λ_1 و λ_2 في العلاقة الاخيرة بحيث تنعدم امثال كل من δx و δy . وبما ان δz انتقال اختياري فيجب ان تكون امثاله مساوية للصفر .

وهكذا نجد :

$$\begin{cases} X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0 \\ Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \\ Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

وهي المعادلات التي وجدناها سابقاً (بند ٢٥٧) .

ويستدل من هذه المعادلات انه يوجد توازن بين القوة المفروضة F وبين قوتين هما :

$$\mathbf{R}_1 \left(\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} , \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} , \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) \quad , \quad \mathbf{R}_2 \left(\lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} , \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} , \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} \right)$$

هاتان القوتان هما ردا فعل السطحين في النقطة ، ونسميهما بقوتي الصلة . حاصلة هاتين القوتين هي رد الفعل الناظمي للسلك في النقطة .

★ ★

تمارين

١ — نفرض في مستو شاقولي محورين متعامدين احدهما ox وهو أفقي ، والآخر oy . M نقطة مادية ثقيلة (ثقلها P) ملازمة لأحد فرعي القطع المكافىء المعين كما يلي :

$$x \cdot y = 1 \qquad x > 0$$

اوجد قوة افقية F في المستوي xoy اذا أثّرت في M توازنت هذه النقطة في اي موضع من المنحني .

٢ — M نقطة مادية ثقيلة ، كتلتها m ، خاضعة لقوة افقية ثابتة F ، وقد ربطت بخيط ينتهي بنقطة ثابتة o . عين مواضع توازن M ، ثم عين شد الخيط في كل من هذه المواضع .

٣ — وضعت نقطة مادية ثقيلة على مستو مائل صقيل زاوية ميله φ . عين φ بحيث تتوازن النقطة تحت تأثير ثقلها P وتأثير قوتين قياس كل منهما $\frac{P}{2}$ ، احداهما افقية ومتجهة بحيث تضغط النقطة على المستوي ، والثانية محمولة على خط الميل الاعظم للمستوي ومتجهة نحو الأعلى .

٤ — وضعت نقطة مادية على السطح الخارجي لجسم قطع ناقص تحت تأثير قوة دافعة منبعثة من مركز مفروض ومتناسبة مع البعد . عين مواضع توازن هذه النقطة .

٥ — M نقطة مادية ثقيلة كتلتها m ملازمة للسيكلوئيد :

$$x = a(\varphi - \sin\varphi) \qquad y = a(1 - \cos\varphi)$$

نفرض ان هذا المنحني في مستو شاقولي وان oy شاقولي صاعد .

يؤثر في M قوة جاذبة منبعثة من المبدأ o ومتناسبة مع البعد . عين توازن M بفرض ان $0 < \varphi < 2\pi$.

الفصل الخامس

توازن نقطة مادية مقيدة مع احتكاك

٢٦٨ – شروط التوازن : لنفرض نقطة مادية M خاضعة لقوى مفروضة حاصلتها F وملازمة بوجه عام لسطح او سلك غير صقيل .

فاذا حللنا F الى قوتين احداهما مماسية F_T (واقعة في المستوي المماس في M للسطح او على المماس للسلك) والثانية F_N ناظمية (عمودية في M على السطح او كائنة في المستوي الناظم للسلك) فتكون النقطة M مدعوة بفعل F_N لاختراق السلك او السطح ومدعوة بفعل F_T للانزلاق عليه . فاذا ماتوازنت هذه النقطة المادية تحت تأثير الاحتكاك ، فما ذلك إلا لأن رد الفعل R قد تحلل ايضاً الى قوتين R_T و R_N تعاكسان مباشرة F_T و F_N .

واذا جعلنا المركبة المماسية F_T تأخذ قيماً مطلقة متزايدة ، فالتوازن يبقى قائماً حتى حد محدود لهذه القيم المتزايدة . فاذا اوشكت النقطة M على الخروج عن توازنها لتنزلق على السطح او السلك عندما يكاد يقهر رد الفعل R ، يقال عندئذ للمركبة المماسية لرد الفعل الأقصى بأنها تمثل قوة الاحتكاك .

وقد وجد ، بالتجربة ، انه من اجل حالة معينة للجسمين المتماسين تكون القيمة المطلقة لقوة الاحتكاك متناسبة مع القيمة المطلقة للمركبة الناظمية F_N .

فاذا رمزنا بـ F_1 لقوة الاحتكاك يكون :

$$|F_1| = f . |F_N|$$

f عدد ثابت تتوقف قيمته على طبيعة الجسمين المتماسين ويدعى أمثال الاحتكاك .

فشرط التوازن يكون اذن :

$$|F_T| < f . |F_N| \qquad (28)$$

٢٦٩ — نتيجة : لكي تتوازن نقطة على سطح او سلك غير صقيل تحت تأثير مجموعة قوى حاصلتها F يلزم ويكفي ان تكون القيمة المطلقة للمركبة المماسية لهذه الحاصلة أصغر من جداء القيمة المطلقة للمركبة الناظمية بأمثال الاحتكاك .

٢٧٠ — **ملاحظة** : يمكن التعبير عن هذه النتيجة هندسياً : لتكن x الزاوية الحادة الحادثة بين الحاصلة F والناظم للسطح ، فيكون :

$$|Ft| = |Fx| \cdot \operatorname{tg} x$$

لنفرض $\operatorname{tg} \varphi = f$ ، φ زاوية حادة تسمى زاوية الاحتكاك (وهي الزاوية الموافقة لقوة الاحتكاك) . فشرط التوازن يصبح :

$$\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} \varphi$$

أو

$$x < \varphi \qquad (29)$$

٢٧١ — نتيجة : لتوازن نقطة مادية M على سطح غير صقيل يلزم ويكفي ان تكون حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في M داخل مخروط دوراني (ذي فرعين) رأسه M ، محوره عمودي على السطح ، نصف زاويته الرأسية زاوية الاحتكاك φ . هذا المخروط يدعى مخروط الاحتكاك .

٢٧٢ — **ملاحظة** : ان هذه النتيجة في السطوح غير الصقيلة صحيحة في الاسلاك غير الصقيلة . ولما كان للسطح في نقطة منه ناظم واحد وكان للسلك (مستقيم كان او منحن) في نقطة منه نواظم عديدة ومماس واحد ، فانه يستعاض في الاسلاك عن مخروط الاحتكاك الذي محوره الناظم ونصف زاويته الرأسية φ بمخروط دوراني محوره المماس للسلك ونصف زاويته الرأسية $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. ومنه :

٢٧٣ — نتيجة : لتتوازن نقطة مادية M على سلك (منحن او مستقيم) يلزم ويكفي ان تكون حاصلة القوى المفروضة المؤثرة في M خارج مخروط دوراني (ذي فرعين) رأسه M ، محوره المماس في M ، نصف زاويته الرأسية الزاوية المتممة لزاوية الاحتكاك .

٢٧٤ - ملاحظة : ان كل ماذكرناه هو شروط توازن نقطة مادية ملازمة لسطح او سلك غير صقيل لا تستطيع الانفصال عنه . فاذا فرضت النقطة المادية موضوعة على السطح او السلك بحيث تستطيع الانفصال عنه من جهة او جهات عديدة فانه يضاف الى شروط التوازن شرط آخر هو ان تكون حاصلة القوى المفروضة متجهة بحيث تضغط النقطة على السطح او السلك .

٢٧٥ - تعيين رد الفعل : يتعين رد فعل السطح او السلك في النقطة المتوازنة من العلاقة الشعاعية :

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$

مثال : توازن نقطة مادية ثقيلة ملازمة لدائرة شاقولية غير صقيلة .

الحل : لو كانت الدائرة صقيلة فنقطتا تقاطع الشاقول $z'oz$ (o مركز الدائرة) مع الدائرة تكونان موضعي توازن وحيدين .

ولما كانت الدائرة غير صقيلة فشرط التوازن هو ان تكون φ الزاوية الحادة الحادثة بين الشاقول والناظم للدائرة في M (اي زاوية القوة المفروضة ، وهي الثقل ، والناظم) اصغر من زاوية الاحتكاك φ . فاذا رسمنا قطرين للدائرة BB' و CC' يصنع كل منهما مع القطر الشاقولي AA' زاوية تساوي φ ، فالنقطة المادية تكون متوازنة في أي موضع من نقط القوسين CBA و $C'A'B'$.

٢٧٦ - الشروط التحليلية للتوازن : لنعين بطريقة تحليلية شروط توازن نقطة على سلك غير صقيل ثم على سطح غير صقيل .

٢٧٧ - التوازن على سلك : لتكن $M(x, y, z)$ نقطة مادية خاضعة لقوى مفروضة حاصلتها $\mathbf{F}(X, Y, Z)$ ، وملازمة لسلك معين بمعادلاته الوسيطية :

$$x = x(q) \qquad y = y(q) \qquad z = z(q)$$

فقد رأينا ان النقطة تتوازن على هذا السلك اذا كان :

$$|F_T| < f_0 |F_N|$$

واذا لاحظنا ان :

$$| F_T | = \frac{| X x' + Y y' + Z z' |}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

وأن

$$F^2_N = F^2 - F^2_T$$

فشرط التوازن يكتب :

$$F^2_T < f^2 (F^2 - F^2_T)$$

او

$$(1 + f^2) F^2_T < f^2 F^2 \qquad (30)$$

وهذه العلاقة تكتب :

$$(1 + f^2) (X x' + Y y' + Z z')^2 < f^2 (X^2 + Y^2 + Z^2) (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

٢٧٨ — التوازن على سطح : لتكن $M (x, y, z)$ نقطة ملازمة للسطح :

$$g (x, y, z) = 0$$

نعلم ان :

$$| F_N | = \frac{| X g'_x + Y g'_y + Z g'_z |}{\sqrt{g'^2_x + g'^2_y + g'^2_z}}$$

واذا علمنا ان :

$$F^2_T = F^2 - F^2_N$$

فشرط التوازن يكتب :

$$F^2 - F^2_N < f^2 F^2_N$$

أو

$$F^2 < (1 + f^2) F^2_N \qquad (31)$$

وهذه العلاقة تكتب :

$$(X^2 + Y^2 + Z^2) (g'^2_x + g'^2_y + g'^2_z) < (1 + f^2) (X g'_x + Y g'_y + Z g'_z)^2$$

مثال : M نقطة مادية ثقيلة (ثقلها P) ملازمة مع وجود احتكاك (أمثاله f) لسطح معادلته :

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2z}{c} = 0$$

عين توازن M بفرض ان المحور oz شاقولي صاعد .

الحل : لنكتب شرط التوازن (31) . نعلم ان :

$$g'x = \frac{2x}{a^2} \qquad g'y = \frac{2y}{b^2} \qquad g'z = \frac{-2}{c}$$

ثم ان $X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = -P$

فشرط التوازن يكتب اذن :

$$4P^2\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{1}{c^2}\right) < (1 + f^2)\left(P\frac{2}{c}\right)^2$$

او بعد الاختصار :

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} < \frac{f^2}{c^2}$$

فالنقطة M تتوازن على السطح المفروض اذا وقعت داخل الاسطوانة المعينة بالمعادلة :

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \frac{f^2}{c^2} = 0$$

★ ★

تمارين

١ — M نقطة مادية ثقلها P موضوعة على مستو مائل زاوية ميله α تحت تأثير قوة ثابتة في القياس منبعثة من نقطة ثابتة واقعة فوق المستوي وتبعد عنه بقدر d . عين اوضاع توازن M بفرض وجود احتكاك امثاله $\frac{1}{2}$ tg α .

٢ — نقطة مادية ثقلها P تتحرك بتحاك على مستو أفقي وتجذبها نقطة ثابتة (واقعة تحت المستوي وتبعد عنه بقدر d) بقوة متناسبة مع البعد . أوجد أوضاع توازن النقطة .

أعد المسألة السابقة بعد ان تستبدل بقوة الجذب قوة دفع .

٣ — وضعت نقطة مادية ثقلها P على مستو مائل غير صقيل زاوية ميله α ، وامثال الاحتكاك f . يؤثر في النقطة قوة افقية F شدتها P كائنة في المستوي الشاقولي المار من خط ميل النقطة ومتجهة بحيث تساعد على صعود النقطة على هذا الخط . ما هي الحدود التي يجب ان تتغير ضمنها الزاوية α كي تبقى النقطة متوازنة ؟

٤ — نقطة مادية ثقيلة موضوعة على المخروط :

$$ax^2 + by^2 - z^2 = 0$$

a و b ثابتان موجبان . عين توازن النقطة بفرض ان امثال الاحتكاك هو f وان المحور oz شاقولي صاعد .

٥ — عين المناطق التي تتوازن فيها نقطة مادية ثقيلة ملازمة لسلك اولي ذي محور أفقي .

مسائل عامة

١ — a و b و c و d و V أشعة طليقة مرتبطة بالعلاقة :

$$V = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d)$$

(١) بين ان V يوازي مستويين ، أحدهما يوازي a و b ، والثاني يوازي c و d .

(٢) فرّق V الى مركبتين موازيتين للشعاعين a و b ، ثم الى مركبتين موازيتين للشعاعين c و d . عين هذه المركبات .

(٣) بين ان V يوازي c حين تكون الاشعة a و b و c موازية لمستو واحد .

٢ — لدينا شعاعان $V_1(o, k, o)$ و $V_2(o, o, k)$ مبدأ الاول $M_1(a, o, o)$ والثاني $M_2(o, b, o)$. أوجد نقطة M في المستوي oxy بحيث يكون مجموع الشعاعين موازياً لمجموع عزمي هذين الشعاعين بالنسبة لنقطة M .

٣ — لدينا اللولب الدائري :

$$x = a\cos t \qquad y = a\sin t \qquad z = bt$$

(١) احسب ds و $d\sigma$ (s و σ الفصلان المنحنيان لنقطة منه على المنحني المفروض والدليل الكروي للمماسات) بفرض ان الاتجاه الموجب على اللولب يوافق قيم t المتزايدة .

(٢) عين في نقطة منه مركبات اشعة الواحدة T و N و B على المحاور الاحداثية oxyz . ثم تحقق من النتيجة الواردة في البند ٢٩٩، وهي أن اللولب هو خط جيوديزي للأسطوانة الدورانية التي يقع عليها اللولب .

(٣) احسب تقوس اللولب في نقطة ما منه . ثم تحقق من القيمة الواردة في البند ٢٩٩ .

٤ - لدينا ساحة معينة بالشعاع :

$$X = \frac{y}{z} \qquad Y = \frac{x}{z} \qquad Z = -\frac{xy}{z^2}$$

(١) اوجد خطوط قوى الساحة .

(٢) بين أن شعاع الساحة هو تدرج لتابع . عين هذا التابع .

(٣) عين سطوح السوية .

٥ - M نقطة مادية ثقيلة (ثقلها P) يجذبها مركز الاحداثيات o بقوة متناسبة عكساً مع مربع البعد (ثابت التناسب هو $a \cdot a^2 P$ مقدار موجب معلوم) .

(١) برهن ان حاصلة القوتين المؤثرتين في النقطة تشتق من تابع قوى . عين هذا التابع .

(٢) عين باختصار الاشكال المختلفة لمقاطع سطوح السوية مع المستوي xoy (بفرض ان المحور ox شاقولي هابط) .

(٣) عين خطوط قوى الساحة .

٦ - ادرس (اعتباراً من مبدأ الزمن) الحركات المستقيمة الآتية :

$$x = a e^{-\omega t}$$

$$x = ate^{-kt}$$

$$x = ae^{-kt} \sin \omega t$$

بفرض ان a و ω و k ثوابت موجبة .

٧ - ادرس الحركة المستوية المعينة بالمعادلتين :

$$x = a \sin \omega t$$

$$y = b \sin (2\omega t + \varphi)$$

٨ - ادرس الحركة المعينة بالمعادلات :

$$x = \cos t \qquad y = \sin t \qquad z = e^{-t}$$

٩ - M نقطة تتحرك على القطع الناقص :

$$x = a\cos\varphi \qquad y = b\tin\varphi$$

بحركة معينة بالمعادلة :

$$\varphi - e\sin\varphi = nt \qquad (e \text{ التباعد المركزي للقطع})$$

(١) عين راسم خطى الحركة .

(٢) برهن ان شعاع التسارع يمر ابداً من نقطة ثابتة .

(٣) ادرس الحركة .

١٠ - M نقطة تتحرك على الدائرة :

$$x = a\cos\theta \qquad y = a\sin\theta$$

بحركة معينة بالمعادلة :

$$\theta^2 - \sin^2\theta - \sin\theta + h$$

ادرس الحركة وناقش بحسب قيم الثابت h .

١١ - حركة نقطة معينة بالمعادلات :

$$x = t - \sin t \qquad y = 1 - \cos t \qquad z = 4\sin\frac{t}{2}$$

عين شعاع تسارع النقطة ، ثم المحل الهندسي لنقطة تقاطع حامل هذا الشعاع مع المستوي xoy .

١٢ - مسار نقطة هو دائرة c ، وراسم خطى حركتها بالنسبة لنقطة o من محيط c هو دائرة c' مماسة للدائرة c في o . ادرس حركة النقطة بفرض ان قطر c' يساوي نصف قطر c .

١٣ - اوجد حركة مستوية شعاع تسارعها ثابت في القياس ويصنع زاوية ثابتة مع شعاع السرعة .

١٤ - تسارع نقطة M هو حاصله شعاعين :

$$\Gamma_1 = -\omega^2 OM \qquad \Gamma_2 = -2h\,V$$

O نقطة ثابتة في الفراغ ، V سرعة M ، h و ω ثابتان موجبان .

(١) عين احداثيات M بدلالة الزمن .

(٢) برهن ان حركة M مستوية .

(٣) ناقش (بحسب قيمتي h و ω) قانون الحركة ، والأشكال المختلفة للمسار .

١٤ — M نقطة مادية طليقة يجذبها كل من المركزين الثابتين C_1 و C_2 بقوة متناسبة عكساً مع مربع البعد .

(١) عين موضع توازن M . برهن ان هذا الموضع ، وليكن A ، هو قلق .

(٢) نفرض ان M ملازمة لمستو مار من A وعمودي على C_1C_2 (الملازمة ثنائية الجانب وبدون احتكاك) . عين موضع توازن M . برهن ان هذا الموضع مستقر .

١٥ — M (x, y, z) نقطة مادية كتلتها الواحدة ، خاضعة لقوة F مركباتها على المحاور الاحداثية هي :

$$X = y \qquad Y = x \qquad Z = -a$$

a ثابت موجب مفروض .

(١) برهن ان F تشتق من تابع قوى . اوجد سطوح السوية وخطوط القوى . عين مساقط خطوط القوى على المستويات الاحداثية .

(٢) ادرس حركة M اذا فرض انه في لحظة البدء : $M_0(a, o, o)$ و V_0 معدومة .

(٣) نفرض ان M ملازمة بدون احتكاك لقوس ($o \leqslant \theta \leqslant \pi$) من اللولب :

$$x = a\cos\theta \qquad y = a\sin\theta \qquad z = \frac{1}{2}a\theta$$

عين مواضع توازن M ، ثم ناقش استقرار التوازن .

(٤) نفرض ان M ملازمة بدون احتكاك للكرة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,a^2$$

عين مواضع توازن M حين تكون الملازمة ثنائية الجانب ، ثم وحيدة الجانب (النقطة تستطيع الانفكاك نحو خارج الكرة) .

١٦ – M نقطة مادية ثقيلة ملازمة لكرة نصف قطرها a (الملازمة ثنائية الجانب وبدون احتكاك) . عين على هذه الكرة منحنياً بحيث تتوازن النقطة في اي موضع على هذا المنحني .

١٧ – M نقطة مادية ملازمة لقطع ناقص ، وخاضعة للقوتين :

$$\mathbf{F}_1 = k\,\mathbf{MC}_1 \qquad \mathbf{F}_2 = k.\,\mathbf{MC}_2$$

C_1 و C_2 بؤرتا القطع و k مقدار موجب مفروض . عين مواضع توازن M بفرض وجود احتكاك امثاله r .

★ ★

جدول الخطأ والصواب

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٣٧	٢	بنصف	بضعف
٣٨	٩	ليكن o	ليكن A
٥٨	٢٠	و ي	وهي
٦٨	٢١	و ox و oy	و oX و oY
٧٣	٢١	u ∧ u	u ∧ u'
٨٥	٧	M_1 و M	M_1 الى M
٨٨	٢٢	X — c	X — o
٩٨	٢	Σ Ui	Σ dCi
٩٨	٧	I و J	i و j
٩٨	١٥	oM_1 و oM_2	o_1M و o_2M
١٠٢	٢١	$-\frac{\cos}{r}$	$-\frac{\cos\theta}{r}$
١١٢	٦	$3(x-1)^3$	$3(x-1)^2$
١١٦	٢٠	٨٠	٨
١١٧	٥ و ٨	3	8
١١٧	١١	c	b
١٦٧	٢	ω	ω f
١٨٤	٢٣	السنتمتر	المتر
١٩٠	٧	ابعاد F	ابعاد p

أبحاث الكتاب

الباب الأول : موجز في الأشعة والاحداثيات

الصفحة

الفصل الأول
جمع الأشعة واسقاطها

١ الشعاع
٣ العمليات على الاشعة
٣ جمع الاشعة
٥ تفريق شعاع
٧ جداء شعاع بعدد
٧ اسقاط الاشعة

الفصل الثاني
الاحداثيات

١١ تعيين نقطة على محور
١٢ تعيين نقطة على منحن
١٣ تعيين نقطة في مستو
١٥ تعيين نقطة في الفراغ

الفصل الثالث
جداء الأشعة

٢٣ الجداء العددي لشعاعين
٢٥ الجداء الشعاعي
٢٨ التقسيم الشعاعي
٣١ الجداء المختلط

الصفحة

الفصل الرابع
عزم شعاع

٣٦ عزم شعاع بالنسبة لنقطة
٣٩ المزدوجة
٤٧ عزم شعاع بالنسبة لمحور
٥٠ العزم النسبي لشعاعين
٥٢ عزم شعاع بالنسبة لمستقيم

الفصل الخامس
التوابع الشعاعية ومشتقاتها

٦٢ التابع الشعاعي
٦٣ التابع النقطي
٦٤ المشتق الشعاعي
٧٢ التفاضل الشعاعي والتكامل الشعاعي
٧٧ تطبيقات هندسية للمشتق الشعاعي
٨٤ التقوس
٨٧ توابع النقط
٨٨ خطوط القوى
٩١ تدرج التابع
٩٤ سطوح السوية

الباب الثاني : علم الحركة

الصفحة

الفصل الأول
السرعة العددية

١٠٣ معلومات أولية
١٠٦ الحركة المنتظمة
١١٠ الحركة المتغيرة
١١٠ السرعة العددية

الفصل الثاني
التسارع العددي

١١٤ الحركة المتغيرة بانتظام
١١٧ دراسة الحركة
١٢٠ الحركة المتغيرة
١٢٠ التسارع العددي

الفصل الثالث
الدراسة الشعاعية للحركة

١٢٤ شعاع السرعة
١٢٧ شعاع التسارع
١٢٩ الانحراف
١٣٢ السرعة الزاوية والشعاع الزاوي
١٣٤ السرعة الخطية والتسارع الخطي

الصفحة

الفصل الرابع
الصفات المميزة لبعض الحركات

١٣٩ الحركة المنتظمة
١٤٠ الحركة المتغيرة بانتظام
١٤٠ الحركة المستقيمة
١٤٣ الحركة المستوية
١٤٩ الحركة الخاضعة لقانون الخطوح
١٥١ الحركة الكروية
١٥٢ الحركة الدائرية

الفصل الخامس
درس بعض الحركات الشهيرة

١٥٦ الحركة النوسية
١٦٢ الحركة الدائرية
١٦٥ مسقط الحركة الدائرية على قطر للدائرة
١٦٨ الحركة الحاصلة من تركيب حركتين نوسيتين
١٧٢ الحركة اللولبية

الباب الثالث : علم التوازن

الصفحة	
	الفصل الأول
	المبادىء الأساسية في الميكانيك
١٨١	المبادىء في الميكانيك
١٨١	القوة والكتلة
١٨٣	ثقل جسم
١٨٤	الواحدات القياسية
١٨٥	تجانس الدساتير
	الفصل الثاني
	توازن نقطة طليقة
١٩٢	ساحة القوى
١٩٢	خطوط القوى
١٩٢	تابع القوى
١٩٣	العمل
١٩٣	العمل الجزئي
١٩٤	العمل الكلي
١٩٧	النقطة الطليقة والنقطة المقيدة
١٩٧	توازن نقطة مادية
١٩٨	توازن نقطة طليقة

الصفحة	
	الفصل الثالث
	توازن نقطة مقيدة بدون احتكاك
٢٠٩	النقطة الملازمة لسطح او سلك
٢١٠	توازن نقطة على سطح او سلك صقيل
٢١٢	الشروط التحليلية للتوازن
٢١٢	التوازن على سلك صقيل
٢١٤	التوازن على سطح صقيل
	الفصل الرابع
	مبدأ العمل الافتراضي
٢٢١	العمل الافتراضي
٢٢٢	مبدأ العمل الافتراضي
٢٢٣	توازن النقطة الطليقة
٢٢٤	التوازن على سلك صقيل
٢٢٦	التوازن على سطح صقيل
٢٢٩	مضاريب لاغرانج
	الفصل الخامس
	توازن نقطة مقيدة مع احتكاك
٢٣٤	شروط التوازن
٢٣٦	الشروط التحليلية للتوازن
٢٣٦	التوازن على سلك صقيل
٢٣٧	التوازن على سطح صقيل

★ ★

LIBRARY
OF
PRINCETON UNIVERSITY

Princeton University Library
32101 074298264