Aug.

Van Dyck, Cornelius Van Allen

كتاب
الروضة الزهرية
في
الاصول الجبرية

بسم الله المبدي المعيد

الحمد لله الملك الوهّاب الذي بيدهِ الجبر والكسر واليهِ المرجع والمآب . اما بعد فيقول العبد الفقير الى عفوهِ تعالى كرنيليوس فنديك الاميركاني هذا كتابٌ في علم الجبر الحسابيّ قد علقت فيهِ ما امليتهُ على بعض التلامذة في مدرسة عبيه احدى قرى جبل لبنان سنة ١٨٤٨ للتاريخ المسيحي سالكًا فيهِ مسلك بعض العلماء الاميركانيين . ثم اضفت اليهِ زياداتٍ اخرى من كتب بعض العلماء الفرنساويين والانكليزيين . وتركت الكلام على اللغرثمات الى كتابٍ اخر اريد ان اعقبهُ بهِ ان شاء الله . والله المسأول ان يجعلهُ خالصًا لوجههِ الكريم نافعًا بفضلهِ العميم . فانهُ اكرم مسأول واعظم مأمول

مقدّمة

في العلوم التعليمية بالاجمال

١ موضوع العلوم التعليمية الكمّ وهو كل ما يقبل الزيادة او الانقسام او القياس . فكلٌّ من الخط والوزن والعدد والوقت كمٌّ . وليس كذلك الالوان والافعال العقلية ونحوها

٢ جميع اقسام التعليميات مبنيٌّ على الحساب والجبر والهندسة . اما الحساب فهو علم الاعداد . ومعرفتهُ ضروريةٌ لمعرفة ما سواهُ من هذه العلوم . واما الجبر فهو طريقٌ للعدّ بواسطة احرف وعلاماتٍ اخر . ويقال للطبقة العليا منهُ حساب التمام والتفاضل . وهو لا يدخل في كتب الجبر لسموّهِ بل يقام علمًا بنفسهِ . واما الهندسة فهي قسمٌ من التعليميات موضوعهُ المقدار وهو كمٌّ ذو امتدادٍ اي كل ما لهُ واحدٌ من ثلثة اشياء وهي الطول والعرض والعمق ويقال لها الابعاد الثلثة . ولذلك يكون كلٌّ من الخط والسطح والجسم مقدارًا دون الحركة فانها وان كانت كمًّا لكنها لا تُعدّ مقدارًا اذ

ليس لها شيء من الابعاد المذكورة . واما حساب المثلثات وقطع المخروط فهما علمان تُستعمَل فيهما القواعد التعليمية لمعرفة المثلثات والخطوط الحاصلة من قطع مخروطٍ

٣ التعاليم نوعان محضة واضافية او ممتزجة . اما المحضة فهي المختصّة بالكميات المجرّدة عن المواد . واما الاضافية فهي استعمال قواعد تعليمية لمعرفة شيء من خصايص الهيُولَى او لاتمام شيء من المصالح اليومية كما في التجارة وعلم المساحة وعلم البصريات وعلم الهيئة ونحو ذلك

٤ ان للتعاليم المحضة مزيّةً على ساير العلوم من حيث وضوح قواعدها وقوة براهينها . حتى ضُرِب بها المثل في الايضاح والتبيين ومن حيث كثرة استعمالها ولزومها في المصالح والعلوم كافةً . وايضاً لسبب تاثيرها في القوى العقلية بتقويتها وتوسيعها . فان درسها يدرّب العقل على الاتّجاه بكل قواهُ نحو امرٍ ما وعلى انحصارهِ في موضوع ما بدون ان يتشتت . ويمنح حذاقةً عظيمة في الكشف عن فسادٍ او سفسطة في برهانٍ او قضيةٍ . ولذلك تكون معرفتها مفيدةً جدًّا لكل واحدٍ ولو كان غير مفتقرٍ الى ممارسة عملياتها

* * *

الفصل الاول

في الاشارات الجبرية والكميات السلبية والاوليات

٥ الجبر علمٌ يبحث فيهِ عن نِسَب الكميات باستعمال احرفٍ واشاراتٍ اخر . ولهُ مزيةٌ على علم الحساب لان مسايلهُ اعمّ ولانهُ تُستعمَل فيهِ الاحرف الهجائية عوض الاعداد كبيرةً كانت ام صغيرةً . وايضاً لانهُ تُستعمَل فيهِ كميات مجهولة كانها معلومة . فالاحرف التي تنوب عن كمياتٍ عددية في الجبر ليس لها قيمةٌ في ذاتها ولكن تُفرَض لها قيمةٌ معلومة في كل مسئلةٍ على مُقتضَى شروطها . وقد تكون تلك القيمة معلومةً وقد تكون مجهولةً كما سترى . فان كانت معلومةً يوضع عوضها حرفٌ من حروف الهجاء الأُوَل كالالف والباء والتاء وما يليها . وان كانت مجهولةً يُستعمَل عوضها الحروف الاخيرة كالكاف واللام والميم وما يليها

٦ يُدَلُّ على الجمع بخطٍ عرضيٍ بقطعةِ خطٍ عمودي هكذا + وعلى الطرح بخطٍ عرضي فقط هكذا – فالكميات التي تتقدمها العلامة الاولى تسمى ايجابية . والتي

يتقدمها الثانية يقال لها سلبية . والتي تتقدمها كلتاهما تُسمَّى ملتبسة . فلو وُضِع ت + ب — س كان المراد فضلة س ومجموع ت وب وتُقرأ ت مع ب الا س . ولو وُضِع ت ± ب لفَرِقيّ ت مع او الا ب . والتي لا تتقدمها علامةٌ تقدَّر لها علامة ايجابية اي علامة الجمع . ولو وُضِع ت ∽ ب او س ∽ د لكان المراد فضلة ت وب او فضلة س ود بدون تعيين ايٍّ هو المطروح وايٍّ هو المطروح منهُ . ويدل على المساواة بين كميتين بخطين عرضيين متوازيين هكذا = فلو وُضِع ت + ب = س — د لفُرِيَّ مجتمع ت وب يعدل فضلة س ود . ومثال ذلك في الارقام الهندية ٨ + ٤ = ١٦ — ٤ = ١٠ + ٢ = ٧ + ٢ + ٣ = ١٢ ولو وضع ت > ب كان المراد ان كمية ت اعظم من كمية ب . وبالعكس ت < ب

٧ متى تقدم كميّةً رقمٌ هكذا ٣ ت او ٩ ل او ١٠ ك كان المراد تكرار الحرف مرارًا تماثل الآحاد في ذلك الرقم . فيُقرأ ثلث مرات ت وتسع مرات ل وعشر مرات ك ويقال لذلك الرقم مُسمّي . وهكذا $\frac{١}{٣}$ ن . و $\frac{٣}{٤}$ م فيراد ثُلث ن وثلثة ارباع م . وان لم يتقدم كميّةً مسمّي يُقدَّر لها واحدٌ مسمّيً . فان ت مثلاً يراد بهِ ١ ت . وقد يكون المسمَّ حرفًا هكذا م ك فيراد تكرار ك مرارًا تماثل الآحاد في م اي ميم مرة . ولو قيل ٣ ت ب لكان ٣ ت مسمًّى ب . ولو قيل ٤ ك ل د لكان ٤ ك ل مسمًّى د وقس على ذلك

٨ الكمية المركبة هي التي ارتبطت اجزآوها بعلامة الجمع او الطرح . مثالها س + د ور + س — ك و٣ ت + ب . وما سواها بسيطة مثالها ت ور ك و٣ م س ل . وان كان لها جزءان سميت ثنآئية مثل ت + ب و س — د ويقال للاخيرة فضلية ايضًا . وان كان لها ثلثة اجزآء يقال لها ثلاثية او ذات ثلثة حدود . او اربعة فرباعية او ذات اربعة حدود . وهلمَّ جرًّا . وان اريد معاملة عدة اجزآء من كمية مركبةٍ معاملة واحدة يجب رسم خط فوقها او حصرها بين قوسين هكذا $\overline{ت — د}$ + س او (ت — د) + س فيراد اضافة س الى فضلة ت ود وهكذا $\overline{ت + ب}$ — $\overline{س + د}$ او (ت + ب) — (س + د) يراد بهِ طرح مجموع س و د من مجموع ت وب . ويقال لحرفٍ او لعدة احرفٍ مرتبطة على ما تقدم عبارةٌ جبرية

٩ يُدَلُّ على الضرب بخطين يتقاطعان هكذا × او بنقطةٍ بين المضروب والمضروب فيهِ . مثالهُ ت × ب او ت . ب فيُقرأ ت في ب . وهكذا $\overline{س + د}$

× $\overline{\text{ن} - \text{م}}$ فيُقرأ مجموع س و د في فضلة نَ و م ويقال للمضروب والمضروب فيهِ اضلاعٌ . فتنحلُّ الكمية الى اضلاعها متى انفكّت الى كميات اذا ضُرِب بعضها في بعضٍ تحصل الاصلية . فان ٣ م ى مثلاً تنحلُّ الى ٣ و م و ى لان ٣ × م × ى = ٣ م ى و٤٨ تنحلُّ الى ٢٤ و٢ او الى ١٦ و ٣ او الى ٦ و٨ وهلم جرًّا

١٠ يُدَلُّ على القسمة بخط عرضي لهُ نقطةٌ من فوقهِ ونقطةٌ من تحتهِ هكذا ٨ ÷ ٢ اي قسمة ٨ على ٢ او بكتابة المقسوم والمقسوم عليهِ على هيئة كسر دارجي هكذا $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ فيقرأ الخارج من قسمة ت على ب وهكذا $\frac{\text{س} - \text{د}}{\text{ت} + \text{م}}$ فيُقرأ الخارج من قسمة فضلة س و د على مجموع ت و م . واما النسبة في الجبر فيُدَلُّ عليها كما يُدَلُّ في الحساب . مثالها ت ب : س د :: ن + م : ك + ل

١١ اذا تشابهت الاحرف والقوات كانت الكميات متشابهة والا فغير متشابهة . فان ٣ ب وب و٤ ب كميات متشابهة . وكذلك ٣ م ن و٦ م ن و م ن و− م ن و− ٨ م ن اما ٣ ت و٣ م و٣ ب ك فغير متشابهة ولو كانت المسميات متساوية . وكذلك ب و$\text{ب}^{٢}$ و٢ $\text{ب}^{٣}$ كميات غير متشابهة ايضاً

١٢ مكفوء الكمية هو الخارج من قسمة واحدٍ على تلك الكمية . فمكفوء ت مثلاً هو $\frac{١}{\text{ت}}$ ومكفوء ٤ هو ١/٤ ومكفوء ت + ب هو $\frac{١}{\text{ت} + \text{ب}}$

١٣ الكميَّة السلبية هي التي يجب طرحها . ففي التجارة مثلاً يكون الربح ايجابيًّا والخسارة سلبية . وان كان صعود جسمٍ عن سطح الارض ايجابيًّا يكون هبوطهُ سلبيًّا . وان كان جري مركبٍ الى الشمال ايجابيًّا يكون جريهُ الى الجنوب سلبيًّا . وقد يكون السلبي اكبر من الايجابي الذي يجب الطرح منهُ كما اذا كان راس مال تاجرٍ ١٠٠٠ والدين عليهِ ١٥٠٠ دينار

١٤ الاوليَّة قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاحٍ . والاوليات التعليمية التي يُحتاج اليها بالاكثر هي هذه

١ اذا اضيفت اشياءٌ متساوية الى اشياءٍ متساوية تكون المجموعات متساوية

٢ اذا طُرِحَت اشياءٌ متساوية من اشياءٍ متساوية تكون البقايا متساوية

٣ اذا ضُرِبَت اشياءٌ متساوية في اشياءٍ متساوية تكون الحواصل متساوية

٤ اذا قُسِمَت اشياءٌ متساوية على اشياءٍ متساوية تكون الخوارج متساوية

٥ اذا اضيفت كميةٌ الى اخرى وطُرِحَت منها فالثانية لا تتغيَّر

٦ اذا ضُرِبَت كميةٌ في اخرى وانقسمت عليها لا تتغير

٧ اذا اضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المجموع الاعظم

٨ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية يكون من الاعظم البقية العظمى

٩ اذا ضربت اشياء متساوية في اشياء غير متساوية يكون من الاعظم الحاصل الاعظم

١٠ اذا انقسمت اشياء غير متساوية على اشياء متساوية يكون من الاعظم الخارج الاعظم

١١ الاشياء المتساوية لشيءٍ واحدٍ هي متساوية بعضها البعضِ

١٢ الكل اعظم من جزءِهِ

الفصل الثاني

في الجمع

١٥ الجمع هو ربط كمياتٍ بواسطة علاماتها. فلو قيل ما هو مجموع ت وب ون لقيل ت + ب + ن ولو قيل اضف فضلة ب وس الى د لقيل ب − س + د ولو قيل اضف فضلة ب وس الى فضلة ن ود لقيل ب − س + ن − د وقس على ذلك

١٦ متى كانت الكميات متشابهة تُجمَع الى واحدة. مثالهُ ٣ ت + ٦ ب + ٤ ت + ٥ ب = ٧ ت + ١١ ب فلنا من ذلك القاعدة الاولى للجمع

متى كانت الكميات متشابهة والعلامات متشابهة فاجمع المسمَّيات واكتب عن يسار المجموع الاحرف المشتركة واجعل لهُ العلامة المشتركة. وهذه امثلةٌ للعمل

ب س	٣ ك ى	٧ ب + ك ى
٢ ب س	٧ ك ى	٨ ب + ٣ ك ى
٩ ب س	ك ى	٢ ب + ٢ ك ى
٣ ب س	٢ ك ى	٦ ب + ٥ ك ى
١٥ ب س		٢٢ ب + ١١ ك ى

رى + ٢ ث ب ح	س د ك ى + ٣ م ن
٣ رى + ث ب ح	٢ س د ك ى + م ن
٦ رى + ٤ ث ب ح	٥ س د ك ى + ٧ م ن
٢ رى + ث ب ح	٧ س د ك ى + ٨ م ن
	١٥ س د ك ى + ١٩ م ن

وهكذا اذا كانت العلامات سلبيةً . مثالهُ

— ٣ ب س	— ن ك	— ٢ ث ب — م ى
— ب س	— ٣ ن ك	— ث ب — ٣ م ى
— ٥ ب س	— ٢ ن ك	— ٧ ث ب — ٨ م ى
— ٩ ب س		— ١٠ ث ب — ١٢ م ى

١٧ لو قيل ما هو مجموع ٦ ب وفضلة ت و ٤ ب لقيل ت — ٤ ب + ٦ ب اي يسقط ٤ ب من ت ثم يضاف الى الفضلة ٦ ب وذلك كاضافة ٢ ب الى ت ولو قيل ما هو مجموع ٧ ب و — ٢ ب لقيل ٧ ب — ٢ ب اي ٥ ب فلنا من ذلك هذه

القاعدة الثانية للجمع . وهي متى كانت الكميات متشابهة والعلامات غير متشابهة فاطرح المسمّى الاصغر من الاكبر واكتب عن يسار الباقي الاحرف المشتركة واجعل لهُ علامة المسمّى الاكبر . وهذه صورة العمل

+٦ ب	+٤ ب	٥ ب س	٢ ح م
−٤ ب	−٦ ب	−٧ ب س	−٩ ح م
+٢ ب		−٢ ب س	−٧ ح م

− دى + ٦ م	٢ ح − دك
٤ دى − م	٥ ح + ٤ دك
٢ دى + ٥ م	

١٨ الكميتان المتساويتان اذا كانت احداهما ايجابية والاخرى سلبية تُفني احداهما الاخرى. مثالهُ

+٦ ب − ٦ ب = ٠ و ٢ × ٦ − ١٨ = ٠.

لنفرض كميتين اكبرهما ت واصغرهما ب فيكون مجموعهما ت + ب وفضلتهما ت − ب ومجموع مجموعهما وفضلتهما ٢ ت ± ٠ اي ٢ ت ولنا من ذلك هذه القضية العامة اي

ان جُمِع مجموع كميتين الى فضلتهما يكون المجموع مضاعف اكبرهما

١٩ ان اريد جمع عدة من الكميات المتشابهة وكان بعضها ايجابيًا وبعضها سلبيًا فاجمع اولًا الايجابية ثم السلبية حسب القاعدة الاولى (١٦) ثم افعل في المجموعين حسب القاعدة الثانية (١٧) فلو قيل اجمع ١٢ ب + ٦ ب + ب − ٤ ب − ٥ ب − ٧ ب لقيل

١٢ ب + ٦ ب + ب = ٢٠ ب

و − ٤ ب − ٥ ب − ٧ ب = − ١٦ ب

وحسب القاعدة الثانية يكون المجموع = ٤ ب

ولو قيل اجمع ٢ ك ى − ك ى + ٢ ك ى − ٧ ك ى + ٤ ك ى − ٩ ك ى + ٧ ك ى − ٦ ك ى لقيل

الاجزاء الايجابية هي	٣ ك ى	والسلبية − ك ى
	٢ ك ى	− ٧ ك ى
	٤ ك ى	− ٩ ك ى
	٧ ك ى	− ٦ ك ى
والمجموع	١٦ ك ى	− ٢٣ ك ى

و١٦ ك ى − ٢٣ ك ى = − ٧ ك ى

اجمع ٢ ث د − ٦ ث د + ث د + ٧ ث د − ٢ ث د + ٩ ث د − ٨ ث د − ٤ ث د

اجمع ٢ ث ب م − ث ب م − ٣ ث ب م + ٧ ث ب م

اجمع د ك ى − ٧ د ك ى + ٨ د ك ى − د ك ى − ٨ د ك ى + ٩ د ك ى

٢٠ اذا كانت الكميات غير متشابهة لا تُجمَع الا بكتابتها على التوالي مع علاماتها. مثالهُ ٤ ب − ٦ ى + ٣ ك + ١٧ ح − ٥ د + ٦

وان كانت الكميات التي اريد جمعها بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة تكتب المتشابهة بعضها تحت بعضٍ ثم تُجمَع على ما تقدم. فلو قيل اجمع ٣ ب س − ٦ د + ٢ ب − ٣ ى − ٣ ب س + ك − ٣ د + ب ع + ٢ د + ى + ٣ ك + ب لكانت صورة العمل هكذا

٣ ب س − ٦ د + ٢ ب − ٣ ى + ك + ب ع

− ٣ ب س − ٣ د + ب + ى + ٣ ك

\+ ٢ د

− ٧ د + ٣ ب − ٢ ى + ٤ ك + ب ع

اجمع ث ب م − ٣ ك + ب م + ى − ك + ٧ + ٥ ك − ٦ ى + ٩

اجمع ث ب + ٨ + س د − ٣ + ٥ ث ب − ٤ م + ٢

اجمع ك + ٣ ى − د ك + ٧ − ك − ٨ + ح م

اجمع ٢ ث م + ٦ − ٧ ك ى + ٨ + ١٠ ك ى − ٩ + ٥ ث م

اجمع ٦ ث ح ى + ٧ د − ١ + م ك ى + ٣ ث ح ى − ٧ د + ١٧ − م ك ى

اجمع ٧ ث د − ح + ٨ ك ى − ث د + ٥ ث د + ح − ٧ ك ى
اجمع ٢ ث ب − ٢ ث ى + ك + ث ب − ث ى + ب ك − ح
اجمع ٢ ب ى − ٢ ث ك + ٢ ث + ٢ ب ك − ب ى + ث

* * *

الفصل الثالث

في الطرح

٢١ الطرح اسقاط كميةٍ من اخرى ليعرف الفضل بينهما

فلنفرض كمية ث + ب
اطرح منها + ب فيكون الباقي ث
اضف اليها − ب فتصير ث + ب − ب
وبالاولية الخامسة ث + ب − ب يعدل ث

اي طرح كمية ايجابية من عبارة جبريَّة هو كاضافة سلبية تعادل المطروحة اليها

ولو فُرِض ث − ب
فان طُرِح منها − ب بقي ث
وان اضيف اليها + ب صارت ث − ب + ب
ولكن ث − ب + ب يعدل ث

اي طرح كميةٍ سلبية هو كاضافة ايجابيةٍ تعادلها. فان كان على احدٍ دينٌ فرفعهُ عنهُ فهو بمثابة اضافة مبلغ الدين الى راس المال. ونرى من الامثلة المتقدمة ان طرح كميةٍ ايجابية انما يتم بتغيير علامتها. فلنا من ذلك هذه القاعدة للطرح

ابدل علامات الكميات المطروحة من + الى — او عكسهُ ثم افعل كما تقدم في الجمع. وهذه امثلةٌ للعمل مع مشابهة العلامات اصلاً

من	+٢٨	١٦ ب	١٤ د ت	−٢٨	−١٦ ب	−١٤ د ت
اطرح	+١٦	١٢ ب	٦ د ت	−١٦	−١٢ ب	−٦ د ت
	+١٢	٤ ب	٨ د ت	−١٢	−٤ ب	−٨ د ت

ففي هذه الامثلة قد يُتوهَّم تبديل العلامات الايجابية الى سلبية وبالعكس

٢٢ وهكذا متى تشابهت العلامات وكان المطروح اكبر من المطروح منهُ. مثالهُ

من	+١٦ب	١٢ب	٦ دت	−١٦	−١٢ب	−٦ دت
اطرح	+٢٨ب	١٦ب	١٤دت	−٢٨	−١٦ب	−١٤دت
	−١٢ب	−٤ب	−٨دت	+١٢	+٤ب	+٨ دت

وهكذا متى اختلفت العلامات. مثالهُ

من	+٢٨	+١٦ب	+١٤دت	−٢٨	−١٦ب	−١٤دت
اطرح	−١٦	−١٢ب	−٦ دت	+١٦	+١٢ب	+٦ دت
	+٤٤	٢٨ب	٢٠دت	−٤٤	−٢٨ب	−٢٠دت

٢٣ امتحان الطرح في الجبر كما في الحساب يكون باضافة الباقي الى المطروح. فان وافق المجموع المطروح منهُ كان العمل صحيحًا والا فهو فاسد

تنبيه. عند الامتحان يجب اعادة العلامات الى اصلها. امثلة

من	٢كى − ١	ح + ٣بك	حى − ثح
اطرح	−كى + ٧	٣ح − ٩بك	٥حى − ٦ثح
	٣كى − ٨		−٤حى + ٥ثح

من	ند − ٧بى	٣ثبم − كى	−١٧ + ٤ثك
اطرح	٥ند − بى	−٧ثبم + ٦كى	−٢٠ − ثك
		١٠ثبم − ٧كى	

من	ثك + ٧ب	٣ثح + ثكى
اطرح	−٤ثك + ١٥ب	−٧ثح + ثكى
	٥ثك − ٨ب	

٢٤ متى فرضت عدة كميات متشابهة يجب جمعها اولاً ثم طرحها. مثالهُ لو قيل من ت ب اطرح ٢ ت م + ت م + ٧ ت م + ٢ ت م + ٦ ت م لقيل ت ب — ١٩ ت م . ولو قيل من ى اطرح — ت — ت — ت — ت لقيل ى + ت + ت + ت + ت = ى + ٤ ت . ولو قيل من ت ك — ب س + ٢ ت ك + ٧ ب س اطرح ٤ ب س — ٢ ت ك + ب س + ٤ ت ك فالجواب ٢ ت ك + ب س

من ت د + ٢ د س — ب ك اطرح ٢ ت د + ٧ ب ك — د س + ت د

٢٥ متى كانت الكميات غير متشابهة تطرح بكتابتها على التوالي بعد تبديل علاماتها. فلو قيل من ٢ ت ب + ٨ — م ى + د ح اطرح ك — د ر + ٤ ح ى — ب م ك لقيل ٢ ت ب + ٨ — م ى + د ح — ك + د ر — ٤ ح ى + ب م ك

٢٦ اذا وضعت علامة الطرح قدام كميات محصورة بين قوسين يجب عند رفع القوسين تبديل علامات جميع الكميات المنحصرة. فلو وضع ث — (ب — س + د) كان المراد ان + ب و — س و + د يجب طرحها جميعاً من ث. ويتم العمل برفع القوسين وتبديل العلامات فتصير ث — ب + س — د وهكذا

١٢ ث د + ك ى + د — (٧ ث د — ك ى + د + ح م — ر ى) = ٦ ث د + ٢ ك ى — ح م + ر ى

٧ ث ب س — ٨ + ٧ ك — (٢ ث ب س — ٨ — د ك + ر) = ٤ ث ب س + ٧ ك + د ك — ر

٢ ث د + ح — ٢ ى — (٧ ى + ٢ ح — م ك + ٤ ث د — ح ى — ث د) =

٦ ث م — د ى + ٨ — (١٦ + ٢ د ى — ٨ + ث م — ى + ر) =

٧ ك ى — ٢ ك + ٥ — (٤ + ح — ث ى + ك + ٢ ب) =

وبالعكس متى اريد انحصار كميات بين قوسين. مثالهُ — م + ب — د ك + ٢ ح فاذا انحصرت للطرح تصير — (م — ب + د ك — ٢ ح)

الفصل الرابع

في الضرب

٢٧ الضرب اما ان يكون في الصحيح وهو تكرار المضروب مرارًا تماثل الاحاد الموجودة في المضروب فيهِ واما ان يكون في الكسر وهو اتخاذ جزء مفروضٍ من المضروب مرارًا تماثل اجزاءَ الواحد الموجودة في المضروب فيهِ. فان كان المضروب فيهِ واحدًا كان الحاصل مساويًا للمضروب فيهِ. وان كان اكثر من واحدٍ كان الحاصل اكثر من المضروب فيهِ. وان كان اقلَّ من واحدٍ كان الحاصل اقلَّ من المضروب فيهِ

٢٨ لو فُرِض ان يُضرَب ت في ب وفرضت للبآء قيمة ثلثة مثلاً لاقتضى اخذ ت ثلاث مراتٍ اي ت + ت + ت = ٣ ت او ب ت فنرى ان الاحرف تُضرَب بكتابتها متوالية بتوسط علامة الضرب او بدونها. فيكون ب في س ب × س او ب س وهكذا مهما تكاثرت الاحرف. ولا فرق في ترتيبها لان س د م = د م س = م د س كما ان ٣ × ٢ × ٤ = ٤ × ٢ × ٣ = ٢ × ٣ × ٤ وان كان للاحرف مسمياتٌ عددية يجب ضربها ايضًا ثم بوضع حاصلها قدام حاصل الاحرف. مثالهُ ٣ ب × ٢ ب = ٦ ب ب

اضرب ٩ ت ب	١٢ ح ى	٣ د ح
في ٣ ك ى	٢ ر ك	م ى
٢٧ ب ت ك ى		٣ ح د م ى

اضرب ٣ ت د	٧ ب د ح	٣ ت ى
في ١٣ ح م ع	ك	٨ م ك
	٧ ب ح د ك	

اضرب ٣ ت ب	٣٦	ح ى
في ٤	٢ ك	٢٤
١٢ ت ب	٧٢ ك	٢٤ ح ى

٢٩ اذا كان المضروب كمية مركبة يجب ضرب كل جزء منهُ في المضروب فيهِ. مثالهُ

اضرب د + ٢ ك ى
في ٣ ب
٣ ب د + ٦ ب ك ى

٢ ح + م
٦ د ى

اضرب ٢ ح ل + ١
في م ى
٢ ح ل م ى + م ى

٢ ح م + ٣ + د ر
٤ ب

٣٠ اذا كان كل واحدٍ من المضروب والمضروب فيهِ كميةً مركبة يجب ضرب كل جزء من الواحد في كل جزء من الاخر. مثالهُ

اضرب ٣ ك + د
في ٢ ت + ح م
٦ ت ك + ٢ ت د + ٣ ح ك م + ح د م

٤ ت ى + ٣ ب
٢ س + ر ك

اضرب ت + ١
في ٣ ك + ٤
٣ ت ك + ٣ ك + ٤ ت + ٤

اضرب ٢ ح + ٧ في ٦ د + ١
الجواب ١٢ د ح + ٤٢ د + ٢ ح + ٧

اضرب د ى + ر ك + ح في ٦ م + ٤ + ٧ ى
اضرب ٧ + ٦ ب + ت ذ في ٢ ر + ٤ + ٣ ح

اذا كان في الحاصل كمياتٌ متشابهة يجب كتابتها بعضها تحت بعضٍ ثم جمعها

وهذه صورة العمل

اضرب ب + ت
في ب + ت
ب ب + ب ت
+ ب ت + ت ت
ب ب + ٢ ب ت + ت ت

أضرب ب + س + ٢
في ب + س + ٣
ب ب + ب س + ٣ ب
+ ب س + ٢ ب + س س + ٣ س
+ ٢ س + ٦
ب ب + ٢ ب س + ٥ ب + س س + ٥ س + ٦

اضرب ت + ى + ١ في ٣ ب + ٢ ك + ٧
اضرب ٣ ت + د + ٤ في ٢ ت + ٣ د + ١
اضرب ب + س د + ٢ في ٣ ب + ٤ س د + ٧
اضرب ٣ ب + ٢ ك + ح في ت × د × ٢ ك
اضرب ٣ ت × ٤ ب ح × ٥ م × ٦ ى = ٣٦٠ ت ب ح م ى
اضرب ٤ ب × ٦ د في ٢ ك + ١
الجواب ٤٨ ب د ك + ٢٤ ب د

٢١ لا يخفى انهُ اذا ضُرِب ٤ × ت يكون ٤ ت واذا ضُرِب ٤ × — ت يجب تكرار — ت اربع مراتٍ. او — ت — ت — ت — ت = — ٤ ت واذا ضُرِب — ٤ × + ت يكون الحاصل + ت + ت + ت + ت = + ٤ ت ولكن العلامة السلبية للاربعة تدل على وجوب الطرح وذلك يتمُّ بتبديل العلامة فتصير — ٤ ت واذا ضُرِب — ٤ × — ت يكون الحاصل — ت — ت — ت — ت = — ٤ ت ولكن يجب تبديل العلامة فتصير + ٤ ت ولنا من ذلك انهُ

ان ضُرِب + في + يكون الحاصل +
وان ضرب – في – يكون الحاصل +
وان ضرب + في – يكون الحاصل –
وان ضرب – في + يكون الحاصل –

اي متى تشابهت علامات المضروب والمضروب فيهِ تكون علامة الحاصل ايجابية. ومتى اختلفت تكون علامتهُ سلبية

اضرب ب – ٣ ت
في ٦ ى
٦ ب ى – ١٨ ت ى

٢ ت – م
٢ ح + ك

اضرب ح – ٣ د – ٤
في ٢ ى
٢ ح ى – ٦ د ى – ٨ ى

ت – ٢ – ٧ د – ك
٣ ب + ح

اضرب ت + ب
في ب – ك
ب ت + ب ب – ت ك – ب ك

٣ د ى + ح ك + ٢
م ر – ت ب

اضرب ٣ ح + ٣
في ت د – ٦
٣ ت ح د + ٣ ت د – ١٨ ح – ١٨

اضرب ت – ٤ في ٣ ب – ٦ = ٣ ت ب – ١٢ ب – ٦ ت + ٢٤

اضرب ٣ ت ى – ب في ٦ ك – ١ = ١٨ ت ك ى – ٦ ب ك – ٣ ت ى + ب

اضرب ٣ د – ح ى – ٣ ك في ٤ ب – ٧

اضرب ٣ ث د − ث ح − ٧ في ٤ − د ى − ح ر

اضرب ٢ ح ى + ٣ م − ١ في ٤ د − ٢ ك + ٣

٢٢ قد راينا ان حاصل كميتين سلبيتين ايجابيٌّ. فان ضُرِب هذا الحاصل في كميةٍ سلبية يكون الحاصل سلبيًا. وان ضُرِب الحاصل الاخير في كميةٍ سلبية يكون الحاصل ايجابيًا. وعلى الاطلاق ان كان عدد الكميات السلبيات وترًا يكون الحاصل سلبيًا. وان كان شفعًا يكون الحاصل ايجابيًا. اما الكميات الايجابيَّة فحواصلها ايجابيةٌ ابدًا

٢٣ قد يحدث في الضرب ان الكميات الايجابية والسلبية يفني بعضها بعضًا حتى تخرج من الحاصل بالكلية مثالهُ

اضرب ث − ب

في ث + ب

ث ث − ث ب

\+ ث ب − ب ب

ث ث − ب ب

م م + ى ى

م م − ى ى

اضرب ث ث + ث ب + ب ب

في ث − ب

ث ث ث + ث ث ب + ث ب ب

− ث ث ب − ث ب ب − ب ب ب

ث ث ث − ب ب ب

٢٤ يكفي احيانًا الدلالة على الضرب بعلامتهِ من دون اتمامهِ حقيقةً. فلو قيل اضرب ث + ب + س في ح + م + ى لقيل (ث + ب + س) × (ح + م + ى)

٢٥ لنا مما تقدم ذكرهُ هذه القاعدة العمومية للضرب

اضرب جميع احرف المضروب ومسمَّياتها في جميع احرف المضروب فيهِ ومسمياتها واجعل لكل جزء من الحاصل العلامة المطلوبة على القاعدة السابقة ان العلامات المتشابهة يحصل منها ايجابٌ والمختلفة يحصل منها سلبٌ. مثالهُ

اضرب ت + ٣ ب − ٢ في ٤ ت − ٦ ب − ٤
اضرب ٤ ت ب × ك × ٢ في ٣ م ى − ١ + ح
اضرب (٧ ت ح − ى) × ٤ في ٤ ك × ٣ × ٥ × د
اضرب (٦ ت ب − ح د + ١) × ٢ في (٨ + ٤ ك − ١) × د
اضرب ٣ ت ى + ى − ٤ + ح في (د + ك) × (ح + ى)
اضرب ٦ ت ك − (٤ ح − د) في (ب + ١) × (ح + ١)
اضرب ٧ ت ى − ١ + ح × (د − ك) في − (ر + ٣ − ٤ م)

◆

الفصل الخامس

في القسمة

٣٦ القسمة طريقةٌ لاستخراج عددٍ من اخر اذا ضُرِب في المقسوم عليهِ يحصل المقسوم. وقد يكون المقسوم والمقسوم عليهِ عددين وقد يكونان حروفًا. فلو قُسِم ت ب د على ت لكان الخارج ب د لان ب د × ت = ت ب د

فنرى من ذلك انهُ متى وجد المقسوم عليهِ بين اجزاء المقسوم تم القسمة باخراج ذلك الجزء من الكمية. امثلة

اقسم	س ك	د ح	د ر ك	ح م ى	د ح ك ى
على	س	د	د ر	ح م	د ى
الخارج	ك		ك		ح ك

اقسم	ت ب س د	ت ب ك ى	ت ت ب
على	ب	ت ك	ت
الخارج		ب ى	ت ب

اقسم	ب ب ك	ت ت د د د ك	ت ت م م ى ى
على	ب	ت د	ت م ى
الخارج	ب ك	ت د د ك	

اقسم	ت ت ت ك ك ك ح	ى ى ى
	ت ت ك ك	ى ى
	ت ك ح	

وعلى الاطلاق مهما كانت اجزآء المقسوم يكون اخراج احدها كالقسمة عليهِ. مثالهُ

اقسم	ت (ب + د)	ت (ب + د)	(ن + م) ى
على	ت	ب + د	ن + م
الخارج	ب + د	ت	ى

اقسم	(ب + ك) (س + د)	(ب + ي) × (د − ح) ك
على	ب + ك	د − ح
	س + د	(ب + ى) ك

٢٧ اذا كان للكميات مسمَّياتٌ عددية يجب ان تُقسَم ايضًا ثم يجعل الخارج قدام الخارج من قسمة الاخرف. مثالهُ

اقسم	٦ ت ب	١٦ د ك ى	٢٥ دح ر	١٢ ك ى
على	٢ ب	٤ د ك	دح	٦
الخارج	٣ ت		٢٥ ر	

اقسم	٢٤ د ر ك	٢٠ ح م
على	٢٤	م
الخارج	د ر ك	

٢٨ اذا ضُرِبَت كميّةٌ بسيطة في كميةٍ مركّبة تدخل البسيطة في كل جزء من الحاصل (٢٩) فيمكن فكّهُ الى ضلعيهِ المضروب والمضروب فيهِ. مثالهُ

ت ب + ت د تنفكُّ الى ت × (ب + د)

ت ب + ت س + ت ح تنفك الى ت × (ب + س + ح)

ت م ح + ت م ك + ت م ى تنفك الى ت م × (ح + ك + ى)

٤ ت د + ٨ ت ح + ١٢ ت م + ٤ ت ى تنفك الى ٤ ت × (د + ٢ ح + ٣ م + ى)

فان انقسمت الكمية على احد هذين الضلعين يكون الخارج الضلع الآخر. مثالهُ

(ت ب + ت د) ÷ ت = ب + د و (ت ب + ت د) ÷ (ب + د) = ت

اقسم	ب د ح + ب د ى	ت ت ح + ت ى
على	ب د	ت
الخارج		ت ح + ى

اقسم	د ر ك + د ح ك + د ك ى	٦ ت ب + ١٢ ت س
على	د ك	٣ ت
		٢ ب + ٤ س

اقسم	١٠ د ر ى + ١٦ د	١٢ ح ك + ٨	٣٥ د م + ١٤ د ك
على	٢ د	٤	٧ د
الخارج	٥ ر ى + ٨	٣ ح ك + ٢	

اقسم	ت ب + ت س + ت ح	ت م ح + ت م ك + ت م ى
على	ب + س + ح	ح + ك + ى
الخارج ت		

اقسم	٤ ت ب + ٨ ت ى	ت ح م + ت ح ى
على	ب + ٢ ى	م + ى
الخارج	٤ ت	

٣٩ اذا كان كلٌّ من المقسوم والمقسوم عليهِ ايجابيًّا او سلبيًّا يكون الخارج ايجابيًّا. وان كان احدهما ايجابيًّا والاخر سلبيًّا يكون الخارج سلبيًّا. وذلك واضحٌ مما تقدم ان حاصل الخارج في المقسوم عليهِ هو المقسوم نفسهُ (٣٦) فيكون

ت ب ÷ ب = ت لان ت × ب = ت ب

و − ت ب ÷ + ب = − ت لان − ت × ب = − ت ب

وقس على ذلك

اقسم	ت ب ك	٨ ت − ١٠ ت ى	٢ ت ك − ٦ ت ى
على	− ت	− ٢ ت	٢ ت
الخارج	− ب ك	− ٤ + ٥ ى	

اقسم ٦ ت م × د ح
على − ٢ ت

− ٣ م × د ح = ٣ د ح م

٤٠ اذا لم توجد احرف المقسوم عليهِ في المقسوم يُدَلُّ على القسمة بكتابتهما على هيئة كسر دارجي. مثالهُ ك ى ÷ ت = $\frac{ك ى}{ت}$ و د − ك ÷ − ح = $\frac{د − ك}{− ح}$

وان كان المقسوم كمية مركبة يوضع المقسوم عليهِ تحتهُ جميعًا مرةً واحدةً او يكرر تحت كل جزءٍ منهُ. مثالهُ ب + س ÷ ك = $\frac{ب + س}{ك}$ او $\frac{ب}{ك} + \frac{س}{ك}$ و ت + ب ÷ ٢ = $\frac{ت + ب}{٢}$ او $\frac{ت}{١} + \frac{ب}{٢}$ لان نصف مجموع كميتين او اكثر يعدل مجموع انصافهما. وكذلك ت − ب ÷ ٢ = $\frac{ت − ب}{٢}$ او $\frac{ت}{٢} - \frac{ب}{٢}$ لان نصف فضلة كميتين يعدل فضلة نصفيهما. وهكذا $\frac{ت − ٢ ب + ح}{م} = \frac{ت}{م} - \frac{٢ ب}{م} + \frac{ح}{م}$ وقس على ذلك

٤١ اذا وجد حروفٌ مشتركة في المقسوم والمقسوم عليهِ تطرَح منهما. مثالهُ $\frac{\text{ت ب}}{\text{ب س}} = \frac{\text{ت}}{\text{س}}$ و $\frac{\text{د ح ك}}{\text{د ى}} = \frac{\text{ح ك}}{\text{ى}}$ و $\frac{\text{ت ح م} - \text{٣ ت ى}}{\text{ت ب}} = \frac{\text{ح م} - \text{٣ ى}}{\text{ب}}$ وان وجد المقسوم عليهِ في بعض اجزآء المقسوم دون البعض تُقسَم الأُوَل كما تقدم وتُكتَب الأُخَر على هيئة كسرٍ كما علمت. مثالهُ $(\text{ت ب} + \text{د}) \div \text{ت} = \frac{\text{ت ب} + \text{د}}{\text{ت}} = \frac{\text{ت ب}}{\text{ت}} + \frac{\text{د}}{\text{ت}} = \text{ب} + \frac{\text{د}}{\text{ت}}$

اقسم $\text{د ك ى} + \text{ر ك} - \text{ح د}$ $\qquad$ $\text{٢ ت ح} + \text{ت د} + \text{ك}$

على ك $\qquad$ ت

الخارج $\text{د ى} + \text{ر} - \frac{\text{ح د}}{\text{ك}}$

اقسم $\text{ب م} + \text{٣ ى}$ $\qquad$ $\text{٢ م ى} + \text{د ح}$

على $-\text{ب}$ $\qquad$ ٢ م

الخارج $-\text{م} + \frac{\text{٣ ى}}{-\text{ب}}$

٤٢ الخارج من قسمة كميةٍ على ذاتها هو واحدٌ ابدًا. مثالهُ

$$\frac{\text{ت}}{\text{ت}} = \text{١} \text{ و } \frac{\text{٣ ت ك}}{\text{٣ ت ك}} = \text{١} \text{ و } \frac{\text{٦}}{\text{٤} + \text{٢}} = \text{١}$$

اقسم $\text{ت ك} + \text{ك}$ $\qquad$ $\text{٣ ب د} - \text{٣ د}$ $\qquad$ $\text{٤ ت ك ى} - \text{٤ ت} + \text{٨ ت د}$

على ك $\qquad\qquad$ ٤ ت

الخارج $\text{ت} + \text{١}$ $\qquad\qquad$ $\text{ك ى} - \text{١} + \text{٢ د}$

اقسم $\text{١٢ ت ب ى} + \text{٦ ت ب ك} - \text{١٨ ب ب م} + \text{٢٤ ب}$ على ٦ ب

اقسم $\text{١٦ ت} - \text{١٢} + \text{٨ ى} + \text{٤} - \text{٢٠ ت د ك} + \text{م}$ على ٤

اقسم $(\text{ت} - \text{٢ ح}) \times (\text{٢ م} + \text{ى}) \times \text{ك}$ على $(\text{ت} - \text{٢ ح}) \times (\text{٢ م} + \text{ى})$

اقسم $\text{ت ح د} - \text{٤ ت د} + \text{٣ ت ى} - \text{ت}$ على $\text{ح د} - \text{٤ د} + \text{٣ ى} - \text{١}$

اقسم $\text{ت ك} - \text{ر ى} + \text{ت د} - \text{٤ م ى} - \text{٦} + \text{ت}$ على $-\text{ت}$

اقسم $\text{ت م ى} + \text{٣ م ى} - \text{م ك ى} + \text{ت م} - \text{د}$ على $-\text{د م ى}$

اقسم ت ر د − ٦ ت + ٢ ر − ح د + ٦ على ٢ ت ر د

اقسم ٦ ت ك − ٨ + ٢ ك ى + ٤ − ٦ ح ى على ٤ ت ك ى

واما اذا كان المقسوم عليهِ كمية مركبة فسياتي ذكرهُ عند الكلام على العادّ الاكبر

* * *

الفصل السادس

في الكسور

٤٣ اذ كان كثيرٌ من خصايص الكسور يُعرَف من علم الحساب اقتصرنا هنا على ما يتعلق منها بالاعمال الجبرية . فنقول

٤٤ قيمة الكسر هي الخارج من قسمة الصورة على المخرج . فقيمة $\frac{٦}{٣}$ هي ٢ وقيمة $\frac{\text{ت ب}}{\text{ب}}$ هي ت فقد وضح اذًا انهُ مهما تغير الكسر فان بقي هذا الخارج على حالهِ لم تتغير قيمة الكسر . مثالهُ $\frac{٤}{٢}=\frac{١٠}{٥}=\frac{\text{٤ ت ب}}{\text{٢ ت ب}}=\frac{\text{٨ د ر ك}}{\text{٤ د ر ك}}=\frac{٦+٢}{٣+١}$ وهلمَّ جرًّا لان الخارج من كل هذه الكسور انما هو اثنان

٤٥ اذا بقي مخرج كسرٍ على حالهِ كان ضرب الصورة في كميةٍ ما كضرب القيمة في تلك الكمية وقسمة الصورة كقسمة القيمة . مثالهُ $\frac{\text{ت ب}}{\text{ت}}$ $\frac{\text{٣ ت ب}}{\text{ت}}$ $\frac{\text{٧ ت ب د}}{\text{ت}}$ $\frac{\frac{١}{٢}\text{ت ب}}{\text{ت}}$ الى اخرهِ . فالخوارج هي ب ٣ ب ٧ ب د $\frac{١}{٢}$ ب الى اخرهِ

واذا بقيت صورة كسرٍ على حالها فضرب المخرج في كميةٍ ما هو كقسمة القيمة على تلك الكمية وقسمة المخرج كضرب القيمة . مثالهُ $\frac{\text{٢٤ ت ب}}{\text{٦ ب}}$ $\frac{\text{٢٤ ت ب}}{\text{١٢ ب}}$ $\frac{\text{٢٤ ت ب}}{\text{٣ ب}}$ $\frac{\text{٢٤ ت ب}}{\text{ب}}$ فالخوارج هي ٤ ت ٢ ت ٨ ت ٢٤ ت

فنرى اذًا ان قسمة الصورة كضرب المخرج وضرب الصورة كقسمة المخرج

٤٦ نرى ايضًا مما تقدم انهُ اذا ضُرِبَت الصورة والمخرج كلاهما في كميةٍ واحدة او انقسما على كميةٍ واحدة لا تتغير قيمة الكسر . مثالهُ $\frac{\text{ب ك}}{\text{ب}}=\frac{\text{٣ ب ك}}{\text{٣ ب}}=\frac{\frac{١}{٢}\text{ب ك}}{\frac{١}{٢}\text{ب}}=\frac{\frac{١}{٢}\text{ت ب ك}}{\frac{١}{٢}\text{ت ب}}=\text{ك}$

٤٧ ان قيمة $\frac{ت ب}{ب}$ هي ت وقيمة $-\frac{ت ب}{ب}$ هي $-$ ت وى $+\frac{ت ب}{ب} =$ ى $+$ ت وى $-\frac{ت ب}{ب} =$ ى $-$ ت فنرى ان قيمة الكسر تتغير من + الى − وبالعكس بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر كلهِ

حسبما تقدم (٣٩) $\frac{ت ب}{ب} = +$ ت و $\frac{-ت ب}{ب} = -$ ت و $\frac{ت ب - ب س}{ب} = +$ ت $-$ س ولكن $\frac{-ت ب + ب س}{ب} = -$ ت $+$ س

فنرى ان قيمة الكسر تتغير من + الى − وعكسه بتبديل جميع علامات الصورة.

اذا تغيرت علامات المخرج فلنا ايضاً كما تقدم $\frac{ت ب}{ب} = +$ ت و $\frac{ت ب}{-ب} = -$ ت

فلنا مما تقدم هذه القضية العامة ان قيمة الكسر تتغير من + الى − او عكسه بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر. او بتبديل جميع علامات الصورة. او جميع علامات المخرج

ثم ان $\frac{-ت ب}{-ب} = +$ ت وى $-\frac{-ت ب}{ب} =$ ى $+$ ت اي اذا تغيرت العلامات من + الى − او عكس ذلك في موضعين من المواضع المذكورة سابقاً لا تتغير قيمة الكسر. وان تغيرت العلامات في المواضع الثلثة تتغير القيمة. وذلك حسبما تقدم في (٣٢) و(٣٩) مثالهُ $\frac{٦}{٢} = \frac{-٦}{-٢} = -\frac{-٦}{٢} = -\frac{٦}{-٢} = +$ ٣ و $\frac{٦}{-٢} = \frac{-٦}{٢} = -\frac{٦}{٢} = -\frac{-٦}{-٢} = -$ ٣

ولنا من ذلك طرقٌ مختلفة لكتابة الخارج. مثالها (ت − س) ÷ ب $= \frac{ت}{ب} + \frac{-س}{ب}$ او $\frac{ت}{ب} - \frac{س}{ب}$ والاخيرة هي الاكثر استعمالاً

نبذةٌ في الاختزال والتجنيس

٤٨ الكسر يختزل اي يُحَطُّ بقسمة الصورة والمخرج كليهما على كمية تعدُّهما. مثالهُ $\frac{ت ب}{س ب} = \frac{ت}{س}$ و $\frac{٦ د م}{٨ د ى} = \frac{٣ م}{٤ ى}$ و $\frac{٧ م}{٧ م ر} = \frac{١}{ر}$ وهكذا $\frac{ت + ب س}{(ت + ب س) \times م} = \frac{١}{م}$ و $\frac{ت م + ت ى}{ب م + ب ى} = \frac{ت}{ب}$. (٣٨)

اذا وجد حرفٌ ما في كل جزء من الصورة والمخرج يمكن اخراجهُ من الجميع (٣٨) مثالهُ

$$\frac{٢\text{ت م}+\text{ت ى}}{\text{ت د}+\text{ت ح}}=\frac{٢\text{م}+\text{ى}}{\text{د}+\text{ح}}\ \text{و}\ \frac{\text{د ر ى}+\text{د ى}}{\text{د ح ى}+\text{د ى}}=\frac{\text{ر}+١}{\text{ح}+١}$$

٤٩ الكسور تحول الى مخرجٍ مشترك بضرب كل صورةٍ في جميع المخارج الا مخرجها لايجاد صورةٍ جديدة والمخارج جميعًا بعضها في بعضٍ لايجاد المخرج المشترك. وهذا العمل يقال لهُ التجنيس. ولا تتغير بذلك قيمة الكسر لان الصورة والمخرج يضربان في كميةٍ واحدة (٤٦)

فلو قيل جنِّس $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}\ \frac{\text{س}}{\text{د}}\ \frac{\text{م}}{\text{ى}}$ لقيل $\frac{\text{ت د ى}}{\text{ب د ى}}$ و $\frac{\text{ب س ى}}{\text{ب د ى}}$ و $\frac{\text{ب د م}}{\text{ب د ى}}$

جنِّس $\frac{\text{د ر}}{٢\text{م}}\ \frac{٢\text{ح}}{\text{ع}}\ \frac{٦\text{س}}{\text{ى}}$

جنِّس $\frac{٢}{٢}\ \frac{\text{ت}}{\text{س}}\ \frac{\text{ر}+١}{\text{د}+\text{ح}}$

جنِّس $\frac{١}{\text{ت}+\text{ب}}\ \frac{١}{\text{ت}-\text{ب}}$

ثم بعد التجنيس تختزل الكسور ان كان ذلك ممكنًا

٥٠ الكمية المختلطة من صحيح وكسر تحول الى كسرٍ غير حقيقي بان تجعل للصحيح مخرجًا هو واحدٌ. ثم تفعل كما تقدم. مثالهُ ت و $\frac{\text{ب}}{\text{س}}$ فيقال $\frac{\text{ت}}{١}\ \frac{\text{ب}}{\text{س}}$ ثم $\frac{\text{ت س}}{\text{س}}\ \frac{\text{ب}}{\text{س}}$ وكذلك ت و ب و $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$ و $\frac{\text{د}}{\text{ى}}$ فتصير $\frac{\text{ت م ى}}{\text{م ى}}\ \frac{\text{ب م ى}}{\text{م ى}}\ \frac{\text{ح ى}}{\text{م ى}}\ \frac{\text{د م}}{\text{م ى}}$

والكسر الغير الحقيقي بالعكس يتحول الى كميةٍ مختلطة بقسمة الصورة على المخرج

مثالهُ $\frac{\text{ت ب}+\text{ب م}+\text{د}}{\text{ب}}=\text{ت}+\text{م}+\frac{\text{د}}{\text{ب}}$

حوِّل $\frac{\text{ت م}-\text{ت}+\text{ت د ى}-\text{ح ر}}{\text{ت}}$ الى كميةٍ مختلطة

نبذة في جمع الكسور

٥١ تُجمَع الكسور بكتابتها على التوالي مع علاماتها حسبما تقدم في جمع الصحيح او بتحويلها الى مخرجٍ مشترك. ثم تجعل جميع العلامات المتقدمة عليها ايجابية. ثم تجمع الصور ويوضع المجتمع فوق المخرج المشترك

تنبيه عند تبديل العلامات يجب الاحتراس من تغيير قيمة الكسر (٤٧)

فلو قيل اجمع $\frac{ث}{ب}$ و $\frac{س}{د}$ لقيل $\frac{ث د + ب س}{ب د}$

اجمع $\frac{م}{د}$ و $-\frac{٢ ر + د}{٣ ح}$ الجواب $\frac{٣ ح م - ٢ د ر - د د}{٣ د ح}$

اجمع $\frac{ث}{د}$ و $-\frac{ب - م}{ى}$ الجواب $\frac{ث ى - ب د + د م}{د ى}$

اجمع $\frac{ث}{ى}$ و $\frac{د}{-م}$ الجواب $\frac{-ث م + د ى}{-م ى}$ او $\frac{ث م - د ى}{م ى}$

اجمع $\frac{ث}{ث + ب}$ و $\frac{ب}{ث - ب}$ الجواب $\frac{ث ث + ب ب}{ث ث - ب ب}$

اجمع $\frac{-ث}{د}$ و $\frac{-ح}{م - ر}$

اجمع $\frac{-٤}{٢}$ و $\frac{-١٦}{٧ - ٣}$ الجواب -٦

اجمع ث و $\frac{ب}{م}$ الجواب $\frac{ث م + ب}{م}$

اجمع ٢ د و $\frac{ح + د}{م - ى}$ الجواب $\frac{٢ د م - ٢ د ى + ح + د}{م - ى}$

حوّل ث + $\frac{١}{ب}$ الى كسر غير حقيقي الجواب $\frac{ث ب + ١}{ب}$

حوّل م + د $-\frac{ر}{ح - د}$ الجواب $\frac{ح م - د م + د ح - د د - ر}{ح - د}$

حوّل ١ + $\frac{د}{ب}$ الجواب $\frac{ب + د}{ب}$

حوّل ١ $-\frac{ح}{م}$ حوّل ب + $\frac{س}{د - ى}$ حوّل ٣ + $\frac{٢ د - ٤}{٣ ث}$

نبذة في طرح الكسور

٥٢ تُغيَّر لطرح الكسور علامة المطروح من + الى − او عكسه ثم يُفعَل كما تقدم في الجمع

تنبيه تارةً يجب تغيير علامة الصورة وتارةً علامة المتقدمة على الكسر كلهِ حتى تكون هذه الاخيرة ايجابية

فلو قيل من $\frac{ث}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ لقيل $\frac{ث}{ب}-\frac{ح}{م}$ ثم بالتحويل الى مخرجٍ مشترك $\frac{ث م}{ب م}$ $\frac{-ب ح}{ب ح}$ وبالجمع $\frac{ث م - ب ح}{ب م}$

من $\frac{ث + ى}{ر}$ اطرح $\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ث د + د ى - ح ر}{د ر}$

من $\frac{ث}{م}$ اطرح $\frac{د - ب}{ى}$ الجواب $\frac{ث ى - د م + ب م}{م ى}$

من $\frac{ث + ٢ د}{٤}$ اطرح $\frac{٣ ث - ٢ د}{٣}$ الجواب $\frac{١٧ د - ٩ ث}{١٢}$

من $\frac{ب - د}{م}$ اطرح $-\frac{ب}{ى}$ الجواب $\frac{ب ى - د ى + ب م}{م ى}$

من $\frac{ث + ١}{د}$ اطرح $\frac{د - ١}{م}$ من $\frac{٣}{ث}$ اطرح $\frac{٤}{ب}$

٥٣ تُطرَح الكسور ايضاً مثل الصحيح بكتابتها متوالية بعد تبديل العلامة.

فلو قيل اطرح $-\frac{ح + د}{ى}$ من $\frac{ح}{م}$ لقيل $\frac{ح}{م}+\frac{ح + د}{ى}$

اما طرح الكسر من صحيحٍ او عكسهُ فهو بان تجعل للصحيحِ مخرجاً هو واحدٌ ثم تفعل كما تقدم

من $\frac{ح}{ى}$ اطرح م الجواب $\frac{ح}{ى}-م=\frac{ح - م ى}{ى}$

من $٤ث+\frac{ب}{س}$ اطرح $٢ت-\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ث س د + ب د + ح س}{س د}$

من $١+\frac{ب - س}{د}$ اطرح $\frac{س - ب}{د}$ الجواب $\frac{د + ٢ ب - ٢ س}{د}$

من $ت+٣ح-\frac{د - ب}{٢}$ اطرح $٣ت-ح+\frac{د + ب}{٢}$

نبذة في ضرب الكسور

٥٤ ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في بعضٍ لايجاد صورةٍ جديدة. والمخارج بعضها في بعضٍ لايجاد مخرجٍ جديد. مثالهُ

$\frac{٣ ب}{س}\times\frac{د}{٢م}=\frac{٣ ب د}{٢ س م}$ و $\frac{ث + د}{ى}\times\frac{٤ ح}{م - ٢}=\frac{٤ ث ح + ٤ ح د}{م ى - ٢ ى}$

اضرب $\frac{(ت + م) \times ح}{٢}$ في $\frac{٤}{(ت - ن)}$ الجواب $\frac{(ت + م) \times ٤ ح}{٢ \times (ت - ن)}$

اضرب $\frac{ت + ح}{٢ + د}$ في $\frac{٤ - م}{س + ى}$

اضرب $\frac{١}{ت + ٢ ر}$ في $\frac{٣}{٨}$ اضرب $\frac{٢ ث}{م}$ في $\frac{ح - د}{ى}$ في $\frac{ب}{س}$ في $\frac{١}{س - ١}$

اضرب $\frac{٢ + ب}{ن}$ في $\frac{١}{ح}$ في $\frac{د}{ر + ٢}$

اضرب $\frac{ت د}{ح ى}$ في $\frac{ت - ٦}{د + ١}$ في $\frac{٣}{٧}$

٥٥ يُختَصر الضرب بطرح الكميات المتساوية من الصور والمخارج فيستغنى بذلك عن الاختزال بعد اتمام الضرب. مثالهُ لو قيل اضرب $\frac{ت}{ر}$ في $\frac{ح}{ت}$ في $\frac{د}{ى}$ قلنا ت في احدى الصور واحد المخارج. ولذلك نسقطها منهما فيبقى $\frac{د ح}{ر ى}$

اضرب $\frac{ت د}{م}$ في $\frac{م}{٢ ت}$ في $\frac{ت ح}{٣ د}$ الجواب $\frac{ت ح}{٦}$

اضرب $\frac{ت + د}{ى}$ في $\frac{م ى}{ت ح}$ الجواب $\frac{ت م + د م}{ت ح}$

اضرب $\frac{ت م + د}{ح}$ في $\frac{ح}{م}$ في $\frac{٢ ر}{٥ ت}$

وهكذا في الكسر والصحيح يُضرَب الصحيح في صورة الكسر. مثالهُ ت $\times \frac{م}{ى} = \frac{ت م}{ى}$

ور $\times \frac{ك}{د} \times \frac{ح + ١}{٢} = \frac{ح رك + رك}{٢ د}$

وت $\times \frac{١}{ب} = \frac{ت}{ب}$

٥٦ الكسر يُضرَب في كميةٍ مساوية لمخرجهِ برفع المخرج. مثالهُ $\frac{ت}{ب} \times ب =$ ت و $\frac{٢ م}{ت - ى} \times (ت - ى) = ٢م$ و $\frac{ح + ٢ د}{٢ + م} \times (٢ + م) = ح + ٢د$

وهكذا اذا ضُرِب في ضلعٍ من اضلاع المخرج برفع ذلك الضلع. مثالهُ $\frac{ت}{ب ى} \times ى = \frac{ت}{ب}$ و $\frac{ح}{٢٤} \times ٦ = \frac{ح}{٤}$

٥٧ الكسر الاضافي هو كسر الكسر وهو الحاصل من ضرب كسرين او اكثر. مثالهُ $\frac{٣}{٤}\,\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ اي ثلثة ارباع $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \frac{٣\text{ت}}{٤\text{ب}}$ فيتحول الكسر الاضافي الى بسيط بضرب الصور والمخارج حسبما تقدم

حوّل $\frac{٢}{٧}\,\frac{\text{ت}}{\text{ب}+٢}$ الى كسرٍ بسيط الجواب $\frac{٢\text{ت}}{٧\text{ب}+١٤}$

حوّل $\frac{٢}{٣}\,\frac{٤}{٥}\,\frac{\text{ب}+\text{ح}}{٢\text{ت}+\text{م}}$ الجواب $\frac{٨\text{ب}+٨\text{ح}}{٣٠\text{ت}+١٥\text{م}}$

حوّل $\frac{١}{٧}\,\frac{١}{٣}\,\frac{١}{٨-\text{د}}$ الجواب $\frac{١}{١٦٨-٢١\text{د}}$

فنرى ان $\frac{٢}{٣}\text{ت} = \frac{٢\text{ت}}{٣}$ و $\frac{١}{٥}\text{ب} = \frac{\text{ب}}{٥}$ و $\frac{٤}{٧}\text{ى} = \frac{٤\text{ى}}{٧}$ وقس على ذلك

نبذة في قسمة الكسور

٥٨ لقسمة الكسور يُقلَب المقسوم عليهِ بان تجعل صورتهُ مخرجاً ومخرجهُ صورةً ثم يفعل كما في الضرب

فلو قيل اقسم $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ على $\frac{\text{س}}{\text{د}}$ لقيل $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} \times \frac{\text{د}}{\text{س}} = \frac{\text{ت}\,\text{د}}{\text{ب}\,\text{س}}$ وكيفية هذه القاعدة هي انهُ اذا ضُرِب كسرٌ في ذاتهِ بعد قلبهِ يكون الحاصل واحدًا ابدًا. واذا ضُرِبَت كمية في واحدٍ لا تتغير فان ضُرِب مقسومٌ اولاً في المقسوم عليهِ بعد قلبهِ ثم في ذات المقسوم عليهِ يكون الحاصل الاخير مساويًا للمقسوم. اما القسمة فهي استخراج كميةٍ اذا ضربت في المقسوم عليهِ حصل المقسوم. والكمية الحاصلة من ضرب المقسوم في المقسوم عليه بعد قلبهِ مستكملة الشروط المذكورة. فالقاعدة اذًا صحيحة

اقسم $\frac{\text{م}}{٢\text{د}}$ على $\frac{٣\text{ح}}{\text{ى}}$ الجواب $\frac{\text{م}\,\text{ى}}{٦\,\text{د}\,\text{ح}}$

الامتحان $\frac{\text{م}\,\text{ى}}{٦\,\text{د}\,\text{ح}} \times \frac{٣\text{ح}}{\text{ى}} = \frac{\text{م}}{٢\text{د}}$

اقسم $\frac{\text{ك}+\text{د}}{\text{ر}}$ على $\frac{٥\text{د}}{\text{ى}}$ الجواب $\frac{\text{ك}\,\text{ى}+\text{د}\,\text{ى}}{٥\,\text{د}\,\text{ر}}$

الامتحان $\frac{\text{ك}\,\text{ى}+\text{د}\,\text{ى}}{٥\,\text{د}\,\text{ر}} \times \frac{٥\text{د}}{\text{ى}} = \frac{\text{ك}+\text{د}}{\text{ر}}$

اقسم $\frac{٤ د ح}{ك}$ على $\frac{٤ ح ر}{ت}$ الجواب $\frac{ت د}{ر ك}$

الامتحان $\frac{ت د}{ر ك} \times \frac{٤ ح ر}{ت} = \frac{٤ د ح}{ك}$

اقسم $\frac{٣٦ د}{٥}$ على $\frac{١٨ ح}{١٠ ى}$ الجواب $\frac{٤ د ى}{ح}$

اقسم $\frac{ت ب + ١}{٢ ى}$ على $\frac{ت ب - ١}{ك}$

اقسم $\frac{ح - م ى}{م}$ على $\frac{٢}{ت + ١}$

٥٩ يُقسَم الكسر على صحيحٍ بضرب المخرج في ذلك الصحيح. مثالهُ $\frac{ت}{ب} \div م = \frac{ت}{ب م}$ لان م $= \frac{م}{١}$ وحسبما تقدم $\frac{ت}{ب} \div \frac{م}{١} = \frac{ت}{ب} \times \frac{١}{م} = \frac{ب}{ت م}$

٦٠ قد تقدم الكلام في (١٢) ان مكفوء كميةٍ هو الخارج من قسمة واحدٍ على على تلك الكمية. فمكفوء $\frac{ت}{ب}$ هو $١ \div \frac{ت}{ب} = \frac{ب}{ت}$ فيكون مكفوء كسرٍ هو الكسر نفسهُ مقلوبا. فمكفوء $\frac{ب}{م + ى}$ هو $\frac{م + ى}{ب}$ ومكفوء $\frac{١}{٢ ى}$ هو $\frac{٢ ى}{١}$ او ٢ ى ومكفوء $\frac{١}{٤}$ هو ٤

٦١ قد يقع احيانًا كسرٌ في صورة كسرٍ اخر. مثالهُ $\frac{\frac{٢}{٤} ت}{ب}$ وهذا الكسر يُنقَل من الصورة الى المخرج او بعكس ذلك بقلبهِ. ولا تتغير القيمة بذلك لان القسمة على كسرٍ هي كالضرب في ذلك الكسر مقلوبًا. وضرب الصورة كقسمة المخرج وقسمة الصورة كضرب المخرج. ففي $\frac{\frac{٢}{٥} ت}{ك}$ يضرب ت في $\frac{٢}{٥}$ ولا تتغير القيمة ان قسمنا المخرج على $\frac{٢}{٥}$ اي ضربناهُ في $\frac{٥}{٢}$ فاذًا $\frac{\frac{٢}{٥} ت}{ك} = \frac{ت}{\frac{٥}{٢} ك}$ وهكذا $\frac{ح}{\frac{٢}{٩} م} = \frac{\frac{٩}{٢} ح}{م}$ و $\frac{\frac{٢}{٤} د}{ح + ى} = \frac{د}{\frac{٤}{٢} ح + \frac{٤}{٢} ى}$ و $\frac{ت - ك}{\frac{١}{٢} م} = \frac{\frac{٢}{١} ت - \frac{٢}{١} ك}{م}$ وقس على ذلك

ثم ان هذا الكسر الواقع في الصورة يمكن ازالتهُ لان ضرب الصررة هو كضرب القيمة. فاذًا $\frac{\frac{٢}{٥} ت}{ب} = \frac{٢}{٥} \times \frac{ت}{ب} = \frac{٢ ت}{٥ ب}$ و $\frac{\frac{١}{٥} ت}{ى} = \frac{١}{٥} \times \frac{ت}{ى} = \frac{ت}{٥ ى}$

و $\frac{\frac{١}{٢}ح+\frac{١}{٢}ك}{م}=\frac{١}{٢}\times\frac{ح+ك}{م}=\frac{ح+ك}{٢م}$ و $\frac{\frac{٣}{٤}ك}{٥ت}=\frac{٣ك}{٢٠ت}$

وبعكس العمل $\frac{٣ت}{٧ك}=\frac{٣}{٧}\times\frac{ت}{ك}=\frac{\frac{٣}{٧}ت}{ك}$ و $\frac{ت}{٣ى}=\frac{١}{٣}\times\frac{ت}{ى}=$

$\frac{\frac{١}{٣}ت}{ى}$ و $\frac{٤ت}{٥د+٥ى}=\frac{٤}{٥}\times\frac{ت}{د+ك}=\frac{\frac{٤}{٥}ت}{د+ك}$

اما الكسر الواقع في المخرج فيُزَال بالقسمة اي بضرب الكسر الاصلي في ذلك الكسر مقلوبًا. مثالهُ $\frac{ت}{\frac{٢}{٥}ب}=\frac{ت}{ب}\div\frac{٢}{٥}=\frac{ت}{ب}\times\frac{٥}{٢}=\frac{٥ت}{٢ب}$ و $\frac{ت}{\frac{٢}{٧}ك}=$ $\frac{٧ت}{٢ك}$ و $\frac{ت+ح}{\frac{٣}{٩}ى}=\frac{٩ت+٩ح}{٣ى}$ و $\frac{٣ح}{\frac{٤}{٧}م}=\frac{٢١ح}{٤م}$ وبالعكس $\frac{٧ت}{٣ك}=$ $\frac{ك}{\frac{٣}{٧}ك}$ و $\frac{٣ى+٣دك}{٢م}=\frac{ى+دك}{\frac{٢}{٣}م}$ و $\frac{٣ك}{ى}=\frac{ك}{\frac{١}{٣}ى}$

٦٢ قد يكون كلا الصورة والمخرج كسرًا. مثالهُ $\frac{\frac{ت}{ب}}{\frac{س}{د}}$ فيتحول هكذا

$\frac{ت}{ب}\div\frac{س}{د}=\frac{ت\,د}{ب\,س}$ و $\frac{\frac{ك}{ى}}{ح}=\frac{ك}{ح\,ى}$ و $\frac{ر}{\frac{م}{ن}}=\frac{ن\,ر}{م}$

* * *

الفصل السابع

في المعادلات من الدرجة الاولى وهي البسيطة

٦٣ المعادلة عبارةٌ جبرية دالَّة على المساواة بين كميتين فاكثر. كقولك ت + ب = س + د اي ان مجموع ت و ب يعدل مجموع س و د والمقصود منها انما هو استعلام كمية مجهولة بواسطة تحويل المعادلة التي فيها تقع المجهولة مرتبطة مع كمياتٍ معلومة. وتحويل المعادلات هو نقل المجهولات الى جانبٍ واحد من علامة المساواة والمعلومات الى الجانب الاخر منها بدون نزع المعادلة اي المساواة بين الجانبين. ولا ريب ان المعادلة لا تنتزع اذا اضيف الى الجانبين اشيا متساوية (اولية اولى) ولا اذا طَرِح منهما اشيا متساوية (اولية ثانية) ولا اذا ضُرِبا في اشيا متساوية

(اولية ثالثة) ولا اذا انقسما على اشيا متساوية (اولية رابعة) فلنا ثلث طرق لمعاملة المعادلات بدون نزع المساواة بين الجانبين وهي النقل والضرب والقسمة

اما النقل فلو فرضنا هذه المعادلة ك − ٧ = ٩ نضيف الى الجانبين ٧ فتصير ك − ٧ + ٧ = ٩ + ٧ ولكن ٧ − ٧ = ٠ فيبقى ك = ٩ + ٧ فوجدنا قيمة المجهولة ك وهي ٩ + ٧ اي ١٦

نفرض ايضًا ك + ب = ت

اطرح ب من الجانبين فتصير ك + ب − ب = ت − ب ولكن ب − ب = ٠ فاذًا ك = ت − ب

فنرى ان العمل قد تمَّ بنقل المعلومة من الجانب الواحد الى الاخر مع تبديل علامتها وهذا العمل يقال لهُ المقابلة. ولنا مما سبق هذه القاعدة

متى ارتبطت الكمية المجهولة مع كمياتٍ معلومة بعلامة الجمع او الطرح فانقل المعلومات الى الجانب المتقابل وابدل علاماتها

مفروض ك + ٣ ب − م = ح − د
بالمقابلة ك = ح − د − ٣ ب + م

٦٤ متى وقعت كميات متشابهة على جانبٍ واحد يجب جمعها حسب قواعد الجمع

فلو فُرِض ك + ٥ ب − ٤ ح = ٧ ب
بالمقابلة ك = ٧ ب − ٥ ب + ٤ ح
وبالجمع ك = ٢ ب + ٤ ح

اذا كانت المجهولة على الجانبين يجب نقلها الى جانبٍ واحد

فلو فُرِض ٢ ك + ٢ ح = ح + د + ٣ ك
بالمقابلة ٢ ح − ح − د = ٣ ك − ٢ ك
وبالجمع ح − د = ك

٦٥ اذا وقعت كمياتٌ متساوية بعلاماتٍ متشابهة على الجانبين يمكن طرحها منهما في الحال

فلو فُرِض ك + ٣ ح + د = ب + ٣ ح + ٧ د

اطرح + ٣ ح من الجانبين

ك + د = ب + ٧ د

وبالمقابلة والجمع ك = ب + ٦ د

ولا فرق في ترتيب الكميات ولا في الجانب الذي تُنقَل اليهِ. واذا ابدلت جميع علامات الجانبين لا تتغير المعادلة. مثالهُ ك − ب = د − ت بالمقابلة لنا − د + ت = − ك + ب او − ك + ب = − د + ت واذا نُقِل جميع الكميات الى الجانب الواحد يبقى الاخر صفرًا. فلو فُرِض ك + ب = د فحينئذٍ ك + ب − د = ٠

وعلى ما تقدم تحول هذه المعادلات

ت + ٢ ك − ٨ = ب − ٤ + ك + ت

ى − ت ب − ح م = ت + ٢ ى − ت ب + ح م

ح + ٣٠ + ٧ ك = ٨ − ٦ ح + ٦ ك − د + ب

ب ح + ٢١ − ٤ ك + د = ١٢ − ٣ ك − ٧ ب ح + د

٦٦ اما الضرب فيستعمل متى انقسمت الكمية المجهولة على معلومةٍ كما في $\frac{ك}{ت}$ = ب بضرب الجانبين في ت فتصير ك = ت ب

ولنا من ذلك هذه القاعدة

متى انقسمت المجهولة على معلومةٍ فاضرب الجانبين في تلك المعلومة ثم قابل واجمع كما تقدَّم

فلو فُرِض $\frac{ك}{س}$ + ت = ب + د

اضرب الجانبين في س ك + ت س = ب س + د س

وبالمقابلة ك = ب س + د س − ت س

وهذا العمل يقال لهُ الجبر اي اعادة الكسر صحيحًا

مفروض $\frac{ك - ٤}{٦}$ + ٥ = ٣٠

بالجبر ك − ٤ + ٣٠ = ١٢٠

بالمقابلة ك = ١٢٠ + ٤ − ٣٠ = ٩٤

مفروض $\frac{ك}{ت+ب}+د=ح$

بالجبر $ك+ت د+ب د=ت ح+ب ح$

بالمقابلة $ك=ت ح+ب ح-ت د-ب د$

وهكذا متى وقعت المجهولة في مخرج كسرٍ يُضرَب الجانبان في ذلك المخرج

مفروض $\frac{٦}{١٠-ك}+٧=٨$

اضرب في (١٠ − ك) $٦+٧٠-٧ك=٨٠-٨ك$

بالمقابلة والجمع $ك=٤$

٦٧ لو فرض $\frac{ك}{ت}=\frac{د}{ب}+\frac{ح}{س}$

فالضرب في ت تصير $ك=\frac{ت د}{ب}+\frac{ت ح}{س}$

وبالضرب في ب تصير $ب ك=ت د+\frac{ت ب ح}{س}$

وبالضرب في س تصير $ب س ك=ت د س+ت ب ح$

او بالضرب في جميع المخارج دفعةً واحدة تصير $\frac{ت ب س ك}{ت}=\frac{ت ب د س}{ب}+\frac{ت ب ح س}{س}$

ثم باخراج الاحرف المتشابهة من الصور والمخارج لنا كما في الاول $ب س ك=ت س د+ت ب ح$ ولنا من ذلك هذه القاعدة لازالة الكسور من معادلة اي لجبرها

اضرب كل صورةٍ في جميع المخارج الا مخرجها

مفروض $\frac{ك}{ت}=\frac{ب}{د}+\frac{ى}{ع}-\frac{ح}{م}$

بالجبر $د ع م ك=ت ب ع م+ت د م ى-ت د ع ح$

مفروض $\frac{ك}{٢}=\frac{٢}{٣}+\frac{٤}{٥}+\frac{٦}{٢}$

بالجبر $٣٠ك=٤٠+٤٨+١٨٠$

٦٨ اذا كانت علامة كسرٍ سلبيةً وجب تبديلها بدون تغير القيمة كما تقدم في فصل الكسور (٤٧)

مفروض $\frac{ت - د}{ك} = س - \frac{٣ب - ٢ح م - ٦ن}{ر}$

بتبديل العلامات $\frac{ت - د}{ك} = س + \frac{-٣ب + ٢ح م + ٦ن}{ر}$

ثم بالجبر $ت ر - د ر = ر س ك - ٣ب ك + ٢ح م ك + ٦ك ن$

٦٩ اما القسمة فتنحلُّ بها المعدلات متى ضُرِبَت المجهولة في المعلومة وذلك بقسمة جانبي المعادلة على تلك المعلومة. فلو فُرِض $ت ك + ب - ٣ح = د$ فبالمقابلة تصير $ت ك = د - ب + ٣ح$ وبالقسمة على ت $ك = \frac{د - ب + ٣ح}{ت}$

مفروض $٢ك = \frac{ت}{س} - \frac{د}{ح} + ٤ب$

بالجبر $٢س ح ك = ت ح - س د + ٤ب ح س$

بالقسمة على ٢س ح $ك = \frac{ت ح - س د + ٤ب ح س}{٢س ح}$

مفروض $٣ك - ب ك = ت - د$

حسب (٢٨) $(٣ - ب) \times ك = ت - د$

بالقسمة على ٣ − ب $ك = \frac{ت - د}{٣ - ب}$

مفروض $ت ك + ك = ح - ٤$

بالقسمة على ت + ١ $ك = \frac{ح - ٤}{ت + ١}$

مفروض $ك - \frac{ك - ب}{ح} = \frac{ت + د}{٤}$

بالجبر $٤ح ك - ٤ك + ٤ب = ت ح + ح د$

بالمقابلة والقسمة $ك = \frac{ت ح + ح د - ٤ب}{٤ح - ٤}$

٧٠ اذا ضرب كل جزء من المعادلة في كميةٍ ما فيجب قسمة المعادلة عليها. واذا انقسم كل جزء على كميةٍ ما يجب ضرب المعادلة فيها. وهكذا تصير ابسط مما كانت وتسهل معاملتها حسبما تقدم

مفروض   ت ك + ٢ ت ب = ٦ ت د + ت

بالقسمة على ت   ك + ٢ ب = ٦ د + ١

بالمقابلة   ك = ٦ د + ١ − ٢ ب

مفروض $$\frac{\text{ك}+\text{١}}{\text{ك}}-\frac{\text{ب}}{\text{ك}}=\frac{\text{ح}-\text{د}}{\text{ك}}$$

بالضرب في ك حسب (٤٨) ك + ١ − ب = ح − د

بالمقابلة   ك = ح − د + ب − ١

مفروض   ك × (ت + ب) − ت − ب = د × (ت + ب)

بالقسمة على ت + ب   ك − ١ = د

وبالمقابلة   ك = د + ١

٧١ اذا اقتضى كتابة مسئلةٍ على هيئة النسبة فتتحول تلك النسبة الى معادلة بان تجعل حاصل الطرفين مساوياً لحاصل الوسطين كما عرفت في علم الحساب. فان فرض ت : ب :: س : د فاذاً ت د = ب س وان فرض ٣ : ٤ :: ٦ : ٨ فحينئذٍ ٣ × ٨ = ٤ × ٦ وهكذا ت ك : ب :: س ح : د ثم ت د ك = ب ح س وايضاً ت + ب : س :: ح − م : ى ثم ت ى + ب ى = ح س − س م

٧٢ تتحول معادلةٌ الى نسبةٍ بفك الجانب الواحد الى ضلعين فيجعلان طرفين. والجانب الاخر الى ضلعين فيجعلان وسطين. فلو فُرِض ت ب س = د ى ح فينفك الجانب الاول الى ت × ب س او ت ب × س او ت س × ب وهكذا ينفك الجانب الاخر الى د × ى ح او د ى × ح او د ح × ى

ولنا من ذلك عدة نسبٍ اي ت : د :: ى ح : ب س وايضاً ت ب : د ى :: ح : س او ت س : د ح :: ى : ب وهلم جرًّا لان هذه النسب كلها اذا تحولت الى معادلات تصير ت ب س = د ى ح

فلو فُرِض ايضاً ت ك + ب ك = س د − س ح لانفكّ الجانب الاول الى ك × (ت + ب) والثاني الى س × (د − ح) ولنا ك : س :: د − ح : ت + ب او د − ح : ك :: ت + ب : س وهلمّ جرًّا

امثلة

(١) مفروض $\frac{٣ك}{٤}+٦=\frac{٥ك}{٨}+٧$

بالجبر $٢٤ك+١٩٢=٢٠ك+٢٢٤$

بالمقابلة والجمع $٤ك=٣٢$

بالقسمة على ٤ $ك=٨$

(٢) مفروض $\frac{ك}{ت}+ح=\frac{ك}{ب}-\frac{ك}{س}+د$

بالجبر $ب\,س\,ك+ب\,ت\,ح\,س=ت\,س\,ك-ت\,ب\,ك+ت\,ب\,س\,د$

بالمقابلة والقسمة $ك=\frac{ت\,ب\,س\,د-ب\,ت\,ح\,س}{ب\,س-ت\,س+ت\,ب}$

(٣) مفروض $٤٠-٦ك-١٦=١٢٠-١٤ك$ $ك=١٢$

(٤) . $\frac{ك-٣}{٢}+\frac{ك}{٣}=٢٠-\frac{ك-١٩}{٢}$ $ك=\frac{٩٣}{٤}$

(٥) . $\frac{ك}{٣}+\frac{ك}{٥}=٢٠-\frac{ك}{٤}$ $ك=$

(٦) . $\frac{١-ت}{ى}-٤=٥$ $ى=$

(٧) . $\frac{٣}{ك+٤}-٢=٨$ $ك=$

(٨) . $\frac{٦ل}{ل+٤}=١$ $ل=$

(٩) . $ك+\frac{ك}{٢}+\frac{ك}{٣}=١١$ $ك=$

(١٠) . $\frac{ك}{٢}+\frac{ك}{٣}-\frac{ك}{٤}=\frac{٧}{١٠}$ $ك=$

(١١) . $\frac{ى-٥}{٤}+٦ى=\frac{٢٨٤-ى}{٥}$ $ى=$

(١٢) . $٣ك+\frac{٢ك+٦}{٥}=٥+\frac{١١ك-٢٧}{٢}$

(١٣) . $\frac{٦ك-٤}{٣}-٢=\frac{١٨-٤ك}{٣}+ك$

(١٤) . $٢١+\frac{٣ك-١١}{١٦}=\frac{٥ك-٥}{٨}+\frac{٩٧-٧ك}{٢}$

(١٥) . $٣ك - \frac{ك - ٤}{٤} - ٤ = \frac{٥ك + ١٤}{٣} - \frac{١}{١٢}$

(١٦) . $\frac{٧ك + ٥}{٣} - \frac{١٦ + ٤ك}{٥} + ٦ = \frac{٣ك + ٩}{٢}$

(١٧) . $\frac{١٧ - ٣ى}{٥} - \frac{٤ى + ٢}{٣} = ٥ - ٦ى + \frac{٧ى + ١٤}{٣}$

(١٨) . $م - \frac{٣م - ٣}{٥} + ٤ = \frac{٢٠ - م}{٢} - \frac{٦م - ٨}{٧} + \frac{٤م - ٤}{٥}$

(١٩) . $\frac{٦ك + ٧}{٩} + \frac{٧ك - ١٣}{٦ك - ٣} = \frac{٢ك + ٤}{٣}$

(٢٠) . $\frac{٥ك + ٤}{٢} : \frac{١٨ - ك}{٤} :: ٧ : ٤$

عمليّات

(١) سُئِل رجلٌ عن ثمن ساعتهِ فقال ان ضُرِب ثمنها في اربعة واضيف الى الحاصل سبعون وطُرِح المجموع خمسون يكون الباقي ٢٢٠ دينارًا. فكم ثمن الساعة

افرض ثمن الساعة ك

واذا ضرب هذا الثمن في ٤ يصير ٤ ك

ثم اضف الى هذا الحاصل ٧٠ فيصير ٤ ك + ٧٠

اطرح من المجموع ٥٠ فيصير ٤ ك + ٧٠ − ٥٠

وهذا الباقي يعادل ٢٢٠ دينارًا اي ٤ ك + ٧٠ − ٥٠ = ٢٢٠

وبتحويل هذه المعادلة لنا ك = ٥٠

فقد وجدنا ثمن الساعة خمسين دينارًا. ولامتحان العمل تُوضَع قيمة المجهول عوض المجهول في المعادلة الاصلية فان كان الجانبان متساويين كان العمل صحيحًا والا فلا. مثالهُ في المسئلة السابقة بالتعويض عن ك بخمسين تصير ٤ × ٥٠ + ٧٠ − ٥٠ = ٢٢٠ وهو صحيح

(٢) ايُّ عددٍ يضاف اليهِ نصفهُ ثم يطرَح ٢٠ من المجتمع فيكون الباقي ربع العدد

افرض العدد ك

ثم حسب شروط المسئلة $ك + \frac{ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٤}$

وبتحويل هذه المعادلة تصير ك = ١٦

والامتحان $١٦ + \frac{١٦}{٢} - ٢٠ = \frac{١٦}{٤}$

(٣) رجلٌ قسم مبلغًا بين اولادهِ الثلثة فاعطى الاول نصف المبلغ الا الف دينارٍ. والثاني ثلث المبلغ الا ٨٠٠ دينار. والثالث ربع المبلغ الا ٦٠٠ دينار. فكم كان المبلغ

اذا فرضنا ان المبلغ ك تكون الحصص $\frac{ك}{٢} - ١٠٠٠$ و $\frac{ك}{٣} - ٨٠٠$ و $\frac{ك}{٤} - ٦٠٠$ ومجموع هذه الثلاث يعادل المبلغ اي $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} - ٢٤٠٠ = ك$

وبالتحويل ك = ٢٨٨٠٠

(٤) اقسم ٤٨ الى قسمين حتى ينقسم اكبرها على ٦ واصغرها على ٤ ويكون مجتمع الخارجين ٩

ان فُرِض الاصغر ك يكون الاكبر ٤٨ − ك

وحسب شروط المسئلة $\frac{ك}{٤} + \frac{٤٨ - ك}{٦} = ٩$

وبالتحويل ك = ١٢ اصغرها و٤٨ − ١٢ = ٣٦ اكبرها

(٥) ايُّ عددٍ اذا اضيف اليهِ نصفهُ يكون المجتمع اكثر من ٦٠ بفضلة العدد و٦٥

افرض العدد ك فلنا $ك + \frac{ك}{٢} - ٦٠ = ٦٥ - ك$

ك = ٥٠

(٦) اقسم ٣٢ الى قسمين حتى ينقسم اصغرها على ٦ واكبرها على ٥ ويكون مجتمع الخارجين ٦

لنفرض اصغرها ك فيكون اكبرها ٣٢ − ك

وبشروط المسئلة $\frac{ك}{٦} + \frac{٣٢ - ك}{٥} = ٦$

ك = ١٢ اصغرها ٣٢ − ١٢ = ٢٠ اكبرها

(٧) اقسم ٢٥ الى قسمين يكون اكبرها ٤٩ مرة اصغرها

لنفرض الاصغر ك والاكبر ٢٥ − ك فلنا ٢٥ − ك = ٤٩ ك ك = $\frac{١}{٢}$

اصغرهما و $٢٤\frac{١}{٢}$ اكبرهما

(٨) اقسم ٤٨ الى ٩ اقسام حتى يكون كل قسمٍ اكبر من الذي قبلهُ بنصف

ليكن القسم الاصغر $ك$

فيكون الثاني $ك + \frac{١}{٢}$

والثالث $ك + ١$

والرابع $ك + ١\frac{١}{٢}$

وهلمّ جرًّا $ك + ٢$

$ك + ٢\frac{١}{٢}$

$ك + ٣$

$ك + ٣\frac{١}{٢}$

$ك + ٤$

نجمع هذه الاقسام $٩ ك + ١٨ = ٤٨$

$$ك = ٣\frac{١}{٣}$$

والاقسام $\overset{١}{٣\frac{١}{٣}} + \overset{٢}{٣\frac{٥}{٦}} + \overset{٣}{٤\frac{١}{٣}} + \overset{٤}{٤\frac{٥}{٦}} + \overset{٥}{٥\frac{١}{٣}} + \overset{٦}{٥\frac{٥}{٦}} + \overset{٧}{٦\frac{١}{٣}} +$

$$\overset{٨}{٦\frac{٥}{٦}} + \overset{٩}{٧\frac{١}{٣}} = ٤٨$$

تنبيه . هذه المسئلة تُحَلُّ ايضًا بقواعد السلسلة الحسابية على اسهل طريقةٍ كما ستعلم

(٩) اي عددٍ يُطرَح واحدٌ من مضاعفهِ ثم يضاعف الباقي ويُطرَح منهُ ٢ ويقسم هذا الباقي على ٤ فيكون الخارج اقل من العدد بواحد

لنفرض العدد $ك$ فيكون مضاعفهُ $٢ ك$ وان طُرِح منهُ واحدٌ يكون $٢ ك - ١$ ومضاعفهُ $٤ ك - ٢$ ثم يُطرَح ٢ فيكون $٤ ك - ٢ - ٢$ اي $٤ ك - ٤$ وبالقسمة على ٤ يصير $ك - ١$ وهذا يعادل العدد الا واحدًا اي $ك - ١ = ك - ١$

فلنا ما يُسمَّى معادلة ذاتية . وهذه المعادلة تدل على ان المجهول غير معينٍ فيمكن

ان يُفرَض ايّ عددٍ شيت

(١٠) رجلٌ اشترى اذرعًا من القماش. وكان ثمن كل ٥ اذرعٍ ٧ غروش. ثم باع ما اشتراهُ بثمنٍ ١١ غرشًا لكل ٧ اذرع وربح ١٠٠ غرش فكم ذراعا اشترى

لنفرض الاذرع ك و $\frac{٧}{٥}$ الغرش ثمن الذراع و $\frac{٧ك}{٥}$ ثمن الاذرع كلها ثم عند البيع كان ثمن الذراع $\frac{١١}{٧}$ من الغرش وثمن الجميع $\frac{١١ك}{٧}$ وفضلة الشرآء والبيع ١٠٠ اي $\frac{١١ك}{٧} - \frac{٧ك}{٥} = ١٠٠$ ٦ ك = ٣٥٠٠ ك = ٥٨٣ $\frac{١}{٣}$

(١١) ايّ عددٍ اذا اضيف اليهِ ٧٣٠ وقُسِم المجتمع على ١٢٥ يعادل الخارج ٧٣٩٢ مقسومًا على ٤٦٢

الجواب ١٢٨٠

(١٢) احد التُجّار تاجر في صنفٍ من البضايع فربح او خسر. وفي صنفٍ اخر ربح ٣٥٠ دينارًا. وفي صنفٍ اخر خسر ٦٠ دينارًا. وربح من الاصناف الثلثة ٢٠٠ دينارٍ. فكم ربح او خسر في الاول

لنفرض المجهول ك فان حسبنا الربح + تكون الخسارة − فلنا ك + ٣٥٠ − ٦٠ = ٢٠٠ وبالمقابلة ك = − ٩٠

فكون الجواب سلبيًا يدل على انهُ خسر في الاول

(١٣) سفينةٌ سافرت الى الشمال ٤° ثم الى الجنوب ١٣° ثم الى الشمال ايضًا ١٧° ثم الى الجنوب ايضًا ١٩° وكان لها حينئذٍ ١١° من العرض الجنوبي فكم كان عرضها في الاول

لنفرض ك = العرض المطلوب. فان حسبنا الشمال + يكون الجنوب − ولنا ك + ٤ − ١٣ + ١٧ − ١٩ = − ١١ ك = ٠ اي كانت على خط الاستوآء

(١٤) ايّ عددٍ اذا انقسم على ١٢ يكون مجتمع الخارج والمقسوم والمقسوم عليهِ ٦٤

لنفرض ك = العدد. فلنا $\frac{ك}{١٢} + ك + ١٢ = ٦٤$

وبالجبر والمقابلة والقسمة $ك = \frac{٦٢٤}{١٣} = ٤٨$

(١٥) رجلٌ اشترى ١٢ توب قماش منها اثنان ايضان وثلثة سود وسبعة زرق بثمن ١٤٠ دينارًا. وكان ثمن الثوب الاسود يزيد عن ثمن الابيض دينارين والازرق عن الاسود ثلثة دنانير فكم كان ثمن كل واحدٍ منها

لنفرض ك = ثمن الابيض فيكون ثمن الثوبين ٢ ك وثمن الاسود ك + ٢ فيكون ثمن الثلثة ٣ ك + ٦ وثمن الثوب الازرق ك + ٥ فيكون ثمن السبعة ٧ ك + ٣٥ والمجموع ١٢ ك + ٤١ فلنا ١٢ ك + ٤١ = ١٤٠ ك = ٨ $\frac{١}{٤}$ = ثوبًا ابيض

١٠ $\frac{١}{٤}$ = ثوبًا اسود ١٢ $\frac{١}{٤}$ = ثوبًا ازرق

(١٦) مبلغ انقسم بين اربعة ورّاث فكان للاول ٢٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٤}$ المبلغ. وللثاني ٢٤٠ زيادة عن $\frac{١}{٥}$ المبلغ. وللثالث ٣٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٦}$ المبلغ. وللرابع ٤٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٨}$ المبلغ. فكم كان ذلك المبلغ الذي انقسم

الجواب ٤٨٠٠ دينارًا

(١٧) مطلوب عدد اقل من ٥٠٠ بمقدار زيادة خمسهِ على ٤٠

الجواب ٤٥٠

(١٨) ما عددان فضلتهما ٤٠ ونسبة احدهما الى الاخر كنسبة ٦ الى ٥

الجواب ٢٤٠ و ٢٠٠

(١٩) مزيجٌ من النحاس والقصدير والرصاص كان فيهِ النصف الا ١٦ رطلاً نحاسًا. والثلث الا ١٢ رطلاً قصديرًا. وكان الرصاص اكثر من الربع باربعة ارطالٍ. فكم رطلاً من كل صنفٍ كان في ذلك المزيج

الجواب كان النحاس = ١٢٨ رطلاً. والقصدير = ٨٤ رطلاً. والرصاص = ٧٦ رطلاً

(٢٠) مركبان بينهما ١٨ ميلاً. والمتاخر منهما يجري ١٠ اميالٍ في الساعة والمتقدم ٨ اميال فكم ميلاً يجري المتقدم قبل ان يلحقهُ المتاخر

الجواب ٧٢ ميلاً

(٢١) ما عددان مجتمعهما سدس حاصلهما ونسبت احدهما الى الاخر كنسبة ٣ الى ٢

الجواب ١٥ و ١٠

(٢٢) كلب وارنب بينهما ٥٠ قفزة. وكلما قفز الكلب ٣ قفزات يقفز الارنب ٤ غير ان القفزتين من الكلب تساويان ٣ قفزات من الارنب. فكم قفزةً يقفز الكلب قبل ان يدرك الارنب

الجواب ٣٠٠

(٢٣) ثلثة شعراءَ مدحوا ملكاً. فجعل الملك جائزة الاول ٢٠٠ دينار. وجائزة الثاني كالاول وثلث الثالث. وجائزة الثالث كمجتمع الجائزتين الأُولَين. فكم مجتمع الجوائز الثلاث

الجواب ١٢٠٠ دينار

(٢٤) اي عددٍ نسبتهُ الى ١٢ مع ثلاث مرات العدد كنسبة ٢ : ٩

الجواب ٨

(٢٥) زورق تقدم عن مركب ١٣ ميلاً وكان يجري ٣ اميال كلما جري المركب ٥ اميال. فكم ميلاً يجري المركب قبل ان يدرك الزورق

الجواب $\frac{1}{2}$ ٣٢ ميل

(٢٦) اي عددٍ فضلة سدسهِ وثُمنه ٢٠

الجواب ٤٨٠

(٢٧) اقسم ٢٠٠٠ الى قسمين بحيث تكون نسبة احدهما الى الاخر :: ٩ : ٧

الجواب ١١٢٥ و ٨٧٥

(٢٨) اي عددٍ مجتمع ثلثهِ وربعهِ وخمسهِ ٩٤

الجواب ١٢٠

(٢٩) بين زيدٍ وعمروٍ مسافة ٣٦٠ ميلاً فسافرا حتى التقيا. اما زيدٌ فسار كل ساعةٍ ١٠ اميال واما عمروٌ فثمانية اميال في الساعة. فكم قطع كل واحدٍ من المسافة قبل ان التقيا

الجواب زيد = ٢٠٠ ميل وعمرو ١٦٠ ميلاً

(٢٠) رجلٌ عاش ثلث عمرهِ في القسطنطينية وربعهُ في دمشق والباقي وهو ٢٠ سنة في مصر فكم سنةً عاش

الجواب ٤٨ سنة

(٢١) اي عددٍ فضلة ربعهِ وخمسهِ ٩٦

الجواب ١٩٢٠

(٢٢) عمودٌ في بركةٍ خمسهُ في الارض و $\frac{٢}{٧}$ منهُ في الماءِ و١٢ قدمًا فوق الماءِ فكم قدمًا طول العمود

الجواب ٣٥ قدمًا

(٢٣) اي عددٍ اذا اضيف اليهِ ١٠ يكون $\frac{٢}{٥}$ المجتمع ٦٦

الجواب ١٠٠

(٢٤) بستانٌ كان فيهِ $\frac{٣}{٤}$ الاشجار تفاحًا و $\frac{١}{١٠}$ كمثري والبقية وهي ٢٠ شجرة اكثر من ثمن الجميع سفرجلاً فكم شجرة في البستان

الجواب ٨٠٠

(٢٥) رجلٌ اشترى ارطالاً من الخمر بثمن ٩٤ غرشًا وشرب منها سبعة ارطال ثم باع ربع الباقي بعشرين غرشًا على سعر مشتراهُ فكم رطلاً اشترى

الجواب ٤٧ رطلاً

(٢٦) لزيدٍ وعُبَيدٍ ايرادٌ واحدٌ سنويًا. اما زيدٌ فانفق كل سنةٍ فوق ايرادهِ مبلغًا يساوي $\frac{١}{٧}$ الايراد. واما عُبَيد فانفق كل سنةٍ $\frac{٤}{٥}$ ايراده. وبعد ١٠ سنين حصل عندهُ مبلغٌ يساوي المال الذي انكسر على زيد مع زيادة ١٦٠ دينارًا. فكم كان الايراد

الجواب ٢٨٠ دينارًا

(٢٧) رجلٌ عاش ربع عمرهِ بتولاً. ثم تزوج وبعد ذلك بمدة ٥ سنين اكثر من $\frac{١}{٧}$ عمرهِ ولد لهُ ابنٌ. ثم مات الابن قبل ابيهِ بمدة ٤ سنين وهو قد بلغ نصف عمر ابيهِ. فكم سنةً عاش الرجل

الجواب ٨٤ سنة

(٣٨) ايُّ عددٍ مجتمع $\frac{١}{٣}$ و $\frac{١}{٤}$ و $\frac{٢}{٧}$ منه ٧٢

الجواب ٨٤

(٣٩) رجلٌ انفق ١٠٠ دينار اكثر من $\frac{١}{٥}$ ايرادهِ فبقي ٢٥ ديناراً اكثر من نصفهِ فكم كان الايراد

الجواب ٤٥٠

(٤٠) مقدارٌ من البارود كان فيهِ الملح ١٠ ارطال اكثر من $\frac{٢}{٣}$ الجميع والكبريت $٤\frac{١}{٢}$ رطل اقل من $\frac{١}{٦}$ الجميع. والفحم اقل من $\frac{١}{٧}$ الملح برطلين. فكم رطلاً كان البارود

الجواب ٦٩ رطلاً

(٤١) وعاءٌ يسع ١٤٦ رطلاً امتلأ بمزيجٍ من سمنٍ وعسلٍ وماءٍ. وكان العسل اكثر من السمن بخمسة عشر رطلاً والماءُ بقدرهما جميعاً. فكم رطلاً كان فيهِ من كل صنفٍ

الجواب كان السمن ٢٩ رطلاً والعسل ٤٤ والماءُ ٧٣

(٤٢) اربعة اشخاص اشتركوا في شراءِ بستانٍ ثمنهُ ٤٧٥٥ ديناراً. فدفع زيدٌ من الثمن ثلثة اضعاف ما دفعهُ عمروٌ. ودفع عُبَيد بقدر ما دفعا كلاهما. ودفع عبدالله بقدر ما دفع زيدٌ وعُبَيد معاً. فكم دفع كل واحدٍ منهم

الجواب دفع زيد = ٩٥١ وعمرو = ٣١٧ وعُبَيد = ١٢٦٨ وعبدالله = ٢٢١٩

(٤٣) اقسم ٩٩ الى خمسة اقسام يكون الاول اكثر من الثاني بثلثة واقلّ من الثالث بعشرة واكثر من الرابع بتسعة واقلّ من الخامس بستة عشر

لنفرض ك = الاول ك − ٣ = الثاني ك + ١٠ = الثالث ك − ٩ = الرابع ك + ١٦ = الخامس ٥ ك + ١٤ = ٩٩ ٥ ك = ٨٥ ك = ١٧

(٤٤) رجلٌ قسم مالاً بين اولادهِ الاربعة فاعطى الثالث ٩ غروش زيادةً عن الرابع. والثاني ١٢ غرشاً زيادةً عن الثالث. والاول ١٨ غرشاً اكثر من الثاني.

وكان الجميع يزيد ٦ غروش عن حصة الرابع سبع مرات فكم كان المال

الجواب ١٥٢ غرشًا

(٤٥) كان لرجلٍ قطيعان من الغنم متساويين في عدد الرؤوس فباع من القطيع الواحد ٣٩ راسًا ومن الاخر ٩٣ راسًا فكان الواحد مضاعف الاخر في العدد. فكم راسًا كان كل قطيع

الجواب ١٤٧

(٤٦) ساعٍ سعي خمسة ايام وكان يقطع كل يومٍ ٦٠ ميلاً. ثم تبعهُ اخر وكان يقطع كل يومٍ ٧٥ ميلاً ففي كم يومٍ يدرك الاول

الجواب في ٢٠ يومًا

(٤٧) كان عمر زيدٍ مضاعف عمر عُبَيد. وعمر عبيد بقدرِ عمر عبدالله ثلث مرات. ومجموع اعمار الثلثة ١٤٠ سنة فكم عمر كل واحدٍ منهم

الجواب عمر زيد ٨٤ وعبيد ٤٢ وعبدالله ١٤

(٤٨) ثوبان قيمة الذراع من كليهما واحدة ولكن الواحد اطول من الاخر فبلغ ثمن الواحد ٥ دنانير والاخر ٦$\frac{١}{٢}$ دينار. فان اضيف الى كل واحدٍ منهما ١٠ اذرع كان الواحد الى الاخر :: ٥ : ٦ مطلوب طول كل ثوب

الجواب ٢٠ و٢٦ ذراعًا

(٤٩) تاجران راس مال الواحد منهما كراس مال الاخر. وفي السنة الاولى ربح احدهما زيدٌ ٤٠ دينارًا وخسر احدهما عُبَيد ٤٠ دينارًا. وفي السنة الثانية خسر زيد $\frac{١}{٢}$ ما كان لهُ في نهاية السنة الاولى وربح عُبَيد ٤٠ دينارًا اقلّ من مضاعف ما خسرهُ زيد. وكان لعُبَيد حينئذٍ مضاعف ما كان لزيد فكم كان راس المال

الجواب ٢٢٠ دينارًا

(٥٠) اي عددٍ اذا اضيف الى ٣٦ ثم الى ٥٢ تكون نسبة المجموع الاول الى الثاني :: ٣ : ٤

الجواب ١٢

(٥١) رجلٌ اشترى جملاً وفرسًا وحمارًا بثلثماية وستين دينارًا. وكان ثمن الفرس

مضاعف ثمن الحمار وثمن الجمل مضاعف ثمن الفرس والحمار كليهما . فاذا كان ثمن كل واحدٍ من الثلثة

الجواب ثمن الجمل = ٢٤٠ والفرس = ٨٠ والحمار = ٤٠ دينارًا

(٥٢) اناءٌ امتلأ خمرًا ثم رشح منهُ ثلث ما فيهِ ثم أُخِذ منهُ ٢١ رطلاً وبقي نصف ملء الاناء فكم رطلاً كان فيهِ اولاً

الجواب ١٢٦ رطلاً

(٥٣) رجلٌ كان لهُ ستة بنين كل واحدٍ منهم اكبر من الذي يليهِ باربع سنين وعمر الاكبر ثلثة اضعاف عمر الاصغر . فما هو عمر كل واحدٍ منهم

الجواب ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ ٢٦ ٣٠

(٥٤) اقسم ٤٩ الى قسمين تكون نسبة الاكبر مع ستة الى الاصغر الاَّ ١١ كنسبة ٩ : ٢

الجواب ٣٠ = الاكبر ١٩ = الاصغر

(٥٥) ما عددان نسبة اصغرهما الى الاكبر :: ٢ : ٣ وان اضيف اليهما ٤ تكون النسبة :: ٥ : ٧

الجواب ١٦ و٢٤

(٥٦) رجلٌ اشترى زقَّين من الخمر مملوءَين احدهما يسع ملءَ الاخر ثلاث مرات فاخذ من كل واحدٍ اربعة ارطال وبقي في الواحد قدر ما بقي في الاخر اربع مرات فكم رطلاً كان فيهما

الجواب ١٢ و٣٦

(٥٧) اقسم ٦٨ الى قسمين تكون فضلة اكبرهما و٨٤ بقدر ثلاث مرات فضلة اصغرهما و٤٠

الجواب ٤٢ و٢٦

(٥٨) اربعة اماكن على ترتيب ب ت ث ج وبين ب و ج ٢٤ ميلاً وبُعد ب عن ت الى بعد ث عن ج :: ٢ : ٣ واذا اضيف ربع بُعد ب عن ت الى نصف بُعد ث عن ج يكون المجموع ثلاث مرات بعد ت عن ث مطلوب بعد كل واحدٍ عن الاخر

الجواب ب الى ت = ١٢ من ت الى ث = ٤ من ث الى ج = ١٨

(٥٩) اقسم ٣٦ الى ٣ اقسام بحيث يكون نصف الاول و $\frac{١}{٣}$ الثاني و $\frac{١}{٤}$ الثالث متساوية

الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

(٦٠) تاجرٌ عاش ثلاث سنين على ٥٠ دينارًا كل سنة . وفي نهاية كل سنة كان يضيف الى ما بقي من مالهِ مبلغًا يساوي ثلث تلك البقية . وعند نهاية المدة المذكورة كان راس مالهِ قد تضاعف فكم كان راس المال

الجواب ٧٤٠ دينارًا

(٦١) قايد جيش بعد وقعةٍ انكسر فيها وجد نصف جيشهِ و ٣٦٠٠ نفر يصلحون لوقعةٍ اخرى و $\frac{١}{٨}$ الجيش و ٦٠٠ نفر مجاريح . والبقية اي $\frac{١}{٥}$ الجميع قتلى فكم كان عدد الجيش اولاً

الجواب ٢٤٠٠٠

الفصل الثامن

في الترقية والقوات

٧٢ اذا ضربت كميةٌ في ذاتها سمي الحاصل قوةً . مثالهُ ٢ × ٢ = ٤ اي مربع اثنين او مال اثنين او القوة الثانية من اثنين و ٢ × ٢ × ٢ = ٨ اي كعب اثنين او القوة الثالثة من اثنين و ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ اي مال مال اثنين او القوة الرابعة من اثنين وت × ت = مربع ت او مال ت او قوة ت الثانية وقس على ذلك . والكمية الاصلية التي بتكرار ضربها حصلت قوةٌ ما هي جذر تلك القوة ويقال لها الجذر الماليّ والمربع والثاني او الجذر الكعبي والثالث او الرابع او الخامس بالنسبة الى القوة . فاثنان مثلاً هو جذر اربعة المالي او المربع او الثاني لان ٢ × ٢ = ٤ وجذر ثمانية الكعبي او الثالث لان ٢ × ٢ × ٢ = ٨ وجذر ١٦ الرابع لان ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ وقس على ذلك

٧٤ يُدَلُّ على القوات برقم صغير عن يسار الكمية مرتفع عنها قليلاً. مثالهُ $ت^{٢}$ و$ب^{٤}$ و$س^{٦}$ ويقال لهذا الرقم دليل القوة. وان لم يكن للكمية دليلٌ يُقدَّر لها واحدٌ دليلاً. فان $ت^{١} = ت$ اي قوة ت الاولى. واذا انحصرت كمية ووُضع لها دليلٌ مثل $(ك + ب - س)^{٢}$ او $\overline{ت + م + ٢}^{٥}$ فيراد ان الكمية كلها يجب ترقيتها الى القوة المدلول عليها. وقد يكون الدليل حرفًا متى كانت القوة مجهولةً مثل $ب^{ن}$ اي القوة النونية من ب

تنبيه. يجب ان يميز بين المسميات والدلايل. فان ٤ ت مثلاً يراد بها $ت + ت + ت + ت$ ولكن $ت^{٤}$ يراد بها $ت \times ت \times ت \times ت$

٧٥ اذا نظرنا الى سلسلة قوات نرى ان الادنى يحدث من قسمة الاعلى على الكمية الاصلية. مثالهُ $ت^{٥} \div ت = ت^{٤}$ و$ت^{٤} \div ت = ت^{٣}$ و$ت^{٣} \div ت = ت^{٢}$ و$ت^{٢} \div ت = ت$ و$ت \div ت = ١$ و$١ \div ت = \frac{١}{ت}$ و$\frac{١}{ت} \div ت = \frac{١}{ت^{٢}}$ و$\frac{١}{ت^{٢}} \div ت = \frac{١}{ت^{٣}}$ وهلمَّ جرًّا. فالواقعة بعد الواحد هي مكفوءة التي قبل الواحد (١٢) وتسمى قوات مكفوءة. وهكذا في الكميات المركبة. مثالهُ $(ت + ب)^{٣}$ $(ت + ب)^{٢}$ $(ت + ب)$ ١ $\frac{١}{ت + ب}$ $\frac{١}{(ت + ب)^{٢}}$ $\frac{١}{(ت + ب)^{٣}}$ الى اخرهِ. ولاجل سهولة الكتابة يُدَلُّ على القوات المكفوءة بدلايل سلبية. مثالهُ $\frac{١}{ت}$ او $\frac{١}{ت^{١}} = ت^{-١}$ و$\frac{١}{ت^{٢}} = ت^{-٢}$ و$\frac{١}{ت^{٣}} = ت^{-٣}$ فتكون السلسلة $ت^{٤}$ $ت^{٣}$ $ت^{٢}$ $ت^{١}$ ت $ت^{-١}$ $ت^{-٢}$ $ت^{-٣}$ $ت^{-٤}$ الى اخرهِ. اما جميع قوات الواحد فهي واحد لان $١ \times ١ \times ١$ الى اخرهِ $= ١$

نبذة في الترقية

٧٦ اذا اردت ترقية كميةٍ الى قوةٍ مفروضة فاضربها في ذاتها مرارًا تماثل الاحاد في دليل القوة المفروضة. فقوة ت الرابعة هي $ت \times ت \times ت \times ت = ت^{٤}$ وقوة ى السادسة $= ى ى ى ى ى ى = ى^{٦}$ وهكذا في الكمية المضلَّعة مثل ب ى فان مربعها اي $(ب ى)^{٢} = ب^{٢} ى^{٢}$ لان $ب ى \times ب ى = ب ب ى ى = ب^{٢} ى^{٢}$ فنرى في كل كمية مضلعة او ذات اجزآء ان قوة حاصل الاجزآء تعادل حاصل

قواتها. وهكذا (ب م ك)^{٢} = ب^{٢} م^{٢} ك^{٢} و(د س ى)^{ن} = د^{ن} س^{ن} ى^{ن} وقوة د ح ى الرابعة هي (د ح ى)^{٤} او د^{٤} ح^{٤} ى^{٤} وقوة ٤ ب الثالثة هي (٤ ب)^{٣} او ٤^{٣} ب^{٣} او ٦٤ ب^{٣} وقوة ٦ ت د النونية هي (٦ ت د)^{ن} او ٦^{ن} ت^{ن} د^{ن} وقوة ٣ م × ٢ ى الثالثة هي (٣ م × ٢ ى)^{٣} او ٢٧ م^{٣} × ٨ ى^{٣}

٧٧ الكمية المركبة اي المرتبطة اجزآوها بعلامات الجمع او الطرح ترقى بضرب اجزآيها حسب قواعد الضرب. مثالها

(ت + ب)^{١} = ت + ب اي القوة الاولى

ت + ب

ت^{٢} + ت ب

+ ت ب + ب^{٢}

(ت + ب)^{٢} = ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢} = القوة الثانية

ت + ب

ت^{٣} + ٢ ت^{٢} ب + ت ب^{٢}

ت^{٢} ب + ٢ ت ب^{٢} + ب^{٣}

(ت + ب)^{٣} = ت^{٣} + ٣ ت^{٢} ب + ٣ ت ب^{٢} + ب^{٣} = القوة الثالثة

ت + ب

ت^{٤} + ٣ ت^{٣} ب + ٣ ت^{٢} ب^{٢} + ت ب^{٣}

+ ت^{٣} ب + ٣ ت^{٢} ب^{٢} + ٣ ت ب^{٣} + ب^{٤}

(ت + ب)^{٤} = ت^{٤} + ٤ ت^{٣} ب + ٦ ت^{٢} ب^{٢} + ٤ ت ب^{٣} + ب^{٤} = القوة الرابعة

وهكذا الى اية قوةٍ فُرِضَت

مربَّع ت − ب هو ت^{٢} − ٢ ت ب + ب^{٢}
كعب ت + ١ هو ت^{٣} + ٣ ت^{٢} + ٣ ت + ١
مربَّع ت + ب + ح هو ت^{٢} + ٢ ت ب + ٢ ت ح + ب^{٢} + ٢ ب ح + ح^{٢}
ما هو كعب ت + ٢ د + ٣
ما هي القوة الرابعة من ب + ٣

ما هي القوة الخامسة من ك + ١

ما هي القوة السادسة من ١ — ب

٧٨ مربَّعات الكميات الثنائية والفضلية كثيرة الوقوع في الاعمال الجبرية فيجب على المتعلم ان يعرف كيفية تربيعها معرفة جيدة. فاذا ربَّعنا ت + ب وت — ب يكون لنا

$$\begin{array}{r} ت + ب \\ ت + ب \\ \hline ت^{٢} + ت ب \\ + \quad ت ب + ب^{٢} \\ \hline ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢} \end{array} \qquad \begin{array}{r} ت - ب \\ ت - ب \\ \hline ت^{٢} - ت ب \\ - \quad ت ب + ب^{٢} \\ \hline ت^{٢} - ٢ ت ب + ب^{٢} \end{array}$$

فنرى في كليهما الجزء الاول والثالث مربَّعَي ت وب والجزء الثاني مضاعف حاصل ت في ب فلنا من ذلك هذه القاعدة لتربيع هذه الكميات بدون الاستعانة بالضرب وهي

مربَّع كمية ثنائية كلا جزءيها ايجابيان يعدل مربَّع الجزء الاول مع مضاعف حاصل الجزءين مع مربَّع الجزء الثاني

مربَّع كمية فضلية يعدل مربَّع الجزء الاول الا مضاعف حاصل الجزءين مع مربع الجزء الثاني

فمربع ٢ ت + ب = ٤ ت^{٢} + ٤ ت ب + ب^{٢}

ومربع ح + ١ = ح^{٢} + ٢ ح + ١

ومربع ت ب + س د = ت^{٢} ب^{٢} + ٢ ت ب س د + س^{٢} د^{٢}

ومربع ٦ ى + ٣ = ٣٦ ى^{٢} + ٣٦ ى + ٩

ومربع ٣ د — ح = ٩ د^{٢} — ٦ د ح + ح^{٢}

ومربع ت — ١ = ت^{٢} — ٢ ت + ١

اما كيفية ترقية هذه الكميات الى القوات العليا فسياتي الكلام عليها في محلهِ

٧٩ يكفي احيانًا ان يدلَّ على الترقية بدليل القوة المفروضة . فيقال في مربع ت + ب $(ت + ب)^{٢}$ وفي القوة النونية من ب س + ٨ + ك $(ب س + ٨ + ك)^{ن}$ او $\overline{ب س + ٨ + ك}|^{ن}$ بحصر الكمية بين قوسين او تحت خطٍ كما رايت. وان كان الجذر مضلعًا يُحصَر الضلعان معًا او كل ضلعٍ على حدتهِ حسبما يُستحسَن. فيقال في مربع $\overline{ت + ب} \times \overline{س + د}$

$\overline{(ت + ب) \times (س + د)}|^{٢}$ او $\overline{ت + ب}|^{٢} \times \overline{س + د}|^{٢}$ لان حاصل مربعي كميتين يعدل مربع حاصلهما (٧٦) ومتى انبسطت كمية محصورة يُرفَع عنها القوسان او الخط. فان $(ت + ب)^{٢}$ اذا انبسطت تصير $ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}$

٨٠ اذا كان الجذر ايجابيًا تكون القوات جميعها ايجابية واذا كان سلبيًا تكون القوات الشفعية ايجابية والوترية سلبية كما يتضح مما قيل سابقًا في فصل الضرب (٣٢) مثالهُ

القوة الثانية من − ت هي $+ ت^{٢}$

القوة الثالثة $- ت^{٣}$

الرابعة $+ ت^{٤}$

الخامسة $- ت^{٥}$ الى اخرهِ

اي كل قوةٍ وترية لها علامة جذرها وكل قوة شفعية هي ايجابية ان كان جذرها سلبيًا او ايجابيًا

٨١ كل قوةٍ نترقى الى قوةٍ اعلى بضرب دليلها في دليل القوة المفروضة مثالهُ كعب $ت^{٢} = ت^{٢ \times ٣} = ت^{٦}$ لان $ت^{٢} = ت ت$ وكعب ت ت هو $ت ت \times ت ت \times ت ت = ت ت ت ت ت ت = ت^{٦}$ اي القوة السادسة من ت او القوة الثالثة من $ت^{٢}$

القوة الرابعة من $ت^{٣} ب^{٢} = ت^{٣ \times ٤} ب^{٢ \times ٤} = ت^{١٢} ب^{٨}$

القوة الثالثة من $٤ ت^{٢} ك = ٦٤ ت^{٦} ك^{٣}$

القوة الرابعة من $٢ ت^{٣} \times ٣ ك^{٢} د = ١٦ ت^{١٢} \times ٨١ ك^{٨} د^{٤}$

القوة الخامسة من $(ت + ب)^{٢} = (ت + ب)^{١٠}$

القوة النونية من $ت^{٢} = ت^{٢ن}$

القوة النونية من $(ك - ى)^{٣} = (ك - ى)^{٣ن}$

$(ت^{٣} + ب^{٣})^{٢} = ت^{٦} + ٢ت^{٣}ب^{٣} + ب^{٦}$

$\left.\overline{ت^{٣} \times ب^{٣}}\right|^{٢} = ت^{٦} \times ب^{٦}$

$(ت^{٣} ب^{٢} ح^{٤})^{٣} = ت^{٩} ب^{٦} ح^{١٢}$

وهكذا في القوات التي دلايلها سلبية. مثاله القوة الثالثة من $ت^{-٢} = ت^{-٢ \times ٣} = ت^{-٦}$ (٧٥)

القوة الرابعة من $ت^{٢} ب^{-٣} = ت^{٨} ب^{-١٢} = \frac{ت^{٨}}{ب^{١٢}}$

كعب $٢ك^{ن} ى^{-٣} = ٨ك^{٣ن} ى^{-٣٣}$

مربع $ب^{٣} ك^{-١} = ب^{٦} ك^{-٢}$

القوة النونية من $ك^{-٣} = ك^{-٣ن} = \frac{١}{ك^{٣ن}}$

٨٢ متى كانت العلامة المتقدمة على نفس الكمية سلبية يجب ان تُجعل ايجابية كما صار الدليل شفعاً حسبما تقدم (٨٠) مثاله مربع $-ت^{٣} = +ت^{٦}$ وكعب $-ت^{٣} = -ت^{٩}$ ومربع $-ك^{ن} = +ك^{٢ن}$

والقوة النونية من $-ت^{٣} = \pm ت^{٣ن}$ اي $+ت^{٣ن}$ متى كانت ن دالة على عددٍ شفع و $-ت^{٣ن}$ متى دلت على عددٍ وتر

٨٣ الكسر يترقى بترقية صورتهِ ومخرجهِ معاً. فمربَّع $\frac{ت}{ب} = \frac{ت^{٢}}{ب^{٢}}$ لان $\frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} = \frac{ت\,ت}{ب\,ب} = \frac{ت^{٢}}{ب^{٢}}$

القوة الثانية من $\frac{١}{ت} = \frac{١}{ت^{٢}}$ وقوتهُ الثالثة $= \frac{١}{ت^{٣}}$ وقوتهُ النونيَّة $= \frac{١}{ت^{ن}}$

كعب $\frac{٢ك ر^{٢}}{٣ى} = \frac{٨ك^{٣} ر^{٦}}{٢٧ى^{٣}}$

القوة النونية من $\frac{ك^{٢} ر}{ت ى^{٣}} = \frac{ك^{٢ن} ر^{ن}}{ت^{ن} ى^{٣ن}}$

$$مربع \; \frac{-ت^{٢} \times (د + م)}{(ك + ١)^{٢}} = \frac{ت^{٦} \times (د + م)^{٢}}{(ك + ١)^{٦}}$$

$$كعب \; \frac{-ت^{-١}}{ك^{-٢}} = \frac{-ت^{-٣}}{ك^{-٦}}،$$

ومن امثلة الكميات الآتية التي احد جزءيها كسرٌ هذه

$$\begin{array}{r}
ك + \frac{١}{٢} \\
ك + \frac{١}{٢} \\
\hline
ك^{٢} + \frac{١}{٢} ك \\
+ \frac{١}{٢} ك + \frac{١}{٤} \\
\hline
ك^{٢} + ك + \frac{١}{٤}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
ك - \frac{١}{٢} \\
ك - \frac{١}{٢} \\
\hline
ك^{٢} - \frac{١}{٢} ك \\
- \frac{١}{٢} ك + \frac{١}{٤} \\
\hline
ك^{٢} - ك + \frac{١}{٤}
\end{array}$$

$$مربع \; ت + \frac{٢}{٣} = ت^{٢} + \frac{٤ ت}{٣} + \frac{٤}{٩}$$

$$مربع \; ك + \frac{ب}{٢} = ك^{٢} + ب ك + \frac{ب^{٢}}{٤}$$

$$مربع \; ك - \frac{ب}{م} = ك^{٢} - \frac{٢ ب ك}{م} + \frac{ب^{٢}}{م^{٢}}$$

٨٤ قد علمت آنفًا (٦١) ان المسمّى الكسريّ يمكن نقلهُ من صورة كسرٍ الى مخرجهِ او عكسهُ. واذا راجعنا ما قيل في القوات المكفوّة (٧٥) نرى ان ايَّ ضلعٍ كان يمكن نقلهُ من الصورة الى المخرج او عكسهُ اذا تغيرت علامة دليلهِ. مثالهُ في $\frac{ت ك^{-٢}}{ى}$ يمكن نقل الكاف الى المخرج بدون تغيير قيمة الكسر اذا جُعِلَت علامة دليلها ايجابية. لأنَّ $\frac{ت ك^{-٢}}{ى} = \frac{ت}{ى} \times ك^{-٢} = \frac{ت}{ى} \times \frac{١}{ك^{٢}} = \frac{ت}{ى ك^{٢}}$ وفي $\frac{ت}{ب ى^{٢}}$ ننقل الياء الى الصورة لأنَّ

$$\frac{ت}{ب ى^{٢}} = \frac{ت}{ب} \times \frac{١}{ى^{٢}} = \frac{ت}{ب} \times ى^{-٢} = \frac{ت ى^{-٢}}{ب}$$ وهكذا $\frac{د ت^{-٤}}{ك^{٢}} =$

$\frac{د}{ك^{٢} ت^{٤}}$ و $\frac{ب}{ت ى^{ن}} = \frac{ب ى^{-ن}}{ت}$

وهكذا اذا كانت العلامة في الصورة ايجابية وفي المخرج سلبية مثاله $\frac{\text{ت ك}^{٢}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}}{\text{ب ك}^{-٢}}$ لان $\text{ك}^{٢}$ هو مكفوء $\text{ك}^{-٢}$ اي $\text{ك}^{٢} = \frac{١}{\text{ك}^{-٢}}$ $\frac{\text{ح}}{\text{ب ى}^{-٢}} = \frac{\text{ح ى}^{٢}}{\text{ب}}$ و $\frac{\text{ت د}^{٢}}{\text{ك ى}^{-٢}} = \frac{\text{ت ى}^{٢}}{\text{ك د}^{-٢}}$

فاذًا يمكن ان يُرفَع مخرج كسرٍ بالكلية او ان تجعل الصورة واحدًا بدون تغيير قيمة العبارة. مثاله $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \frac{١}{\text{ب ت}^{-١}}$ او $\text{ت ب}^{-١}$

$$\frac{\text{ك}^{-٢}}{\text{ب}^{-\text{ن}}} = \frac{١}{\text{ك}^{٢}\,\text{ب}^{-\text{ن}}} = \text{ب}^{\text{ن}}\,\text{ك}^{-٢}$$

$$\frac{\text{ك}^{٤}\,\text{ت}^{-\text{م}}}{\text{ب}^{\text{ن}}\,\text{س}^{-٢}} = \frac{١}{\text{ب}^{\text{ن}}\,\text{ت}^{\text{م}}\,\text{ك}^{-٤}\,\text{س}^{-٢}} \text{ او } \text{س}^{٢}\,\text{ك}^{٤}\,\text{ت}^{-\text{م}}\,\text{ب}^{-\text{ن}}$$

نبذة في جمع القوات وطرحها

٨٥ تجمع القوات بكتابتها متوالية مع علاماتها. فمجموع $\text{ت}^{٣}$ و $\text{ب}^{٢}$ هو $\text{ت}^{٣} + \text{ب}^{٢}$ ومجموع $\text{ت}^{٢} - \text{ب}^{\text{ن}}$ و $\text{ح}^{٥} - \text{د}^{٤}$ هو $\text{ت}^{٢} - \text{ب}^{\text{ن}} + \text{ح}^{٥} - \text{د}^{٤}$

واذا كانت الاحرف والقوات متشابهة تجمع مسمَّياتها او تُطرَح حسب قواعد الجمع (١٦ و١٧) مثاله

مجموع $٢\,\text{ت}^{٢}$ و $٣\,\text{ت}^{٢}$ هو $٥\,\text{ت}^{٢}$

	$-٣\,\text{ك}^{٦}\,\text{ى}^{٥}$	$٣\,\text{ب}^{٢}$	$٣\,\text{ت}^{٤}\,\text{ى}^{\text{ن}}$
	$-٢\,\text{ك}^{٦}\,\text{ى}^{٥}$	$٦\,\text{ب}^{٢}$	$-٧\,\text{ت}^{٤}\,\text{ى}^{\text{ن}}$
المجموع	$-٥\,\text{ك}^{٦}\,\text{ى}^{٥}$		$-٤\,\text{ت}^{٤}\,\text{ى}^{\text{ن}}$
	$-٥\,\text{ت}^{٢}\,\text{ح}^{٦}$		$٣\,(\text{ت}+\text{ى})^{\text{ن}}$
	$٦\,\text{ت}^{٢}\,\text{ح}^{٦}$		$٤\,(\text{ت}+\text{ى})^{\text{ن}}$
المجموع			$٧\,(\text{ت}+\text{ى})^{\text{ن}}$

ولكن الاحرف الغير المتشابهة او القوات الغير المتشابهة من حرفٍ واحد لا تجمع الا بكتابتها متوالية مع علاماتها كما تقدم. فمجموع $\text{ت}^{٢}$ و $\text{ت}^{٣}$ هو $\text{ت}^{٢} + \text{ت}^{٣}$

ومجموع $ت^{٢}ب^{ن}$ و $٣ت^{٥}ب^{٦}$ هو $ت^{٢}ب^{ن} + ٣ت^{٥}ب^{٦}$

٨٦ طرح القوات كجمعها غير انهُ يجب تبديل علامة المطروح من + الى − او عكسهُ حسبما تقدم في باب الطرح. مثالهُ

من	$٢ت^{٤}$	$-٣ب^{ن}$	$٣ح^{٢}ب^{٦}$
اطرح	$-٦ت^{٤}$	$٤ب^{ن}$	$٤ح^{٢}ب^{٦}$
الفضلة	$٨ت^{٤}$		$-ح^{٢}ب^{٦}$

من	$ت^{٢}ب^{ن}$	$٥(ت-ح)^{٦}$
اطرح	$ت^{٢}ب^{ن}$	$٢(ت-ح)^{٦}$
		$٣(ت-ح)^{٦}$

نبذة في ضرب القوات

٨٧ تضرَب القوات بكتابتها متوالية حسبما تقدم في فصل الضرب. فحاصل $ت^{٢}$ في $ب^{٢}$ هو $ت^{٢}ب^{٢}$ و $ك^{٣} \times ت^{٢} = ك^{٣}ت^{٢}$ و $٣ت^{٦}ى^{٢} \times -٢ك = -٦ت^{٦}ى^{٢}ك$

٨٨ قوات الجذر الواحد تُضرَب بجمع دلايلها. مثالهُ
$ت^{٢} \times ت^{٣} = ت^{٥}$ لان $ت ت \times ت ت ت = ت ت ت ت ت = ت^{٥}$ وهكذا $ت^{٢} \times ت^{٦} = ت^{٨}$ و $ك^{٣} \times ك^{٢} \times ك = ك^{٦}$ و $٤ت^{ن} \times ٢ت^{ن} = ٨ت^{٢ن}$ و $٣ك^{٤} \times ٢ك^{٣} = ٦ك^{٧}$ و $ب^{٢}ى^{٣} \times ب^{٤}ى = ب^{٦}ى^{٤}$ و $(ب+ح-ى)^{ن} \times (ب+ح-ى) = (ب+ح-ى)^{ن+١}$

اضرب $ك^{٣} + ك^{٢}ى + كى^{٢} + ى^{٣} \times ك - ى$

الجواب $ك^{٤} - ى^{٤}$

اضرب $٤ك^{٢}ى + ٣كى - ١ \times ٢ك - ك$

اضرب $ك^{٣} + ك - ٥ \times ٢ك^{٢} + ك + ١$

وهكذا ان كانت الدلايل سلبية. مثالهُ

$ت^{-٢} \times ت^{-٣} = ت^{-٥}$ و $ى^{-ن} \times ى^{-م} = ى^{-ن-م}$ و $-ت^{-٢} \times ت^{-٣} = -ت^{-٥}$

و$ت^{-٢} \times ت^{٣} = ت$ و$ت^{-ن} \times ت^{م} = ت^{م-ن}$ و$ى^{-٢} \times ى^{٢} = ى^{٠} = ١$

٨٩ اذا ضُرِب $ت + ب$ في $ت - ب$ يكون الحاصل $ت^{٢} - ب^{٢}$ ولنا من ذلك قضية عمومية وهي

ان حاصل مجتمع كميتين في فضلتهما يعدل فضلة مربَّعيهما

$(ت - ى) \times (ت + ى) = ت^{٢} - ى^{٢}$

$(ت^{٢} - ى^{٢}) \times (ت^{٢} + ى^{٢}) = ت^{٤} - ى^{٤}$

$(ت^{٤} - ى^{٤}) \times (ت^{٤} + ى^{٤}) = ت^{٨} - ى^{٨}$ الى اخرهِ

نبذة في قسمة القوات

٩٠ تُقسَم القوات مثل ما سواها من الكميات. اي بان يخرج من المقسوم كمية تماثل المقسوم عليهِ او بكتابتهما على هيئة كسرٍ دارجي. مثالهُ

$$ت^{٢}ب^{٢} \div ب^{٢} = ت^{٢} \text{ او } \frac{ت^{٢}ب^{٢}}{ب^{٢}}$$

اقسم	$٩ت^{٢}ى^{٤}$	$١٢ب^{٢}ك^{ن}$	$ت^{٢}ب + ٣ت^{٢}ى^{٤}$
على	$-٣ت^{٢}$	$٢ب^{٢}$	$ت^{٢}$
الخارج	$-٣ى^{٤}$		$ب + ٣ى^{٤}$

اقسم $د \times (ت - ح + ى)^{٢}$

على $(ت - ح + ى)^{٢}$

الخارج $د$

٩١ القسمة عكس الضرب. وعلى ذلك نقسم قوات جذرٍ واحدٍ بطرح دليل المقسوم عليهِ من دليل المقسوم. مثالهُ

$ت^{٥} \div ت^{٣} = ت^{٢}$ لان $\frac{ت^{٥}}{ت^{٣}} = \frac{ت ت ت ت ت}{ت ت ت} = ت ت = ت^{٢}$ و$ت^{م} \div ت^{ن} = ت^{م-ن}$ و$ى^{٣} \div ى^{٢} = ى$ و$ت^{ن+١} \div ت = ت^{ن+١-١} = ت^{ن}$ و$ك^{ن} \div ك^{ن} = ١$

اقسم	$ى^{٢م}$	$ب^{٦}$	$٨ت^{ن+م}$	$ت^{ن+٢}$	$١٢(ب+ى)^{ن}$
على	$ى^{م}$	$ب^{٢}$	$٤ت^{م}$	$ت^{٢}$	$٤(ب+ى)^{٢}$
الخارج	$ى^{م}$		$٢ت^{ن}$		$٣(ب+ى)^{ن-٢}$

وهكذا ان كانت الدلايل سلبية . مثالهُ

$ت^{-٥} \div ت^{-٢} = ت^{-٣}$ و $-ك^{-٥} \div ك^{-٢} = -ك^{-٣}$ $ح^{٢} \div ح^{-١} = ح^{٢+١} = ح^{٣}$ و $٦ت^{ن} \div ٢ت^{-٢} = ٣ت^{ن+٢}$ $ب ت^{٢} \div ت = ب ت$ و $ب^{٢} \div ب^{٥} = ب^{-٣}$

$ت^{٤} \div ت^{٧} = ت^{-٣}$ و $(ت^{٢}-ى^{٢})^{م} \div (ت^{٢}+ى^{٢})^{ن} = (ت^{٢}+ى^{٢})^{م-ن}$

$(ب+ك)^{ن} \div (ب+ك) = (ب+ك)^{ن-١}$

امثلة

اختزل $\frac{٥ت^{٤}}{٣ت^{٢}}$ الجواب $\frac{٥ت^{٢}}{٣}$

اختزل $\frac{٦ك^{٦}}{٣ك^{٥}}$ الجواب $\frac{٢ك}{١} = ٢ك$

اختزل $\frac{٣ت^{٤}+٤ت^{٦}}{٥ت^{٢}}$ الجواب $\frac{٣ت+٤ت^{٢}}{٥}$

اختزل $\frac{٨ت^{٣}ى-١٢ت^{٢}ى^{٢}+٦ت ى^{٣}}{٦ت^{٢}ى+٤ت ى^{٢}}$

فبالقسمة على ٢ ت ى تصير $\frac{٤ت^{٢}-٦ت ى+٣ى^{٢}}{٣ت+٢ى}$

حوّل $\frac{ت^{٢}}{ت^{٣}}$ و $\frac{ت^{-٢}}{ت^{-٤}}$ الى مخرجٍ مشترك

$ت^{٢} \times ت^{-٤} = ت^{-٢}$ = الصورة الاولى

$ت^{٢} \times ت^{-٢} = ت^{٠} = ١$ = الصورة الثانية

$ت^{٣} \times ت^{-٤} = ت^{-١}$ = المخرج المشترك

فيكون الجواب $\frac{ت^{-٢}}{ت^{-١}}$ و $\frac{١}{ت^{-١}}$

حوّل $\frac{٢ت^{٤}}{٥ت^{٢}}$ و $\frac{ت^{٢}}{ت^{٤}}$ الى مخرج مشترك

الجواب $\frac{٢ت^{٨}}{٥ت^{٧}}$ و $\frac{٥ت^{٥}}{٥ت^{٧}}$ او $\frac{٢ت^{٢}}{٥ت^{٢}}$ و $\frac{٥}{٥ت^{٢}}$

اضرب $\frac{٣ك^{٢}}{٤ك^{٢}}$ في $\frac{دك}{٢ك^{٤}}$ الجواب $\frac{٣دك^{٢}}{٨ك^{٧}}=\frac{٣د}{٨ك^{٤}}$

اضرب $\frac{ت^{٢}+ب}{ب^{٤}}$ في $\frac{ت-ب}{٣}$

اضرب $\frac{ت^{٥}+١}{ك^{٢}}$ في $\frac{ب^{٢}-١}{ك+ت}$

اضرب $\frac{ب^{٤}}{ت^{-٢}}$ في $\frac{ح^{-٢}}{ك}$ في $\frac{ت^{ن}}{ى^{-٢}}$

اقسم $\frac{ت^{٤}}{ى^{٢}}$ على $\frac{ت^{٢}}{ى^{٢}}$ الجواب $\frac{ت^{٤}ى^{٢}}{ت^{٢}ى^{٢}}=\frac{ت}{ى}$

اقسم $\frac{ت^{٢}-ك^{٤}}{ت^{٢}}$ على $\frac{ك^{٢}-ت^{-٢}}{ت}$

اقسم $\frac{ب-ى^{-١}}{ى}$ على $\frac{ت^{٢}+ب^{-٤}}{ى^{٢}}$

اقسم $\frac{ح^{٢}-١}{د^{٤}}$ على $\frac{د^{ن}+١}{ح}$

* * *

الفصل التاسع

في الجذور والتجذير

٩٢ جذر الكمية هو كميةٌ اخرى اذا ضُرِبَت في ذاتها مرارًا مفروضة حصلت الكميَّة الاولى. فان ٢ هو الجذر الرابع من ١٦ لان ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦ و$ت^{٢}$ هي الجذر الماليُّ او المربع او الثاني من $ت^{٤}$ لان $ت^{٢}\times ت^{٢}=ت^{٤}$ و$ت^{٢}$ هي الجذر الكعبيُّ او الثالث من $ت^{٦}$ لان $ت^{٢}\times ت^{٢}\times ت^{٢}=ت^{٦}$ وت هي الجذر السادس من $ت^{٦}$

ويُدَلُّ على الجذر بوضع علامتهِ مع دليلهِ فوق الكمية مثل $\sqrt[٢]{ت}$ و $\sqrt[٤]{س}$ و $\sqrt[٣]{ك+ر}$ و $\sqrt[٦]{ر+(د+ن)}$ او بدليلٍ كسريٍّ فيجعل دليل الجذر مخرج الكسر. مثالهُ

$ك^{\frac{١}{٢}}$ و$م^{\frac{١}{٣}}$ و$(ر + د)^{\frac{١}{٤}}$ و$(س × ت - ر)^{\frac{١}{٥}}$ وهكذا في الدلايل السلبيه. مثالهُ $\frac{١}{ت^{\frac{١}{٢}}} = ت^{-\frac{١}{٢}}$ و$\frac{١}{ت^{\frac{١}{٣}}} = ت^{-\frac{١}{٣}}$ و$\frac{١}{ت^{\frac{١}{ن}}} = ت^{-\frac{١}{ن}}$ وقس على ذلك. اما جذور الواحد فهي واحدٌ ابدًا كما راينا في قواتهِ (٥٧)

٩٣ اذا رقّينا جذرًا الى قوةٍ مفروضة يكون لنا قوة جذرٍ او جذر قوةٍ. مثالهُ $ت^{\frac{١}{٢}} × ت^{\frac{١}{٢}} × ت^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢}} = ت^{\frac{٣}{٢}}$ اي مكعّب $ت^{\frac{١}{٢}}$ اي القوة الثالثة من الجذر الثاني من ت وهكذا $ك^{\frac{٥}{٦}}$ = القوة الخامسة من جذر ك السادس او الجذر السادس من قوة ك الخامسة. وهكذا $س^{\frac{م}{ن}}$ = القوة الميمية من جذر س النونيّ او الجذر النوني من قوة س الميميّة. فاذًا قوة جذرٍ وجذر قوةٍ هما سيّان

٩٤ جذور حرفٍ واحد تُضرَب مثل القوات بجمع دلايلها. مثالهُ $ت^{\frac{٢}{٧}} × ت^{\frac{٣}{٧}} = ت^{\frac{٢}{٧} + \frac{٣}{٧}} = ت^{\frac{٥}{٧}}$ حسبما تقدم (٨٨)

٩٥ اذا جُعِل لكميةٍ دليلٍ مخرجهُ وصورتهُ متساويان لا تتغير قيمتها. مثالهُ $ت = ت^{\frac{١}{٢}} × ت^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{٢}{٢}}$ و$ك^{\frac{ن}{ن}} = ك$ ولا تتغير القيمة اذا أُبدِل دليلٌ كسريٌّ باخر يعادلهُ. مثالهُ $ت^{\frac{٢}{٣}} = ت^{\frac{٤}{٦}} = ت^{\frac{٦}{٩}}$ الى اخرهِ. وهكذا $ك^{٢} = ك^{\frac{٤}{٢}} = ك^{\frac{٦}{٣}} = ت^{\frac{٢ن}{ن}}$ الى اخرهِ

٩٦ الدليل الكسريّ يمكن تحويلهُ الى كسرٍ عشريّ. مثالهُ $ك^{\frac{١}{٢}} = ك^{٠،٥}$ و$ت^{\frac{١}{٤}} = ت^{٠،٢٥}$ و$ت^{\frac{٢}{٥}} = ت^{٠،٤}$ و$ت^{\frac{٧}{٢}} = ت^{٣،٥}$ و$ت^{\frac{٩}{٥}} = ت^{١،٨}$ و$ت^{\frac{١١}{٤}} = ت^{٢،٧٥}$ ولكن احيانًا يكون الكسر العشري تقريبيًا فقط. مثالهُ $ت^{\frac{١}{٣}} = ت^{٠،٣}$ تقريبًا و$= ت^{٠،٣٣٣٣٣}$ اكثر تقريبًا. وهكذا تتعدد منازل الكسر العشري حتى تعادل قيمتهُ قيمة الكسر الدارجي الا بما لا يُعتَدّ بهِ. مثالهُ $ت^{\frac{٥}{٣}} = ت^{١،٦٦٦٦٦}$ و$ك^{\frac{١١}{٧}} = ك^{١،٥٧١٤٢}$

وهذه الدلايل العشرية يقال لها لوغرتمات او انساب. وكثيرًا ما تُعتَبر في الاعمال التعليمية كما ستعلم في غير هذا الكتاب

٩٧ يُدَلُّ ايضًا على قوة جذرٍ او جذر قوةٍ بعلامة الجذر مع دليلهِ فوق الكمية مع دليل القوة او بحصر الكمية مع دليل القوة بين قوسين او تحت خطٍ. ويُكتَب

دليل الجذر خارج القوسين او فوق الخط. مثالهُ $ت^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{ت^{٢}} = (ت^{٢})^{\frac{١}{٣}} =$ $(ت^{\frac{١}{٣}})^{٢}$ و $ت^{\frac{م}{ن}} = (ت^{م})^{\frac{١}{ن}} = \left.\overline{ت^{\frac{١}{ن}}}\right|^{م} = \sqrt[ن]{ت^{م}}$ و $(ب\,ك)^{\frac{٢}{٤}} = (ب^{٢}\,ك^{٢})^{\frac{١}{٤}} =$ $\sqrt[٤]{ب^{٢}\,ك^{٢}}$ و $\left.\overline{ت+ى}\right|^{\frac{٢}{٥}} = \left.\overline{\left.\overline{ت+ى}\right|^{٢}}\right|^{\frac{١}{٥}} = \sqrt[٥]{(ت+ى)^{٢}}$

نبذة في التجذير

٩٨ اذا اردت ان تجد جذر كميةٍ فاقسم دليلها على دليل الجذر المطلوب او اجعل علامة الجذر مع دليلهِ فوق الكمية. مثالهُ جذر $ت^{٦}$ الكعبي $= \sqrt[٣]{ت^{٦}} =$ $ت^{٦\div٣} = ت^{٢}$

جذر ت الكعبي هو $\sqrt[٣]{ت} = ت^{\frac{١}{٣}}$

جذر ت ب الخامس $= \sqrt[٥]{ت\,ب} = (ت\,ب)^{\frac{١}{٥}}$

جذر $ت^{٢}$ النوني $= \sqrt[ن]{ت^{٢}} = ت^{\frac{٢}{ن}}$

جذر ٢ د − ك السابع $= \sqrt[٧]{٢\,د - ك} = (٢\,د - ك)^{\frac{١}{٧}}$

جذر $\left.\overline{ت-ك}\right|^{٢}$ الخامس $= \left.\overline{ت-ك}\right|^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[٥]{(ت-ك)^{٢}}$

جذر $ت^{\frac{١}{٢}}$ الكعبي $= ت^{\frac{١}{٦}}$

جذر $ت^{-١}$ الرابع $= ت^{-\frac{١}{٤}}$

جذر $ت^{\frac{٢}{٣}}$ الكعبي $= ت^{\frac{٢}{٩}}$

جذر $ك^{م}$ النوني $= ك^{\frac{م}{ن}}$

٩٩ حسب القاعدة السابقة نجد الجذر الكعبيَّ للجذر الماليّ بقسمة $\frac{١}{٢}$ على ٣ وذلك مثل الضرب في $\frac{١}{٣}$ حسبما تقدم في فصل ضرب الكسر (٥٤) لان $\frac{١}{٢} \div ٣ = \frac{١}{٢} \div \frac{٣}{١} = \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}$ وهكذا $\frac{١}{م} \div ن = \frac{١}{م} \times \frac{١}{ن}$ فاذاً الجذر المسمى الجذر النوني من ت $= ت^{\frac{١}{ن} \times \frac{١}{م}}$ اي $\left.\overline{ت^{\frac{١}{ن}}}\right|^{\frac{١}{م}} = ت^{\frac{١}{ن} \times \frac{١}{م}} = ت^{\frac{١}{ن\,م}}$ فقد تحوّل الدليلان الى واحدٍ

وبالعكس يمكن تحويل الدليل الواحد الى اثنين. مثالهُ $ك^{\frac{١}{٨}} = ك^{\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}} =$

$\overline{ك^{\frac{١}{٤}}}\Big|^{\frac{١}{٢}}$ اي الجذر الثامن يعدل الجذر الثاني من الجذر الرابع. وهكذا $\overline{ت+ب}\Big|^{\frac{١}{م}}\Big|^{\frac{١}{ن}}$ $= (ت+ب)^{\frac{١}{م}\times\frac{١}{ن}} = \overline{(ت+ب)^{\frac{١}{م}}}\Big|^{\frac{١}{ن}}$

١٠٠ جذر حاصل عدة كميات يعدل حاصل جذورها. مثاله $\sqrt{ت\,ب} = \sqrt{ت}\times\sqrt{ب}$. مربع $\sqrt{ت\,ب} = ت\,ب$ (٧٢) و$(ت\,ب)^{\frac{١}{ن}} = ت^{\frac{١}{ن}}\,ب^{\frac{١}{ن}}$ فمتى تعددت اضلاع كمية يمكن تجذير الجميع دفعة واحدة او تجذير كل ضلع بمفرده مثاله

جذر ك ى الكعبي $= (ك\,ى)^{\frac{١}{٣}}$ او $ك^{\frac{١}{٣}}\,ى^{\frac{١}{٣}}$

جذر ٣ ى الخامس $= (٣\,ى)^{\frac{١}{٥}}$ او $٣^{\frac{١}{٥}}\,ى^{\frac{١}{٥}}$

جذر ت ب ح السادس $= \sqrt[٦]{ت\,ب\,ح}$ او $\sqrt[٦]{ت}\times\sqrt[٦]{ب}\times\sqrt[٦]{ح}$

جذر ٨ ب الكعبي $= (٨\,ب)^{\frac{١}{٣}}$ او $٢\,ب^{\frac{١}{٣}}$

جذر $ك^{ن}$ ى النوني $= (ك^{ن}\,ى)^{\frac{١}{ن}}$ او $ك\,ى^{\frac{١}{ن}}$

١٠١ جذر الكسر يعدل جذر الصورة على جذر المخرج. مثاله الجذر المالي من $\frac{ت}{ب} = \frac{ت^{\frac{١}{٢}}}{ب^{\frac{١}{٢}}}$ لان $\frac{ت^{\frac{١}{٢}}}{ب^{\frac{١}{٢}}}\times\frac{ت^{\frac{١}{٢}}}{ب^{\frac{١}{٢}}} = \frac{ت}{ب}$ وجذر $\frac{ك}{ت\,ى}$ المالي $= \frac{\sqrt{ك}}{\sqrt{ت\,ى}}$

$$\sqrt{\frac{ت\,ح}{ك\,ى}} = \frac{\sqrt{ت\,ح}}{\sqrt{ك\,ى}}$$

١٠٢ لكي نعرف العلامة التي نتقدم على جذرٍ ما لنا هذه القواعد الثلاث.

الاولى كل جذرٍ وتريّ لكميةٍ ما لهُ علامة الكمية ذاتها

الثانية كل جذرٍ شفعيّ لكميةٍ ايجابية ملتبسٌ

الثالثة الجذر الشفعيُّ لكميةٍ سلبية مستحيلٌ

اما الاولى فواضحة مما تقدم (٨٠) واما الثانية فلأنَّ الكمية الايجابية تحصل من + في + او من − × − على حدٍ سوى. فجذر $ت^{٢}$ هو + ت او − ت فيوضع للجذر علامتان للدلالة على الالتباس هكذا $\pm\sqrt[٢]{ب}$ و$\pm ك^{\frac{١}{٤}}$ ورفع هذا الالتباس متى

حصلت القوة من ضرب كميات معروفة علاماتها. واما الثالثة فلانهُ لا يمكن استخراج جذرٍ شفعيٍّ لكميةٍ سلبية. فجذر $-ت^{٢}$ ليس هو + ت ولا − ت لان + ت × + ت = $+ت^{٢}$ و − ت × − ت = $+ت^{٢}$ فسُمّي الجذر الشفعي لكميةٍ سلبية كميةً وهمية او محالية. ولكن قد تُستعَل هذه الكميات الوهمية في الاعمال الجبرية لانها ببعض المعاملات تصير ممكنة. مثالهُ $\sqrt{-ت} \times \sqrt{-ت} = -ت$ وهي ممكنة. ويجب هنا ان يُعتَبر في الجذور الوهمية ان علامة السلب واقعة تحت علامة الجذر كما مثلنا. ولكن $-\sqrt{ت} \times -\sqrt{ت} = \sqrt{ت\,ت} = ت$ ومن فوايد هذه الكميات الوهمية ايضاً الدلالة على فساد مسئلةٍ. فلو قيل اقسم ١٤ الى قسمين حاصلهما ٦٠ قيل ليكن احدهما ك والاخر ١٤ − ك فلناك × (١٤ − ك) = ٦٠ اي ١٤ ك − $ك^{٢}$ = ٦٠ وبتحويل هذه المعادلة حسب القواعد الاتية لنا $ك = ٧ \pm \sqrt{-١١}$ وهذه كمية وهمية غير ممكنة. فالمسئلة فاسدة اي لا يمكن انقسام ١٤ الى قسمين حاصلهما ٦٠ وقس على ذلك

١٠٢ كيفية تجذير الكميات المركبة سياتي الكلام عليها في بعض الفصول الاتية. واما هنا فلا ننظر الا الى كيفية استعلام الجذر المالي لمربَّعات الكميات الثنائية والفضلية وهذه المربعات لا يكون لها اكثر من ثلثة اجزاء كما راينا (٧٨) مثالها $ت^{٢}$ + ٢ ت ب + $ب^{٢}$ وفي الفضلية $ت^{٢}$ − ٢ ت ب + $ب^{٢}$ فحيثما راينا كمية مثل هذه جزءان منها قوتان تامّتان والاخر حاصل جذري هاتين القوتين علمنا انها مربع كمية ثنائية او فضلية. ولنا لاستعلام جذرها هذه القاعدة

خذ جذر الجزء الاول والثالث واربطهما بعلامة الجزء الاوسط

فلو قيل ما هو جذر $ك^{٢}$ + ٢ ك + ١ لقيل جذر الجزء الاول اي $ك^{٢}$ = ك وجذر الجزء الثالث اي واحد = ١ وعلامة الجزء الاوسط هي + فاذاً الجذر ك + ١

جذر $ك^{٢}$ − ٢ ك + ١ = ك − ١

جذر $ت^{٢}$ + ت + $\frac{١}{٤}$ = ت + $\frac{١}{٢}$

جذر $ت^{٢}$ + $\frac{٤}{٣}$ ت + $\frac{٤}{٩}$ = ت + $\frac{٢}{٣}$

جذر $\text{ت}^{٢}+\text{ت ب}+\frac{\text{ب}^{٢}}{٤} = \text{ت}+\frac{\text{ب}}{٢}$

جذر $\text{ت}^{٢}+\frac{٢\text{ت ب}}{\text{س}}+\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{س}^{٢}} = \text{ت}+\frac{\text{ب}}{\text{س}}$

١٠٤ كل جذرٍ لا يمكن ان يُدَلَّ عليهِ تمامًا بالاعداد يقال لهُ اصمّ. مثالهُ $\sqrt{٢}$ فهذا لا يمكن الوصول اليهِ تمامًا وهو بالكسر العشري ١٫٤١٤٢١٣٥٦ تقريبًا. وكل جذرٍ ليس اصمّ فهو منطَق ولكن في ما يأتي تُطلَق هذه اللفظة على كل كمية ليس لها علامة الجذر ولا دليل كسري

نبذة في تحويل الجذور

١٠٥ اولاً اذا اردت تحويل كميةٍ منطقة الى هيئة كميةٍ جذرية فرقِّها الى قوةٍ من اسم الجذر المفروض ثم اجعل لها علامة الجذر مع دليلهِ.

فلو قيل حوّل ت الى هيئة الجذر النوني لقيل قوتها النونية $= \text{ت}^{\text{ن}}$ ثم انها بوضع علامة الجذر والدليل تصير $\sqrt[\text{ن}]{\text{ت}^{\text{ن}}}$ فقد تحولت الى هيئة كميةٍ جذرية بدون تغيير قيمتها لان $\sqrt[\text{ن}]{\text{ت}^{\text{ن}}} = \text{ت}^{\frac{\text{ن}}{\text{ن}}} = \text{ت}$

حوّل ٤ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[٣]{٦٤}$ او $(٦٤)^{\frac{١}{٣}}$

حوّل ٣ ت الى هيئة الجذر الرابع الجواب $\sqrt[٤]{٨١\,\text{ت}^{٤}}$

حوّل $\frac{١}{٢}$ ت ب الى هيئة الجذر المالي الجواب $(\frac{١}{٤}\text{ت}^{٢}\,\text{ب}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

حوّل $٣\times\sqrt{\text{ت}-\text{ك}}$ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[٣]{٢٧\times(\text{ت}-\text{ك})^{٣}}$

حوّل $\text{ت}^{٢}$ الى هيئة الجذر الكعبي الجواب $\sqrt[٣]{\text{ت}^{٦}}$

حوّل $\text{ت}^{٢}$ الى هيئة الجذر النوني

١٠٦ ثانيًا لكي تحوّل كمياتٌ دلايلها مختلفة الى دلايل مشتركة بدون تغيير القيمة

(١) حوّل الدلايل الى مخرجٍ مشترك

(١) رَقِّ كل كميَّةٍ الى القوة المدلول عليهـا بصورة دليلها بعد تحويلهِ

(٢) اجعل للجميع علامة الجذر المدلول عليهِ بالمخرج المشترك

مثالهُ لو قيل حوّل $ت^{\frac{١}{٤}}ب^{\frac{١}{٦}}$ الى دليل مشترك لقيل $\frac{١}{٤}$ و $\frac{١}{٦}$ بالتحويل الى مخرجٍ مشترك = $\frac{٣}{١٢}$ و $\frac{٢}{١٢}$ ثمَّ بترقية ت الى القوة المدلول عليها بصورة الدليل تصير $ت^{٣}$ وهكذا ب تصير $ب^{٢}$ والجذر دليلهُ $\frac{١}{١٢}$ فلنا $\left.\overline{ت^{٣}}\right|^{\frac{١}{١٢}}$ و $\left.\overline{ب^{٢}}\right|^{\frac{١}{١٢}}$ والقيمة لم تتغير لان $\left.\overline{ت^{٣}}\right|^{\frac{١}{١٢}} = ت^{\frac{٣}{١٢}} = ت^{\frac{١}{٤}}$ وهكذا $\left.\overline{ب^{٢}}\right|^{\frac{١}{١٢}} = ب^{\frac{٢}{١٢}} = ب^{\frac{١}{٦}}$

حوّل $ت^{\frac{١}{٢}}ب ك^{\frac{٢}{٣}}$ الى دليل مشترك الجواب $\left.\overline{ت^{٣}}\right|^{\frac{١}{٦}}$ و$(ب^{٤}ك^{٤})^{\frac{١}{٦}}$

حول $ت^{٢}$ و$ب^{\frac{١}{ن}}$ الى دليلٍ مشترك الجواب $\left.\overline{ت^{٢ن}}\right|^{\frac{١}{ن}}$ و $ب^{\frac{١}{ن}}$

حول $ك^{\frac{١}{ن}}$ و$ى^{\frac{١}{ر}}$ الى دليل مشترك الجواب $\left.\overline{ك^{ر}}\right|^{\frac{١}{رن}}$ و $\left.\overline{ى^{ن}}\right|^{\frac{١}{رن}}$

حول $٢^{\frac{١}{٢}}$ و$٣^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل مشترك الجواب $٨^{\frac{١}{٦}}$ و$٩^{\frac{١}{٦}}$

حول $(ت+ب)^{٢}$ و$(ك-ى)^{\frac{٢}{٣}}$ الى دليل مشترك الجواب $\left.\overline{(ت+ب)^{٦}}\right|^{\frac{١}{٣}}$ و$\left.\overline{(ك-ى)^{٢}}\right|^{\frac{١}{٣}}$

حول $ت^{\frac{١}{٢}}$ و$ب^{\frac{١}{٥}}$ الى دليل مشترك

حول $ك^{\frac{٢}{٣}}$ و$٥^{\frac{١}{٢}}$ الى دليل مشترك

١٠٧ اذا أُريدَ تحويل كمية الى ذات دليلٍ مفروض فاقسم دليلها على الدليل المفروض واكتب الخارج عن يسار الكميَّة ثمَّ اجعل فوق الكل الدليل المفروض

فلو قيل حول $ت^{\frac{١}{٦}}$ الى دليل $\frac{١}{٢}$ لقيل $\frac{١}{٦} \div \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣}$ فلنا $\left.\overline{ت^{\frac{١}{٣}}}\right|^{\frac{١}{٢}}$

حول $ت^{٢}$ و$ك^{\frac{٣}{٤}}$ الى دليل $\frac{١}{٣}$ الجواب $(ت^{٦})^{\frac{١}{٣}}$ و$(ك^{\frac{٩}{٤}})^{\frac{١}{٣}}$

حول $٤^{\frac{١}{٢}}$ و$٣^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل $\frac{١}{٦}$ الجواب $(٤^{٣})^{\frac{١}{٦}}$ و$(٣^{٢})^{\frac{١}{٦}}$

١٠٨ ثالثًا اذا اردت ان تخرج بعض كميةٍ من تحت علامة الجذر فحلّ الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر وخذ جذر هذا الضلع واكتبهُ قدام الضلع الاخر وعلامة الجذر بينهما. وهذه القاعدة مبنية على ما تقدم (١٠٠) من ان جذر حاصل كميتين يعدل حاصل جذريهما. وان لم يمكن حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر فلا يمكن اخراج شيءٍ منها من تحت علامة الجذر.

فلو قيل اخرج بعض $\sqrt{\text{٨}}$ من تحت علامة الجذر لقيل ٨ ينحلُّ الى ضلعين ٤ و٢ واحدهما قوة تامة من اسم الجذر اي ٤ = مربع ٢ خذ جذر ٤ = ٢ فلنا ٢ $\sqrt{\text{٢}}$ وعلى هذه الكيفية نحول هذه الامثلة

$$\sqrt{\text{ت}^{\text{٢}}\,\text{ك}} = \text{ت}\sqrt{\text{ك}}$$

$$\sqrt{\text{١٨}} = \text{٣}\sqrt{\text{٢}}$$

$$\sqrt[\text{٣}]{\text{٦٤ ب}^{\text{٢}}\,\text{س}} = \text{٤ ب}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}$$

$$\sqrt[\text{٤}]{\frac{\text{ت}^{\text{٤}}\,\text{ب}}{\text{س}^{\text{٥}}\,\text{د}}} = \frac{\text{ت}}{\text{س}}\sqrt[\text{٤}]{\frac{\text{ب}}{\text{س د}}}$$

$$\sqrt[\text{ن}]{\text{ت}^{\text{ن}}\,\text{ب}} = \text{ت}\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} = \text{ت ب}^{\frac{\text{١}}{\text{ن}}}$$

$$(\text{ت}^{\text{٣}} - \text{ت}^{\text{٢}}\,\text{ب})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = \text{ت}\,(\text{ت} - \text{ب})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$$

$$(\text{٥٤ ت}^{\text{٦}}\,\text{ب})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}} = \text{٣ ت}^{\text{٢}}\,(\text{٢ ب})^{\frac{\text{١}}{\text{٣}}}$$

$$\sqrt{\text{٩٨ ت}^{\text{٢}}\,\text{ك}} =$$

$$\sqrt[\text{٣}]{\text{ت}^{\text{٣}} + \text{ت}^{\text{٣}}\,\text{ب}^{\text{٣}}} =$$

١٠٩ ثم بعكس هذا العمل يدخل مسمًّى كميَّة جذرية تحت علامة الجذر اذ يترقَّى الى قوةٍ من اسم الجذر ثم يُضرَب في الاجزآء الواقعة تحت علامة الجذر

مثالهُ $\text{ت}\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}} = \sqrt[\text{ن}]{\text{ت}^{\text{ن}}\,\text{ب}}$

$$\text{ت}\,(\text{ك} - \text{ب})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}} = (\text{ت}^{\text{٢}}\,\text{ك} - \text{ت}^{\text{٢}}\,\text{ب})^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}$$

$$٢ ت ب (٢ ت ب^{٢})^{\frac{١}{٢}} = (١٦ ت^{٤} ب^{٥})^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{ت}{ب}\left(\frac{ب^{٢} س}{ت^{٢} + ب^{٢}}\right)^{\frac{١}{٢}} = \left(\frac{ت^{٢} ب^{٢} س}{ت^{٢} ب^{٢} + ب^{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}$$

نبذة في جمع الجذور وطرحها

١١٠ تُجمع الجذور كغيرها من الكميات بكتابتها متوالية مع علاماتها. فمجتمع $\sqrt{ت}$ و $\sqrt{ب}$ هو $\sqrt{ت} + \sqrt{ب}$ وان تشابهت الكميات والدلايل فاجمع المسميات واكتب الاجزاء الجذرية عن يسار المجتمع. مثالهُ

$$٢\sqrt{ت} \text{ و } ٣\sqrt{ت} = ٥\sqrt{ت}$$

	$٢\sqrt[ن]{ت ى}$	$٣ (ك + ح)^{\frac{١}{٧}}$	$٥\sqrt{ت}$
	$\sqrt[ن]{ت ى}$	$٤ (ك + ح)^{\frac{١}{٧}}$	$-٣\sqrt{ت}$
المجتمع	$٣\sqrt[ن]{ت ى}$	$٧ (ك + ح)^{\frac{١}{٧}}$	

$٥ ب ح^{\frac{١}{٦}}$	$ت\sqrt{ب - ح}$
$٧ ب ح^{\frac{١}{٦}}$	$ى\sqrt{ب - ح}$
	$(ت + ى) \times \sqrt{ب - ح}$

١١١ في بعض الاحيان يجب اخراج بعض الكميات من تحت علامة الجذر لكي تُجمَع. مثالهُ $\sqrt{٨} + \sqrt{٥٠}$ باخراج بعضهما من تحت علامة الجذر $= ٢\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٢} = ٧\sqrt{٢}$

اجمع $\sqrt{١٦ ب}$ و $\sqrt{٤ ب}$ الجواب $٤\sqrt{ب} + ٢\sqrt{ب} = ٦\sqrt{ب}$

اجمع $\sqrt{ت^{٢} ك}$ و $\sqrt{ب^{٤} ك}$ الجواب $ت\sqrt{ك} + ب^{٢}\sqrt{ك} = (ت + ب^{٢}) \times \sqrt{ك}$

اجمع $(٣٦ ت^{٢} ى)^{\frac{١}{٢}}$ و $(٢٥ ى)^{\frac{١}{٢}}$ الجواب $(٦ ت + ٥) \times ى^{\frac{١}{٢}}$

اجمع $\sqrt{١٨ ت}$ و $\sqrt{٢ ت}$

ثم اذا اختلفت الكميات الجذرية او كانت دلايلها غير متشابهة فلا تُجمَع الا بكتابتها متوالية. مثالهُ مجموع $٢\sqrt{ب}$ و $٢\sqrt{ت}$ = $٢\sqrt{ب} + ٢\sqrt{ت}$ ومجموع $\sqrt[٢]{ت}$ و $\sqrt[٣]{ت}$ = $\sqrt[٢]{ت} + \sqrt[٣]{ت}$

١١٢ اما طرح الجذور فهو مثل جمعها غير انهُ يجب تبديل علامة المطروح كما علمت في فصل الطرح البسيط

من	$\sqrt{ت ى}$	$٤\sqrt[ن]{ت+ك}$	$٣ ح^{\frac{١}{٤}}$
اطرح	$٣\sqrt{ت ى}$	$٣\sqrt[ن]{ت+ك}$	$-٥ ح^{\frac{١}{٤}}$
الباقي	$-٢\sqrt{ت ى}$		$٨ ح^{\frac{١}{٤}}$

من	ت (ك + ى)	$- ت^{-\frac{١}{ن}}$
اطرح	ب (ك + ى)	$-٢ ت^{-\frac{١}{ن}}$
الباقي		$ت^{-\frac{١}{ن}}$

من $\sqrt{٥٠}$ اطرح $\sqrt{٨}$ الجواب $٥\sqrt{٢} - ٢\sqrt{٢} = ٣\sqrt{٢}$

من $\sqrt[٣]{ب^٤ ى}$ اطرح $\sqrt[٣]{ب ى^٤}$ الجواب $(ب - ى) \times \sqrt[٣]{ب ى}$

من $\sqrt[ن]{ك}$ اطرح $\sqrt[٥]{ك}$

نبذة في ضرب الجذور

١١٣ تُضرَب الجذور مثل غيرها من الكميات بكتابتها متوالية بتوسط علامة الضرب او بدونها كما علمت في فصل الضرب البسيط. مثالهُ $\sqrt{ت}$ في $\sqrt{ب}$ = $\sqrt{ت} \times \sqrt{ب}$ او $\sqrt{ت}\ \sqrt{ب}$ او $\sqrt{ت ب}$ و $ح^{\frac{١}{٢}}$ في $ى^{\frac{١}{٢}}$ = $ح^{\frac{١}{٢}} ى^{\frac{١}{٢}}$ و $\sqrt[ن]{ك} \times \sqrt[ن]{ى} = \sqrt[ن]{ك ى}$ و $\sqrt[٣]{ك}$ في $\sqrt[٢]{ى}$ حسب ما تقدم (١٠٦) = $(ك^٢)^{\frac{١}{٦}} \times (ى^٣)^{\frac{١}{٦}} = (ك^٢ ى^٣)^{\frac{١}{٦}} = \sqrt[٦]{ك^٢ ى^٣}$

اضرب	$\sqrt{ت + م}$	$\sqrt{د ك}$	$ت^{\frac{٤}{٢}}$
في	$\sqrt{ت - م}$	$\sqrt{ح ى}$	$ك^{\frac{١}{٢}}$
الحاصل	$\sqrt{ت^{٢} - م^{٢}}$		$(ت^{٢} ك)^{\frac{١}{٢}}$

اضرب	$(ت + ى)^{\frac{١}{ن}}$	$ت^{\frac{١}{ر}}$
في	$(ب + ح)^{\frac{١}{ن}}$	$ك^{\frac{١}{ن}}$
الحاصل		$(ت^{ن} ك^{ر})^{\frac{١}{ر ن}}$

اضرب $\sqrt{٨ ك ب}$ في $\sqrt{٢ ك ب}$ الجواب $\sqrt{١٦ ك^{٢} ب^{٢}} = ٤ ك ب$

$(ت^{٢} ى^{٢})^{\frac{١}{٤}} \times (ت^{٢} ى^{٢})^{\frac{١}{٤}} = (ت^{٤} ى^{٤})^{\frac{١}{٤}} = ت ى$

١١٤ تُضرَب جذور كمية واحدة بجمع دلايلها بعد تحويلها الى مخرج مشترك.

مثالهُ $ت^{\frac{١}{٢}} \times ت^{\frac{١}{٣}} = ت^{\frac{٣}{٦}} \times ت^{\frac{٢}{٦}} = ت^{\frac{٣}{٦}+\frac{٢}{٦}} = ت^{\frac{٥}{٦}}$ $ت^{\frac{١}{ن}} \times ت^{\frac{١}{ر}} = ت^{\frac{ن}{ن ر}}$ $\times ت^{\frac{ن}{ن ر}} = ت^{\frac{ر + ن}{ن ر}}$

اضرب	$٣ ى^{\frac{١}{٤}}$	$ت^{\frac{١}{٢}} \times ت^{\frac{١}{٣}}$	$(ت + ب)^{\frac{١}{٢}}$
في	$ى^{\frac{٢}{٣}}$	$ت^{\frac{١}{٤}}$	$(ت + ب)^{\frac{١}{٤}}$
الحاصل	$٣ ى^{\frac{١١}{١٢}}$		$(ت + ب)^{\frac{٣}{٤}}$

اضرب	$(ت - ى)^{\frac{١}{ن}}$	$ك^{-\frac{١}{٤}}$
في	$(ت - ى)^{\frac{١}{ر}}$	$ك^{-\frac{١}{٣}}$
الحاصل		$ك^{-\frac{٧}{١٢}}$

$$ى^{\frac{١}{٢}} \times ى^{-\frac{١}{٣}} = ى^{\frac{٣}{٦}-\frac{٢}{٦}} = ى^{\frac{١}{٦}}$$

$$ى^{\frac{١}{ن}} \times ى^{-\frac{١}{ن}} = ى^{\frac{١}{ن}-\frac{١}{ن}} = ى^{٠} = ١$$

$$ك^{ن-\frac{١}{٢}} \times ك^{\frac{١}{٢}-ن} = ك^{ن-ن+\frac{١}{٢}-\frac{١}{٢}} = ك^{٠} = ١$$

١١٥ وهكذا تُضرَب القوات في الجذور. مثالهُ $ت^{٢} \times ت^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{٦}{٢}} \times$

$ت^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{٧}{٢}}$. $ی^{٢} \times ی^{\frac{١}{٦}} = ی^{٢ + \frac{١}{٦}} = ی^{\frac{١٣}{٦}}$. $ك \times ك^{\frac{١}{ن}} = ك^{١ + \frac{١}{ن}} = ك^{\frac{ن + ١}{ن}}$

ومتى حدث من هذا الضرب ان صورة الدليل تماثل مخرجهُ تصير الكمية مُنطقَّة. مثالهُ $ت^{٢} \times ت^{\frac{١}{٢}} \times ت^{\frac{٣}{٢}} = ت^{\frac{٨}{٢}} = ت^{٤}$

$(ت + ب)^{\frac{٤}{٣}} \times (ت + ب)^{-\frac{١}{٣}} = (ت + ب)^{\frac{٣}{٣}} = ت + ب$ $\quad ت^{\frac{٣}{٥}} \times ت^{\frac{٢}{٥}}$
$= ت^{\frac{٥}{٥}} = ت$

١١٦ بعد تحويل الدلايل الى دليل مشترك ان كان للكميات الجذرية مسميات منطقَّة فاجعل حاصل هذه المسميات قدام حاصل الاجزآء الجذرية. مثالهُ $ت \sqrt{ب}$ في $س \sqrt{د}$ فحاصل المسميات $= ت س$ ثم اجعل هذا الحاصل قدام حاصل الاجزآء الجذرية فتصير $ت س \sqrt{ب د}$ $\quad ت ك^{\frac{١}{٢}} \times ب د^{\frac{١}{٣}} = ت (ك^{٣})^{\frac{١}{٦}} \times ب (د^{٢})^{\frac{١}{٦}} = ت ب (ك^{٣} د^{٢})^{\frac{١}{٦}}$

اضرب	$ت (ب + ك)^{\frac{١}{٢}}$	$ت \sqrt{ی^{٢}}$	$ت \sqrt{ك}$
في	$ی (ب - ك)^{\frac{١}{٢}}$	$ب \sqrt{ح ی}$	$ب \sqrt{ك}$
الحاصل	$ت ی (ب^{٢} - ك^{٢})^{\frac{١}{٢}}$		$ت ب \sqrt{ك^{٢}} = ت ب ك$

اضرب	$ت ك^{-\frac{١}{٢}}$	$ك \sqrt[٢]{٣}$
في	$ب ی^{-\frac{١}{٢}}$	$ی \sqrt[٢]{٩}$
الحاصل		$٣ ك ی$

١١٧ متى ارتبطت الاجزآء المنطقَّة بالجذرية بواسطة علامة الجمع او الطرح يجب ان يُضرَب كل جزء من المضروب في كل جزء من المضروب فيهِ مثالهُ

$$\begin{array}{r} ت + \sqrt{ب} \\ س + \sqrt{د} \\ \hline ت س + س \sqrt{ب} \\ + ت \sqrt{د} + \sqrt{ب د} \\ \hline ت س + س \sqrt{ب} + ت \sqrt{د} + \sqrt{ب د} \end{array}$$

$\text{ت}+\sqrt{\text{ى}}\times ١+\text{ر}\sqrt{\text{ى}}=\text{ت}+\sqrt{\text{ى}}+\text{ت ر}\sqrt{\text{ى}}+\text{ر ى}$

اضرب $\sqrt{\text{ت}}$ في $\sqrt[٣]{\text{ب}}$	الجواب $\sqrt[٦]{\text{ت}^{٣}\,\text{ب}^{٢}}$
اضرب $٥\sqrt{٥}$ في $٢\sqrt{٨}$	الجواب $٢٠\sqrt{١٠}$
اضرب $٢\sqrt{٣}$ في $٢\sqrt[٣]{٤}$	الجواب $٦\sqrt[٦]{٤٣٢}$
اضرب $\sqrt{\text{د}}$ في $\sqrt[٣]{\text{ت ب}}$	الجواب $\sqrt[٦]{\text{ت}^{٢}\,\text{ب}^{٢}\,\text{د}^{٣}}$
اضرب $\sqrt{\dfrac{٢\text{ت ب}}{٣\text{س}}}$ في $\sqrt{\dfrac{٩\text{ ت د}}{٢\text{ ب}}}$	الجواب $\sqrt{\dfrac{٣\text{ت}^{٢}\text{د}}{\text{س}}}$

اضرب $\text{ت}\,(\text{ت}-\text{ك})^{\frac{١}{٢}}$ في $(\text{س}-\text{د})\times(\text{ت ك})^{\frac{١}{٢}}$

الجواب $(\text{ت س}-\text{ت د})\times(\text{ت}^{٢}\text{ك}-\text{ت ك}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

نبذة في قسمة الجذور

١١٨ يدلُّ على قسمة الجذور بكتابتها على هيئة كسرٍ دارجي. مثالهُ

الخارج من قسمة $\sqrt[٣]{\text{ت}}$ على $\sqrt[٣]{\text{ب}}=\dfrac{\sqrt[٣]{\text{ت}}}{\sqrt[٣]{\text{ب}}}$ او بوضع علامة واحدة للصورة والمخرج.

مثالهُ $\sqrt[\text{ن}]{\dfrac{\text{ت}}{\text{ب}}}$

واذا كان جذر المقسوم والمقسوم عليهِ من اسمٍ واحد تم القسمة كما في غيرها وبوضع الخارج تحت علامة الجذر المشترك. مثالهُ

$\sqrt[\text{ن}]{\text{ت ب}}$ على $\sqrt[\text{ن}]{\text{ت}}=\sqrt[\text{ن}]{\text{ب}}$ و $(\text{ك}^{٢}\,\text{ى}^{٢})^{\frac{١}{٦}}$ على $\text{ى}^{\frac{١}{٣}}=(\text{ك}^{٢}\,\text{ى}^{٢})^{\frac{١}{٦}}$ على $(\text{ى}^{٢})^{\frac{١}{٦}}=(\text{ك}^{٢})^{\frac{١}{٦}}=\text{ك}^{\frac{٢}{٦}}=\text{ك}^{\frac{١}{٣}}$

اقسم $\sqrt{٦\text{ت}^{٢}\text{ك}}$	$\sqrt{\text{د ح ك}^{٢}}$	$(\text{ت}^{٢}+\text{ت ك})^{\frac{١}{٢}}$
على $\sqrt{٣\text{ك}}$	$\sqrt{\text{د ك}}$	$\text{ت}^{\frac{١}{٢}}$
الخارج $\sqrt{٢\text{ت}^{٢}}$		$(\text{ت}+\text{ك})^{\frac{١}{٢}}$

اقسم $(ت^{٢}\,ح)^{\frac{١}{ر}}$	$(ت^{٢}\,ى^{٢})^{\frac{١}{٤}}$
على $(ت\,ك)^{\frac{١}{ر}}$	$(ت\,ى)^{\frac{١}{٤}}$
الخارج	$(ت\,ى)^{\frac{١}{٤}}$

١١٩ تُقسَم جذور كميةٍ واحدة بطرح دليل المقسوم عليهِ من دليل المقسوم. مثالهُ $ت^{\frac{١}{٢}} \div ت^{\frac{١}{٦}} = ت^{\frac{١}{٢}-\frac{١}{٦}} = ت^{\frac{١}{٣}}$

اقسم $(٢\,ت)^{\frac{١١}{١٢}}$	$(ت\,ك)^{\frac{٢}{٣}}$	$ت^{\frac{م+ن}{ن\,ر}}$
على $ت^{\frac{٢}{٣}}$	$(ت\,ك)^{\frac{١}{٣}}$	$ت^{\frac{١}{ر}}$
الخارج $(٢\,ت)^{\frac{١}{٤}}$		$ت^{\frac{١}{ن}}$

اقسم $(ب+ى)^{\frac{م}{ن}}$	$(ر^{٢}\,ى^{٢})^{\frac{١}{٧}}$
على $(ب+ى)^{\frac{١}{ن}}$	$(ر^{٢}\,ى^{٢})^{\frac{٢}{٧}}$
الخارج	$(ر^{٢}\,ى^{٢})^{-\frac{٢}{٧}}$

وهكذا في قسمة الجذور على القوات او عكسهِ. مثالهُ $ت^{٢} \div ت^{\frac{١}{٣}} = ت^{٢-\frac{١}{٣}} = ت^{\frac{٥}{٣}}$ و $ى^{ن} \div ى^{\frac{١}{ر}} = ى^{ن-\frac{١}{ر}}$

١٢٠ بعد تحويل الجذور الى دليلٍ مشترك ان كان لها مسميات منطقة تُقسَم اولاً ويوضع الخارج قدام الخارج من قسمة الجذور. مثالهُ $ت\,س\sqrt{ب\,د}$ على $ت\sqrt{ب} = س\sqrt{د}$

اقسم $٢٤\,ك\sqrt{ت\,ى}$	$١٨\,د\,ح\sqrt{ب\,ك}$	$ب\sqrt{ك\,ى}$
على $٦\sqrt{ت}$	$٢\,ح\sqrt{ك}$	$\sqrt{ى}$
الخارج $٤\,ك\sqrt{ى}$		$ب\sqrt{ك}$

اقسم $ب\,ى\,(ت^{٢}\,ك^{٢})^{\frac{١}{ن}}$	$١٦\sqrt{٣٢}$
على $ى\,(ت\,ك)^{\frac{١}{ن}}$	$٨\sqrt{٤}$
الخارج $ب\,(ت^{٢}\,ك)^{\frac{١}{ن}}$	

ت ب (ك^{٢} ب)$^{\frac{١}{٤}}$ + ت (ك)$^{\frac{١}{٢}}$ = ت ب (ك^{٢} ب)$^{\frac{١}{٤}}$ + ت (ك^{٢})$^{\frac{١}{٤}}$ = ب

(ب)$^{\frac{١}{٤}}$ = (ب^{٥})$^{\frac{١}{٤}}$

اقسم ٢ $\sqrt[٣]{\text{ب س}}$ على ٣ $\sqrt{\text{ت س}}$ الجواب $\frac{٢}{٣}$ $\sqrt[٦]{\frac{\text{ب}^{٢}}{\text{ت}^{٣}\,\text{س}}}$

اقسم ١٠ $\sqrt[٣]{١٠٨}$ على ٥ $\sqrt[٣]{٤}$ الجواب ٢ $\sqrt[٣]{٢٧}$ = ٦

اقسم ١٠ $\sqrt{٢٧}$ على ٢ $\sqrt{٣}$ الجواب ١٥

اقسم ٨ $\sqrt{١٠٨}$ على ٢ $\sqrt{٦}$ الجواب ١٢ $\sqrt{٢}$

اقسم (ت^{٢} ب^{٢} د^{٢})$^{\frac{١}{٦}}$ على د$^{\frac{١}{٣}}$ الجواب (ت ب)$^{\frac{١}{٣}}$

اقسم (١٦ ت^{٣} − ١٢ ت^{٢} ك)$^{\frac{١}{٢}}$ على ٢ ت الجواب (٤ ت − ٣ ك)$^{\frac{١}{٢}}$

نبذة في ترقية الجذور

١٢١ الجذور تترقى مثل القوات اي بضرب دلائلها في دليل القوة المفروضة مثالهُ مربَّع ت$^{\frac{١}{٣}}$ = ت$^{\frac{١}{٣} \times ٢}$ = ت$^{\frac{٢}{٣}}$ والقوة النونية من ت$^{\frac{١}{م}}$ = ت$^{\frac{ن}{م}}$ والقوة الخامسة من ت$^{\frac{١}{٢}}$ ى$^{\frac{١}{٣}}$ = ت$^{\frac{٥}{٢}}$ ى$^{\frac{٥}{٣}}$ او بالتحويل الى دليل مشترك (ت^{٣} ى^{٢})$^{\frac{١}{٦} \times ٥}$ = (ت^{٣} ى^{٢})$^{\frac{٥}{٦}}$

١٢٢ كل جذرٍ يترقى الى قوةٍ من اسمهِ برفع علامة الجذر. مثالهُ مكعب ت$^{\frac{١}{٣}}$ = ت$^{\frac{٣}{٣}}$ = ت والقوة النونية من ت$^{\frac{١}{ن}}$ = ت$^{\frac{ن}{ن}}$ = ت

ومكعَّب $\sqrt[٣]{\text{ب + س}}$ = ب + س

واذا كان للجذور مسمياتٌ منطَّقة يجب ترقينها ايضاً. مثالهُ مربَّع ت $\sqrt[ن]{\text{ك}}$ = ت^{٢} $\sqrt[ن]{\text{ك}^{٢}}$ ومربع ت $\sqrt{\text{ك − ى}}$ = ت^{٢} × (ك − ى)

ومكعَّب ٣ ت $\sqrt[٣]{\text{ى}}$ = ٢٧ ت^{٣} ى

واذا ارتبطت المنطَّقة بالجذور بعلامة الجمع او الطرح تترقى بالضرب كما علمت فيما تقدم (٧٧) مثالهُ لو قيل ما هو مربَّع ت + $\sqrt{\text{ى}}$ وت − $\sqrt{\text{ى}}$

لقبل $ت + \sqrt{ى}$	$ت - \sqrt{ى}$
$ت + \sqrt{ى}$	$ت - \sqrt{ى}$
$ت^{٢} + ت\sqrt{ى}$	$ت^{٢} - ت\sqrt{ى}$
$+ ت\sqrt{ى} + ى$	$- ت\sqrt{ى} + ى$
$ت^{٢} + ٢ت\sqrt{ى} + ى$	$ت^{٢} - ٢ت\sqrt{ى} + ى$

ما هو مكعب $ت - \sqrt{ب}$

ما هو مكعب $٢د + \sqrt{ك}$

١٢٣ الجذور تجذر حسبما تقدم (٩٨) اي بقسمة دلايلها على دليل الجذر المفروض او بوضع علامة الجذر مع دليلهِ فوق الكمية. مثال الاول الجذر المربع من $ت^{\frac{١}{٣}} = ت^{\frac{١}{٣} + {}^{٢}} = ت^{\frac{١}{٦}}$ والجذر الكعبي من $ت(ك ى)^{\frac{١}{٢}} = ت^{\frac{١}{٣}}(ك ى)^{\frac{١}{٦}}$ ومثالهُ الثاني الجذر النوني من $ت\sqrt[٦]{ب ى} = (ت\sqrt[٦]{ب ى})^{\frac{١}{ن}}$

١٢٤ اذا ضُرِبَت كمية جذرية في اخرى تشابهها وكان المضروب فيهِ قوةً دليلها اقل من دليل المضروب بواحد يكون الحاصل كمية منطقة. مثالهُ $\sqrt[ن]{ك} \times \sqrt[ن]{ك^{ن-١}} = ك^{\frac{١}{ن}} \times ك^{\frac{ن-١}{ن}} = ك^{\frac{ن}{ن}} = ك$ و $(ك + ى)^{\frac{١}{ن}} \times (ك + ى)^{\frac{ن-١}{ن}} = ك + ى$ و $\sqrt{ت} \times \sqrt{ت} = ت$ و $\sqrt[٤]{ت} \times \sqrt[٤]{ت^{٣}} = ت$ و $(ت + ب)^{\frac{١}{٣}} \times (ت + ب)^{\frac{٢}{٣}} = ت + ب$ و $(ك + ى)^{\frac{١}{٤}} \times (ك + ى)^{\frac{٣}{٤}} = ك + ى$

١٢٥ كل كمية جذرية ثنائية ليس فيها غير الجذر المربع تصير منطقة اذا ضُرِبَت في نفسها بعد تبديل العلامة المتوسطة بين الجزءين من + الى − او عكسه وهذا واضحٌ مما تقدم (٨٩) اي ان حاصل مجتمع كميتين في فضلتهما = فضلة مربعيهما. مثالهُ $\sqrt{ت} + \sqrt{ب} \times \sqrt{ت} - \sqrt{ب} = \sqrt{ت^{٢}} - \sqrt{ب^{٢}} = ت - ب$ و $١ + \sqrt{٢} \times ١ - \sqrt{٢} = ١ - ٢ = -١$ و $٣ - ٢\sqrt{٢} \times ٣ + ٢\sqrt{٢} = ١$

وان كانت الكمية ثلاثية فصاعدًا تحول بالضرب اولاً الى ثنائية ثم الى منطقة. مثالهُ $\sqrt{١٠} - \sqrt{٢} - \sqrt{٣} \times \sqrt{١٠} + \sqrt{٢} + \sqrt{٣} = ٥ - ٢\sqrt{٦}$ ثم $٥ - ٢\sqrt{٦} \times ٥ + ٢\sqrt{٦} = ١$

١٢٦ اذا اردت ازالة الجذور من صورة كسرٍ او مخرجهِ بدون تغيير القيمة فاضرب الصورة والمخرج في كميةٍ تجعل احدهما منطقاً حسب المراد. فاذا اردت ازالة الجذور من صورة هذا الكسر اي $\frac{\sqrt{ت}}{\sqrt{ك}}$ فاضرب الصورة والمخرج في $\sqrt{ت}$ فتصير $\frac{\sqrt{ت}\sqrt{ت}}{\sqrt{ك}\sqrt{ت}} = \frac{ت}{\sqrt{ك}\,ت}$ واذا ضربت الصورة والمخرج في $\sqrt{ك}$ يصير المخرج منطقاً اي $\frac{\sqrt{ت}\times\sqrt{ك}}{\sqrt{ك}\times\sqrt{ك}}$ $\frac{\sqrt{ت\,ك}}{ك}$ وقس على ذلك هذه الامثلة

$$\frac{ب^{\frac{١}{٢}}}{(ت+ك)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{ب^{\frac{١}{٢}}\times(ت+ك)^{\frac{١}{٢}}}{(ت+ك)^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}} = \frac{ب^{\frac{١}{٢}}\times(ت+ك)^{\frac{١}{٢}}}{ت+ك}$$

$$\frac{\sqrt[٢]{ى+ك}}{ت} = \frac{(ى+ك)^{\frac{١}{٢}+\frac{١}{٢}}}{ت\times(ى+ك)^{\frac{١}{٢}}} = \frac{ى+ك}{ت\times(ى+ك)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$\frac{ت}{ك^{\frac{١}{ن}}} = \frac{ت\,ك^{\frac{ن-١}{ن}}}{ك^{\frac{١}{ن}}\times ك^{\frac{ن-١}{ن}}} = \frac{ت\sqrt[ن]{ك^{ن-١}}}{ك}$$

$$\frac{\sqrt{٢}}{٣-\sqrt{٢}} = \frac{\sqrt{٢}\times٣+\sqrt{٢}}{(٣-\sqrt{٢})\times(٣+\sqrt{٢})} = \frac{٢+٣\sqrt{٢}}{٧}$$

$$\frac{٣}{\sqrt{٥}-\sqrt{٢}} = \frac{٣(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})}{(\sqrt{٥}-\sqrt{٢})\times(\sqrt{٥}+\sqrt{٢})} = \sqrt{٥}+\sqrt{٢}$$

$$\frac{٦}{٥^{\frac{١}{٤}}} = \frac{٦\times٥^{\frac{٣}{٤}}}{٥^{\frac{١}{٤}+\frac{٣}{٤}}} = \frac{٦}{٥}\sqrt[٤]{١٢٥}$$

$$\frac{٨}{\sqrt{٣}+\sqrt{٢}+١} = \frac{٨\times(\sqrt{٣}-\sqrt{٢}-١)(-\sqrt{٢})}{(\sqrt{٣}+\sqrt{٢}+١)(\sqrt{٣}-\sqrt{٢}-١)(-\sqrt{٢})} =$$

$$٤-٢\sqrt{٦}+٢\sqrt{٢}$$

حوّل $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ الى كسرٍ مخرجهُ منطَق

حوّل $\frac{\text{ت} - \sqrt{\text{ب}}}{\text{ت} + \sqrt{\text{ب}}}$ الى كسرٍ مخرجهُ منطق

١٢٧ نرى مما تقدم ان استخراج جذر كميةٍ صمَّاء كسرًا يسهل بتحويل الصورة او المخرج الى كمية منطَّقة. فلا يلزم حينئذٍ سوى استخراج جذر احدهما اذ يكون الاخر منطَّقًا. مثالهُ جذر $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ المالي $= \frac{\sqrt{\text{ت}}}{\sqrt{\text{ب}}} = \frac{\text{ت}}{\sqrt{\text{ت ب}}}$ او $\frac{\sqrt{\text{ت ب}}}{\text{ب}}$

جذر $\frac{٣}{٧}$ المالي $= \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٣} \times \sqrt{٧}}{\sqrt{٧} \times \sqrt{٧}} \quad \frac{\sqrt{٢١}}{٧}$

امثلة

(١) ما هو الجذر الرابع من ٨١ $\text{ت}^{٢}$

(٢) ما هو الجذر السادس من $(\text{ت} + \text{ب})^{-٣}$

(٣) ما هو الجذر النوني من $(\text{ك} - \text{ى})^{\frac{١}{٢}}$

(٤) ما هو الجذر الكعبي من − ١٢٥ ت $\text{ك}^{٦}$

(٥) ما هو الجذر المالي من $\frac{٤\ \text{ت}^{٤}}{٩\ \text{ك}^{٢}\ \text{ى}^{٢}}$

(٦) ما هو الجذر الخامس من $\frac{٣٢\ \text{ت}^{٥}\ \text{ك}^{١٠}}{٢٤٣}$

(٧) ما هو الجذر المالي من $\text{ك}^{٢} - ٦\ \text{ب ك} + ٩\ \text{ب}^{٢}$

(٨) ما هو الجذر المالي من $\text{ت}^{٢} + \text{ت ى} + \frac{\text{ى}^{٢}}{٤}$

(٩) حوّل ت $\text{ك}^{٢}$ الى هيئة الجذر السادس

(١٠) حوّل − ٣ ى الى هيئة الجذر الكعبي

(١١) حوّل $\text{ت}^{٢}$ و$\text{ت}^{\frac{١}{٣}}$ الى دليل مشترك

(١٢) حوّل $٤^{\frac{١}{٣}}$ و$٥^{\frac{١}{٤}}$ الى دليل مشترك

(١٣) حوّل $\text{ت}^{\frac{١}{٢}}$ و$\text{ب}^{\frac{١}{٤}}$ الى دليل $\frac{١}{٨}$

(١٤) حوّل $٢^{\frac{١}{٢}}$ و$٤^{\frac{١}{٤}}$ الى دليل $\frac{١}{٨}$

(١٥) اخرج بعض $\sqrt{٢٩٤}$ من تحت علامة الجذر

(١٦) اخرج بعض $\sqrt{\text{ك}^٢ - \text{ت}^٢\text{ك}}$ من تحت علامة الجذر

(١٧) ما هو مجتمع $\sqrt{١٦\ \text{ت}^٢\text{ك}}$ و$\sqrt{٤\ \text{ت}^٢\text{ك}}$ وفضلتهما

(١٨) ما هو مجتمع $\sqrt[٣]{١٩٢}$ و$\sqrt[٣]{٢٤}$

(١٩) اضرب $٧\sqrt[٣]{١٨}$ في $٥\sqrt[٣]{٤}$

(٢٠) اضرب $٤ + ٢\sqrt{٣} \times ٢ - \sqrt{٣}$

(٢١) اضرب $\text{ت}\ (\text{ت} + \sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}} \times \text{ب}\ (\text{ت} - \sqrt{\text{س}})^{\frac{١}{٢}}$

(٢٢) اضرب $٢\ (\text{ت} + \text{ب})^{\frac{١}{\text{ن}}} \times ٢\ (\text{ت} + \text{ب})^{\frac{١}{\text{م}}}$

(٢٣) اقسم $٦\sqrt{٥٤}$ على $٣\sqrt{٣}$

(٢٤) اقسم $٤\sqrt[٣]{٧٢}$ على $٢\sqrt[٣]{١٨}$

(٢٥) اقسم $\sqrt{٧}$ على $\sqrt[٣]{٧}$

(٢٦) اقسم $٨\sqrt[٣]{٥١٢}$ على $٤\sqrt[٣]{٢}$

(٢٧) ما هو مكعّب $١٧\sqrt{٢١}$

(٢٨) ما هو مربع $٥ + \sqrt{٣}$

(٢٩) ما هي القوة الرابعة من $\sqrt[\frac{١}{٦}]{٦}$

(٣٠) ما هو مكعب $\sqrt{\text{ك}} - \sqrt{\text{ب}}$

(٣١) بماذا تصير $\sqrt[٣]{\text{ى}}$ منطّقة

(٣٢) بماذا تصير $\sqrt{٥} - \sqrt{\text{ك}}$ منطقة

(٣٣) حوّل $\frac{\sqrt{\text{ت}}}{\sqrt{\text{ك}}}$ الى مخرجٍ منطّق

(٢٤) حوّل $\frac{\sqrt{\text{٦}}}{\sqrt{\text{٧}}\times\sqrt{\text{٣}}}$ الى مخرجٍ منطَّق

الفصل العاشر

في حلّ المعادلات بالترقية والتجذير

نبذة

في الترقية

١٣٨ لو فُرِض $\sqrt{\text{ك}}=\text{ت}$ لكان بتربيع جانبي هذه المعادلة $\text{ك}=\text{ت}^{\text{٢}}$ فاذًا ان وقعت الكمية المجهولة تحت علامة الجذر تحلّ المعادلة بترقية جانبيها الى قوةٍ من اسم ذلك الجذر

تنبيه قبل الترقية ينبغي مقابلة المعادلة حتى تكون الكميات المنطَّقة وحدها على جانبٍ واحد والجذرية وحدها على الجانب الاخر

فلنفرض هذه المعادلة $\sqrt{\text{ك}}+\text{٤}=\text{٩}$
ثم بالمقابلة $\sqrt{\text{ك}}=\text{٩}-\text{٤}=\text{٥}$
بترقية الجانبين $\text{ك}=\text{٥}^{\text{٢}}=\text{٢٥}$

مفروض $\text{ت}+\sqrt[\text{ن}]{\text{ك}}-\text{ب}=\text{د}$
بالمقابلة $\sqrt[\text{ن}]{\text{ك}}=\text{د}+\text{ب}-\text{ت}$
بالترقية $\text{ك}=(\text{د}+\text{ب}-\text{ت})^{\text{ن}}$

مفروض $\sqrt[\text{٣}]{\text{ك}+\text{١}}=\text{٤}$
بترقية الجانبين الى القوة الثالثة $\text{ك}+\text{١}=\text{٦٤}$
وبالمقابلة $\text{ك}=\text{٦٣}$

مفروض $٤ + ٣\sqrt{ك - ٤} = ٦ + \frac{١}{٢}$

بالجبر $٨ + ٦\sqrt{ك - ٤} = ١٣$

بالمقابلة والقسمة على ٦ $\sqrt{ك - ٤} = \frac{٥}{٦}$

بالترقية $ك - ٤ = \frac{٢٥}{٣٦}$ ثم $ك = \frac{٢٥}{٣٦} + ٤$

مفروض $\sqrt{ت^٢ + \sqrt{ك}} = \frac{٣ + د}{\sqrt{ت^٢ + \sqrt{ك}}}$

بالجبر $ت^٢ + \sqrt{ك} = ٣ + د$

بالمقابلة $\sqrt{ك} = ٣ + د - ت^٢$

بالترقية $ك = (٣ + د - ت^٢)^٢$

وعلى هذا النسق تحلّ هذه الامثلة الآتية

$٣ + ٢\sqrt{ك} - \frac{٤}{٥} = ٦$	$ك = \frac{٣٦١}{١٠٠}$
$\sqrt[٤]{\frac{ك}{٥}} = ٨$	$ك = ٣٠$
$(٢ك + ٣)^{\frac{١}{٢}} + ٤ = ٧$	$ك = ١٢$
$\sqrt{١٢ + ك} = ٢ + \sqrt{ك}$	$ك = ٤$
$\sqrt{ك - ت} = \sqrt{ك} - \frac{١}{٢}\sqrt{ت}$	$ك = \frac{٢٥ ت}{١٦}$
$\sqrt{٥} \times \sqrt{ك + ٢} = ٢ + \sqrt{٥ك}$	$ك = \frac{٩}{٢٠}$
$\frac{ك - ت ك}{\sqrt{ك}} = \frac{\sqrt{ك}}{ك}$	$ك = \frac{١}{١ - ت}$
$\frac{\sqrt{ك} + ٢٨}{\sqrt{ك} + ٤} = \frac{\sqrt{ك} + ٣٨}{\sqrt{ك} + ٦}$	$ك = ٤$

$$\sqrt{ك} + \sqrt{ت+ك} = \frac{٢ت}{\sqrt{ت+ك}} \qquad ك = \frac{١}{٣}ت$$

$$ك + \sqrt{ت^{٢}+ك^{٢}} = \frac{٢ت^{٢}}{\sqrt{ت^{٢}+ك^{٢}}} \qquad ك = ت\sqrt{\frac{١}{٣}}$$

$$ك+ت = \sqrt{ت^{٢}+ك\sqrt{ب^{٢}+ك^{٢}}} \qquad ك = \frac{ب^{٢}-٤ت^{٢}}{٤ت}$$

$$\sqrt{٢+ك} + \sqrt{ك} = \frac{٤}{\sqrt{٢+ك}} \qquad ك = \frac{٢}{٣}$$

$$\sqrt{ك-٣٢} = ١٦-\sqrt{ك} \qquad ك = ٨١$$

$$\sqrt{٤ك+١٧} = ٢\sqrt{ك}+١ \qquad ك = ١٦$$

$$\frac{\sqrt{٦ك}-٢}{\sqrt{٦ك}+٢} = \frac{٤\sqrt{٦ك}-٩}{٤\sqrt{٦ك}+٦} \qquad ك = ٦$$

$$\sqrt{ت^{٢}+ك^{٢}} = \sqrt[٤]{ب^{٤}+ك^{٤}} \qquad ك = \sqrt{\frac{ب^{٤}-ت^{٤}}{٢ت^{٢}}}$$

نبذة

في حل المعادلات بالتجذير

١٢٩ لو فُرِض $ك^{٢} = ١٦$ فان تجذَّر الجانبان تصير $ك = ٤$ فاذًا ان كانت الكمية المجهولة قوةً تحلُّ المعادلة بتجذير الجانبين

مفروض $٦ + ك^{٢} - ٨ = ٧$

بالمقابلة $ك^{٢} = ٩$ وبالتجذير $ك = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$

فالجواب ملتبسٌ لان $+٣ \times +٣ = ٩$ و $-٣ \times -٣ = ٩$

مفروض $٥ك^{٢} - ٣٠ = ك^{٢} + ٣٤$

بالمقابلة والقسمة $ك^{٢} = ١٦$

بالتجذير $ك = \pm ٤$

مفروض $ت + \frac{ك^{٢}}{ب} = ح - \frac{ك^{٢}}{د}$

بالجبر والمقابلة والقسمة $ك^{٢} = \frac{ب د ح - ت ب د}{ب + د}$

وبالتجذير $ك = \pm\left(\frac{ب د ح - ت ب د}{ب + د}\right)^{\frac{١}{٢}}$

مفروض $ت + د ك^{ن} = ١٠ - ك^{ن}$

بالمقابلة والقسمة $ك^{ن} = \frac{١٠ - ت}{د + ١}$

بالتجذير $ك = \left(\frac{١٠ - ت}{د + ١}\right)^{\frac{١}{ن}}$

١٢٠ متى كانت المجهولة قوةً تحت علامة الجذر تحَلُّ المعادلة بالترقية والتجذير

مفروض $\sqrt[٣]{ك^{٢}} = ٤$

بالترقية $ك^{٢} = ٤^{٣} = ٦٤$

بالتجذير $ك = \pm\sqrt{٦٤} = \pm ٨$

مفروض $\sqrt{ك^{٣} - ت} = ح - د$

بالترقية $ك^{٣} - ت = ح^{٢} - ٢ ح د + د^{٢}$

بالمقابلة $ك^{٣} = ح^{٢} - ٢ ح د + د^{٢} + ت$

بالتجذير $ك = \sqrt[٣]{ح^{٢} - ٢ ح د + د^{٢} + ت}$

مفروض $(ك + ت)^{\frac{١}{٢}} = \frac{ت + ب}{(ك - ت)^{\frac{١}{٢}}}$

بالجبر حسبما مرَّ (١١٣) $(ك^{٢} - ت^{٢})^{\frac{١}{٢}} = ت + ب$

بالترقية $ك^{٢} - ت^{٢} = ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}$

بالمقابلة $ك^{٢} = ٢ ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢}$

بالتجذير $ك = (٢ ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

مسائل منثورة

(١) سُئِلَ رجلٌ عن عمرِهِ فقال اذا اضيف اليهِ عشر سنين وأُخِذ الجذر المالي للمجتمع وطُرِح من هذا الجذر ٢ يبقى ٦ فكم كان عمرهُ

بموجب شروط المسألة $\sqrt{ك + ١٠} - ٢ = ٦$

بالمقابلة $\sqrt{ك + ١٠} = ٨$

بالترقية $ك + ١٠ = ٦٤$

بالمقابلة ايضاً $ك = ٥٤$

والامتحان $\sqrt{٥٤ + ١٠} - ٢ = ٦$

(٢) ايُّ عددٍ اذا اضيف اليهِ ٢٢٥٧٧ وأُخِذ جذر المجتمع المالي وطُرِح منه ١٦٣ يبقى ٢٣٧

بشروط المسألة $\sqrt{ك + ٢٢٥٧٧} - ١٦٣ = ٢٣٧$

بالمقابلة $\sqrt{ك + ٢٢٥٧٧} = ٤٠٠$

بالترقية $ك + ٢٢٥٧٧ = ١٦٠٠٠٠$

بالمقابلة $ك = ١٣٧٤٢٣$

الامتحان $\sqrt{١٣٧٤٢٣ + ٢٢٥٧٧} - ١٦٣ = ٢٣٧$

(٣) تاجرٌ ربح من تجارتهِ مبلغًا نسبتهُ الى ٣٢٠ كنسبة ٢٥٠٠ الى خمسة اضعاف المبلغ. فكم يكون ربحهُ

بشروط المسألة $ك : ٣٢٠ :: ٢٥٠٠ : ٥ ك$

بتحويل النسبة الى معادلة $٥ ك^{٢} = ٨٠٠٠٠٠$

بالقسمة $ك^{٢} = ١٦٠٠٠٠$ بالتجذير $ك = \pm ٤٠٠$

تنبه. عند تجذير ١٦٠٠٠٠ لا نعلم هل الجذر ايجابيٌّ ام سلبيٌّ ولكن حسب شروط المسألة كان ربحًا فنحسبهُ ايجابيًا. وقس على ذلك نظيرهُ

(٤) سُئِل كم ميلاً الى المكان الفلاني. فاجيب انهُ اذا طُرِح ٩٦ من مربّع البعد يبقى ٤٨ فكم كانت المسافة

بالشروط $ك^{٢} - ٩٦ = ٤٨$ $ك^{٢} = ١٤٤$ $ك = ١٢$

(٥) اي عددٍ ينقسم ثلثة امثال مربّعهِ على ٤ ويطرح ١٢ من الخارج فيبقى ١٨٠

بالشروط $\frac{٣ك^{٢}}{٤} - ١٢ = ١٨٠$ $ك = ١٦$

(٦) اي عددٍ يُطرَح ربع مربَّعهِ من ٨ فيبقى ٤   الجواب ٤

(٧) اي عددين نسبة مجتمعهما الى اكبرهما كنسبة ١٠ الى ٧ واذا ضرب مجتمعهما في اصغرهما كان الحاصل ٢٧٠

نفرض مجتمعهما = ١٠ ك فيكون الاكبر ٧ ك والاصغر ٣ ك والعددان ٢١ و٩

(٨) اي عددين نسبة فضلتهما الى اكبرهما كنسبة ٢ : ٩ وفضلة مربعيهما ١٢٨

الجواب ١٨ و١٤

(٩) اقسم ١٨ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربَّع احدهما الى مربع الآخر كنسبة ٢٥ : ١٦

ليكن ك الاكبر فيكون ١٨ − ك الاصغر و $ك^{٢} : (١٨ - ك)^{٢} :: ٢٥ : ١٦$

وبالتحويل الى معادلة $١٦ ك^{٢} = ٢٥ (١٨ - ك)^{٢}$

وبالتجذير $٤ ك = ٥ (١٨ - ك)$

$ك = ١٠$

(١٠) اي عددٍ يُضرَب نصفهُ في ثلثهِ فيكون الحاصل ٢٤   الجواب ١٢

(١١) اي عددٍ اذا اضيف اليهِ ٥ وطرح منهُ ٥ وضرب المجتمع في الفضلة يكون الحاصل ٩٦   الجواب ١١

(١٢) اقسم ١٤ الى قسمين بحيث تكون نسبة الخارج من قسمة اكبرهما على اصغرهما الى الخارج من قسمة اصغرهما على اكبرهما كنسبة ١٦ : ٩

الجواب ٨ و٦

(١٣) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٥ : ٤ ومجموع كعبيهما ٥١٠٣

افرض الاكبر ٥ ك والاصغر ٤ ك . فيكون الجواب ١٥ و١٢

(١٤) ثلثة شركاءَ قسموا ارباحهم فكان الخارج من قسمة حصة الاول على ٧ يماثل الخارج من قسمة حصة الثاني على ٣ والخارج من قسمة حصة الثاني على ١٧ يماثل الخارج من قسمة حصة الثالث على ٥ وان ضربت حصة الاول في حصة الثاني

وحصة الثاني في حصة الثالث وحصة الثالث في حصة الاول يكون مجموع الحواصل $٣٨٣٠\frac{٢}{٣}$ فكم حصة كل واحد

لنفرض حصة الاول ك فلنا $٧ : ٣ :: ك : \frac{٣ك}{٧}$ = حصة الثاني

و $١٧ : ٥ :: \frac{٣ك}{٧} : \frac{١٥ك}{١١٩}$ = الثالث

والاول في الثاني اي $ك \times \frac{٣ك}{٧} = \frac{٣ك^{٢}}{٧}$

والثاني في الثالث اي $\frac{٣ك}{٧} \times \frac{١٥ك}{١١٩} = \frac{٤٥ك^{٢}}{٨٣٣}$

والثالث في الاول اي $\frac{١٥ك}{١١٩} \times ك = \frac{١٥ك}{١١٩}$

ثم بالتحويل الى مخرج مشترك والجمع $= \frac{٥٠٧ك^{٢}}{٨٣٣}$

فلنا $\frac{٥٠٧ك^{٢}}{٨٣٣} = ٣٨٣٠\frac{٢}{٣}$ $ك = ٧٩\frac{١}{٣}$

فالاول $= ٧٩\frac{١}{٣}$ والثاني $= ٣٤$ والثالث ١٠

(١٥) بعض التجار اشتركوا في ارسال عامل الى مصر واعطاهُ كل واحدٍ منهم من الدنانير عشرة امثال عدد الشركاء. وكانت عمالة العامل في المابة من الدنانير ضعف عدد الشركاء. فان ضرب $\frac{١}{١٠٠}$ من ربحهِ في $٢\frac{٢}{٩}$ يماثل الحاصل عدد الشركاء فكم كانت الشركاء

ليكن عدد الشركاء ك فيكون المال الذي بيد العامل $١٠ك^{٢}$ وربح العامل على كل ١٠٠ دينار $= ٢ك$ وعلى $١٠ك^{٢}$ يكون ربحهُ $\frac{ك^{٣}}{٥}$ ويكون $\frac{١}{١٠٠}$ من هذا الربح $\frac{ك^{٣}}{٥٠٠}$ و $\frac{ك^{٣}}{٥٠٠} \times ٢\frac{٢}{٩} = \frac{٢٠ك^{٣}}{٤٥٠٠} = \frac{ك^{٣}}{٢٢٥}$

فلنا $\frac{ك^{٣}}{٢٢٥} = ك$ $٢٢٥ك = ك^{٣}$ $ك^{٢} = ٢٢٥$ $ك = ١٥$

(١٦) اي عددٍ اذا اضيف اليهِ ٢ وطرح منهُ ١٠ يكون مربع المجموع مع

مضاعف مربّع الفضلة ١٧٤٧٥ الجواب ٧٥

(١٧) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٣ : ٥ ومجموع مربعيهما ١٦٦٦
الجواب ٢١ و٣٥

(١٨) سافر زيدٌ وعمروٌ كل واحدٍ من بلدٍ قاصدين ان يتلاقيا في مكانٍ. ولما التقيا كان زيدٌ قد قطع من المسافة ١٨ ميلاً زيادةً عن عمروٍ. وفي سيرهما كان زيدٌ قد قطع مسافة عمروٍ في ١٥ $\frac{٣}{٤}$ يومٍ. وكان عمروٌ قد قطع مسافة زيد في ٢٨ يومًا. فكم كان البعد بين البلدين

لنفرض ك = المسافة التي قطعها زيدٌ

وك – ١٨ = التي قطعها عمروٌ

فيكون $\frac{\text{ك} - ١٨}{١٥\frac{٣}{٤}}$ = سفر زيد اليوميّ

و$\frac{\text{ك}}{٢٨}$ = سفر عمرو اليومي

ولنا ك : ك – ١٨ :: $\frac{\text{ك} - ١٨}{١٥\frac{٣}{٤}} : \frac{\text{ك}}{٢٨}$

ك = ٧٢ = مسافة زيد. والبعد = ١٢٦ ميلاً

(١٩) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٨ : ٥ وحاصلها ٣٦٠
الجواب ٢٤ و١٥

(٢٠) رجلٌ اشترى ثوبين مجموعهما ٣٦ ذراعًا. وكان ثمن الذراع من كل واحدٍ من الدراهم بقدر عدد اذرعهِ. ونسبة ثمن الواحد الى ثمن الآخر :: ٤ : ١ فكم ذراعًا كان كل ثوبٍ الجواب ٢٤ و١٢

(٢١) اي عددين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٣ : ٢ ونسبة فضلة قوّتيهما الرابعتين الى مجتمع كعبيهما كنسبة ٢٦ : ٧ الجواب ٦ و٤

(٢٢) بعض السُوّاح ترافقوا في السفر. ومع كل واحدٍ منهم قدر ما مع الآخر من الدراهم ولكل واحدٍ من الخُدّام انفارٌ بقدر عدد السواح. والدراهم التي مع كل

واحدٍ من السواح مضاعف عدد الخدام ومجتمع الكل ٢٤٥٦ درهمًا فكم كان عدد السواح الجواب ١٢

(٢٢) طلب الملك من مقاطعةٍ رجالاً للحرب فارسلت كل قريةٍ انفارًا بعدد قرى تلك المقاطعة اربع مرات . واذ لم يرضَ الملك بذلك ارسلت كل قريةٍ ثلثة انفار ايضًا فكانت نسبة العدد كلهِ بعد هذه الزيادة الى عدد المرسلين اولاً كنسبة ١٧ : ١٦ فكم قريةً في هذه المقاطعة الجواب ١٢

* * *

الفصل الحادي عشر

في معادلات ممتزجة من الدرجة الثانية

١٣١ تنقسم المعادلات الى اقسامٍ شتَّى باعتبار قوة الحرف الدالّ على الكميَّة المجهولة

الاول معادلات من الدرجة الاولى وهي ما ليس فيها سوى القوة الاولى من المجهولة . مثالها $\text{ك} = \text{ت} + \text{ب}$ وتُسَمَّى ايضًا معادلات بسيطة وقد تقدم ذكرها

الثاني معادلات من الدرجة الثانية وهي ما كانت القوة العليا فيها من المجهولة مالاً . ويقال لها ايضًا معادلات مربَّعة . فان لم يكن فيها غير القوة من المجهولة فهي المحضة . وقد مضي ذكرها . مثالها $\text{ك}^{٢} = \text{ت} - \text{ر}$ وان كان فيها القوة الثانية والاولى من المجهولة فهي الممتزجة . مثالها $\text{ك}^{٢} + \text{ب ك} = \text{د}$

الثالث معادلات من الدرجة الثالثة وهي ما كانت فيها القوة العليا من المجهولة كعبًا . وهي ايضًا اما محضة مثل $\text{ك}^{٣} = \text{ب} - \text{س}$ واما ممتزجة مثل $\text{ك}^{٣} + \text{ت ك}^{٢} + \text{ب ك} = \text{ح}$ وقس على ذلك معادلات الدرجة الرابعة والخامسة وهلمَّ جرًّا

١٣٢ قد راينا في ما تقدم ان المعادلة المربَّعة المحضة تحَلُّ بتجذير جانبيها . وهكذا ايضًا الممتزجة اذا كان الجانب الذي فيهِ المجهولة مربَّعًا تامًّا . مثالها

$\text{ك}^{٢} + ٢\,\text{ت ك} + \text{ت}^{٢} = \text{ب} + \text{ح}$ فهذه المعادلة تحَلُّ بالتجذير لان جانبها الاول مربَّع كميةٍ ثنائية . وحسبما تقدم (١٠٢) لنا بالتجذير $\text{ك} + \text{ت} = \sqrt{\text{ب} + \text{ح}}$

وبالمقابلة $\text{ك} = \sqrt{\text{ب} + \text{ح}} - \text{ت}$

١٢٢ مرارًا كثيرة يحدث ان الجانب الذي فيهِ المجهولة لا يكون مربعًا تامًا مثل $ك^{٢} + ٢ ت ك = ب$ فلو عرفنا الجزء الناقص من الجانب الاول لكي يصير مربعًا تامًا واضفناهُ الى الجانبين لجعلنا المعادلة محضة بالتجذير كما تقدم (٧٨) فبما ان الجزء الثاني هو مضاعف حاصل الجزءين يكون $٢ ت ك$ في المعادلة المذكورة مضاعف حاصل جزءي الكمية التي نحن في طلبها وتكون الكمية $ك + ت$ ومربعها $ك^{٢} + ٢ ت ك + ت^{٢}$ اي الجزء الناقص هو مربَّع نصف مسمّى القوة الدنيا من المجهول. ولنا من ذلك قاعدةٌ لاتمام تربيع معادلة مربعة ممتزجة وهي ان يوخذ مربع نصف مسمّى القوة الدنيا من المجهول ويضاف الى جانبي المعادلة

فلو فرِض $ك^{٢} \mp ف ك = \pm د$ لكان لنا حسبما تقدم

$$ك^{٢} \pm ف ك + \frac{١}{٤} ف^{٢} = \pm د + \frac{١}{٤} ف^{٢}$$

$$ك \pm \frac{١}{٢} ف = \pm \sqrt{د + \frac{١}{٤} ف^{٢}}$$

$$ك = \pm \frac{١}{٢} ف \pm \sqrt{د + \frac{١}{٤} ف^{٢}}$$

وهي عبارةٌ عمومية لكل معادلة مربعة ممتزجة. فلو فُرِض $ك^{٢} - ٦ ك = ٧$ لقلنا حسب هذه العبارة $ك = ٣ \pm \sqrt{٧ + ٩} = ٣ \pm ٤ = ٧$ او -١

تنبيه. لكل معادلةٍ مربَّعةٍ محضةً كانت او ممتزجةً قيمتان لان الجذر الشفعيَّ ملتبس (١٠٢) وهذا الجذر هو نفس قيمة المجهول في كل معادلة مربعة محضة. مثاله $ك^{٢} = ٦٤$ $ك = \pm \sqrt{٦٤} = \pm ٨$ ولكن في الممتزجة لا بد من اضافة شيء الى هذا الجذر او طرح شيء منهُ كما راينا. ونرى القيمتين تارةً ايجابيتين وتارةً احداهما ايجابية والاخرى سلبية. مثال ذلك

$ك^{٢} + ٨ ك = ٢٠$ $ك = -٤ \pm ٦ = ٢$ او -١٠ $ك^{٢} - ٨ ك = -١٥$ $ك = ٤ \pm ١ = ٥$ او ٣ وتبرهن صحتهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة الاصلية. فبالتعويض عن $ك$ بخمسة لنا $٥^{٢} - ٨ \times ٥ = ٢٥ - ٤٠ = -١٥$

وبالتعويض عنها بثلثة $٣^{٢} - ٨ \times ٣ = ٩ - ٢٤ = -١٥$

١٣٤ قبل اتمام التربيع يجب مقابلة المعادلة حتى تكون المجهولات وحدها على جانبٍ واحد والمعلومات على الجانب الاخر. ويجب ايضاً ازالة الكسور والقسمة على مسمّى القوة العليا للمجهول. ولايضاح كل ذلك قد وضعنا هذه الامثلة

(١) مفروض $ك^{٢} + ٦ ت ك = ب$

باتمام التربيع $ك + ٦ ت ك + ٩ ت^{٢} = ٩ ت^{٢} + ب$

بالتجذير $ك + ٣ ت = \pm \sqrt{٩ ت^{٢} + ب}$

وبالمقابلة $ك = - ٣ ت \pm \sqrt{٩ ت^{٢} + ب}$

(٢) مفروض $ك^{٢} - ٨ ب ك = ح$

باتمام التربيع $ك^{٢} - ٨ ب ك + ١٦ ب^{٢} = ١٦ ب^{٢} + ح$

بالتجذير $ك - ٤ ب = \pm \sqrt{١٦ ب^{٢} + ح}$

بالمقابلة $ك = ٤ ب \pm \sqrt{١٦ ب^{٢} + ح}$

(٣) مفروض $ك^{٢} + ث ك = ب + ح$

باتمام التربيع $ك^{٢} + ث ك + \frac{ث^{٢}}{٤} = \frac{ث^{٢}}{٤} + ب + ح$

بالتجذير $ك + \frac{ث}{٢} = \pm \left(\frac{ث^{٢}}{٤} + ب + ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

وبالمقابلة $ك = - \frac{ث}{٢} \pm \left(\frac{ث^{٢}}{٤} + ب + ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٤) مفروض $ك^{٢} - ك = ح - د$

باتمام التربيع $ك^{٢} - ك + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + ح - د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{١}{٢} \pm \left(\frac{١}{٤} + ح - د\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٥) مفروض $ك^{٢} + ٣ ك = د + ٦$

باتمام التربيع $ك^{٢} + ٣ ك + \frac{٩}{٤} = \frac{٩}{٤} + د + ٦$

وبالتجذير والمقابلة $ك = - \frac{٣}{٢} \pm \left(\frac{٩}{٤} + د + ٦\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٦) مفروض $ك^{٢} - ث ب ك = ث ب - س د$

باتمام التربيع $ك^٢ - ت ب ك + \frac{ت^٢ ب^٢}{٤} = \frac{ت^٢ ب^٢}{٤} + ت ب - س د$

بالتجذير والمقابلة $ك = \frac{ت ب}{٢} \pm \left(\frac{ت^٢ ب^٢}{٤} + ت ب - س د\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٧) مفروض $ك^٢ + \frac{ت ك}{ب} = ح$

باتمام التربيع $ك^٢ + \frac{ت ك}{ب} + \frac{ت^٢}{٤ ب^٢} = \frac{ت^٢}{٤ ب^٢} + ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = - \frac{ت}{٢ ب} \pm \left(\frac{ت^٢}{٤ ب^٢} + ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٨) مفروض $ك^٢ - \frac{ك}{ب} = ٧ ح$

باتمام التربيع $ك^٢ - \frac{ك}{ب} + \frac{١}{٤ ب^٢} = \frac{١}{٤ ب^٢} + ٧ ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{١}{٢ ب} \pm \left(\frac{١}{٤ ب^٢} + ٧ ح\right)^{\frac{١}{٢}}$

١٢٥ متى كانت القوة الدنيا في عدةٍ من اجزآء المعادلة يجب جمعها الى جزء واحدٍ قبل اتمام التربيع. وان كانت مضلَّعة يجب فكها الى اضلاعها لكي يُعرَف مسمَّاها

(١) مفروض $ك^٢ + ٣ ك + ٢ ك + ك = د$

بالجمع $ك^٢ + ٦ ك = د$

باتمام التربيع $ك^٢ + ٦ ك + ٩ = ٩ + د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = - ٣ \pm \sqrt{٩ + د}$

(٢) مفروض $ك^٢ + ت ك + ب ك = ح$

بالفك حسب (٣٨) $ك + (ت + ب) \times ك = ح$

باتمام التربيع $ك^٢ + (ت + ب) \times ك + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ + ح$

بالتجذير $ك + \frac{ت + ب}{٢} = \pm \sqrt{\left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ + ح}$

وبالمقابلة $ك = -\frac{ت+ب}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{ت+ب}{٢}\right)^٢ + ح}$

(٢) مفروض $ك^٢ + ت ك - ك = ب$

بالفك (٢٨) $ك^٢ + (ت - ١) \times ك = ب$

باتمام التربيع $ك^٢ + (ت - ١) \times ك + \left(\frac{ت-١}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{ت-١}{٢}\right)^٢ + ب$

بالتجذير والمقابلة $ك = -\frac{ت-١}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{ت-١}{٢}\right)^٢ + ب}$

١٣٦ ينبغي في بعض الاحيان ان تُعَدَّ المعادلة لاتمام التربيع بالجبر او المقابلة او القسمة او تبديل العلامات وما يشبه ذلك كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض $ت + ٥ ك - ٣ ب = ٣ ك - ك^٢$

بالمقابلة والجمع $ك^٢ + ٢ ك = ٣ ب - ت$

باتمام التربيع $ك^٢ + ٢ ك + ١ = ١ + ٣ ب - ت$

بالتجذير والمقابلة $ك = -١ \pm \sqrt{١ + ٣ ب - ت}$

(٢) مفروض $\frac{ك}{٢} = \frac{٣٦}{ك + ٢} - ٤$

بالجبر والمقابلة والجمع $ك^٢ + (١٠ ك) = ٥٦$

باتمام التربيع $ك^٢ + (١٠ ك) + ٢٥ = ٨١$

بالتجذير والمقابلة $ك = -٥ \pm \sqrt{٨١} = -٥ \pm ٩$

(٣) مفروض $ك^٢ + ٢٤ ت - ٦ ح = ١٢ ك - ٥ ك^٢$

بالمقابلة والجمع $٦ ك^٢ - ١٢ ك = ٦ ح - ٢٤ ت$

بالقسمة على ٦ $ك^٢ - ٢ ك = ح - ٤ ت$

باتمام التربيع $ك^٢ - ٢ ك + ١ = ١ + ح - ٤ ت$

بالتجذير والمقابلة $ك = ١ \pm \sqrt{١ + ح - ٤ ت}$

(٤) مفروض $ح + ٢ ك = د - \frac{ب ك^٢}{ت}$

بالجبر والمقابلة $ب ك^٢ + ٢ ت ك = ت د - ت ح$

بالقسمة على ب $ك^{٢} + \frac{٢ت ك}{ب} = \frac{ت د - ت ح}{ب}$

باتمام التربيع $ك^{٢} + \frac{٢ت ك}{ب} + \frac{ت^{٢}}{ب^{٢}} = \frac{ت^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ت د - ت ح}{ب}$

بالتجذير والمقابلة $ك = -\frac{ت}{ب} \pm \left(\frac{ت^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ت د - ت ح}{ب}\right)^{\frac{١}{٢}}$

(٥) مفروض $ب ك^{٢} + د ك^{٢} - ٤ك = ب - ح$

بالقسمة على ب + د $ك^{٢} - \frac{٤ك}{ب + د} = \frac{ب - ح}{ب + د}$ و$ك = \frac{٢}{ب + د} \pm$

$$\sqrt{\left(\frac{٢}{ب + د}\right)^{٢} + \frac{ب - ح}{ب + د}}$$

(٦) مفروض $ت ك^{٢} + ك = ح + ٣ك - ك^{٢}$

بالمقابلة والجمع $ت ك^{٢} + ك^{٢} - ٢ك = ح$

بالقسمة على ت + ١ $ك^{٢} - \frac{٢ك}{ت + ١} = \frac{ح}{ت + ١}$

ثم $ك = \frac{١}{ت + ١} \pm \sqrt{\left(\frac{١}{ت + ١}\right)^{٢} + \frac{ح}{ت + ١}}$

١٣٧ لنفرض $ت ك^{٢} + ب ك = د$ فاذا ضُرِب الجانبان في ٤ ت واضيف اليهما $ب^{٢}$ تصير المعادلة $٤ ت^{٢} ك^{٢} + ٤ ت ب ك + ب^{٢} = ٤ ت د + ب^{٢}$ فنرى الجانب الاول قوةً تامة من $٢ ت ك + ب$ ولنا من ذلك قاعدة اخرى لاتمام التربيع وهي ان تضرب المعادلة في اربعة امثال مسمّى قوة المجهول العليا وتضيف الى الجانبين مربع مسمى قوتهِ الدنيا

تنبيه . هذه القاعدة اسهل من الاولى متى كان للمجهول مسميات لا يمكن ازالتها بالقسمة لانهُ لا يحدث منها كسرٌ في اتمام التربيع كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض $ت ك^{٢} + د ك = ح$

باتمام التربيع حسب القاعدة الثانية

$٤ ت^{٢} ك^{٢} + ٤ ت د ك + د^{٢} = ٤ ت ح + د^{٢}$

بالتجذير $٢ ت ك + د = \pm \sqrt{٤ ت ح + د^{٢}}$

وبالمقابلة والقسمة $ك = \frac{-د \pm \sqrt{٤ ت ح + د^{٢}}}{٢ ت}$

وباتمام التربيع حسب القاعدة الاولى لنا

$$ك^{٢} + \frac{د ك}{ت} + \frac{د^{٢}}{٤ ت^{٢}} = \frac{ح}{ت} + \frac{د^{٢}}{٤ ت^{٢}}$$

بالتجذير $ك + \frac{د}{٢ ت} = \pm \sqrt{\frac{ح}{ت} + \frac{د^{٢}}{٤ ت^{٢}}}$

وبالمقابلة $ك = -\frac{د}{٢ ت} \pm \sqrt{\frac{ح}{ت} + \frac{د^{٢}}{٤ ت^{٢}}}$

(٢) مفروض $ك^{٢} + د ك = ح$

باتمام التربيع $٤ ك^{٢} + ٤ د ك + د^{٢} = ٤ ح + د^{٢}$

بالتجذير $٢ ك + د = \pm \sqrt{٤ ح + د^{٢}}$

وبالمقابلة والقسمة $ك = \frac{-د \pm \sqrt{٤ ح + د^{٢}}}{٢}$

(٣) مفروض $٣ ك^{٢} + ٥ ك = ٤٢$

باتمام التربيع $٣٦ ك^{٢} + ٦٠ ك + ٢٥ = ٥٢٩$

بالتجذير والمقابلة والقسمة $ك = ٣$

(٤) مفروض $ك^{٢} - ١٥ ك = -٥٤$

باتمام التربيع $٤ ك^{٢} - ٦٠ ك + ٢٢٥ = ٩$

ثم $٢ ك = ١٥ \pm ٣ = ١٨$ او ١٢

تنبيه. اذا وقع $-ك^{٢}$ في معادلةٍ يجب تبديل جميع علاماتها حتى تصير القوة لعليا من المجهول ايجابية (٦٥) لان $-ك^{٢}$ لا يكون جزءًا من مربع كميةٍ ثنائية فلا يمكن اتمام التربيع

(١) مفروض $-ك^{٢} + ٢ ك = د - ح$

بتبديل العلامات $ك^{٢} - ٢ ك = ح - د$

ثم $ك = ١ + \sqrt{١ + ح - د}$

(٢) مفروض $٤ك - ك^{٢} = -١٢$

بتبديل العلامات $ك^{٢} - ٤ك = ١٢$

ثم $ك = ٢ \pm \sqrt{١٦}$

١٢٨ يمكن ان يكون جزء من كميةٍ ثنآئيةٍ اصليةٍ قوةً مثل $ك^{٣} + ت$ ومربعها يكون $ك^{٦} + ٢ت ك^{٣} + ت^{٢}$ فنرى دليل المجهول في الجزء الاول مضاعف دليلهِ في الثاني. وان فقد الجزء الثالث يُستعلَم باتمام التربيع حسبما تقدم. ولنا من ذلك هذه القاعدة. وهي كل معادلةٍ فيها قوتان من المجهول فقط دليل احداهما مضاعف دليل الاخرى تحلُّ كمعادلة مربعةٍ اي باتمام التربيع

(١) مفروض $ك^{٤} - ك^{٢} = ب - ت$

باتمام التربيع $ك^{٤} - ك^{٢} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + ب - ت$

بالتجذير والمقابلة $ك^{٢} = \frac{١}{٢} \pm \sqrt{\frac{١}{٤} + ب - ت}$

بالتجذير ايضاً $ك = \pm \sqrt{\frac{١}{٢} \pm (\frac{١}{٤} + ب - ت)^{\frac{١}{٢}}}$

(٢) مفروض $ك^{٢ن} - ٤ب ك^{ن} = ت$

$ك = \pm \sqrt[ن]{٢ب \pm (٤ب^{٢} + ت)^{\frac{١}{٢}}}$

(٣) مفروض $ك + ٤\sqrt{ك} = ح - ن$

باتمام التربيع $ك + ٤\sqrt{ك} + ٤ = ح - ن + ٤$

بالتجذير والمقابلة $\sqrt{ك} = -٢ \pm \sqrt{ح - ن + ٤}$

بالترقية $ك = (-٢ \pm \sqrt{ح - ن + ٤})^{٢}$

(٤) مفروض $ك^{\frac{٢}{ن}} + ٨ك^{\frac{١}{ن}} = ت + ب$

باتمام التربيع $ك^{\frac{٢}{ن}} + ٨ك^{\frac{١}{ن}} + ١٦ = ت + ب + ١٦$

بالتجذير والمقابلة $ك^{\frac{١}{ن}} = -٤ \pm \sqrt{ت + ب + ١٦}$

بالترقية $ك = (-٤ \pm \sqrt{ت + ب + ١٦})^{ن}$

١٣٩ متى خرج للمجهول قيمةٌ وهمية (١٠٢) لا يمكن ان توجد تلك القيمة حقيقةً. مثالهُ

$ك^{٢} - ٨ك = -٣٠$ $ك = ٤ \pm \sqrt{-٤}$ و $\sqrt{-٤}$ كمية وهمية فلا توجد للمجهول قيمة. ولا بد لكل معادلة مربعة ان تكون على احدى هذه الصور الثلاث

$$(١) \quad ك^{٢} + ت\,ك = ب \qquad ك = -\frac{١}{٢}ت \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ت^{٢} + ب}$$

$$(٢) \quad ك^{٢} - ت\,ك = ب \qquad ك = \frac{١}{٢}ت \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ت^{٢} + ب}$$

$$(٣) \quad ك^{٢} - ت\,ك = -ب \qquad ك = \frac{١}{٢}ت \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ت^{٢} - ب}$$

ففي الاولى والثانية لا تكون القيمة وهميةً البتة. وتكون وهميةً في الثالثة متى كان ب اكثر من $\frac{١}{٤}ت^{٢}$ فالقيمة الوهمية تدل على فساد مسئلةٍ كما تقدم (١٠٢)

فلو قيل اقسم ٨ الى قسمين حاصلهما ٣٠ لقيل $ك \times (٨ - ك) = ٣٠$ $ك = ٤ \pm \sqrt{-٤}$ وذلك مستحيلٌ

١٤٠ للمجهول في كل معادلة مربعة قيمتان حسبما تقدم (١٣٣) وغالبًا تتعين التي يجب ان توخذ منهما بشروط المسئلة. فلو قيل اقسم ٣٠ الى قسمين حاصلهما يعدل ثمانية امثال فضلتهما لقيل اصغرهما = ك واكبرهما = ٣٠ − ك وبشروط المسئلة $ك \times (٣٠ - ك) = ٨ \times (٣٠ - ٢ك)$

$$ك = ٢٣ \pm ١٧ = ٤٠ \text{ او } ٦$$

ولكن لا يكون ٤٠ قسمًا من ٣٠ فيكون القسم الاصغر ٦ والاكبر ٢٤

١٤١ لنا طريقةٌ اخرى لحلّ المعادلات المربعة الممتزجة. وهي بالتعويض. فلنفرض $ك^{٢} = ف\,ك + ق$ وف وق معروفان. فلنفرض $ك = ى + \frac{١}{٢}ف$ ثم بالتعويض عن ك بهذه القيمة تصير المعادلة

$$ى^{٢} + ف\,ى + \frac{١}{٤}ف^{٢} = ف\,ى + \frac{١}{٢}ف^{٢} + ق$$

$$\text{ثم } ى^{٢} + \frac{١}{٤}ف^{٢} = \frac{١}{٢}ف^{٢} + ق$$

$$ى^{٢} = \frac{١}{٤}ف^{٢} + ق \qquad ى = \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ف^{٢} + ق}$$

وك $= -\frac{١}{٢}ف \pm \sqrt{\frac{١}{٤}ف^{٢} + ق}$ وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة ممتزجة كما نرى في هذه الامثلة الآتية

مفروض $ك^{٢} + ٦ك = ٩١$ ثم $ك^{٢} = ٩١ - ٦ك$

وهنا $ف = -٦$ و$ق = ٩١$ فلنا بموجب العبارة المذكورة $-٣ \pm \sqrt{٩ + ٩١}$
$= -٣ \pm ١٠ = -١٣$ او ٧

مفروض $ك^{٢} - ١٠٩ = ٢٣ - ك$
ثم $ك^{٢} = -ك + ١٣٢$ $\quad ف = -١$
ولنا $-\frac{١}{٢} \pm \sqrt{\frac{١}{٤} + ١٣٢} = -\frac{١}{٢} \pm \frac{٢٣}{٢} = ١١$ او -١٢

مفروض $ك^{٢} + ٣ك = ١٨٠$ ثم $ك^{٢} = -٣ك + ١٨٠$
$\frac{١}{٢}ف = -\frac{٣}{٢}$ ولنا $ك = -\frac{٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩}{٤} + ١٨٠} = -\frac{٣}{٢} \pm \frac{٢٧}{٢} = ١٢$
او -١٥

مفروض $٢ك^{٢} + ٣ك = ٩٠$ ثم $٢ك^{٢} = ٩٠ - ٣ك$
$ك^{٢} = -\frac{٣}{٢}ك + ٤٥$ $\quad \frac{١}{٢}ف = -\frac{٣}{٤}$ ولنا $ك = -\frac{٣}{٤} \pm \sqrt{\frac{٩}{١٦} + ٤٥}$
$= -\frac{٣}{٤} \pm \frac{٢٧}{٤} = ٦$ او $-٧\frac{١}{٢}$

امثلة

(١) $٣ك^{٢} - ٩ك - ٤ = ٨٠$ $\quad ك = ٧$ او -٤

(٢) $٤ك - \frac{٦٣ - ك}{ك} = ٤٦$ $\quad ك = ١٢$ او $-\frac{٣}{٤}$

(٣) $٤ك - \frac{١٤ - ك}{ك + ١} = ١٤$ $\quad ك = ٤$ او $-\frac{٧}{٤}$

(٤) $٥ك - \frac{٣ك - ٣}{ك - ٣} = ٢ك + \frac{٣ك - ٦}{٢}$ $\quad ك = ٤$ او -١

(٥) $\frac{١٦}{ك} - \frac{١٠٠ - ٩ك}{٤ك^{٢}} = ٣$ $\quad ك = ٤$ او $٢\frac{١}{١٢}$

(٦) $\frac{٣ك-٤}{ك-٤}+١=١٠-\frac{ك-٢}{٢}$ $ك=١٢$ او ٦

(٧) $\frac{ك+٤}{٣}-\frac{٧-ك}{ك-٣}=\frac{٤ك+٧}{٩}-١$ $ك=٢١$ او ٥

(٨) $\frac{ك^٢-١٠ك^٢+١}{ك^٢-٦ك+٩}=ك-٣$ $ك=١$ او -٢٨

(٩) $\frac{٦}{ك+١}+\frac{٢}{ك}=٣$ $ك=٢$

(١٠) $\frac{٣ك}{ك+٢}-\frac{ك-١}{٦}=ك-٩$ $ك=١٠$

(١١) $\frac{ك}{ت}+\frac{ت}{ك}=\frac{٢}{ت}$ $ك=١\pm\sqrt{١-ت^٢}$

(١٢) $ك^٤+تك^٢=ب$ $ك=\left(-\frac{ت}{٢}\pm\sqrt{ب+\frac{ت^٢}{٤}}\right)^{\frac{١}{٢}}$

(١٣) $\frac{ك^٦}{٢}-\frac{ك^٣}{٤}=-\frac{١}{٣٢}$ $ك=\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

(١٤) $٢ك^{\frac{٢}{٣}}+٣ك^{\frac{١}{٣}}=٢$ $ك=\frac{١}{٨}$

(١٥) $\frac{١}{٢}ك-\frac{١}{٣}\sqrt{ك}=٢٢\frac{١}{٦}$ $ك=٤٩$

(١٦) $٢ك^٤-ك^٢+٩٦=٩٩$ $ك=\frac{١}{٢}\sqrt{٦}$

(١٧) $(١٠+ك)^{\frac{١}{٢}}-(١٠+ك)^{\frac{١}{٤}}=٢$ $ك=٦$

(١٨) $٣ك^{٢ن}-٢ك^{ن}=٨$ $ك=\sqrt[ن]{٢}$

(١٩) $٢(١+ك-ك^٢)-\sqrt{١+ك-ك^٢}=-\frac{١}{٩}$

$ك=\frac{١}{٢}+\frac{١}{٦}\sqrt{٤١}$

(٢٠) $\sqrt[٢]{ك^٢-ت^٢}=ك-ب$ $ك=\frac{ب}{٢}\pm\sqrt{\frac{٤ت^٢-ب^٢}{١٢ب}}$

(٢١) $\frac{\sqrt{٤ك}+٢}{٤+\sqrt{ك}}=\frac{٤-\sqrt{ك}}{\sqrt{ك}}$ $ك=٤$

(٢٢) $ك^{\frac{٦}{٥}} + ك^{\frac{٣}{٥}} = ٧٥٦$ $ك = ٢٤٣$

(٢٣) $\sqrt{٢ك + ١} + ٢\sqrt{ك} = \frac{٢١}{\sqrt{٢ك + ١}}$ $ك = ٤$

(٢٤) $٢\sqrt{ك - ت} + ٣\sqrt{٢ك} = \frac{٧ت + ٥ك}{\sqrt{ك - ت}}$ $ك = ٩ت$

(٢٥) $ك + ١٦ - ٧\sqrt{ك + ١٦} = ١٠ - ٤\sqrt{ك + ١٦}$ $ك = ٩$

(٢٦) $\sqrt{ك^{٥}} + \sqrt{ك^{٣}} = ٦\sqrt{ك}$

بالقسمة على $\sqrt{ك}$ $ك^{٢} + ك = ٦$ $ك = ٢$

(٢٧) $\frac{٤ك - ٥}{ك} - \frac{٣ك - ٧}{٣ك + ٧} = \frac{٩ك + ٢٣}{١٣ك}$ $ك = ٢$

(٢٨) $\frac{٣}{٦ك - ك^{٢}} + \frac{٦}{ك^{٢} + ٢ك} = \frac{١١}{٥ك}$ $ك = ٣$

(٢٩) $(ك - ٥)^{٣} - ٣(ك - ٥)^{\frac{٣}{٢}} = ٤٠$ $ك = ٩$

(٣٠) $ك + \sqrt{ك + ٦} = ٢ + ٣\sqrt{ك + ٦}$ $ك = ١٠$

(٣١) $٢ب ك^{٢} - س ك = د$ $ك = \frac{\sqrt{٨ب د + س^{٢}} + س}{٤ب}$

(٣٢) $٤ت ك - ب ك = س$ $ك = \frac{ب + \sqrt{ب^{٢} + ١٦ت س}}{٨ت}$

(٣٣) $ك^{ن} + ك^{\frac{ت^{ن}}{ن}} = ب$ $ك = \left(\frac{ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ت^{ن}}}{٢}\right)^{\frac{١}{ن}}$

(٣٤) $ك^{٤} + ٤ك^{٢} = ١٢$ $ك = \sqrt{٢}$

(٣٥) $ك^{٦} - ٨ك^{٣} = ٥١٢$ $ك = ٣$

(٣٦) $٢ك - ٧\sqrt{ك} = ٩٩$ $ك = ٨١$

(٣٧) $ك^{٢} + ٨ك + ٣١ = ٠$ $ك = -٤ \pm \sqrt{-١٥}$

(٣٨) $ك^{٢} - ١٢ك + ٥٠ = ٠$ $ك = ٦ \pm \sqrt{-١٤}$

(٣٩) $ك - ١٦ك = -٧٠$ $ك = ٨ \pm \sqrt{-٦}$

(٤٠) $٢ك^{٢} + ١٥ = ٣ك$ $ك = \frac{٣ \pm \sqrt{-١١١}}{٤}$

(٤١) $٣ك - \frac{١}{٤}ك^{٢} = ١٠$ $ك = ٦ \pm \sqrt{-٤}$

عمليات

(١) تاجرٌ عندهُ ثوبان طولها ١١٠ اذرع وان طُرِح مربع اذرع اطولها من مقدار اذرع الاخر ٨٠ مرة يبقى ٤٠٠ فكم ذراعًا كل ثوبٍ

لنفرض ك اطولها و ١١٠ − ك الاخر

بشروط المسئلة $٤٠٠ = ٨٠ \times (١١٠ - ك) - ك^{٢}$

ك = ٦٠ اطولها ٥٠ = الاخر

(٢) سُئِل أَخَوان كم عمر كل واحدٍ منكما. فقالا مجتمع عمرينا ٤٥ سنة وحاصلها ٥٠٠ سنة. فكم عمر كلٍ منهما الجواب ٢٥ و ٢٠

(٣) اي عددين فضلتها ٤ وحاصلها ١١٧

ك = احدها ك + ٤ = الاخر

ثم $(ك + ٤) \times ك = ١١٧$ الجواب ٩ و ١٣

(٤) تاجرٌ باع ثوبًا كان قد اشتراهُ بثلاثين دينارًا ولو ضرب الثمن الذي باعهُ بهِ في الربح الذي نتج لهُ لكان الحاصل مكعب الربح. فكم كان الربح

لنفرض ك = الربح فيكون ٣٠ + ك ثمن المبيع

ثم بشروط المسئلة $ك^{٢} = (٣٠ + ك) \times ك$ الجواب ٦ دنانير

(٥) ايُّ عددين فضلتها ٣ وفضلة كعبيها ١١٧

ك = الاصغر ك + ٣ = الاكبر الجواب ٢ و ٥

(٦) ما عددان فضلتها ١٢ ومجتمع مربعيها ١٤٢٤

الجواب ٢٠ و ٣٢

(٧) ما عددان فضلتها ٧ ونصف حاصلها مع ٣٠ يعدل مربع اصغرها

ك = الاصغر ك + ٧ = الاكبر

ثم بالمسألة $\frac{\text{ك} \times (\text{ك} + ٧)}{٢} + ٣٠ = \text{ك}^{٢}$

الجواب ١٢ و١٩

(٨) رف طيور طار منهُ جذر مال نصفهِ ثم $\frac{٨}{٩}$ منهُ وبقي طايران. فكم طايرًا كان الرف

لنفرض العدد $٢\text{ك}^{٢}$ فلنا $\text{ك} + \frac{١٦\text{ك}^{٢}}{٩} + ٢ = ٢\text{ك}^{٢}$

الجواب ٧٢ طايرًا

(٩) رجلٌ اشترى قطيعًا من الغنم بثمن ٢٤٠٠ دينار. ولو زيد عدد الغنم ٨ لكان ثمن كل راس اقلّ مما كان في الحقيقة ١٠ دنانير. فكم راسًا كان ذلك القطيع

الجواب ٤٠

(١٠) رجلٌ اشترى مواشي بمبلغ ١١٤٠ دينارًا ومات منها ٨ روس ثم باع الباقي وربح في كل راس ٨ دنانير ولم يخسر شيئًا. فكم راسًا اشترى

الجواب ٣٨

(١١) زيد وعُبَيد سافرا معًا قاصدين مكانًا يبعد عنهما ٣٠٠ ميل. وكان زيدٌ يسبق عبيدًا كل ساعةٍ ميلاً فوصل قبلهُ بعشر ساعات. فكم ميلاً مشي كل واحدٍ منهما في الساعة زيد = ٦ اميال وعبيد = ٥ اميال

(١٢) اقسم ١٨ الى ضلعين حتى يكون مجتمع كعبيهما ٢٤٣

ك = احدهما $\frac{١٨}{\text{ك}}$ = الاخر

ك = ٦ اكبرهما $\frac{١٨}{٦}$ = ٣ = اصغرهما

(١٣) ايّ عددين فضلتهما ١٢٠ ونسبة اكبرهما الى اصغرهما :: الاصغر : ١٠

الجواب ٤٠ و١٦٠

(١٤) اي عددين مجتمعهما ٦ ومجتمع كعبيهما ٧٢ الجواب ٢ و٤

(١٥) اقسم ٥٦ الى قسمين يكون حاصلهما ٦٤٠ الجواب ٤٠ و١٦

(١٦) رجل اشترى اثوابًا ثمنها ٦٧٥ دينارًا. ثم باع كل ثوبٍ بثمانية واربعين دينارًا وربح مبلغًا يماثل ثمن الثوب الاصليّ. فكم ثوبًا اشترى الجواب ١٥

(١٧) رجلٌ اشترى فرسًا بمبلغٍ من المال ثم باعهُ بماية وتسعة عشر دينارًا وربح في الماية ما يماثل الثمن الاصلي فكم كان ثمنهُ

ك = الثمن فيكون ك ايضاً الربح في الماية و $\frac{\text{ك}^{٢}}{١٠٠}$ الربح كلهُ

فلنا $\text{ك} + \frac{\text{ك}^{٢}}{١٠٠} = ١١٩$ ك = ٧٠

(١٨) رجلٌ اشترى اثوابًا بمبلغ ١٨٠ دينارًا. ولو زيد ثلثة اثوابٍ لانحطَّ ثمن الثوب ثلثة دنانير. فكم ثوبًا اشترى الجواب ١٢

(١٩) تاجران تشاركا وكان راس مالهما ١٠٠ دينار. وبقيت حصة احدهما في الشركة ثلثة اشهر وحصة الاخر شهرين. ثم انفسخت الشركة فحصل لكل واحدٍ منهما من راس المال والربح ٩٩ دينارًا. فكم وضع كل واحدٍ من راس المال في الاصل

لنفرض ك = حصة الاول و ١٠٠ — ك حصة الثاني. فيكون ربح الاول ٩٩ — ك لثلثة اشهر وك — ١ = ربح الثاني لشهرين ولو بقي راس مالهِ ثلثة اشهر لكان ربحهُ $\frac{٣\text{ك} - ٣}{٢}$ ولكن الربح هو كراس المال. فلنا ك : ٩٩ — ك :: ١٠٠ — ك : $\frac{٣\text{ك} - ٣}{٢}$

ك = ٤٥ = الاول ٥٥ = الثاني

(٢٠) نزلت امراتان الى السوق ومع كل واحدةٍ منهما عددٌ من البيض خلاف ما مع الاخرى ولكن الجميع ١٠٠ بيضة. فباعت كل واحدةٍ ما معها بثمنٍ واحد. فقالت احداهما للاخرى لو كان معي من البيض قدر ما معك لاخذت ثمنهُ ١٥ غرشًا. وقالت الاخرى لو كان معي قدر ما معك لاخذت $٦\frac{٢}{٣}$ غرش. فكم بيضةً كان مع كل واحدةٍ منهما

لنفرض ما مع الاولى = ك وما مع الاخرى ١٠٠ — ك. وبما ان الاولى كانت قد باعت ١٠٠ — ك بثمن ١٥ غرشًا لنا (١٠٠ — ك) : ١٥ :: ك : $\frac{١٥\text{ك}}{١٠٠ - \text{ك}}$

والثانية كانت باعت ك بثمن $٦\frac{٢}{٣}$ غرش لنا

$$\text{ك} : (١٠٠ - \text{ك}) :: \frac{٢٠}{٣} : \frac{٢٠٠٠ - ٢٠\text{ك}}{٣\text{ك}}$$

ثم ان كل واحدةٍ اخذت مبلغًا واحدًا فلنا

$$\frac{١٥\text{ك}}{١٠٠ - \text{ك}} = \frac{٢٠٠٠ - ٢٠\text{ك}}{٣\text{ك}}$$

ك = ٤٠ = الاولى ٦٠ = الثانية

(٢١) تاجران باعا اذرعًا من قماشٍ بمبلغ ٣٥ دينارًا وباع احدهما ٣ اذرع زيادةً عن الاخر. فقال لهُ صاحبهُ لو بعتُ ما بعتَهُ لاخذتُ ٢٤ دينارًا. فقال وانا لو بعتُ ما بعتَهُ لاخذتُ $١٢\frac{١}{٢}$ ذينار. فكم ذراعًا باع كل واحدٍ منهما

ك = ما باعهُ الاول وك + ٣ = ما باعهُ الثاني. فيكون

$\frac{٢٤\text{ك}}{\text{ك}+٣}$ ثمن ك اذرع و $\frac{٢٥\text{ك} + ٧٥}{٢\text{ك}}$ ثمن ك + ٣ اذرع فلنا

$$\frac{٢٤\text{ك}}{\text{ك}+٣} + \frac{٢٥\text{ك} + ٧٥}{٢\text{ك}} = ٣٥$$

ك = ١٠ ± ٥ = ١٥ او ٥ = الاول

١٨ او ٨ = الثاني

(٢٢) سافر زيد وعُبَيد قاصدين بلدةً تبعد عنهما ١٥٠ ميلاً وكان زيدٌ يقطع من المسافة كل ساعةٍ ٣ اميالٍ زيادةً عن عُبَيد فوصل قبل عبيد بثمان ساعات وعشرين دقيقة. فكم قطع كل واحدٍ منهما في الساعة الجواب ٩ و٦

(٢٣) ايُّ عددين فضلتهما ٦ واذا اضيف ٤٧ الى مضاعف مربع الاصغر يعدل المجتمع مربع الاكبر الجواب ١٧ و١١

(٢٤) زيدٌ وعُبَيد تصدَّقا على الفقرآء كل واحدٍ منهما بمبلغ ١٢٠٠ دينار وكان الذين اعطاهم زيدٌ يزيدون اربعين نفرًا عن الذين اعطاهم عُبَيد غير ان صدقة عبيد لكل واحدٍ كانت تزيد ٥ دنانير عن صدقة زيد. فكم كان عدد الفقرآء جميعًا. زيد = ١٢٠ عبيد = ٨٠

(٢٥) ما عددان مجتمعهما ١٠ ومجتمع مربعيهما ٥٨ الجواب ٧ و٣

(٢٦) اشترك رجالٌ في شرآء بستانٍ ثمنهُ ١٧٥ دينارًا. ثم خرج اثنان من الشركة فلحق كل واحدٍ من الاخرين ١٠ دنانير زيادةً عما كان يلحقهُ لو بقي الاثنان معهم. فكم كان عددهم اولاً الجواب ٧

(٢٧) تاجرٌ اشترى اذرعًا من القماش بستين دينارًا. فاتخذ منها لنفسهِ ١٥ ذراعًا وباع الباقي باربعة وخمسين دينارًا فربح في كل ذراعٍ $\frac{١}{١٠}$ دينار. فكم ذراعًا اشترى وكم كان الثمن الجواب ٧٥ ذراعًا و$\frac{٨}{١٠}$ دينار ثمن الذراع

(٢٨) سافر زيدٌ من بلدةٍ وعمرٌو من اخرى قاصدين ان يلتقيا في مكانٍ وكان بين البلدتين ٢٤٧ ميلاً. فكان زيدٌ يقطع كل يومٍ ٩ اميال والايام التي سافرا فيها قبل التقآيهما تزيد ثلثة ايامٍ عن عدد الاميال التي كان يقطعها عمرٌو في اليوم. فكم ميلاً سافرا الجواب زيد = ١١٧ وعمرٌو = ١٣٠

(٢٩) رجلٌ اشترى ثوبين من الجوخ ثمن الذراع من الواحد يزيد ٤ دراهم عن ثمن الاخر. وكان ثمن هذا الثوب جميعه ٣٦٠ درهمًا وثمن الاخر جميعه ٣٢٠ درهمًا ولكنهُ اطول من الاول بذراعين. فكم ذراعًا كان كل واحدٍ منهما وكم ثمن الذراع منهُ الجواب الاول ١٨ ذراعًا وثمن الذراع ٢٠ درهمًا والاخر ٢٠ ذراعًا وثمن الذراع ١٦ درهمًا

(٣٠) رجلٌ اشترى ٥٤ رطلاً من الخمر الاصفر وعدة ارطال من الخمر الاسود وكان ثمن الرطل من الاول يعدل نصف ارطال الثاني وثمن الرطل من الثاني اقلّ من ثمن الرطل من الاول اربعة دراهم. ثم مزجهما وباع الرطل من المزيج بعشرة دراهم فخسر ٥٧٦ درهمًا. فكم كان ثمن الرطل من الاصفر وكم عدد ارطال الاسود الجواب الرطل من الاصفر = ١٨ درهمًا والاسود ٢٦ رطلاً

(٣١) اي عددٍ اذا طُرِح مربعهُ من ٤٠ واضيف الى جذر الباقي المالي ١٠ وضُرِب المجتمع في ٢ وانقسم الحاصل على العدد نفسهِ يخرج ٤ الجواب ٦

(٣٢) سُئِل رجلٌ عن عمرهِ فقال اذا اضيف جذرهُ المالي الى نصفهِ وطُرِح من المجتمع ١٢ لا يبقى شيءٌ. فكم كان عمرهُ الجواب ١٦

(٣٣) رجلٌ اشترى زقّين من الخمر ثمنهما ٥٨ غرشًا. وفي الواحد منهما ٥

ارطال زيادة عن الاخر وثمن الرطل اقل من ½ عدة ارطال الاصغر بغرشين فكم رطلاً في كل زقٍ وكم ثمن الرطل

الجواب الاكبر = ١٧ والاصغر = ١٢ وثمن الرطل = ٢

(٢٤) رجلٌ معهُ ٢٤ قطعة بعضها فضة وبعضها نحاس. وقيمة القطعة من الفضة تساوي غروشاً عدد قطع النحاس وقيمة القطعة من النحاس تساوي عدد قطع الفضة. وقيمة الجميع ٢١٦ غرشاً. فكم عدد القطع

الجواب الفضة = ٦ والنحاس = ١٨

(٢٥) رجلٌ اشترى عدةً من الغنم بثمانين ديناراً. ولو اخذ بهذا الثمن اكثر مما اخذ باربعة روس لانحطَّ ثمن الراس ديناراً واحداً. فكم راساً اشترى

الجواب ١٦

* * *

١٤٢ قد تتسهل الاعمال الجبرية ولا سيما حل المعادلات بواسطة التعويض عن عبارةٍ طويلة بحرفٍ واحد. وعند نهاية العمل ترجع العبارة الاصلية. فلو فُرِض $\text{ك}^{٢} - ٢\text{ت ك} = \frac{٣}{٤} + \sqrt{٨٦} - ٦٤ + \text{ح}$ تضع ب عوض الجانب الثاني فتصير $\text{ك}^{٢} - ٢\text{ت ك} = \text{ب}$ ثم $\text{ك} = \text{ت} \pm \sqrt{\text{ت}^{٢} + \text{ب}}$ ثم بترجيع العبارة الاصلية تصير $\text{ك} = \text{ت} \pm \sqrt{\text{ت}^{٢} + \frac{٣}{٤} + \sqrt{٨٦} - ٦٤ + \text{ح}}$

ولو فُرِض $\text{ت ك} - ٢\text{ك} - \text{د} = \text{ب ك} - \text{ك}^{٢} - \text{ك}$

فبالمقابلة والفك تصير $\text{ك}^{٢} + (\text{ت} - \text{ب} - ١) \times \text{ك} = \text{د}$

بوضع ح عوض (ت − ب − ١) لنا $\text{ك}^{٢} + \text{ح ك} = \text{د}$

ثم $\text{ك} = -\frac{\text{ح}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ح}^{٢}}{٤} + \text{د}}$

وبترجيع العبارة الاصلية $\text{ك} = -\frac{\text{ت} - \text{ب} - ١}{٢} \pm \sqrt{\frac{(\text{ت} - \text{ب} - ١)^{٢}}{٤} + \text{د}}$

الفصل الثاني عشر

في المسائل المشتملة على مجهولين فاكثر

١٤٢ لنفرض ك + ى = ١٤

وايضاً ك − ى = ٢

بنقل الياء فيهما لنا ك = ١٤ − ى

وك = ٢ + ى وحسب الاولية الحادية عشرة ان الاشياء المساوية لشيء واحدٍ هي متساوية

فاذاً ٢ + ى = ١٤ − ى وهي معادلة جديدة فيها مجهول واحد فقط . وقد استخرجناها من معادلتين في كل واحدةٍ منها مجهولان . ولنا من ذلك هذه القاعدة لاخراج احد المجهولين واستخراج معادلة واحدة من اثنتين . وهي ان تستعلم قيمة احد المجهولين في المعادلتين وتبنى المعادلة الجديدة من هاتين القيمتين

(١) ما عددان مجتمعهما ٢٤ والاكبر منهما بقدر الاصغر ٥ مرات

لنفرض ك = الاكبر وى = الاصغر

(١) بالشرط الاول ك + ى = ٢٤
(٢) بالشرط الثاني ك = ٥ ى
(٣) بمقابلة الياء في الاولى ك = ٢٤ − ى
(٤) بالمساواة بين (٢) و(٣) ٥ ى = ٢٤ − ى
(٥) بالمقابلة والقسمة ى = ٤

(٢) ما كميتان مجتمعهما يعدل ح وفضلة مربعيهما تعدل د

لنفرض ك = اكبرهما وى = اصغرهما

(١) بالشرط الاول ك + ى = ح
(٢) بالثاني $\text{ك}^{٢} - \text{ى}^{٢} = \text{د}$
(٣) بمقابلة يا في (٢) $\text{ك}^{٢} = \text{د} + \text{ى}^{٢}$
(٤) بالتجذير $\text{ك} = \sqrt{\text{د} + \text{ى}^{٢}}$
(٥) بمقابلة يا في (١) ك = ح − ى

(٦) بالمساواة بين (٤) و(٥) $\sqrt{د + ى^2} = ح - ى$

(٧) ولنا $ى = \frac{ح^2 - د}{2ح}$

(٢) مفروض $تك + بى = ح$

و $ك + ى = د$

مطلوب قيمة ى الجواب $ى = \frac{ح - ت د}{ب - ت}$

١٤٤ مفروض $ك = ح ى$

وايضًا $ت ك + ب ك = ى^2$

ونرى هنا قيمة ك في الاولى هي ح ى ويمكننا اذ ذاك ان نعوض عن ك في الثانية بهذه القيمة فتصيرت $ح ى + ب ح ى = ى^2$ وليس فيها سوى مجهول واحد. ولنا من ذلك هذه القاعدة الثانية لاخراج مجهولٍ. وهي ان تستعلم قيمة احد المجهولين في احدى المعادلتين وتعوض عنهُ بها في الاخرى

(٤) سفينةٌ جرت على اثر اخرى كانت قد سبقتها ٢٠ ميلاً. وكانت التابعة تجري ٨ اميال كلما جرت السابقة ٧ اميال. فكم ميلاً تجري الاولى قبل ان تدرك الاخرى

لنفرض ما تجريهِ الاولى = ك وما تجريهِ الاخرى = ى فلنا

(١) بالشروط $ك = ى + ٢٠$

(٢) بالشروط $ك : ى :: ٨ : ٧$

(٣) ثم $ى = \frac{٧}{٨} ك$

(٤) بالتعويض عن ى في (١) $ك = \frac{٧}{٨} ك + ٢٠$

(٥) ولنا من ذلك $ك = ١٦٠$

(٥) سُئِل كم عمر زيد وعُبَيد. فقيل منذ سبع سنين كان عمر زيد ثلثة امثال عمر عُبَيد. وبعد سبع سنين يكون عمرهُ مضاعف عمر عُبَيد. فكم هو عمر عُبَيد

لنفرض ك = زيد ى = عبيد

ثم ك − ٧ = زيد منذ سبع سنين

ى − ٧ = عبيد منذ سبع سنين

ك + ٧ = زيد بعد سبع سنين

ى + ٧ = عبيد بعد سبع سنين

(١) بالشرط الاول   ك − ٧ = ٣ × (ى − ٧) = ٣ ى − ٢١

(٢) بالثاني   ك + ٧ = ٢ × (ى + ٧) = ٢ ى + ١٤

(٣) بمقابلة الاولى   ك = ٣ ى − ١٤

(٤) بالتعويض عن ك في (٢)   ٣ ى − ١٤ + ٧ = ٢ ى + ١٤

(٥) ولنا من ذلك   ى = ٢١ = عمر عبيد

(٦) اي عددين نسبة اكبرهما الى اصغرهما :: ٣ : ٢ ومجتمعهما يعدل سدس حاصلهما   الجواب ١٠ و ١٥

١٤٥ مفروض   ك + ٣ ى = ث

وايضاً   ك − ٣ ى = ب

بجمع المعادلتين   ٢ ك = ث + ب

وليس فيهما سوى مجهولٍ واحد

مفروض   ٣ ك + ى = ح

وايضاً   ٢ ك + ى = د

بالطرح   ك = ح − د

فقد اخرجت ى

مفروض   ك − ٢ ى = ث

و   ك + ٤ ى = ب

بضرب الاولى في ٢   ٢ ك − ٤ ى = ٢ ث

ثم بجمع الثانية والثالثة   ٣ ك = ب + ٢ ث

فلنا من ذلك قاعدة ثالثة لاخراج مجهولٍ. وهي ان تضرب احدى المعادلات او نقسمها حتى يكون احد الاجزاء المشتملة على المجهول يعدل جزءًا من الاخرى. ثم تجمع المعادلتين او نطرح الواحدة من الاخرى حتى يُفني جزءٌ من الواحدة جزءًا من الاخرى

(٧) عسكران مجتمع انفارها ٢١١١٠ ومضاعف اكبرها مع ثلثة امثال اصغرها يعدل ٥٢٢١٩ فكم عدد اكبرها

لنفرض ك = الاكبر وى = الاصغر

(١) بالشرط الاول ك + ى = ٢١١١٠

(٢) بالثاني ٢ك + ٣ى = ٥٢٢١٩

(٣) اضرب (١) في ٣ ٣ك + ٣ى = ٦٣٣٣٠

(٤) اطرح (٢) من (٣) ك = ١١١١١

(٨) مفروض ٢ك + ى = ١٦ و٣ك − ٣ى = ٦ مطلوب قيمة ك

(١) بالفرض الاول ٢ك + ى = ١٦

(٢) بالثاني ٣ك − ٣ى = ٦

(٣) اضرب (١) في ٣ ٦ك + ٣ى = ٤٨

(٤) بجمع (٢) و(٣) ٩ك = ٥٤

ك = ٦

(٩) مفروض ك + ى = ١٤ وك − ى = ٢ مطلوب قيمة ى

الجواب ى = ٦

(١٠) في عمودٍ ذي قطعتين اذا اضيف $\frac{١}{٢}$ القطعة السفلى الى $\frac{١}{٦}$ القطعة العليا يكون المجتمع ٢٨ واذا طُرِح ٦ امثال القطعة العليا من ٥ امثال القطعة السفلى يبقى ١٢ فما هو طول العمود

لنفرض ك = القطعة السفلى ى = العليا

(١) بالشرط الاول $\frac{١}{٢}$ك + $\frac{١}{٦}$ى = ٢٨

(٢) بالثاني ٥ك − ٦ى = ١٢

(٣) بضرب (١) في ٦ ٢ك + ى = ١٦٨

(٤) بقسمة (٢) على $\frac{٥}{٦}$ك − ى = ٢

(٥) بجمع (٣) و(٤) $\text{٢ك} + \frac{٥}{٦}\text{ك} = ١٧٠$

(٦) بالجبر والجمع   ١٧ ك = ١٠٢٠

(٧) بالقسمة   ك = ٦٠ = السفلى

ثم بالتعويض عن ك في (٢)

١٢٠ + ى = ١٦٨   ى = ٤٨ = العليا

(١١) لنا ان نجد كسراً اذا اضيف واحدٌ الى صورتهِ يعدل الكسر $\frac{١}{٣}$ وان اضيف واحدٌ الى مخرجهِ يعدل الكسر $\frac{١}{٤}$

لنفرض ك = الصورة   وى = المخرج

(١) بالشرط الاول $\frac{\text{ك} + ١}{\text{ى}} = \frac{١}{٣}$

(٢) بالثاني $\frac{\text{ك}}{\text{ى} + ١} = \frac{١}{٤}$

ك = ٤ = الصورة   ى = ١٥ = المخرج

(١٢) اى عددين نسبة فضلتهما الى مجموعهما :: ٢ : ٣ ونسبة مجموعهما الى حاصلهما :: ٣ : ٥   الجواب ١٠ و٢

(١٣) ما عددان حاصل مجتمعهما في فضلتهما يعدل ٥ وحاصل مجتمع مربعيهما في فضلة مربعيهما يعدل ٦٥

لنفرض ك = الاكبر   ى = الاصغر

(١) بالشرط الاول   (ك + ى) × (ك − ى) = ٥

(٢) بالثاني $(\text{ك}^{٢} + \text{ى}^{٢}) \times (\text{ك}^{٢} - \text{ى}^{٢}) = ٦٥$

(٣) بضرب الاولى $\text{ك}^{٢} - \text{ى}^{٢} = ٥$

(٤) بقسمة (٢) على (٣) $\text{ك}^{٢} + \text{ى}^{٢} = ١٣$

(٥) بجمع (٣) و(٤) $\text{٢ك}^{٢} = ١٨$

(٦) ك = ٣   ى = ٢

(١٤) اي عددين فضلتهما ٨ وحاصلهما ٢٤٠

(١٥) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجموع مربعيهما ١٤٢٤

لنفرض اكبرهما = ك واصغرهما = ى

(١) بالشرط الاول $\text{ك} - \text{ى} = ١٢$

(٢) بالثاني $\text{ك}^{٢} + \text{ى}^{٢} = ١٤٢٤$

(٣) بمقابلة ى فى (١) $\text{ك} = \text{ى} + ١٢$

(٤) بتربيع الجانبين $\text{ك}^{٢} = \text{ى}^{٢} + ٢٤\text{ى} + ١٤٤$

(٥) بمقابلة ى٢ في (٢) $\text{ك}^{٢} = ١٤٢٤ - \text{ى}^{٢}$

(٦) بالمساواة بين (٤) و(٥) $\text{ى}^{٢} + ٢٤\text{ى} + ١٤٤ = ١٤٢٤ - \text{ى}^{٢}$

$\text{ى} = ٢٠ \qquad \text{ك} = ٣٢$

(١٦) انقسمت تركةٌ بين عدّة وَرَثة بحيث كان للاول ١٠٠ غرش وعُشر الباقي. وللثاني ٢٠٠ غرش وعُشر الباقي. وللثالث ٣٠٠ غرش وعُشر الباقي. وللرابع ٤٠٠ غرش وعُشر الباقي وهلمّ جرًّا. فوجد ان التركة قد انقسمت بينهم بالسويّة فكم كانوا وكم حصة كل واحدٍ منهم

لنفرض التركة ى وك حصة كل واحد فاذاً يكون $\frac{\text{ى}}{\text{ك}}$ عدة الورثة

فلنا حصة الاول $\text{ك} = ١٠٠ + \frac{\text{ى} - ١٠٠}{١٠}$

ويبقى $\text{ى} - \text{ك}$

فتكون حصة الثاني $\text{ك} = ٢٠٠ + \frac{\text{ى} - \text{ك} - ٢٠٠}{١٠}$

ويبقى $\text{ى} - ٢\text{ك}$

وحصة الثالث $\text{ك} = ٣٠٠ + \frac{\text{ى} - ٢\text{ك} - ٣٠٠}{١٠}$

وهلم جرًا وبطرح حصة الاول من حصة الثاني

لنا $١٠٠ - \frac{\text{ك} - ١٠٠}{١٠} = ٠$ وهكذا ان طرح الثاني من الثالث والثالث من الرابع وهلم جرًا

فلناخذ هذه المعادلة $١٠٠ - \frac{\text{ك} - ١٠٠}{١٠} = ٠$

ك = ٩٠٠ حصة كل واحد   ثم بالتعويض عن ك لنا $٩٠٠ = ١٠٠ + \frac{\text{ى} - ١٠٠}{١٠}$

ى = ٨١٠٠ التركة $\frac{\text{ى}}{\text{ك}}$ = ٩ = عدد الورثة

(١٧) اي عددين فضلتهما ١٥ ونصف حاصلهما يعدل كعب اصغرهما

الجواب ٣ و١٨

(١٨) اي عددين مجتمعهما ١٠٠ وحاصلهما ٢٠٥٩

الجواب ٧١ و٢٩

(١٩) اقسم ٣٦ الى ثلثة اقسام بحيث يزيد كل قسم على ما قبله اربعة ويكون مجتمع مربعاتها ٤٦٤   الجواب ٨ و١٢ و١٦

(٢٠) قال حمارٌ لبغلٍ لو زيد على حملي رطلٌ من حملك لكان وزنهُ مضاعف وزن حملك. فقال البغل ولو زيد على حملي رطلٌ من حملك لصار ثلثة امثال حملك. فكم رطلاً كانا حاملين

ك = البغل   ى = الحمار

لو زيد على حمل الحمار رطلٌ من حمل البغل لكان ى + ١   وبقي للبغل ك − ١ وكان حمل الحمار مضاعف حمل البغل اي ى + ١ = ٢ ك − ٢

وان زيد على حمل البغل   لنا ك + ١ = ٣ ى − ٣

ك = $\frac{٣}{٥}$٢   ى = $\frac{١}{٥}$٢

١٤٦   مفروض   ك + ى + ل = ١٢

وايضاً   ك + ٢ ى − ٢ ل = ١٠

وايضاً   ك + ى − ل = ٤

لنا ان نجد قيمة ك وى ول

بالمقابلة لنا من الاولى   ك = ١٢ − ى − ل

من الثانية   ك = ١٠ − ٢ ى + ٢ ل

من الثالثة   ك = ٤ − ى + ل

بالمساواة بين الاولى والثانية وبين الثانية والثالثة لنا

١٢ − ى − ل = ١٠ − ٢ ى + ٢ ل

وايضًا   ١٠ − ٢ ى + ٢ ل = ٤ − ى + ل

بالمقابلة لنا من الاولى   ى = ٣ ل − ٢

ومن الثانية   ى = ل + ٦

بالمساواة بين هاتين   ٣ ل − ٢ = ل + ٦   ل = ٤

فلنا من ذلك هذه القاعدة لحل مسئلة فيها ثلثة مجهولات فاكثر وهي ان تستخرج من المعادلات الثلاث معادلتين فيهما مجهولان فقط. وتستخرج من هاتين واحدة فيها مجهولٌ واحد فقط

(٢١)   مفروض (١)   ك + ٥ ى + ٦ ل = ٥٣

ايضًا (٢)   ك + ٣ ى + ٣ ل = ٣٠

ايضًا (٣)   ك + ى + ل = ١٢

المطلوب قيمة ك وى ول

(٤)   بطرح الثانية من الاولى   ٢ ى + ٣ ل = ٢٣

(٥)   بطرح (٣) من (٢)   ٢ ى + ٢ ل = ١٨

(٦)   بطرح (٥) من (٤)   ل = ٥

ثم لكي نجد ك وى نعوض عن ل بقيمتها ونحوّل المعادلات كما تقدم

فلنا في (٥) ٢ ى + ١٠ = ١٨   ى = ٤

وفي (٣)   ك + ٤ + ٥ = ١٢   ك = ٣

(٢٢)   لنا ان نجد قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

(١)   مفروض   ك + ى + ل = ١٢

(٢)   ايضًا   ك + ٢ ى + ٣ ل = ٢٠

(٣)   ايضًا   ١/٢ ك + ١/٣ ى + ل = ٦

(٤)   اضرب الاولى في ٣   ٣ ك + ٣ ى + ٣ ل = ٣٦

(٥) اطرح (٢) من (٤)   ٢ك + ى = ١٦

(٦) اطرح (٣) من (١) $\frac{٢}{٣}$ك + $\frac{١}{٢}$ى = ٦

(٧) بالجبر   ٤ك + ٣ى = ٣٦

(٨) اضرب (٥) في ٣   ٦ك + ٣ى = ٤٨

(٩) بطرح (٧) من (٨)   ٢ك = ١٢   ك = ٦

(١٠) بتحويل (٧)   ى = ٤

(١١) بتحويل (١)   ل = ٢

(٢٣) مفروض   (١)   ك + ى = ث

(٢)   ك + ل = ب

(٣)   ى + ل = س

لنا ان نجد ك وى ول

الجواب   ك = $\frac{\text{ث + ب − س}}{٢}$ ى = $\frac{\text{ث + س − ب}}{٢}$ ل = $\frac{\text{ب + س − ث}}{٢}$

(٢٤) زيد وعُبَيد وبكو تشاركوا في شرآء فرسٍ ثمنهُ مابة دينار. فلو أُخِذ ما مع زيدٍ ونصف ما مع عُبَيد كان المجتمع ثمن الفرس. او لو أُخِذ ما مع عُبَيدٍ وثلث ما مع بكرٍ لكان المجموع ثمن الفرس. او لو أُخذ ما مع بكر وربع ما مع زيد لكان المجموع ثمن الفرس. فكم كان مع كل واحدٍ منهم

لنفرض ك = زيد   ى = عبيد   ل = بكر

(١) بالشرط الاول   ك + $\frac{١}{٢}$ى = ١٠٠

(٢) بالثاني   ى + $\frac{١}{٣}$ل = ١٠٠

(٣) بالثالث   ل + $\frac{١}{٤}$ك = ١٠٠

ك = ٦٤   ى = ٧٢   ل = ٨٤

(٢٥) ثلثة رجال اشتروا كرمًا بمابة دينار. فلو أُخِذ ما مع الاول ونصف ما مع الثاني كان المجتمع ثمن الكرم. ولو أُخذ ما مع الثاني وثلث ما مع الثالث كان المجتمع ثمن الكرم. ولو أُخِذ ما مع الثالث وربع ما مع الاول كان المجتمع ثمن الكرم.

فكم دينارًا مع كل واحدًا منهم

الجواب الاول = ٦٤ الثاني = ٧٢ الثالث = ٨٤ دينارًا

(٢٦) ملك عندهُ ثلاث كتايب من العساكر احداها اتراك والثانية عرب والثالثة اعجام. فامر ان تهجم احدى الطوايف على قلعةٍ ووعد ان يعطي الجميع ٩٠١ من الدنانير غير انهُ يعطي كل نفرٍ من الطايفة الهاجمة دينارًا واحدًا ويوزع ما بقي على الطايفتين الاخريين بالمساواة. فلو هجمت الاتراك لاصاب كل نفرٍ من الاخرين نصف دينارٍ. ولو هجمت العرب لاصاب كل نفرٍ من الاخرين ثلث دينارٍ. ولو هجمت الاعجام لاصاب كل نفرٍ من الاخرين ربع دينارٍ. فكم نفرًا كان في كل طايفةٍ

لنفرض الاتراك = ك والعرب = ى والاعجام = ل

ولنفرض ك + ى + ل = س اي مجتمع الثلثة. فان هجمت الاتراك فلنا البقية = س − ك وللاتراك دينار واحد لكل نفر. وللبقية نصف دينار لكل نفر اي ك + $\frac{١}{٢}$س − $\frac{١}{٢}$ك = ٩٠١ وان هجمت العرب فلنا ى + $\frac{١}{٣}$س − $\frac{١}{٣}$ى = ٩٠١ وان هجمت الاعجام فلنا ل + $\frac{١}{٤}$س − $\frac{١}{٤}$ل = ٩٠١

ك = ٢٦٥ ى = ٥٨٣ ل = ٦٨٩

(٢٧) زيدٌ وعمرٌو وبكرٌ سافروا الى جهاتٍ مختلفة. وكان مجتمع اسفارهم ٦٢ ميلاً. وكان سفر زيد اربعة امثال سفر بكر مع مضاعف سفر عمروٍ. و١٧ مثل سفر بكر تعدل مضاعف سفر زيد مع ثلثة امثال سفر عمروٍ. فكم ميلاً سافر كل واحدٍ منهم

زيد = ٤٦ عمرو = ٩ بكر = ٧

(٢٨) لنا ان نجد قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

$\frac{١}{٢}$ك + $\frac{١}{٣}$ى + $\frac{١}{٤}$ل = ٦٢

$\frac{١}{٣}$ك + $\frac{١}{٤}$ى + $\frac{١}{٥}$ل = ٤٧

$\frac{١}{٤}$ك + $\frac{١}{٥}$ى + $\frac{١}{٦}$ل = ٣٨

الجواب ك = ٢٤ ى = ٦٠ ل = ١٢٠

(٢٩) مفروض ك ى = ٦٠٠ ك ل = ٣٠٠

ى ل = ٢٠٠ مطلوب قيمة ك ول وى

ك = ٣٠ ى = ٢٠ ل = ١٠

١٤٧ على هذه الكيفية نحلّ اربع معادلات فاكثر. اي نستخرج من الاربع ثلاثًا ومن الثلاث اثنتين وهلمّ جرًّا

(٣٠) لنا ان نجد قيمة ك وى ول ون من هذه المعادلات

اربع معادلات

(١) مفروض $\frac{١}{٢}$ ى + ل + $\frac{١}{٢}$ ن = ٨
(٢) مفروض ك + ى + ن = ٩
(٣) مفروض ك + ى + ل = ١٢
(٤) مفروض ك + ن + ل = ١٠

ثلث معادلات

(٥) بجبر الاولى ى + ٢ ل + ن = ١٦
(٦) بطرح (٢) من (٣) ل − ن = ٣
(٧) بطرح (٤) من (٣) ى − ن = ٢

معادلتان

(٨) بجمع (٥) و(٦) ى + ٣ ل = ١٩
(٩) بطرح (٧) من (٦) − ى + ل = ١

الكميات المطلوبة

(١٠) بجمع (٨) و(٩) ٤ ل = ٢٠ ل = ٥
(١١) بمقابلة (٨) ى = ١٩ − ٣ ل = ٤
(١٢) بمقابلة (٣) ك = ١٢ − ى − ل = ٣
(١٣) بمقابلة (٢) ن = ٩ − ك − ى = ٢

مطلوب ك وى ول ون

(٣١) مفروض
ن + ٥٠ = ك
ك + ١٢٠ = ٢ ى
ى + ١٢٠ = ٢ ل
ل + ١٩٥ = ٢ ن

ن = ١٠٠ ك = ١٥٠ ى = ٩٠ ل = ١٠٥

(٣٢) مطلوب عدد ذو رقمين احدهما في منزلة الآحاد والاخر في منزلة العشرات . والذي في منزلة العشرات يعدل ثلثة امثال الاخر . واذا طُرِح ١٢ من العدد نفسهُ يعدل الباقي منهُ مربع الرقم الذي في منزلة العشرات

لنفرض ك = الذي في منزلة العشرات وى = الذي في منزلة الاحاد . فوقوع ك في منزلة العشرات يزيدهُ عشرة امثال ما كان لو وقع في منزلة الاحاد . فلنا اذاً ى + ١٠ ك = العدد

وبشروط المسئلة ك = ٣ ى

وايضاً ١٠ ك + ى − ١٢ = ك^{٢}

ك = ٩٣

(٣٣) مطلوب ثلثة اعداد يكون الاول مع نصف الاخرين ٢٤ والثاني مع ثلث الاخرين ٢٤ والثالث مع ربع الاخرين ٢٤ الجواب ١٠ و٢٢ و٢٦

(٣٤) مطلوب عدد ذو رقمين مجتمعهما ١٥ واذا اضيف ٣١ الى حاصلهما تنقلب رتبة الرقمين اي ان الذي كان في منزلة الاحاد يصير في منزلة العشرات وبالعكس الجواب ٧٨

(٣٥) ايُّ عددٍ ذي رقمين اذا انقسم على حاصل رقميهِ يخرج اثنان . واذا اضيف ٢٧ الى العدد نفسهِ تنقلب رتبة رقميهِ الجواب ٣٦

(٣٦) ما عددان اذا طُرِح الاصغر من ثلثة امثال الاكبر يبقى ٣٥ واذا انقسم اربعة امثال الاكبر على ثلثة امثال الاصغر مع واحد يكون الخارج نفس العدد الاصغر الجواب ١٢ و ٤

(٣٧) ايُّ كسرٍ اذا اضيف ٢ الى صورتهِ تكون قيمتهُ $\frac{١}{٢}$ واذا طُرِح واحدٌ من مخرجهِ تكون قيمتهُ $\frac{١}{٥}$ الجواب $\frac{٤}{٢١}$

(٣٨) رجلٌ لهُ فرسان وسرجٌ قيمتهُ ١٠ دنانير . فاذا وُضِع السرج على الفرس الاول تكون قيمتهُ مضاعف قيمة الفرس الثاني . واذا وُضِع على الثاني تكون قيمتهُ اقل من قيمة الاول بثلثة عشر ديناراً . فكم قيمة الفرسين الجواب ٥٦ و٣٣ ديناراً

(٣٩) اقسم ٩٠ الى اربعة اقسامٍ بحيث اذا اضيف الى الاول ٢ وطُرِح من الثاني ٢ وضُرِب الثالث في ٢ وانقسم الرابع على ٢ تكون الاقسام كلها متساوية

لنفرض ثلثة اقسام ك وى ول فيكون الرابع ٩٠ − ك − ى − ل

فلنا ك + ٢ = ى − ٢

و ك + ٢ = ٢ل

$$\text{و ٢ل} = \frac{\text{٩٠ − ك − ى − ل}}{\text{٢}}$$

الجواب ١٨ و٢٢ و١٠ و٤٠

(٤٠) ما ثلثة اعدادٍ يكون الاول منها مع نصف مجتمع الثاني والثالث ١٢٠ والثاني مع $\frac{١}{٥}$ فضلة الثالث والاول ٧٠ ونصف مجتمع الثلثة ٩٥

(٤١) ما عددان النسبة بين فضلتهما ومجتمعهما وحاصلهما كالنسبة بين ٢ و٣ و٥ الجواب ١٠ و٢

(٤٢) رجلٌ باع ٢٠ رطلاً من الخمر الاسود و٣٠ رطلاً من الاصفر وكان ثمن الجميع ١٢٠ غرشًا. ثم باع ٣٠ رطلاً من الاسود و٢٥ رطلاً من الاصفر بالسعر الاول وبلغ ثمن الجميع في المرة الثانية ١٤٠ غرشًا. فكم كان ثمن الرطل من كل صنفٍ

الجواب الاسود = ٣ غروش والاصفر = غرشين

(٤٣) رجلٌ مزج خمرًا بماءٍ ولو زاد من كل صنفٍ ٦ ارطال لكان في المزيج ٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء. ولو نقص من كل صنفٍ ٦ ارطال لكان في المزيج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماءٍ. فكم رطلاً مزج من كل صنف

الجواب الخمر = ٧٨ والماءُ ٦٦ رطلاً

(٤٤) اي كسرٍ اذا تضاعفت صورتهُ واضيف ٧ الى مخرجهِ تكون قيمتهُ $\frac{٢}{٣}$ واذا تضاعف المخرج واضيف ٢ الى صورتهِ تكون قيمتهُ $\frac{٣}{٥}$ الجواب $\frac{٤}{٥}$

(٤٥) رجلٌ اشترى من التفاح والليمون بثلاثين غرشًا. وكان كل اربع تفاحات بغرش وكلُّ خمس ليمونات بغرش ايضًا. ثم باع نصف التفاح و$\frac{١}{٤}$ الليمون بسعر ما اشترى فبلغ الثمن ١٢ غرشًا فكم اشترى من كل صنفٍ

الجواب التفاح = ٧٢ والليمون = ٦٠

١٤٨ متى وجد $ك^{٢}$ $ى^{٢}$ او ك ى في كل جزء من المعادلتين تكونان على احدى هاتين الهيئتين $ت ك^{٢} + ب ك ى + س ى^{٢} = د$

$$ت' ك^{٢} + ب' ك ى + س' ى^{٢} = د'$$

ولحلّهما افرض $ك = ف ى$ اذًا $ك^{٢} = ف^{٢} ى^{٢}$

وبالتعويض عن $ك^{٢}$ وك في المعادلتين لنا

$$ت ف^{٢} ى^{٢} + ب ف ى^{٢} + س ى^{٢} = د \quad ثم \quad ى^{٢} = \frac{د}{ت ف^{٢} + ب ف + س}$$

$$ت' ف^{٢} ى^{٢} + ب' ف ى^{٢} + س' ى^{٢} = د' \quad ثم \quad ى^{٢} = \frac{د'}{ت' ف^{٢} + ب' ف + س'}$$

وبالمساواة بين هاتين لنا

$$\frac{د}{ت ف^{٢} + ب ف + س} = \frac{د'}{ت' ف^{٢} + ب' ف + س'}$$ اي

$(ت' د - ت د') ف^{٢} + (ب' د - ب د') ف = س د' - س' د$ وهي معادلة مربعة تُحلّ باتمام التربيع كما تقدم

(١) مفروض $٢ ك^{٢} + ٣ ك ى + ى^{٢} = ٢٠$

$$٥ ك^{٢} + ٤ ى^{٢} = ٤١$$

افرض $ك = ف ى$ ثم بالتعويض لنا

$$٢ ف^{٢} ى^{٢} + ٣ ف ى^{٢} + ى^{٢} = ٢٠ \qquad ى^{٢} = \frac{٢٠}{٢ ف^{٢} + ٣ ف + ١}$$

$$٥ ف^{٢} ى^{٢} + ٤ ى^{٢} = ٤١ \qquad ى^{٢} = \frac{٤١}{٥ ف^{٢} + ٤}$$

ثم بالمساواة $\frac{٢٠}{٢ ف^{٢} + ٣ ف + ١} = \frac{٤١}{٥ ف^{٢} + ٤}$

$$٦ ف^{٢} - ٤١ ف = - ١٣ \quad ف = \frac{١٣}{٢} \text{ او } \frac{١}{٣}$$

ثم بالتعويض عن ف لنا

$$ف = \frac{١}{٣} \quad ى^{٢} = \frac{٤١}{٥ ف^{٢} + ٤} = \frac{٤١}{\frac{٥}{٩} + ٤} = \frac{٣٦٩}{٤١} = ٩$$

$$ى = ٣ \quad ك = ف ى = \frac{١}{٣} \times ٣ = ١$$

(٢) ما عددان اذا ضُرِب مجتمعهما في اكبرهما يحصل ٧٧ واذا ضُرِبت فضلتهما في اصغرهما يحصل ١٢

لنفرض $ك$ = اكبرهما و $ى$ = اصغرهما

فلنا $ك^{٢} + ك ى = ٧٧$

و $ك ى - ى^{٢} = ١٢$

لنفرض $ك = ف ى$ فلنا $ف^{٢} ى^{٢} + ف ى^{٢} = ٧٧$ $ى^{٢} = \frac{٧٧}{ف^{٢} + ف}$

وايضاً $ف ى^{٢} - ى^{٢} = ١٢$ $ى^{٢} = \frac{١٢}{ف - ١}$

بالمساواة $\frac{٧٧}{ف^{٢} + ف} = \frac{١٢}{ف - ١}$ $ف = \frac{١١}{٣٠}$ او $\frac{٧}{٤}$

$ى = ٤$ $ك = ٧$

(٣) اي عددين فضلة مربعيهما ٥٦ ومجتمع مربّع اصغرهما مع $\frac{١}{٢}$ حاصلهما ٤٠ الجواب ٩ و٥

(٤) اي عددين ثلثة امثال مربع اكبرهما مع مضاعف مربع اصغرهما = ١١٠ ونصف حاصلهما مع مربّع الاصغر = ٤ الجواب ٦ و١

١٤٩ متى ترقّى المجهولان الى قوةٍ واحدة لا تنحلُّ المعادلة حسبما تقدم بل تُستَعمل طريقةٌ اخرى نوضحها هنا وعليها تنحلُّ كل مسيألةٍ واقعة تحت هذه القضية . وهي . مفروض مجتمع عددين ومجتمع القوة النونية منهما لنا ان نجد العددين على شرط ان لا تتجاوز القوة التاسعة

مفروضٌ كميتان اكبرهما $ك$ واصغرهما $ى$

مفروض ايضا $ك + ى = ٢ س$ $ك - ى = ٢ ل$

ثم بالجمع $ك = س + ل$ وبالطرح $ى = س - ل$

ثم لنفرض $ك^{٢} + ى^{٢} = ت$ $ك^{٣} + ى^{٣} = ب$

$ك^{٤} + ى^{٤} = ر$ $ك^{٥} + ى^{٥} = د$ وهلمَّ جرّاً فنجد قيمة $ك$ و $ى$ في اجزآء من المعلومات $ت$ $ب$ $ر$ $د$ $س$ على هذا الاسلوب

(١) $ك^{٢} = (س + ل)^{٢} = س^{٢} + ٢ س ل + ل^{٢}$

$ى^{٢} = (س - ل)^{٢} = س^{٢} - ٢ س ل + ل^{٢}$

بالجمع $ك^{٢} + ى^{٢}$ أي $ت = ٢ س^{٢} + ٢ ل^{٢}$ $ل^{٢} = \frac{ت - ٢ س^{٢}}{٢}$

$ل = \sqrt{\frac{ت - ٢ س^{٢}}{٢}}$ فلنا اذاً قيمة ك وى اي $ك = س + \sqrt{\frac{ت - ٢ س^{٢}}{٢}}$.

$ى = س - \sqrt{\frac{ت - ٢ س^{٢}}{٢}}$

(٢) $ك^{٣} = (س + ل)^{٣} = س^{٣} + ٣ س^{٢} ل + ٣ س ل^{٢} + ل^{٣}$

$ى^{٣} = (س - ل)^{٣} = س^{٣} - ٣ س^{٢} ل + ٣ س ل^{٢} - ل^{٣}$

$ك^{٣} + ى^{٣}$ اي $ب = ٢ س^{٣} + ٦ س ل^{٢}$

$ل^{٢} = \frac{ب - ٢ س^{٣}}{٦ س}$ $ل = \sqrt{\frac{ب - ٢ س^{٣}}{٦ س}}$

فلنا قيمة ك وى بالتعويض اي

$ك = س + \sqrt{\frac{ب - ٢ س^{٣}}{٦ س}}$ $ى = س - \sqrt{\frac{ب - ٢ س^{٣}}{٦ س}}$

(٣) $ك^{٤} = (س + ل)^{٤} = س^{٤} + ٤ س^{٣} ل + ٦ س^{٢} ل^{٢} + ٤ س ل^{٣} + ل^{٤}$

$ى^{٤} = (س - ل)^{٤} = س^{٤} - ٤ س^{٣} ل + ٦ س^{٢} ل^{٢} - ٤ س ل^{٣} + ل^{٤}$

$ك^{٤} + ى^{٤}$ اي $ر = ٢ س^{٤} + ١٢ س^{٢} ل^{٢} + ٢ ل^{٤}$ وهي معادلة مربعة يُستعلَم منها قيمة ل كما تقدم ثم يُعوَّض بها عن ك وى

(٤) $ك^{٥} = (س + ل)^{٥} = س^{٥} + ٥ س^{٤} ل + ١٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ س^{٢}$
$ل^{٣} + ٥ س ل^{٤} + ل^{٥}$

$ى^{٥} = (س - ل)^{٥} = س^{٥} - ٥ س^{٤} ل + ١٠ س^{٣} ل^{٢} - ١٠ س^{٢} ل^{٣} +$
$٥ س ل^{٤} - ل^{٥}$ $ك^{٥} + ى^{٥}$ اي $د = ٢ س^{٥} + ٢٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ س ل^{٤}$ وهي معادلة مربعة تُستعلَم منها قيمة ل ثم قيمة ك وى كما تقدم

١٥٠ مفروض $ك + ى = ٢ س$ و$ك - ى = ٢ ل$

ثم لنفرض $\frac{ك}{ى}+\frac{ى}{ك}=تَ$ $\frac{ك^{٢}}{ى}+\frac{ى^{٢}}{ك}=بَ$

$\frac{ك^{٣}}{ى}+\frac{ى^{٣}}{ك}=رَ$ $\frac{ك^{٤}}{ى}+\frac{ى^{٤}}{ك}=دَ$

ثم بواسطة المعادلات المتقدمة (١٤٩) نجد قيمة ك وى في اجزاء من المعلومات س تَ بَ رَ دَ

(١) $\frac{ك}{ى}+\frac{ى}{ك}=تَ$ $ك^{٢}+ى^{٢}=تَ ك ى=تَ\times(س+ل)\times(س-ل)=تَ\times(س^{٢}-ل^{٢})$

وحسب (١٤٩) (١) لنا $ك^{٢}+ى^{٢}=٢س^{٢}+٢ل^{٢}$

فاذاً $تَ س^{٢}-تَ ل^{٢}=٢س^{٢}+٢ل^{٢}$

$$ل^{٢}=\frac{(تَ-٢)س^{٢}}{تَ+٢} \qquad ل=\sqrt{\frac{(تَ-٢)س^{٢}}{تَ+٢}}$$

ثم $ك=س+\sqrt{\frac{(تَ-٢)س^{٢}}{تَ+٢}}$

$$ى=س-\sqrt{\frac{(تَ-٢)س^{٢}}{تَ+٢}}$$

(٢) $\frac{ك^{٢}}{ى}+\frac{ى^{٢}}{ك}=بَ$ $ك^{٣}+ى^{٣}=بَ ك ى=بَ(س^{٢}-ل^{٢})$

حسب (١٤٩) (٢) لنا $ك^{٣}+ى^{٣}=٢س^{٣}+٦س ل^{٢}$ اي $بَ(س^{٢}-ل^{٢})=٢س^{٣}+٦س ل^{٢}$

ثم $ل^{٢}=\frac{(بَ-٢س)س^{٢}}{بَ+٦س}$ $ل=\sqrt{\frac{(بَ-٢س)س^{٢}}{بَ+٦س}}$

$ك=س+\sqrt{\frac{(بَ-٢س)س^{٢}}{بَ+٦س}}$ $ى=س-\sqrt{\frac{(بَ-٢س)س^{٢}}{بَ+٦س}}$

(٣) $\frac{ك^{٣}}{ى}+\frac{ى^{٣}}{ك}=رَ$ $ك^{٤}+ى^{٤}=رَ ك ى=رَ(س^{٢}-ل^{٢})$

ثم حسب (١٤٩) (٣) لنا

$ك^{٤}+ى^{٤}=٢س^{٤}+١٢س^{٢}ل^{٢}+٢ل^{٤}$ اذًا

$رَ(س^{٢}-ل^{٢})=٢س^{٤}+١٢س^{٢}ل^{٢}+٢ل^{٤}$ وهي معادلة مربعة تستعلم منها قيمة ل وكذلك قيمة ك وى حسبما تقدم

(٤) $\frac{ك^{٤}}{ى}+\frac{ى^{٤}}{ك}=دَ$ $ك^{٥}+ى^{٥}=دَ\,ك\,ى=دَ(س^{٢}-ل^{٢})$

وحسب (١٤٩) (٤) لنا $ك^{٥}+ى^{٥}=٢س^{٥}+٢٠س^{٣}ل^{٢}+١٠س\,ل^{٤}$

اذًا $٢س^{٥}+٢٠س^{٣}ل^{٢}+١٠س\,ل^{٤}=دَ(س^{٢}-ل^{٢})$ وهي معادلة مربعة تستعلم منها قيمة ل كما تقدم

١٥١ مفروض $ك+ى=س$ $ك\,ى=ف$

فنجد قيمة اية قوةٍ فُرِضَت من ك وى في اجزاءه من المعلومتين س وف هكذا

(١) $ك^{٢}+٢ك\,ى+ى^{٢}=س^{٢}$

$ك^{٢}+ى^{٢}=س^{٢}-٢ك\,ى=س^{٢}-٢ف$

(٢) $(ك^{٢}+ى^{٢})\,(ك+س)=(س^{٢}-٢ف)\times س$

$ك^{٣}+ى^{٣}+ك\,ى\,(ك+ى)=س^{٣}-٢ف\,س$ اي $ك^{٣}+ى^{٣}+ف\,س=س^{٣}-٢ف\,س$

(٣) $(ك^{٣}+ى^{٣})(ك+ى)=(س^{٣}-٣ف\,س)\,س$

$ك^{٤}+ى^{٤}+ك\,ى\,(ك^{٢}+ى^{٢})=س^{٤}-٣ف\,س^{٢}$

اي $ك^{٤}+ى^{٤}+ف\,(س^{٢}-٢ف)=س^{٤}-٣ف\,س^{٢}$

اي $ك^{٤}+ى^{٤}=س^{٤}-٤ف\,س^{٢}+٢ف^{٢}$

(٤) $(ك^{٤}+ى^{٤})(ك+ى)=(س^{٤}-٤ف\,س^{٢}+٢ف^{٢})\,س$

اي $ك^{٥}+ى^{٥}+ك\,ى\,(ك^{٣}+ى^{٣})=س^{٥}-٤ف\,س^{٣}+٢ف^{٢}س$

اي $ك^{٥}+ى^{٥}+ف\,(س^{٣}-٣ف\,س)=س^{٥}-٤ف\,س^{٣}+٢ف^{٢}س$

$ك^{٥}+ى^{٥}=س^{٥}-٥ف\,س^{٣}+٥ف^{٢}س$

ومطلقًا $ك^{ن}+ى^{ن}=س^{ن}-ن\,ف\,س^{ن-٢}+ن\frac{(ن-٣)}{٢}ف^{٢}س^{ن-٤}$ الى اخره

مثال (١) ما عَدَدان مجتمعهما ٦ ومجتمع قوّتيهما الخامستين ١٠٥٦
انظر (١٤٩) (٤)

س = ٣ د = ١٠٥٦ فلنا لكي نجد قيمة ل

٢ س^{٥} + ٢٠ س^{٣} ل^{٢} + ١٠ س ل^{٤} = د اي

٤٨٦ + ٥٤٠ ل^{٢} + ٣٠ ل^{٤} = ١٠٥٦

ل^{٤} + ١٨ ل^{٢} = ١٩ ل = ١

ك = س + ل = ٣ + ١ = ٤ ى = س − ل = ٣ − ١ = ٢

(٢) ما عددان مجتمعهما ١٨ ومربّع الاكبر على الاصغر مع مربع الاصغر على الاكبر = ٢٧

انظر (١٥٠) (٢) س = ٩ بَ = ٢٧

$$ل = \sqrt{\frac{(بَ - ٢ س) س^{٢}}{بَ + ٦ س}} = \sqrt{\frac{٩ \times ٨١}{٢٧ + ٥٤}} = \sqrt{٩} = ٣$$

ك = س + ل = ٩ + ٣ = ١٢ ى = س − ل = ٩ − ٣ = ٦

(٣) عددان مجتمعهما ٥ وحاصلهما ٦ فما هو مجتمع قوتيهما الرابعتين
انظر (١٥١) (٣)

ك^{٤} + ى^{٤} = س^{٤} − ٤ ف س^{٢} + ٢ ف^{٢} = ٦٢٥ − ٦٠٠ + ٧٢ = ٩٧

١٥٢ متى كانت المعادلات الناتجة من مسئلةٍ اكثر من عدد المجهولات المتضمنة فيها تكون بعضها اما متناقضة واما فضولاً. فمثال المتناقضة ٢ ك = ٦٠ $\frac{١}{٢}$ ك = ٣٠ لان بالاولى ك = ٣٠ وبالثانية ك = ٤٠ ولو غيّرنا الثانية حتى تصير $\frac{١}{٢}$ ك = ١٠ لكانت فضولاً لان قيمة ك تُستعلَم بدونها. وان كان عدد المعادلات اقلّ من عدد المجهولات في المسئلة تكون المسئلة سيالة اي اجوبتها كثيرة. وسياتي الكلام على بعض انواع هذه المسائل في محلهِ

١٥٣ في حلّ المسائل المتضمنة عدة مجاهيل. للتعلم بابٌ واسعٌ لاستعمال فطنتهِ في اختراع طرقٍ لتسهيل العمل. وهذه الطرق لا تنحصر في قواعد معلومة

فلو فُرِض (١) م + ك + ى = ١٣
(٢) م + ك + ل = ١٧
(٣) م + ى + ل = ١٨
(٤) ك + ى + ل = ٢١

فلنفرض مجتمع المجاهيل اي ك + ى + م + ل = س
ثم في الاولى تجد الجميع إلاَّ ل اي س − ل = ١٣
في الثانية تجد الجميع إلاَّ ى اي س − ى = ١٧
في الثالثة الجميع الا ك اي س − ك = ١٨
في الرابعة الجميع الاَّ م اي س − م = ٢١
بالجمع ٤ س − ل − ى − ك − م = ٦٩
اي ٤ س − (ل + ى + ك + م) = ٦٩
اي ٤ س − س = ٦٩ ٣ س = ٦٩ س = ٢٣

ثم بالتعويض ٢٣ − ل = ١٣ ل = ١٠
٢٣ − ى = ١٧ ى = ٦
٢٣ − ك = ١٨ ك = ٥
٢٣ − م = ٢١ م = ٢

١٥٤ في ما تقدم استخدمنا المعادلات لحلّ مسائل عملية . وهي تُستَعمَل ايضًا في برهان النظريات كما ترى هنا

نظرية اولى . اربعة امثال حاصل كميتين يعدل مربع مجتمعهما الا مربع فضلتهما

لنفرض اكبرهما = ك اصغرهما = ى
مجتمعهما = س فضلتهما = د

(١) بالشروط ك + ى = س (٢) ك − ى = د
(٣) بالجمع ٢ ك = س + د
(٤) بالطرح ٢ ى = س − د
(٥) بضرب (٣) في (٤) ٤ ك ى = س^{٢} − د^{٢}

نظرية ثانية. مجموع مربَّعي كميتين يعدل مربع فضلتهما مع مضاعف حاصلهما

لنفرض ك = الاكبر ى = الاصغر
د = فضلتهما ف = حاصلهما

(١) بالشروط $ك - ى = د$ (٢) $ك ى = ف$

(٢) بتربيع الاولى $ك^{٢} - ٢ ك ى + ى^{٢} = د^{٢}$

(٤) بضرب الثانية في ٢ $٢ ك ى = ٢ ف$

(٥) بجمع هاتين $ك^{٢} + ى^{٢} = د^{٢} + ٢ ف$

نظرية ثالثة. نصف فضلة كميتين مع نصف مجتمعهما يعدل اكبرهما. ونصف مجتمعهما الا نصف فضلتهما يعدل اصغرهما

لنفرض (١) $ك + ى = س$ (٢) $ك - ى = د$

(٢) بالقسمة على ٢ $\frac{١}{٢} ك + \frac{١}{٢} ى = \frac{١}{٢} س$

(٤) ايضًا $\frac{١}{٢} ك - \frac{١}{٢} ى = \frac{١}{٢} د$

(٥) بجمع هاتين $ك = \frac{١}{٢} س + \frac{١}{٢} د$

(٦) بطرحها $ى = \frac{١}{٢} س - \frac{١}{٢} د$

وقس على ذلك نظايرهُ

* * *

الفصل الثالث عشر

في التناسب والنسبة

١٥٥ التناسب هو التفاوت بين كميتين باعتبار المقدار. ولا يقع الا بين الكميات المتشابهة اي بين عددٍ وعددٍ او بين خطٍ وخطٍ او بين مجسم ومجسم او بين سطح وسطح وهلمَّ جرًّا لانهُ لا يمكن مناسبة خطوط على ارطال ولا سطوح على اقسام الوقت. واذا اعتُبِرت زيادة كميةٍ على اخرى فهو التناسب الحسابي واذا اعتُبِرت

مرار وجود احداهما في الاخرى فهو التناسب الهندسي

١٥٦ التناسب الحسابي حسبما تقدم هو الفضلة بين كميتين او عدة كميات. والكميات نفسها هي اجزآء التناسب. فالتناسب الحسابي بين ٥ و٣ هو ٢ ويُدَل عليهِ بوضع علامة الطرح بين الكميتين هكذا ٥ − ٢ او بوضع نقطتين هكذا ٥ .. ٢ فان ضُرِبت اجزآء تناسب حسابي في كميةٍ او انقسمت عليها يُضرَب التناسب او ينقسم على تلك الكمية مثالهُ لو فُرِض ث − ب = ر

بضرب الجانبين في ح لنا ح ث − ح ب = ح ر

وبالقسمة على ح $\frac{ث}{ح} - \frac{ب}{ح} = \frac{ر}{ح}$

اذا اضيفت اجزآء تناسبٍ الى اجزآء تناسبٍ اخر كل جزء الى نظيرهِ او طُرِحَت اجزآء الواحد من اجزآء الاخر يعدل تناسبُ المجتمع او الفضلة مجتمعَ التناسبين او فضلتهما. مثالهُ ليكن $\left.\begin{array}{l} ث - ب \\ د - ح \end{array}\right\}$ تناسبين ثم

(ث + د) − (ب + ح) = (ث − ب) + (د − ح) لان كل واحدٍ من الجانبين = ث + د − ب − ح وكذلك (ث − د) − (ب − ح) = (ث − ب) − (د − ح) لان كل واحدٍ من الجانبين = ث − د − ب + ح

التناسب الحسابي بين ١١ و٤ = ٧

التناسب الحسابي بين ٥ و٣ = ٢

وتناسب المجتمع ١٦ و٦ = ١٠ = مجتمع التناسبين

وتناسب الفضلة ٦ و٢ = ٤ = فضلة التناسبين

١٥٧ التناسب الهندسي هو المدلول عليهِ بالخارج من قسمة كميةٍ على اخرى. فالتناسب الهندسي بين ٨ و٤ هو $\frac{٨}{٤}$ = ٢ وبين ث وب هو $\frac{ث}{ب}$ وبين د + ح وب + س هو $\frac{د + ح}{ب + س}$ ويُدَلُّ عليهِ ايضاً بنقطتين بين الكميتين. مثالهُ ث : ب و١٢ : ٤ ويقال للكميتين معاً زوجٌ وتُسَمَّى الاولى سابقاً والثانية تالياً

١٥٨ في كل تناسبٍ ثلثة اقسامٍ وهي السابق والتالي والتناسب الواقع بينهما. وان فُرِض اثنان منها يُستعلَم منهما الثالث هكذا

لنفرض السابق = ت والتالي = س والتناسب = ر ثم حسب الحد المذكور آنفًا $ر = \frac{ت}{س}$ اي التناسب يعدل الخارج من قسمة السابق على التالي بالجبر ت = س ر اي السابق يعدل حاصل التالي في التناسب. وبالقسمة على ر $س = \frac{ت}{ر}$ اي التالي يعدل الخارج من قسمة السابق على التناسب

فرعٌ اول في زوجين ان كان السابقان متساويين والتاليان متساويين ايضًا يكون التناسبان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ٧)

فرعٌ ثانٍ في زوجين ان كان التناسبان متساويين والسابقان متساويين يكون التاليان متساويين. وان كان التناسبان متساويين والتاليان متساويين يكون السابقان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ٩)

١٥٩ اذا تساوى السابق والتالي يكون التناسب واحدًا ويقال لهُ تناسب المساواة. مثالهُ ٣×٦ : ١٨ واذا كان السابق اكبر من التالي يكون التناسب اكثر من واحد. مثالهُ ١٨ : ٦ = ٣ ويسمى تناسبًا اعظم. واذا كان السابق اصغر من التالي يكون التناسب اقلّ من واحد. مثالهُ ٢ : ٣ = $\frac{٢}{٣}$ ويسمي تناسبًا اصغر. اما التناسب بالقلب او التناسب المكفوء فهو تناسب مكفوء كميتين. فالتناسب بالقلب بين ٦ و٣ هو $\frac{١}{٦} : \frac{١}{٣}$ اي $\frac{١}{٦} \div \frac{١}{٣}$ والتناسب المستقيم بين ت وب هو $\frac{ت}{ب}$ وبالقلب هو $\frac{١}{ت} : \frac{١}{ب}$ اي $\frac{١}{ت} \div \frac{١}{ب} = \frac{١}{ت} \times \frac{ب}{١} = \frac{ب}{ت}$ اي الخارج من قسمة التالي على السابق. فيُدَلُّ على التناسب المكفوء اما بقلب الكسر الدال على المستقيم واما بقلب رتبة السابق والتالي. فتناسب ت : ب بالقلب هو ب : ت

١٦٠ التناسب المركَّب هو التناسب بين حواصل اجزآ تناسبين فاكثر اذا ضُرِب كل جزء من الواحد في نظيرهِ من الاخر. مثالهُ

تناسب ٦ : ٢ = ٣

وتناسب ١٢ : ٤ = ٣

والمركب منهما هو ٧٢ : ١٢ = ٦

وهكذا المركب من ث : ب وس : د وح : ى هو ث س ح : ب د ى = $\frac{\text{ث س ح}}{\text{ب د ى}}$

فرعٌ كل تناسبٍ مركبٍ يعدل حاصل التناسبات البسيطة التي تركب منها. مثالهُ تناسب ث : ب = $\frac{\text{ث}}{\text{ب}}$ وس : د = $\frac{\text{س}}{\text{د}}$ وح : ى = $\frac{\text{ح}}{\text{ى}}$ والمركب هو ث س ح : ب د ى = $\frac{\text{ث س ح}}{\text{ب د ى}}$ = حاصل الكسور الدالة على التناسبات البسيطة

١٦١ في عدَّة تناسباتٍ اذا كان تالي الاول سابقَ الثاني وتالي الثاني سابقَ الثالث وهلمَّ جرًّا يكون تناسب السابق الاول الى التالي الاخير مماثلاً للتناسب المركب من التناسبات كلها. مثالهُ

ث : ب ب : س س : د د : ج

فالمركب من هذه التناسبات هو $\frac{\text{ث ب س د}}{\text{ب س د ج}}$ وهو يعدل $\frac{\text{ث}}{\text{ج}}$ اي تناسب السابق الاول الى التالي الاخير

١٦٢ التناسب المركب من مربَّع اجزآء تناسبٍ بسيطٍ يُسمَّى تناسبًا ماليًا. فلو فُرِض ث : ب لكان تناسبهما الماليُّ $\text{ث}^{٢} : \text{ب}^{٢}$ والكعبيُّ هو المركب من تكرار ثلثة تناسبات بسيطة اي $\text{ث}^{٣} : \text{ب}^{٣}$ وتناسب الجزر المالى هو $\sqrt{\text{ت}} : \sqrt{\text{ب}}$ والجذر الكعبي $\sqrt[٣]{\text{ت}} : \sqrt[٣]{\text{ب}}$ فالتناسب البسيط بين ٦ و٢ هو ٣ اي ٦ : ٢ = ٣

ومضاعفهُ ١٢ : ٢ = ٦

وثلثة امثالهِ ١٨ : ٢ = ٩

والماليُّ $٦^{٢} : ٢^{٢} = ٩$

والكعبيُّ $٦^{٣} : ٢^{٣} = ٢٧$

١٦٣ قد راينا ان التناسب يُدَل عليهِ بكسرٍ. ورابنا في فصل الكسور ان

ضرب صورة كسرٍ هو كضرب قيمتهِ وقسمة صورتهِ كقسمة قيمتهِ (٤٥) فاذا ضُرِب سابق زوجٍ في كميةٍ ما يُضرَب التناسب في تلك الكمية. وبقسمة السابق يُقسَم التناسب.

مثالهُ ٦ : ٢ = ٣ و٢٤ : ٢ = ١٢ ث : ب = $\frac{ث}{ب}$ ن ث : ب = $\frac{ن ث}{ب}$

فرعٌ اذا بقي التالي على حالتهِ فكلما زاد السابق زاد التناسب وبالقلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ وق ١٠)

١٦٤ ضربُ تالي زوجٍ كقسمة التناسب. وقسمة التالي كضرب التناسب.

مثالهُ ١٢ : ٢ = ٦ و١٢ : ٤ = ٣ ث : ب = $\frac{ث}{ب}$ وث : ن ب = $\frac{ث}{ن ب}$

فرع اذا بقي السابق على حالتهِ فكلما زاد التالي صغر التناسب وبالقلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ وق ١٠)

ثم انهُ قد اتّضح مما تقدم ان ضرب صابق زوجٍ هو كقسمة التالي. وقسمة السابق كضرب التالي. مثالهُ

٨ : ٤ = ٢ بضرب السابق في اثنين ١٦ : ٤ = ٤

بقسمة التالي على اثنين ٨ : ٢ = ٤

فرع اذا انفكّ سابقٌ او تالٍ الى ضلعين فاكثر يمكن نقل ضلعٍ فاكثر من احدهما الى الاخر بدون تغيير التناسب. مثالهُ

٣ × ٦ : ٩ = ٢ ٦ : $\frac{٩}{٣}$ = ٢ $\frac{م ث}{ى}$: ب = $\frac{م ث}{ى}$ ÷ ب = $\frac{م ث}{ب ى}$ = م ث : ب ى

وان ضرب السابق والتالي كلاهما في كميةٍ واحدة او انقسما عليهما فلا يتغير التناسب (اقليدس ك ٥ ق ١٥) مثالهُ

٨ : ٤ = ٢ بالضرب في ٢ ١٦ : ٨ = ٢

وبالقسمة على ٢ ٤ : ٢ = ٢ ث : ب = $\frac{ث}{ب}$ م ث : م ب = $\frac{م ث}{م ب}$ = $\frac{ث}{ب}$

فرعٌ التناسب بين كسرين لهما مخرجٌ مشترك هو مثل الذي بين صورتيهما.

فتناسب $\frac{ت}{ن}:\frac{ب}{ن}$ هو ت : ب

فرعٌ ثانٍ التناسب بين كسرين لهما صورةٌ مشتركة هو مثل التناسب بالقلب بين مخرجيهما. مثالهُ $\frac{ت}{م}:\frac{ت}{ن}$ هو $\frac{١}{م}:\frac{١}{ن}$ اي ن : م

فاذاً لكي نجد التناسب بين كسرين في صحيحٍ نضربهما في المخرجين.

مثالهُ $\frac{ت}{ب}$ $\frac{س}{د}$ فبالضرب في ب د لنا $\frac{ت ب د}{ب}$ $\frac{ب س د}{د}$ اي ت د : ب س

١٦٥ اذا تركب تناسب اعظم (١٥٩) مع تناسبٍ اخر يزيده. مثالهُ

لنفرض التناسب الاعظم ١ + ن : ١

وتناسباً اخر ت : ب

فالمركب منهما ت + ت ن : ب وهو اعظم من ت : ب

ثم اذا تركب تناسب اصغر مع تناسبٍ اخر ينقصهُ

لنفرض التناسب الاصغر ١ − ن : ١

وتناسباً اخر ت : ب

بالتركيب ت − ت ن : ب

وهو اصغر من ت : ب

١٦٦ اذا اضيف الى جزءي زوجٍ او طُرِح منهما كميتان تناسبهما مثل تناسب الزوج المذكور يكون بين المجموعين او الباقين نفس ذلك التناسب (اقليدس ك ٥ ق ٥ و ٦)

مفروض تناسب ت : ب مثل س : د ثم ت + س : ب + د = ت : ب او س : د

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب}=\frac{س}{د}$

(٢) بالجبر ت د = ب س

(٣) اضيف س د الى الجانبين ت د + س د = ب س + س د

(٤) بالقسمة على د $ت + س = \frac{ب س + س د}{د}$

(٥) بالقسمة على ب + د $\frac{ت + س}{ب + د} = \frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

وكذلك $\frac{ت - س}{ب - د} = \frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

(١) لان بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$

(٢) وبالجبر ت د = ب س

(٣) بطرح س د من الجانبين ت د − س د = ب س − س د

(٤) بالقسمة على د $ت - س = \frac{ب س - س د}{د}$

(٥) بالقسمة على ب − د $\frac{ت - س}{ب - د} = \frac{س}{د} = \frac{ت}{ب}$

مفروض ١٥ : ٥ = ٣

وايضًا ٩ : ٣ = ٣

بجمع اجزاء الزوجين ١٥ + ٩ : ٥ + ٣ = ٣

بالطرح ١٥ − ٩ : ٥ − ٣ = ٣

وهكذا مهما تعددت الازواج . مثلاً

١٢ : ٦ = ٢
١٠ : ٥ = ٢
٨ : ٤ = ٢
٦ : ٣ = ٢

بالجمع (١٢ + ١٠ + ٨ + ٦) : (٦ + ٥ + ٤ + ٣) = ٢ (اقليدس ك ٥ ق ١ و١٢)

١٦٧ تناسب اعظم بصغر باضافة كمية واحدة الى جزءيهِ. مثالهُ اذا فُرِض ت + ب : ت اي $\frac{ت + ب}{ت}$ واذا اضيف ك الى الجزءين فلنا $\frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$

ثم بالتحويل الى مخرجٍ مشترك يصير الاول $\frac{ت^{٢} + ت ب + ت ك + ب ك}{ت (ت + ك)}$ والثاني $\frac{ت^{٢} + ت ب + ت ك}{ت (ت + ك)}$ فالصورة الثانية اقلُّ من الاولى ومن ثَمَّ صغر التناسب

تناسب اصغر يزاد باضافة كميةٍ واحدة الى جزءيهِ

مفروض ت − ب : ت اي $\frac{ت - ب}{ت}$ ثم باضافة ك الى الجزءين لنا ت − ب + ك : ت + ك اي $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ وبالتحويل الى مخرجٍ مشترك يصير الاول $\frac{ت^{٢} - ت ب + ت ك - ب ك}{ت (ت + ك)}$ والثاني $\frac{ت^{٢} - ت ب + ت ك}{ت (ت + ك)}$ والصورة الثانية اكبر من الاولى فيكون التناسب قد زاد . واذا طُرِح كمية واحدة من الجزءين يكون الفعل عكس ما ذُكِر

امثلة

(١) ايُّ تناسبٍ اكبر ١١ : ٩ ام ٤٤ : ٣٥

(٢) ايُّ تناسبٍ اكبر ت + ٣ : $\frac{١}{٦}$ ت ام ٢ ت + ٧ : $\frac{١}{٣}$ ت

(٣) سابق زوج ٦٥ والتناسب ١٣ فما هو التالي

(٤) اذا كان التالي ٧ والتناسب ١٨ فما هو السابق

(٥) ما هو التناسب المركب من ٣ : ٧ و ٣ ت : ٥ ب و ٧ ك + ١ : ٣ ى − ٢

(٦) ما هو التناسب المركب من ك + ى : ب و ك − ى : ت + ب و ت + ب : ح الجواب ك^{٢} − ى^{٢} : ب ح

(٧) اذا تركب ٥ ك + ٧ : ٢ ك − ٣ مع ك + ٢ : $\frac{١}{٢}$ ك + ٣ فهل يحدث تناسبٌ اعظم او اصغر الجواب تناسبٌ اعظم

(٨) اي تناسبٍ من الانواع الثلثة (١٥٩) يحدث من تركيب ك + ى : ت و ك − ى : ب و ب : $\frac{ك^{٢} - ى^{٢}}{ت}$ الجواب تناسب المساواة

(٩) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٥ و٤ : ٩ المالي و٣ : ٢ الكعبي
الجواب ١٤ : ١٥

(١٠) ما هو التناسب المركب من ٣ : ٧ وك : ى الكعبي و٤٩ : ٩ الجذري المالي
الجواب ك^{٣} : ى^{٣}

(١١) ما هو التناسب المركب من ت^{٢} − ك^{٢} : ت^{٢} وت + ك : ب وب : ت − ك
الجواب (ت + ك)^{٢} : ت^{٢}

(١٢) ايُّ تناسبٍ اكبر ت + ٢ : $\frac{١}{٢}$ت + ٤ ام ت + ٤ : $\frac{١}{٢}$ت + ٥
الجواب ت + ٤ : $\frac{١}{٢}$ت + ٥

نبذة
في النسبة

١٦٧ النسبة هي المساواة بين تناسبين فاكثر. وهي اما حسابية واما هندسية. فالحسابية هي مساواة تناسباتٍ حسابية كما في ٦ ٤ ١٠ ٨ والهندسية هي مساواة تناسباتٍ هندسية كما في ٦ ٢ ١٢ ٤ فينبغي ان يميز بين التناسب والنسبة ولو استُعمِل اللفظان مترادفين في بعض الاحيان. والفرق بينهما واضحٌ اذ يقال في تناسبٍ ما انهُ اكبر من اخر. مثالهُ ١٢ : ٢ اكبر من ٦ : ٢ ولا يقال ذلك في النسبة لانها مساواة تناسبات والمساواة تستلزم عدم التفاوت. وفي كل نسبةٍ زوجان. ويقال للسوابق الاجزاءَ المتشابهة وكذلك للتوالي. ويقال للسوابق والتوالي من كل زوجٍ الاجزآ المتناسبة ولا خلاف في رتبة زوجي نسبةٍ لانهُ ان كان ت : ب :: س : د تكون س : د :: ت : ب من حيث مساواة النسبتين. واذا اريد الدلالة على نسبةٍ بين ثلاث كميات فلا بد من تكرار الوسطى. فيُدَلُّ على النسبة بين ٨ و٤ و٢ هكذا ٨ : ٤ :: ٤ : ٢

ويسمى المكرر متناسبًا متوسطًا بين الاخرين. وتسمى الثالثة من الكميات الثلاث متناسبًا ثالثًا للاخرين

١٦٨ النسبة بالقلب ويقال لها ايضًا النسبة المكفوءة هي المساواة بين تناسب

مستقيم وتناسبٍ بالقلب. مثالهُ ٤ : ٢ :: $\frac{١}{٢}$: $\frac{١}{٦}$ اي نسبة ٤ الى ٢ هي بالقلب كنسبة ٣ الى ٦ وتُكتَب احيانًا هكذا ٤ : ٢ :: ٣ : ٦ بالقلب. ومتى تعددت الكميات وكان تناسب الاولى الى الثانية مثل تناسب الثانية الى الثالثة وهلمَّ جرًّا سميت النسبة متصلة. مثالهُ ١٠ و٨ و٦ و٤ و٢ في النسبة الحسابية المتصلة. و٦٤ و٣٢ و١٦ و٨ و٤ في النسبة الهندسية المتصلة. وهكذا ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ح الى اخرهِ. والنسبة الحسابية انما هي معادلة بسيطة. مثالها ت − ب = س − د وفي كل نسبةٍ حسابية يكون مجتمع الطرفين مماثلاً لمجتمع الوسطين اي ت + د = ب + س وهكذا في ١٢ − ١٠ = ١١ − ٩ ١٢ + ٩ = ١١ + ١٠ وان كانت ثلاث كميات على نسبة حسابية يكون مجتمع الطرفين مضاعف الوسط. فاذا فُرِض ت − ب = ب − س يكون ت + س = ٢ ب

نبذة

في النسبة الهندسية

١٧٩ متى كانت اربع كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مماثلاً لحاصل الوسطين

مفروض ت : ب :: س : د فاذًا ت د = ب س لانهُ بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$ وبالجبر ت د = ب س وهكذا ١٢ : ٨ :: ١٥ : ١٠ ١٢ × ١٠ = ٨ × ١٥

فرع اذا نُقِل ضلعٌ من طرفٍ الى اخر او من وسط الى اخر لا تتغير النسبة. فاذا فُرِض ت : م ب :: ك : ى تكون ت : ب :: م ك : ى واذا فرض ن ت : ب :: ك : ى تكون ت : ب :: ك : ن ى

اذا كان حاصل كميتين مماثلاً لحاصل كميتين اخريين تكون الاربع على نسبةٍ هندسية اذا جُعِل ضلعا الجانب الواحد طرفين وضلعا الجانب الاخر وسطين. فان فُرِض م ى = ن ح تكون م : ن :: ح : ى وان فرض (ت + ب) × س = (د − م) × ى تكون ت + ب : د − م :: ى : س

اذا كانت ثلاث كميات على نسبةٍ هندسية يكون حاصل الطرفين مماثلاً لمربع الوسط. مثالهُ اذا فرض ت : ب :: ب : س يكون ت س = $ب^{٢}$ فنجد متناسبًا

متوسطاً بين كميتين بتجذير حاصلها . فاذا فرض ت : ك :: ك : س لنا $ك^٢ =$ ت س وك $= \sqrt{ت س}$

١٨٠ ينتج مما تقدم ان كل طرفٍ من نسبةٍ يعدل حاصل الوسطين مقسوماً على الطرف الاخر . وكل وسطٍ يعدل حاصل الطرفين مقسوماً على الوسط الاخر

اذا فُرِض ت : ب :: س : د يكون ت د = ب س وت $= \frac{ب س}{د}$ د $= \frac{ب س}{ت}$ ب $= \frac{ت د}{س}$ س $= \frac{ت د}{ب}$ فان فُرِض ثلثة اجزآء من نسبةٍ نجد الرابع بقسمة حاصل الثاني والثالث على الاول . وقد بُنِي على ذلك باب الاربعة المتناسبة في علم الحساب

١٨١ اذا كانت اربع كميات متناسبة يمكن مبادلة الطرفين او الوسطين او جزءى كل زوجٍ بدون تغيير النسبة لان حاصل الطرفين لا يزال مماثلاً لحاصل الوسطين بعد هذه المعاملات

اذا فُرِض ت : ب :: س : د
و ١٢ : ٨ :: ٦ : ٤

فاذًا بمبادلة الوسطين

ت : س :: ب : د ١٢ : ٦ :: ٨ : ٤ (اقليدس ك ٥ ق ١٦)

وبمبادلة الطرفين

د : ب :: س : ت ٤ : ٨ :: ٦ : ١٢

وبمبادلة جزءى كل زوجٍ

ب : ت :: د : س ٨ : ١٢ :: ٤ : ٦

ويسمى هذا العمل الاخير قلباً

وبمبادلة ترتيب الزوجين

س : د :: ت : ب ٦ : ٤ :: ١٢ : ٨

وبقلب ترتيب النسبة كلها

د : س :: ب : ت ٤ : ٦ :: ٨ : ١٢

لان المعادلة من الجميع ت د = ب س و ٤ × ١٢ = ٦ × ٨

١٨٢ لا تتزع النسبة اذا ضُرِب الجزءان المتناسبان معًا او الجزءان المتشابهان معًا في كمية واحدة او انقسما عليها

مفروض ت : ب :: س : د

(١) بضرب المتناسبين الاولين م ت : م ب :: س : د

(٢) بضرب المتناسبين الاخرين ت : ب :: م س : م د

(٣) بضرب السابقين. (اقليدس ك ٥ ق ٢)

م ت : ب :: م س : د

(٤) بضرب التاليين ت : م ب :: س : م د

(٥) بقسمة الاولين $\frac{\text{ت}}{\text{م}} : \frac{\text{ب}}{\text{م}}$ :: س : د

(٦) بقسمة الاخرين ت : ب :: $\frac{\text{س}}{\text{م}} : \frac{\text{د}}{\text{م}}$

(٧) بقسمة السابقين $\frac{\text{ت}}{\text{م}}$: ب :: $\frac{\text{س}}{\text{م}}$: د

(٨) بقسمة التاليين ت : $\frac{\text{ب}}{\text{م}}$ :: س : $\frac{\text{د}}{\text{م}}$

فرعٌ . اذا ضُرِب كل واحدٍ من الاجزآء الاربعة او انقسم لا تتغير النسبة (اقليدس ك ٥ ق ٤)

ت م : م ب :: م س : م د $\frac{\text{ت}}{\text{م}} : \frac{\text{ب}}{\text{م}} :: \frac{\text{س}}{\text{م}} : \frac{\text{د}}{\text{م}}$

فرعٌ اخر في المعاملات الثماني المتقدمة يمكن ضرب التالي عوض قسمة السابق وعكسه

١٨٣ اذا عدل تناسبان تناسبًا ثالثًا يكونان متساويين (اقليدس ك ٥ ق ١١) (اولية ١١)

اذا فرض ت : ب :: م : ن وس : د :: م : ن

يكون ت : ب :: س : د او ت : س :: ب : د

واذا فرض ت : ب :: م : ن   وم : ن :: س : د
يكون ت : ب :: س : د   او ت : س :: ب : د

فرع. اذا فُرِض ت : ب :: م : ن   وم : ن > س : د
يكون ت : ب > س : د (اقليدس ك ٥ ق ١٢)

١٨٤ اذا فرض م : ت :: ن : ب   ثم بالمبادلة م : ن :: ت : ب

واذا فرض م : س :: ن : د   ثم بالمبادلة م : ن :: س : د
فحسبما تقدم ت : ب :: س : د
اذا فرض م : ت :: ن : ب   ثم بالقلب والمبادلة ت : ب :: م : ن
واذا فرض س : م :: د : ن   ثم بالمبادلة   س : د :: م : ن فيكون
ت : ب :: س : د حسبما تقدم
اذا فُرِض ت : م :: ب : ن   ثم بالمبادلة ت : ب :: م : ن
واذا فرض س : د :: م : ن   ثم ت : ب :: س : د كما تقدم (اقليدس ك٥ ق ٢٢)

١٨٥ في عدة نِسَبٍ اذا كان الجزءان الآخِران من الاولى الاولين من الثانية والاخران من الثانية الاولين من الثالثة وهلمَّ جرًّا تكون نسبة الاولين من الاولى كنسبة الاخرين من الاخيرة. مثالهُ

ت : ب :: س : د
س : د :: ح : ل
ح : ل :: م : ن
م : ن :: ك : ى
ثم ت : ب :: ك : ى

وهكذا ان امكن تحويل النسب الى هذا الترتيب

مثالهُ ت : س :: ب : د بالمبادلة ت : ب :: س : د
س : ح :: د : ل بالمبادلة س : د :: ح : ل
ح : م :: ل : ن بالمبادلة ح : ل :: م : ن
م : ك :: ن : ى بالمبادلة م : ن :: ك : ى
ثم ت : ب :: ك : ى كما تقدم

١٨٦ متى كان الطرفان او الوسطان من نسبةٍ واحدة كالطرفين او الوسطين من اخرى تكون الاجزآء الاربعة الباقية متناسبة بالقلب

مثالهُ ت : م :: ن : ب   وس : م :: ن : د   ثم ت : س :: ١/ب : ١/د

لان ت ب = م ن وس د = م ن وت ب = س د اي ت : س :: د : ب

وهكذا متى تشابه الطرفان. مثالهُ م : ت :: ب : ن   وم : س :: د : ن   ثم ت : س :: د : ب (اقليدس ك ٥ ق ٢٣)

واذا كانت ت : م :: ن : ب   وم : س :: د : ن   فيكون ت : س :: د : ب كما تقدم

١٨٧ اذا شابهت اجزآء نسبةٍ اجزآء نسبةٍ اخرى يكون مجموعها او فضلتها متناسبة ايضًا (اقليدس ك ٥ ق ٢) مثالهُ

اذا فُرِض   ت : ب :: س : د
وايضًا   ت : ب :: م : ن

فبالجمع ت + م : ب + ن :: س : د وت − م : ب − ن :: س : د وت : ب :: س + م : د + ن   وت : ب :: س − م : د − ن

وبالمبادلة ت + م : س :: ب + ن : د   وت − م : س :: ب − ن : د

وهكذا مهما تعددت النِسَب. مثالهُ

مفروض ت : ب ::
س : د
ح : ل
م : ن
ك : ى

ثم ت : ب :: س + ح + م + ك : د + ل + ن + ى (اقليدس ك٥ق٢)

اذا فرض ت : ب :: س : د   وم : ب :: ن : د

يكون ت + م : ب :: س + ن : د   لان بالمبادلة لنا ت : س :: ب : د   وم : ن :: ب : د   فاذًا ت + م : س + ن :: ب : د   وبالمبادلة ت + م : ب :: س + ن : د (اقليدس ك ٥ ق ٢٤)

١٨٨ في النسبة الواحدة اذا اضيف احد الجزءين المتناسبين او المتشابهين الى الاخر او طُرح احدهما من الاخر لا تتغير النسبة. فاذا فُرِض ث : ب :: س : د و١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ ثم

(١) باضافة الجزءين الاخيرين الى الاولين

ث + س : ب + د :: ث : ب   ١٢ + ٦ : ٤ + ٢ :: ١٢ : ٤

ث + س : ب + د :: س : د   ١٢ + ٦ : ٤ + ٢ :: ٦ : ٢

ث + س : ث :: ب + د : ب   ١٢ + ٦ : ١٢ :: ٤ + ٢ : ٤

ث + س : س :: ب + د : د   ١٢ + ٦ : ٦ :: ٤ + ٢ : ٢

(٢) باضافة السابقين الى التاليين

ث + ب : ب :: س + د : د   ١٢ + ٤ : ٤ :: ٦ + ٢ : ٢

ث + ب : ث :: س + د : س   ١٢ + ٤ : ١٢ :: ٦ + ٢ : ٦

وهكذا الى اخره. ويقال لهذا العمل تركيب النسب (اقليدس ك ٥ ق ١٨)

(٣) بطرح الاولين من الاخرين

س − ث : ث :: د − ب : ب   س − ث : س :: د − ب : د الخ

(٤) بطرح الاخيرين من الاولين (اقليدس ك ٥ ق ١٧)

ث − س : ب − د :: ث : ب   ث − س : ب − د :: س : د الخ

(٥) بطرح التاليين من السابقين

ث − ب : ب :: س − د : د   ث : ث − ب :: س : س − د الخ

ويسمى هذا الاخير قلب النسبة

(٦) بطرح السابقين من التاليين

ب − ث : ث :: د − س : س   ب : ب − ث :: د : د − س الخ

(٧) ث + ب : ث − ب :: س + د : س − د   اي مجتمع الاولين الى فضلتهما كمجتمع الاخيرين الى فضلتهما

فرعٌ اذ كانت اربع كميات مركبة متناسبة كما في الامثلة المتقدمة تكون البسيطة التي تركبت منها متناسبة ايضاً. فاذا فُرِض ث + ب : ب :: س + د : د تكون

ت : ب :: س : د ويسمى هذا العمل قسمة النسبة (اقليدس ك ٥ ق ١٧)

١٨٩ اذا ضُرِبَت اجزآء نسبةٍ في اجزآء نسبةٍ اخرى كل جزء في نظيره تكون الحواصل متناسبة ايضاً. مثالهُ

ت : ب :: س : د   ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢

وح : ل :: م : ن   ١٠ : ٥ :: ٨ : ٤

ت ح : ب ل :: س م : د ن   ١٢٠ : ٢٠ :: ٤٨ : ٨

وهكذا مهما تعددت النسب. مثالهُ

ت : ب :: س : د

ح : ل :: م : ن

ف : ق :: ك : ى

ت ح ف : ب ل ق :: س م ك : د ن ى

وهكذا اذا نرقّت اجزآء نسبةٍ الى اية قوةٍ فُرِضَت. مثالهُ

ت : ب :: س : د   ٣ : ٤ :: ٦ : ١٢

ت : ب :: س : د   ٢ : ٤ :: ٦ : ١٢

$ت^٢ : ب^٢ :: س^٢ : د^٢$ ٤ : ١٦ :: ٣٦ : ١٤٤

وايضاً $\sqrt[٢]{ت} : \sqrt[٢]{ب} :: \sqrt[٢]{س} : \sqrt[٢]{د}$

و $\sqrt[ن]{ت} : \sqrt[ن]{ب} :: \sqrt[ن]{س} : \sqrt[ن]{د}$

و $ت^{\frac{م}{ن}} : ب^{\frac{م}{ن}} :: س^{\frac{م}{ن}} : د^{\frac{م}{ن}}$

١٩٠ اذا انقسمت اجزآء نسبةٍ على اجزآء نسبةٍ اخرى تكون الخوارج متناسبة. مثالهُ

ت : ب :: س : د   ١٢ : ٦ :: ١٨ : ٩

ح : ل :: م : ن   ٦ : ٢ :: ٩ : ٣

$\frac{ت}{ح} : \frac{ب}{ل} :: \frac{س}{م} : \frac{د}{ن}$ $\frac{١٢}{٦} : \frac{٦}{٢} :: \frac{١٨}{٩} : \frac{٩}{٣}$

١٩١ في تركيب بعض النِسَب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل. مثالهُ

ت : ب :: س : د
م : ت :: ت : س

ت م : ب ت :: س ن : س د

فاذًا م : ت :: ن : د وهكذا

ت : ب :: س : د　　١٢ : ٤ :: ٩ : ٣
ب : ح :: د : ل　　٤ : ٨ :: ٣ : ٦
ح : م :: ل : ن　　٨ : ٢٠ :: ٦ : ١٥

ت : م :: س : ن　　١٢ : ٢٠ :: ٩ : ١٥

١٩٢ متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

ت : ب :: س : د فاذًا
ت = ب　س = د
ت > ب　س > د
ت < ب　س < د

فرعٌ اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة تكون الثانية اعظم من الرابعة (اقليدس ك ٥ ق ١٤) فان فُرِض ت : ب :: س : د فبالمبادلة ت : س :: ب : د وحينئذٍ ان كان ت = ب يكون س = د الى اخرهِ

فرعٌ ثانٍ اذا فرض ت : م :: س : ن
وم : ب :: ن : د فان كان ت = ب تكون س = د الى اخرهِ (اقليدس ك ٥ ق ٢٠) لان بالتركيب ت : ب :: س : د ومن ثم ان كان ت = ب تكون س = د الى اخرهِ

وهكذا ان فرض　ت : م :: ن : د
م : ب :: س : ن

فان كان ت = ب يكون س = د الى اخرهِ (اقليدس ك ٥ ق ٢١)

اذا كانت اربع كمياب متناسبة تكون مكفوءاتها متناسبة ايضاً. فاذا فرض ت : ب :: س : د يكون $\frac{١}{ت} : \frac{١}{ب} :: \frac{١}{س} : \frac{١}{د}$ لان الحاصل من تحويلهما كليهما هو ت د = ب س

نبذة في النسبة المتصلة

١٩٣ في النسبة المتصلة (١٦٨) تكون جميع التناسبات متساوية. فاذا فُرِض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ى يراد ان تناسب ت : ب يعدل تناسب ب : س وتناسب س : د الى اخرهِ. وتناسب الاولى الى الاخيرة يعدل الحاصل من التناسبات المتوسطة بينها اي تناسب ت : ى يعدل $\frac{ت}{ب} \times \frac{ب}{س} \times \frac{س}{د} \times \frac{د}{ى}$ ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في أيّتها شئت اي $\frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} \times \frac{ت}{ب} = \frac{ت^{٤}}{ب^{٤}}$ فيكون ت : ى :: $ت^{٤} : ب^{٤}$

ولنا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدة كميات على نسبةٍ متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخيرة كنسبة احد التناسبات المتوسطة مرقّاةً الى قوةٍ دليلها اقلُّ من عدة الكميات بواحدٍ. مثالهُ

اذا فُرِض ت : ب :: ب : س تكون ت : س :: $ت^{٢} : ب^{٢}$ وان فرض ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ى تكون ت : ى :: $ت^{٤} : ب^{٤}$

١٩٤ اذا كانت عدة كميات على نسبةٍ متصلة تكون متناسبة ايضاً اذا انعكس ترتيبها حسب ما تقدم (١٨١) فاذا فُرِض

	٦٤	٣٢	١٦	٨	٤
فالتناسبات	٢	٢	٢	٢	
وبالعكس	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤
فالتناسبات	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفوءات التناسبات المستقيمة ومكفوءات كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاولية الرابعة

مسائل

(١) اقسم ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلهما الى مجموع مربعيهما كنسبة ٢ الى ٥

لنفرض ك = قسمًا و ٦٠ − ك = القسم الاخر

(١) بالشروط ٦٠ ك − ك^{٢} : ٢ ك^{٢} + ٣٦٠٠ − ١٢٠ ك :: ٢ : ٥

(٢) بالتحويل الى معادلة ٣٠٠ ك − ٥ ك^{٢} = ٤ ك^{٢} + ٧٢٠٠ − ٢٤٠ ك

(٣) بالمقابلة والقسمة ك^{٢} − ٦٠ ك = − ٨٠٠

(٤) بالتمام التربيع والتجذير والمقابلة ك = ٤٠   ٦٠ − ٤٠ = ٢٠

(٢) اقسم ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرهما مع ستة الى الاصغر الا احد عشر كنسبة ٩ : ٢

لنفرض ك = الاكبر   ٤٩ − ك = الاصغر

بالشروط ك + ٦ : ٣٨ − ك :: ٩ : ٢

باضافة السابقين الى التاليين   ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١

بقسمة التاليين   ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١

ثم بالتحويل   ك + ٦ = ٣٦   ك = ٣٠

(٣) اي عدد اذا اضيف اليهِ ١ ثم ٥ ثم ١٢ تكون نسبة المجموع الاول : الثاني :: الثاني : الثالث

لنفرض العدد ك

ثم بالشروط ك + ١ : ك + ٥ :: ك + ٥ : ك + ١٢

بالطرح   ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨

بقسمة التاليين ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢

ثم ٢ ك + ٢ = ك + ٥   ك = ٣

(٤) ما عددان نسبة اكبرهما الى الاصغر كنسبة مجموعهما الى ٤٢ وكفضلتهما الى ٦

لنفرض العددين   ك وى

ثم بالشرط الاول   ك : ى :: ك + ى : ٤٢

وبالثاني   ك : ى :: ك − ى : ٦

بالمساواة   ك + ى : ٤٢ :: ك − ى : ٦

بقلب الوسطين   ك + ى : ك − ى :: ٤٢ : ٦

بالجمع والطرح   ٢ك : ٢ى :: ٤٨ : ٣٦

بالقسمة   ك : ى :: ٤ : ٣

٣ك = ٤ى   ك = $\frac{\text{٤ى}}{\text{٣}}$ ثم بالتعويض في النسبة الثانية لنا

ى = ٢٤   ك = ٣٢

(٥) اقسم ١٨ الى قسمين بين مربعيهما نسبة ٢٥ : ١٦

لنفرض القسمين   ك و١٨ − ك

ثم بالشروط ك$^{\text{٢}}$: (١٨ − ك)$^{\text{٢}}$ :: ٢٥ : ١٦

بالتجذير   ك : ١٨ − ك :: ٥ : ٤

بالجمع   ك : ١٨ :: ٥ : ٩

بالقسمة   ك : ٢ :: ٥ : ١   ك = ١٠

(٦) اقسم ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر الى الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كنسبة ١٦ : ٩

لنفرض اكبرها ك   والاصغر ١٤ − ك

بشروط $\frac{\text{ك}}{\text{١٤} - \text{ك}} : \frac{\text{١٤} - \text{ك}}{\text{ك}}$ :: ١٦ : ٩

بالضرب ك$^{\text{٢}}$: (١٤ − ك)$^{\text{٢}}$ :: ١٦ : ٩

بالتجذير ك : ١٤ − ك :: ٤ : ٣

بالجمع   ك : ١٤ :: ٤ : ٧

بالقسمة   ك : ٢ :: ٤ : ١   ك = ٨

(٧) اقسم ٣٠ الى قسمين بينهما نسبة ٣ المالية الى ١ واستعلم متناسبًا متوسطًا بينهما

لنفرض احدهما ك والاخر ٢٠ − ك

بالشروط ك : ٢٠ − ك : ٣^{٢} : ١^{٢} :: ٩ : ١

بالجمع ك : ٢٠ :: ٩ : ١٠ ك = ١٨ والاخر = ٢ والمتناسب المتوسط (حسب ١٧٩) = $\sqrt{\text{٢} \times \text{١٨}}$ = ٦

(٨) اي عددين حاصلهما ٢٤ ونسبة فضلة كعبيهما الى كعب فضلتهما كنسبة ١٩ : ١

لنفرض ك احدهما وى الاخر

بالمفروض ك ى = ٢٤

وايضاً ك^{٣} − ى^{٣} : (ك − ى)^{٣} :: ١٩ : ١

بالبسط ك^{٣} − ى^{٣} : ك^{٣} − ٣ ك^{٢} ى + ٣ ك ى^{٢} − ى^{٣} :: ١٩ : ١

بالطرح (١٨٨)(٥) ٣ ك^{٢} ى − ٣ ك ى^{٢} : (ك − ى)^{٣} :: ١٨ : ١

بالقسمة على ك − ى ٣ ك ى : (ك − ى)^{٢} :: ١٨ : ١

٣ ك ى = ٣ × ٢٤ = ٧٢ حسب المفروض

فبالتعويض ٧٢ : (ك − ى)^{٢} :: ١٨ : ١

بالضرب والقسمة (ك − ى)^{٢} = ٤ ك − ى = ٢ ك ى = ٢٤ ك = ٦ ى = ٤

(٩) مفروض (ت + ك)^{٢} : (ت − ك)^{٢} :: ك + ى : ك − ى

هات البرهان من ذلك على ان ت : ك :: $\sqrt{\text{٢ت − ى}}$: $\sqrt{\text{ى}}$

بالبسط ت^{٢} + ٢ ت ك + ك^{٢} : ت^{٢} − ٢ ت ك + ك^{٢} :: ك + ى : ك − ى

بالجمع والطرح ٢ ت^{٢} + ٢ ك^{٢} : ٤ ت ك :: ٢ ك : ٢ ى

بالقسمة ت^{٢} + ك^{٢} : ٢ ت ك :: ك : ى

بنقل ك ت^{٢} + ك^{٢} : ٢ ت :: ك^{٢} : ى

بقلب الوسطين ت^{٢} + ك^{٢} : ك^{٢} :: ٢ت : ى

بالطرح ت^{٢} : ك^{٢} :: ٢ت − ى : ى

بالتجذير ت : ك :: $\sqrt{\text{٢ت − ى}}$: $\sqrt{\text{ى}}$

(١٠) مفروض ك : ى :: ت^{٢} : ب^{٢}

وايضاً ت : ب :: $\sqrt[٢]{\text{س+ك}}$: $\sqrt[٢]{\text{د+ى}}$

هات البرهان على ان دك = س ى

بالترقية $\text{ت}^{٢}$: $\text{ب}^{٢}$ :: س+ك : د+ى

بالمساواة س+ك : د+ى :: ك : ى

بقلب الوسطين س+ك : ك :: د+ى : ى

بالطرح س : ك :: د : ى

ثم دك = س ى

(١١) مفروض $\frac{\text{ت}^{٢}-\text{ك}^{٢}}{\text{ب}}$ = ٤ت برهِن ان ت+ك : ٢ت :: ٢ب : ت−ك

(١٢) مفروض $\text{ك}^{٢}$: $\text{ى}^{٢}$ :: ٣٦ : ٢٥ ونسبة ٢ك + ى : ك + ٢ كالنسبة المركبة من ١٧ : ٣ و٢ : ٧ فما هي قيمة ك وى الجواب ك = ١٢ ى = ١٠

(١٣) مطلوب ثلثة اعداد على نسبةٍ متصلة اوسطها ٦٠ ومجتمع الطرفين ١٢٥ الجواب ٤٥ ٦٠ ٨٠

(١٤) ما عادان حاصلها ١٣٥ وفضلة مربعيها الى مربع فضلتها :: ٤ : ١ الجواب ١٥ و٩

(١٥) ما عادان نسبة فضلتها ومجتمعها وحاصلها كنسبة ٢ و٣ و٥ الجواب ١٠ و٢

(١٦) اقسم ٢٤ الى قسمين نسبة حاصلها الى مجتمع مربعيها :: ٣ : ١٠ الجواب ١٨ و٦

(١٧) مزيجٌ من خمرٍ وماءٍ كانت فيهِ نسبة فضلتها : الماء :: ١٠٠ : الخمر ونفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء. فكم في المزيج من الصنفين الجواب خمر ٢٥ ماء ٥

(١٨) ما عددان نسبة احدهما الى الاخر :: ٣ : ٢ واذا اضيف ٦ الى الاكبر وطرح ٦ من الاصغر فيكون المجموع الى الفضلة :: ٣ : ١ الجواب ٢٤ و١٦

(١٩) ما عددان حاصلهما ٣٢٠ ونسبة فضلة كعبيهما الى كعب فصلتهما :: ٦١ : ١ الجواب ٢٠ و١٦

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الاخر كالنسبة المالية بين ٤ و٣ والمتناسب المتوسط بينهما هو ٢٤ الجواب ٣٢ و١٨

* * *

الفصل الرابع عشر

في التغير او النسبة العمومية

١٩٥ قد يحدث احيانًا ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعضٍ حتى يتغير احدها بتغيُّرٍ اخر منها فتُحفَظ النسبة . مثالهُ ان يقال ان ثمن ٥٠ ذراعًا من قماشٍ = ١٠٠ غرش فان طُرِح من الاذرع ١٠ تصير ٤٠ فيُطرَح من الثمن ٢٠ فيصير ٨٠ وان صارت الاذرع ٣٠ يصير الثمن ٦٠

ذ ذ ذ ذ

اي ٥٠ : ٤٠ :: ١٠٠ : ٨٠

و ٥٠ : ٣٠ :: ١٠٠ : ٦٠

و ٥٠ : ٢٠ :: ١٠٠ : ٤٠ وهلمَّ جرًّا

فكلما تغيَّر تالي الزوج الاول يتغير مثلهُ تالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة

اذا فُرِض سابقان ت وب وفرضت تَ كميةٌ من جنس ت ولكن اكبر منها او اصغر . وبَ كمية من جنس ب اكبر او اصغر مرارًا مساوية للاحاد التي في فضلة ت وتَ فتكون ت : تَ :: ب : بَ فان تغيرت ت وصارت تَ تتغير ب وتصير بَ ويقال ان ت تغيرت بتغيُّرٍ ب او بالاختصار ان تاء كباء . كما يقال ان اجرة فاعلٍ تتغير كتغير مدة عملهِ وان ربح مبلغٍ يتغير كتغير راس المال . ولنا هنا جزءان من نسبةٍ وكل نسبةٍ لها اربعة اجزاء . فاذًا قولنا السابق انما هو عبارةٌ مختصرة بذكر جزءين من النسبة عوض الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقلنا نسبة راس مال : راس مال اخر :: ربح الاول : ربح الثاني

١٩٦ نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شيء الى اخر بدون معرفة قيمتها الخصوصية . ويكفي لذلك جزآ نسبةٍ غير انهُ ينبغي ان نذكر كون الجزءين الاخرين متضمنين في المذكورين . كما لو قيل ان ثقل الماء هو بالنسبة الى مقدارهِ فانهُ يراد بهِ ان رطلاً : عدة ارطال مفروضة :: ثقل رطل : ثقل الارطال المفروضة ويدل على نسبةٍ بين كمياتٍ غير ثابتة بهذه العلامة ـــ مثالها ت ـــ ب فيراد ان ت تتغير كتغير ب اي ان ت : تَ :: ب : بَ ويقال لهذه العبارة اي ت ـــ ب نسبة عمومية

١٩٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخرى بالاستقامة . فان رباة دينٍ مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى راس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الرباة وهلمَّ جرًّا . واذا نقصت كميةٌ عند زيادة اخرى او بالعكس قيل ان الاولى تتغير كالثانية بالقلب . مثالها ان الوقت الذي فيهِ الفاعل يجمع مبلغًا يكون بالقلب كاجرتهِ اي كما زادت الاجرة قلَّ الوقت وبالقلب

١٩٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كميتين او نقصانهِ قيل انها تغيرت كتغيرها معًا . مثالها رباة دينٍ يتغير كحاصل راس المال في الوقت . فان تضاعف راس المال وتضاعف الوقت زاد الرباة اربعة امثالٍ . ومتى كانت كمية متناسبة ابدًا مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تتغير بالاستقامة كالثانية وبالقلب كالثالثة . مثالهُ ان كانت ت : تَ :: $\frac{ب}{س}$: $\frac{بَ}{سَ}$ تكون ت ـــ $\frac{ب}{س}$ فنرى مما سبق ان هذا الباب لا يلزم لهُ شيءٌ سوى ان يقاس على قواعد النسبة المتقدم ذكرها . وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصرة يذكر فيها جزءان من اربعة اجزآء نسبة . وان اشكل شيءٌ من مسائلهِ يُوضَح جليًا بذكر الجزءين المحذوفين

١٩٩ يتضح مما سبق انهُ يمكن عكس ترتيب الاجزآء في نسبةٍ عمومية كما في نسبةٍ خصوصية . فان كان ت ـــ ب فكذلك ب ـــ ت لان ت : تَ :: ب : بَ اذًا ب : بَ :: ت :: تَ

وان ضرب جزءٌ او جزءان من نسبةٍ عمومية في كمية واحدة ثابتة او انقسما عليها فلا تتغير النسبة (١٨٢) مثالهُ

اذا فُرِض ت : تَ :: ب : بَ اي ت ـــ ب فيكون م ت : م تَ :: ب : بَ اي م ت ـــ ب وم ت : م تَ :: م ب : م بَ اي م ت ـــ م ب الخ

وهكذا ان ضُرِب كلا الجزءين في كمية غير ثابتة او انقسما عليها لا تتغير النسبة ، فان فرض مَ كمية متغيرة وت : تَ :: ب : بَ اي ت ـــ ب يكون م ت : مَ تَ :: م ب : مَ بَ اي م ت ـــ م ب

فرع اول اذا تغيرت كميةٌ كاخرى يكون الخارج من قسمة احداها على الاخرى كمية ثابتة كما يتضح من انهُ اذا تغيرت صورة كسرٍ كتغيير مخرجِهِ لا تتغير قيمتهُ

مثالهُ ت : تَ :: ب : بَ اي ت ـــ ب اذاً $\frac{ت}{ب} : \frac{تَ}{بَ} :: \frac{ب}{ب} : \frac{بَ}{بَ}$ :: ١ : ١

فرعٌ ثانٍ اذا كان حاصل كميتين ثابتًا تتغير احداهما كمكفوء الاخرى . مثاله ت ب : تَ بَ :: ١ : ١ يكون $\frac{ت ب}{ب} : \frac{تَ بَ}{بَ} :: \frac{١}{ب} : \frac{١}{بَ}$ او ت : تَ :: $\frac{١}{ب} : \frac{١}{بَ}$

فرع ثالث يمكن نقل كميةٍ من احد جزءي نسبةٍ عمومية الى الاخر . فاذا كان مضروبًا فيهِ في احدها يصير مقسومًا عليهِ في الاخر . مثالهُ ت ـــ ب س يكون ايضًا $\frac{ت}{ب}$ ـــ س وان كان ت ـــ $\frac{١}{س د}$ يكون ت س ـــ $\frac{١}{د}$

٢٠٠ اذا تغيرت كلتا كميتين كثالثة تتغير احداهما كالاخرى

مثالهُ ت : تَ :: ب : بَ اي ت ـــ ب
س : سَ :: ب : بَ اي س ـــ ب
اذاً ت : تَ :: س : سَ اي ت ـــ س

واذا تغيرت كميتان كالثالثة يتغير مجموعها وفضلتهما ايضًا كثالثة . مثالهُ اذا فُرِض

ت : تَ :: ب : بَ اى ت ـــ ب
وس : سَ :: ب : بَ اي س ـــ ب

فاذاً ت + س : تَ + سَ :: ب : بَ اي ت + س ∝ ب وت − س :
تَ − سَ :: ب : بَ اي ت − س ∝ ب

وهكذا مهما تعدَّدت الكميات التي تتغير ككميةٍ واحدة . مثالهُ اذا فُرِض ت ∝ ب وس ∝ ب ود ∝ ب وى ∝ ب

فان (ت + س + د + ى) ∝ ب

واذا تغير مربع مجموع كميتين كمربع فضلتهما يتغير مجموع مربعيهما كحاصلهما .

فان فُرِض (ت + ب)^{٢} ∝ (ت − ب)^{٢} يكون ت^{٢} + ب^{٢} ∝ ت ب لان بالمفروض (ت + ب)^{٢} : (ت − ب)^{٢} :: (تَ + بَ)^{٢} : (تَ − بَ)^{٢}

بالبسط والجمع والطرح حسب ما تقدم في النسبة لنا

٢ ت^{٢} + ٢ ب^{٢} : ٤ ت ب :: ٢ تَ^{٢} + ٢ بَ^{٢} : ٤ تَ بَ

وبالقسمة ت^{٢} + ب^{٢} : ت ب :: تَ^{٢} + بَ^{٢} : تَ بَ اي ت^{٢} + ب^{٢} ∝ ت ب

٢٠١ قد يمكن ايضاً ان تُضرب اجزآءَ نسبةٍ عمومية في اجزآء اخرى او تُقسَم عليها

فان فرض ت : تَ :: ب : بَ اي ت ∝ ب
وس : سَ :: د : دَ اي س ∝ د
اذاً ت س : تَ سَ :: ب د : بَ دَ اي ت س ∝ ب د

فرعٌ اذا تغيرت كلتا كميتين كثالثةٍ يتغير حاصل الاثنين كمربع الاخرى

مثالهُ اذا فُرِض ت ∝ ب
و س ∝ ب
اذاً ت س ∝ ب^{٢}

واذا تغيرت كمية كاخرى تتغير اية قوةٍ او اي جذرٍ فُرِض من الواحدة مثل ذلك الجذر او تلك القوة من الاخرى (ع ٢٦١)

مثالهُ اذا فُرِض ت : تَ :: ب : ب اي ت ∝ ب
يكون ت^{ن} : تَ^{ن} :: ب^{ن} : بَ^{ن} اي ت^{ن} ∝ ب^{ن}
و ت$^{\frac{١}{ن}}$: تَ$^{\frac{١}{ن}}$ :: ب$^{\frac{١}{ن}}$: بَ$^{\frac{١}{ن}}$ اي ت$^{\frac{١}{ن}}$ ∝ ب$^{\frac{١}{ن}}$

٢٠٢ في تركيب نسب عمومية يمكن طرح كميات متساوية من الجزءين

مثالهُ ث : ثَ :: ب : بَ   اي ث ∝ ب
وب : بَ :: س : سَ   اي ب ∝ س
وس : سَ :: د : دَ   اي س ∝ د
اذًا ث : ثَ :: د : دَ   اي ث ∝ د

فرع اذا تغيرت كمية كثانيةٍ والثانية كثالثة والثالثة كرابعة وهلمَّ جرًّا فالاولى تتغير كالاخيرة . مثالهُ اذا فُرِض ث ∝ ب ∝ س ∝ د فان ث ∝ د واذا فُرِض ث ∝ ب ∝ $\frac{1}{\text{س}}$ فان ث ∝ $\frac{1}{\text{س}}$ اي ان تغيرت الاولى كالثانية والثانية كمكفوء الثالثة فالاولى تتغير كمكفوء والثالثة

٢٠٣ اذا تغيرت كميةٌ كحاصل كميتين اخريين وكانت احدى الاخريين ثابتة فالاولى تتغير كالاخرى الغير الثابتة . مثالهُ

اذا فُرِض ك ∝ ل ب وكانت ب ثابتة فاذًا ك ∝ ل ومثال ذلك ايضًا ثقل اللوح فانهُ يتغير كتغيير طولهِ وعرضهِ وعمقهِ فان بقي العمق على ما هو كان تغيير ثقلهِ كتغيير طولهِ وعرضهِ

فرعٌ وهكذا مهما تعددت الكميات . فان فُرِض
ك ∝ ل ب ط
فان جعلت ل ثابتة   ك ∝ ب ط
وان جعلت ل ب ثابتة ك ∝ ط

وان كانت قيمة كميةٍ متوقفة على اخريين وان فرضت الثانية تغيرت الاولى كالثالثة وان فرضت الثالثة تغيرت الاولى كالثانية فالاولى تتغير كحاصل الاخريين . مثالهُ ان تغير ثقل لوحٍ كالطول مع عرضٍ مفروض وكالعرض مع طولٍ مفروض ثم ان تغيَّر الطول والعرض يتغير الثقل كحاصلهما . وهكذا مهما تعددت الكميات

اذا تغيرت كميةٌ كاخرى تكون الاولى مساوية للثانية في كميةٍ ما ثابتة . فان كان ث ∝ ب فلا بد ان تكون نسبة ث : ب ثابتة . وقد يمكن ان تُضرَب ب في كميةٍ ما

حتى يكون الحاصل ت وان كانت نسبة ربح ١٠٠ غرش : راس المال :: ١ : ٢٠ يكون لربح ١٠٠ غرش او ١٠٠٠ غرش نفس هذه النسبة الى راس المال

تنبيه . ان لفظة مفروض في مسائل هذا الباب ولاسيما في الفلسفة الطبيعية يراد بها كميات ثابتة كما انهُ في غير هذا الباب يراد بها كميات معروفة لتمييزها من المجهولة

الفصل الخامس عشر

في السلسلة الحسابية والهندسية

٢٠٤ السلسلة ويقال لها النسبة المتصلة نوعان حسابية وفيها كلامنا الان . وهندسية وسياتي الكلام عليها . اما الحسابية فهي عبارةٌ عن طايفةٍ من الكميات تعلو او تهبط بزيادة كميةٍ مفروضة او طرحها على التوالي . مثالها ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ وهكذا بالعكس ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢ ويقال للاولى سلسلة صاعدة وللثانية سلسلة نازلة

٢٠٥ في السلسلة الصاعدة توجد كل حلقة باضافة الفصل المشترك الى ما قبلها . فان كانت الحلقة الاولى ٣ والفصل المشترك ٢ تكون السلسلة ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣ الى اخرهِ . وان كانت الحلقة الاولى ت والفصل المشترك د تكون الحلقة الثانية ت + د والثالثة ت + د + د اي ت + ٢ د والرابعة ت + ٢ د + د اي ت + ٣ د والخامسة ت + ٣ د + د اي ت + ٤ د وهلم جرًّا . وتكون السلسلة ت وت + د وت + ٢ د وت + ٣ د وت + ٤ د الى اخرهِ . وان كانت الحلقة الاولى والفصل المشترك متساويين اي الحلقة الاولى ت والفصل المشترك ت تصير الثانية ت + ت اي ٢ ت والثالثة ٢ ت + ت اي ٣ ت الى اخرهِ . فتكون السلسلة ت ٢ ت ٣ ت ٤ ت الخ

وفي السلسلة النازلة توجد كل حلقة بطرح الفصل المشترك من التي قبلها فان كانت الحلقة الاولى ت والفصل المشترك د تكون السلسلة ت ت – د ت – ٢ د ت – ٣ د ت – ٤ د الخ

ثم ان هذا العمل يطول بنا جدًّا في سلسلةٍ طويلة ولكن اذا نظرنا الى سلسلةٍ

مثل ث ث + د ث + ٢ د ث + ٣ د ث + ٤ د الى اخرهِ نرى ان د اضيفت الى ث مرارًا تماثل عدة الحلقات الا واحدًا لان

الحلقة الثانية هي	ث + د
والثالثة	ث + ٢ د
والرابعة	ث + ٣ د الى اخرهِ
فتكون الحلقة الخمسون	ث + ٤٩ د
والحلقة المائة	ث + ٩٩ د
وان كانت نازلة تكون	ث − ٩٩ د

اي ان د تضاف الى ث مرارًا تماثل عدة الحلقات الا واحدًا. فان فرض ث = الحلقة الاولى ول = الاخيرة وع = عدد الحلقات وف = الفضل المشترك فلنا ل = ث + (ع − ١) × ف

٢٠٦ لنا مما سبق هذه القاعدة وهي ان الحلقة الاخيرة من السلسلة الحسابية تعدل الحلقة الاولى مضافةً الى حاصل الفضل المشترك في عدة الحلقات الا واحدًا. وهكذا توجد اية حلقةٍ فُرِضَت بان نحسبها الحلقة الاخيرة فتدل عليها العبارة السابقة

ثم ان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين تصير العبارة ل = ث + (ع − ١) × ث = ث + ث ع − ث اي ل = ث ع

٢٠٧ نرى في العبارة السابقة اربع كميات اي ث الحلقة الاولى ل الاخيرة ع عدد الحلقات ف الفضل المشترك. فان فُرِض منها ثلاثٌ يمكن ان توجد منها الاخرى

(١) لنا كما تقدم ل = ث + (ع − ١) ف = الاخيرة

(٢) بالمقابلة ل − (ع − ١) × ف = ث = الاولى

(٣) بالمقابلة والقسمة في الاولى $\frac{\text{ل} - \text{ث}}{\text{ع} - ١}$ = ف = الفضل المشترك

(٤) ايضًا بالمقابلة والقسمة في الاولى $\frac{\text{ل} - \text{ث}}{\text{ف}}$ + ١ = ع = عدد الحلقات

ومن المعادلة الثالثة توجد اية عدة فرضت من اوساط حسابية بين عددين لان عدة الحلقات تماثل الطرفين مع جميع الحلقات المتوسطة بينهما. فان فرض ط = عدة الاوساط يكون ط + ٢ = ع اي عدة الحلقات. ثم بوضع ط + ٢ عوض ع في المعادلة الثالثة تصير $\frac{\text{ل} - \text{ت}}{\text{ط} + ١} = \text{ف}$ = الفضل المشترك

مفروض الحلقة الاولى من سلسلةٍ صاعدة ٧ والفضل المشترك ٣ وعدة الحلقات ٩ فما هي الاخيرة

ل = ت + (ع − ١) ف = ٧ + (٩ − ١) × ٣ = ٣١

والسلسلة ٧ ١٠ ١٣ ١٦ ١٩ ٢٢ ٢٥ ٢٨ ٣١

مفروض الحلقة الاخيرة من سلسلةٍ صاعدة ٦٠ وعدة الحلقات ١٢ والفضل المشترك ٥ فما هي الاولى

ت = ل − (ع − ١) × ف = ٦٠ − (١٢ − ١) × ٥ = ٥

خذ ستة اوساط حسابية بين ١ و٤٣

الفضل المشترك ٦ والسلسلة ١ ٧ ١٣ ١٩ ٢٥ ٣١ ٣٧ ٤٣

٢٠٨ يلزم احيانًا معرفة مجموع حلقات سلسلة ويتوصل اليها بجمع الحلقات لامحالة. ولكن لنا طريقة اخصر من ذلك وهي انهُ لابد ان يكون مجموع سلسلةٍ صاعدة مثل ٣ ٥ ٧ ٩ ١١

مساويًا لمجموع سلسلةٍ نازلة ١١ ٩ ٧ ٥ ٣

فيكون مجموع الاثنين مضاعف مجموع احداهما فنجد بجمعهما مضاعف مجموع احداهما. ثم ان اخذ نصفهُ يكون مجموع احداهما

فلنفرض	٣	٥	٧	٩	١١
وعكسها	١١	٩	٧	٥	٣
يكون المجموع	١٤	١٤	١٤	١٤	١٤

وهكذا	ت	ت + د	ت + ٢د	ت + ٣د	ت + ٤د
وعكسها	ت + ٤د	ت + ٣د	ت + ٢د	ب + د	ت
المجموع	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د	٢ت + ٤د

فلنا من ذلك هذه القضية وهي ان مجموع طرفي سلسلةٍ يعدل مجموع ايّ حلقتين فرضنا على بعدٍ واحدٍ من الطرفين. ولكي تجد مجموع الحلقات في السلستين لا يلزم الا ان تضرب مجموع الطرفين في عدد الحلقات اي ١٤ + ١٤ + ١٤ + ١٤ + ١٤ = ١٤ × ٥

وفي الثانية يكون المجموع (٢ت + ٤د) × ٥ وهذا مضاعف مجموع حلقات سلسلة واحدة. ثم ان فرض ت = الاولى ل = الاخيرة ع = عدد الحلقات وم = مجموع الحلقات لنا $م = \frac{ت + ل}{٢} \times ع$ وهذه المعادلة مشتملة على هذه القاعدة وهي ان مجموع حلقات سلسلةٍ حسابية يعدل نصف مجموع الطرفين في عدد الحلقات .

ما هو مجموع سلسلة الاعداد الطبيعية اي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ الى ١٠٠٠

الجواب $م = \frac{ت + ل}{٢} \times ع = \frac{١ + ١٠٠٠}{٢} \times ١٠٠٠ = ٥٠٠٥٠٠$

ثم ان عوضنا عن ل في هذه المعادلة بقيمتها في عـ ٢٠٧ تصير المعادلة

(١) $م = \frac{٢ت + (ع - ١)ف}{٢} \times ع$ وفيها اربع كميات اي الحلقة الاولى والفضل المشترك وعدة الحلقات ومجموعها. وان فرض منها ثلاثٌ نجد منها الرابعة. فبالتحويل تصير

(٢) $ت = \frac{٢م + فع^٢ - فع}{٢ع} =$ الحلقة الاولى

(٣) $ف = \frac{٢م - ٢تع}{ع^٢ - ع} =$ الفضل المشترك

(٤) $$ع = \frac{\sqrt{(٢ت - ف)^٢ + ٨فم} - ٢ت + ف}{٢ف}$$

(١) مفروض الحلقة الاولى من سلسلةٍ صاعدة ٣ والفضل المشترك ٢ وعدد الحلقات ٢٠ فما هو مجموعها الجواب ٤٤٠

(٢) اذا وضع ماية حجر على خط مستقيم بين كل اثنين منها ذراعٌ واحدٌ فكم

يمشي من يجمع الجميع في مكانٍ بينهُ وبين الحجر الاول ذراع اذا كان كل مرةٍ يحمل حجرًا واحدًا الجواب ١٠١٠٠ ذراع

(٣) ما هو مجموع ١٥٠ حلقة من سلسلةٍ صاعدة مثل $\frac{١}{٣}$ $\frac{٢}{٣}$ ١ $\frac{٤}{٣}$ $\frac{٥}{٣}$ ٢ $\frac{٧}{٣}$ الى اخرهِ الجواب ٣٧٧٥

(٤) اذا كان مجموع سلسلة حسابية ١٤٥٥ والحلقة الاولى ٥ وعدد الحلقات ٣٠ فما هو الفصل المشترك الجواب ٣

(٥) مجموع سلسلةٍ ٥٦٧ والحلقة الاولى ٧ والفصل المشترك ٢ فما هو عدد الحلقات الجواب ٢١

(٦) ما هو مجموع ٣٢ حلقة من هذه السلسلة ١ $١\frac{١}{٢}$ ٢ $٢\frac{١}{٢}$ ٣ الخ الجواب ٢٨٠

(٧) رجلٌ اشترى ٤٧ كتابًا وكان ثمن الاول ١٠ غروش وثمن الثاني ٣٠ غرشًا والثالث ٥٠ غرشًا وهلم جرًّا فكم بلغ ثمن الجميع

الجواب ٢٢٠٩٠ غرشًا

(٨) رجلٌ اعطى صدقةً للفقراء في اليوم الاول من السنة غرشًا وفي الثاني غرشين وفي الثالث ثلثة غروش وهلم جرًّا فكم اعطى في السنة

الجواب ٦٦٧٩٥

(٩) رجلٌ اشترى اثوابًا وكان ثمن الاول دينارين والثاني ٤ والثالث ٦ وهلمّ جرًّا الى اخرهِ وبلغ ثمن الجميع ١١٠ دنانير فكم ثوبًا اشترى الجواب ١٠ اثواب

٣٠٩ في سلسلة اعدادٍ وترية مثل ١ ٣ ٥ ٧ ٩ الى اخرهِ تكون الحلقة الاخيرة اقلَّ بواحدٍ من مضاعف عدد الحلقات ابدًا لان $ل = ت + (ع - ١) ف$ حسبما تقدم. وفي السلسلة المفروضة $ت = ١$ و$ف = ٢$ فتكون المعادلة $ل = ١ + (ع - ١) \times ٢ = ٢ع - ١$ وكذلك في سلسلة اعدادٍ وترية مثل ١ ٣ ٥ ٧ ٩ الى اخرهِ مجموع الحلقات يعدل مربَّع عدد الحلقات لان $م = \frac{١}{٢} (ت + ل) \times ع$ وفي هذه السلسلة $ت = ١$ وحسبما تقدم $ل = ٢ ع$

– ١ فتصير المعادلة م = ½(١ + ٢ع – ١) × ع = ع^{٢}

مثالهُ

١ + ٣ = ٤
١ + ٣ + ٥ = ٩ مربعات عدد الحلقات
١ + ٣ + ٥ + ٧ = ١٦

٢١٠ اذا كان صفّان من كميات في سلسلةٍ حسابية تكون مجموعاتها او فضلاتها ايضًا على سلسلةٍ حسابية لان ذلك جمع تناسباتٍ او طرحها فقط

مثالهُ	٣	٦	٩	١٢	١٥	١٨	٢١	التناسب = ٣
	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	التناسب = ٢
المجموع	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	التناسب = ٥
الفضلة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	التناسب = ١

واذا ضُرِب جميع حلقات سلسلة حسابية في كميةٍ واحدة او انقسم عليها تكون الحواصل او الخوارج على سلسلة حسابية ايضًا لان ذلك كضرب تناسباتٍ او قسمتها

في سلسلة	٣	٥	٧	٩	١١	اذا ضُرِب في ٤
تصير	١٢	٢٠	٢٨	٣٦	٤٤	ثم اذا انقسم هذا على ٢
تصير	٦	١٠	١٤	١٨	٢٢	الى اخره

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حسابية مجموعها ٥٦ ومجموع مربعاتها ٨٦٤

ك = الثاني ى = الفضل المشترك فتكون السلسلة ك – ى ك ك + ى ك + ٢ى

وبالشروط (ك – ى) + ك + (ك + ى) + (ك + ٢ى) = ٥٦

وايضًا (ك – ى)^{٢} + ك^{٢} + (ك + ى)^{٢} + (ك + ٢ى)^{٢} = ٨٦٤

بالاولى ٤ك + ٢ى = ٥٦

بالثانية ٤ك^{٢} + ٤ك ى + ٦ى^{٢} = ٨٦٤

وبتحويل هذه المعادلات لنا ك = ١٢ ى = ٤

والاعداد ٨ ١٢ ١٦ ٢٠

(٢) ثلثة اعدادٍ في سلسلة حسابية مجموعها ٩ ومجموع كعوبها ١٥٣ فما هي هذه الاعداد الجواب ١ و٣ و٥

(٣) ثلثة اعداد في سلسلة حسابية مجموعها ١٥ ومجموع مربَّعي الطرفين ٥٨ فما هي الاعداد

(٤) اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجموع مربَّعي الاولين ٣٤ ومجموع مربعي الاخرين ١٣٠ فما هي الاعداد الجواب ٣ ٥ ٧ ٩

(٥) لنا ان نجد عددًا ذا ثلثة ارقام على سلسلة حسابية واذا انقسم العدد على مجموع ارقامهِ يكون الخارج ٢٦ واذا اضيف اليهِ ١٩٨ ينقلب ترتيب الارقام

لنفرض الارقام ك − ى وك وك + ى فيكون العدد ١٠٠ (ك − ى) + ١٠ ك + (ك + ى) = ١١١ ك − ٩٩ ى

وبالشروط $\frac{\text{١١١ ك − ٩٩ ى}}{\text{٣ ك}} = \text{٢٦}$

و ١١١ ك − ٩٩ ى + ١٩٨ = ١٠٠ (ك + ى) + ١٠ ك + (ك − ى)

ك = ٣ ى = ١ والعدد ٢٣٤

(٦) لنا ان نجد اربعة اعداد في سلسلة حسابية مجموع مربعي الطرفين فيها ٢٠٠ ومجموع مربعي الوسطين ١٣٦

(٧) ساعٍ سعى الى مكانٍ بُعدهُ ١٩٨ ميلاً . ففي اليوم الاول قطع من المسافة ٣٠ ميلاً وفي الثاني ٢٨ ميلاً وفي الثالث ٢٦ ميلاً وهلم جرًّا ففي كم يوم قطع المسافة كلها

الحلقة الاولى = ٣٠ الفصل المشترك = − ٢ الجواب ٩

(٨) مطلوب اعداد على سلسلة حسابية فضلها المشترك ٢ ومجموعها يعدل عدة الحلقات ثمان مرات واذا اضيف ١٢ الى الحلقة الثانية واقسم المجموع على عدة الحلقات يكون الخارج الحلقة الاولى

لنفرض ك = الاولى ى = عدة الحلقات ك + ٢ = الثانية ك + (ى − ١) ٢ = الاخيرة

حسبما تقدم $م = \frac{٢ت + (ع - ١)ف}{٢} \times ع$ ت = ك ى = ع

ثم بالتعويض $م = \frac{٢ك + (ى - ١)^{٢}}{٢} \times ى = ك ى + ى^{٢} - ى$

وبالمسئلة $ك ى + ى^{٢} - ى = ٨ ى$ $ى = ٩ - ك$

وايضاً $\frac{ك + ٢ + ١٣}{٩ - ك} = ك$ $ك = ٥$ او ٣

$ى = ٤$ او ٦

والاعداد ٥ ٧ ٩ ١١ او ٣ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣

(٩) لنا ان نجد اربعة اعداد على سلسلة حسابية مجموعها ٢٨ وحاصلها ٥٨٥

في السلسلة الهندسية

٢١١ السلسلة الهندسية هي نسبةٌ هندسية متصلة كما ان الحسابية هي نسبةٌ حسابية متصلة. فالاعداد ٦٤ ٣٢ ١٦ ٨ ٤ هي على نسبةٍ هندسية متصلة ع ٢٧٢ واذا انقسم كل جزء على التناسب المشترك يخرج الجزء الذي يتلوه. مثالهُ $\frac{٦٤}{٢} = ٣٢$ و $\frac{٣٢}{٢} = ١٦$ و $\frac{١٦}{٢} = ٨$ الى اخره. وهكذا اذا انعكس الترتيب وصار المقسوم عليهِ المشترك مضروباً فيهِ. مثالهُ ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤ الى اخرهِ $٤ \times ٢ = ٨$ و $٨ \times ٢ = ١٦$ و $١٦ \times ٢ = ٣٢$ و $٣٢ \times ٢ = ٦٤$ الخ

ولنا من ذلك هذه القضية وهي ان الكميات التي تهبط بمقسومٍ عليهِ مشترك او تعلو بمضروبٍ فيهِ مشترك فهي على سلسلةٍ هندسية. ويسمى المقسوم عليهِ او المضروب فيهِ التناسب المشترك. وان جعلنا المقسوم عليهِ كسراً يمكن ان نحسبهُ المضروب فيهِ ابداً كما في السلسلة السابقة فانها تهبط بالقسمة على ٢ او بالضرب في $\frac{١}{٢}$

٢١٢ في السلسلة الهندسية الصاعدة تُعرَف كل حلقةٍ بضرب التناسب المشترك في التي قبلها. فان فرضت الاولى ت والتناسب المشترك ب تكون الحلقات على هذا النسق $ت \times ب = ت ب$ = الثانية $ت ب \times ب = ت ب^{٢}$ = الثالثة $ت ب^{٢} \times ب = ت ب^{٣}$ = الرابعة $ت ب^{٣} \times ب = ت ب^{٤}$ = الخامسة الخ وتكون

السلسلة ت ت ب $\text{ت ب}^{٢}$ $\text{ت ب}^{٣}$ $\text{ت ب}^{٤}$ الخ

واذا كانت الاولى والتناسب متساويين تكون السلسلة سَرْدَ قُوّاتٍ اي تكون الاولى ب والتناسب ب فتكون السلسلة ب $\text{ب}^{٢}$ $\text{ب}^{٣}$ $\text{ب}^{٤}$ $\text{ب}^{٥}$ $\text{ب}^{٦}$ الخ

٢١٣ في السلسلة النازلة توجد كل حلقة بقسمة التي قبلها على التناسب المشترك او ضربها في التناسب المشترك الكسريّ. فان كانت الحلقة الاولى $\text{ت ب}^{٦}$ بالقسمة على ب تصير $\text{ت ب}^{٥}$ او بالضرب في $\frac{١}{\text{ب}}$ تصير $\text{ت ب}^{٦} \times \frac{١}{\text{ب}}$

$$= \frac{\text{ت ب}^{٦}}{\text{ب}} = \text{ت ب}^{٥}$$

وتكون السلسلة $\text{ت ب}^{٦}$ $\text{ت ب}^{٥}$ $\text{ت ب}^{٤}$ $\text{ت ب}^{٣}$ $\text{ت ب}^{٢}$ ت ب ت الخ. وان كانت الاولى ت والتناسب ب تكون السلسلة ت $\frac{\text{ت}}{\text{ب}}$ $\frac{\text{ت}}{\text{ب}^{٢}}$ $\frac{\text{ت}}{\text{ب}^{٣}}$ $\frac{\text{ت}}{\text{ب}^{٤}}$ $\frac{\text{ت}}{\text{ت}^{٥}}$ الخ او ت $\text{ت ب}^{-١}$ $\text{ت ب}^{-٢}$ $\text{ت ب}^{-٣}$ $\text{ت ب}^{-٤}$ الخ وان

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

نظرنا الى السلسلة ت ت ب $\text{ت ب}^{٢}$ $\text{ت ب}^{٣}$ $\text{ت ب}^{٤}$ $\text{ت ب}^{٥}$ الخ

نرى ان دليل القوة في كل حلقة اقلّ من عدد تلك الحلقة بواحدٍ. فنرى في الثانية الدليل ١ وفي الثالثة الدليل ٢ وهلم جرًّا. فان فرض ت = الحلقة الاولى ل = الاخيرة ب = التناسب وع = عدد الحلقات لنا $\text{ل} = \text{ت ب}^{\text{ع}-١}$ فلنا من ذلك هذه القضية وهي ان الحلقة الاخيرة من سلسلةٍ هندسية تعدل الحلقة الاولى مضروبةً في قوةٍ من التناسب دليلها اقلُّ من عدد الحلقات بواحدٍ. ومتى كانت الاولى والتناسب متساويين تصير المعدلة $\text{ل} = \text{ب ب}^{\text{ع}-١} = \text{ب}^{\text{ع}}$

٢١٤ اذا عُرِفت ثلاثٌ من الكميات المذكورة اي من ت ب ل ع تُعرَف منها الاخرى

(١) لنا ما سبق $\text{ل} = \text{ت ب}^{\text{ع}-١} =$ الاخيرة

(٢) بالقسمة $\text{ت} = \frac{\text{ل}}{\text{ب}^{\text{ع}-١}} =$ الاولى

(٣) بالقسمة والتجذير $\text{ب} = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ت}}\right)^{\frac{١}{\text{ع}-١}} =$ التناسب

اما عدة الحلقات فتوجد من هذه المعادلة بالانساب اي اللغرثمات وليس هذا موضعًا لذكر طريقتها

ثم اننا بالمعادلة الاخيرة نجد اية عدة فُرِضَت من اوساطٍ هندسية بين عددين . فان فرض ط = الاوساط يكون ط + ٢ عدد الحلقات اي ط + ٢ = ع ثم يعوض عن ع في المعادلة بقيمتها فتصير $\text{ب} = \left(\frac{\text{ل}}{\text{ت}}\right)^{\frac{١}{\text{ط}+١}}$ ومتى عرفنا التناسب نجد الاوساط بالضرب

ع ١ خذ وسطين هندسيين بين ٤ و٢٥٦

التناسب = ٤ والسلسلة ٤ ١٦ ٦٤ ٢٥٦

ع ٢ خذ ثلثة اوساط هندسية بين $\frac{١}{٩}$ و٩ الجواب $\frac{١}{٣}$ ١ ٣

٢١٥ فلننظر الان الى كيفية جمع سلسلة هندسية فنرى انهُ اذا ضُرِبَت حلقةٌ في التناسب يحصل حلقة اخرى . فان ضُرِب جميع الحلقات على هذا الاسلوب تحصل سلسلة جديدة شبيهة بالاولى الا في الحلقه الاولى والاخيرة

مثالهُ ٢ ٤ ٨ ١٦ ٣٢

بالضرب في التناسب ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤

فان طرحت الثانية من الاولى لا يبقى سوى الحلقة الاولى من الاولى والاخيرة من الثانية . وهكذا ان فُرِض ت ت ب ت ب^{٢} ت ب^{٣} ت ب$^{\text{ع}-١}$

فان ضربت كل حلقة في ب تصير ت ب ت ب^{٢} ت ب^{٣} ت ب$^{\text{ع}-١}$ ت ب$^{\text{ع}}$ وان فُرِض م = مجموع الحلقات فلنا م = ت + ت ب + ت ب^{٢} + ت ب^{٣} + ت ب$^{\text{ع}-١}$ وبالضرب في ب ب م = ت ب + ت ب^{٢} + ت ب^{٣} + ت ب$^{\text{ع}-١}$ + ت ب$^{\text{ع}}$

وبطرح الاولى من الثانية يبقى ب م − م = ت ب$^{\text{ع}}$ − ت

وبالقسمة على ب − ١ $\text{م} = \frac{\text{ت ب}^{\text{ع}} - \text{ت}}{\text{ب} - ١}$

وت ب$^{\text{ع}}$ هي الحلقة الاخيرة من سلسلة جديدة وهي تساوي حاصل التناسب

في الحلقة الاخيرة من السلسلة المفروضة اي ب ل

ثم بالتعويض م $= \frac{\text{ب ل} - \text{ث}}{\text{ب} - ١}$

فلنا مما سبق هذه القاعدة لاستعلام مجموع حلقات سلسلة هندسية وهي ان تاخذ حاصل التناسب في الاخيرة ثم تطرح منهُ الاولى وتقسم الباقي على التناسب الا واحدًا

(١) سلسلة هندسية فيها الحلقة الاولى ٦ والاخيرة ١٤٥٨ والتناسب ٣ فما هو مجموع الحلقات الجواب م $= \frac{\text{ب ل} - \text{ث}}{\text{ب} - ١} = \frac{٣ \times ١٤٥٨ - ٦}{٣ - ١} =$ ٢١٨٤

(٢) سلسلة نازلة كانت فيها الحلقة الاولى $\frac{١}{٢}$ والتناسب $\frac{١}{٣}$ وعدد الحلقات ٥ فما هو مجموع السلسلة

الحلقة الاخيرة $= \text{ت ب}^{\text{ع}-١} = \frac{١}{٢} \times (\frac{١}{٣})^{٤} = \frac{١}{١٦٢}$

والمجموع $= \frac{\frac{١}{٣} \times \frac{١}{١٦٢} - \frac{١}{٢}}{\frac{١}{٣} - ١} = \frac{١٢١}{١٦٢}$

(٣) ما هو مجموع هذه السلسلة ١ ٣ ٩ ٢٧ الى اخرهِ الى ١٢ حلقة

الجواب ٢٦٥٧٢٠

(٤) ما هو مجموع عشر حلقات من هذه السلسلة ١ $\frac{٢}{٣}$ $\frac{٤}{٩}$ $\frac{٨}{٢٧}$ الخ الجواب $\frac{١٧٤٠٧٥}{٥٩٠٤٩}$

٢١٦ كميات على سلسلة هندسية هي مناسبة لفضلاتها

لنفرض سلسلة ت ت ب ت ب^{٢} ت ب^{٣} ت ب^{٤} الخ فحسب كيفية السلسلة ت : ت ب :: ت ب : ت ب^{٢} :: ت ب^{٢} : ت ب^{٣} : ت ب^{٤} الى اخرهِ . ثم في كل زوجٍ يطرح السابق من تاليهِ فتصير ت : ت ب :: ت ب − ت : ت ب^{٢} − ت ب :: ت ب^{٢} − ت ب : ت ب^{٣} − ت ب^{٢} الخ

اي نسبة الاولى الى الثانية كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة ، وكنسبة فضلة الثانية والثالثة الى فضلة الثالثة والرابعة وهلم جرًّا الى اخرهِ

فرعٌ اذا كانت كمياتٌ على سلسلة هندسية تكون فضلاتها ايضًا على سلسلة هندسية

مثالهُ ٣ ٩ ٢٧ ٨١ ٢٤٣ الى اخره

وفضلاتها ٦ ١٨ ٥٤ ١٦٢ ايضًا على سلسلة

مسائل

(١) مطلوب ثلثة اعداد على سلسلة هندسية مجموعها ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤

لنفرض الاعداد ك وى ول

بالشروط ك : ى :: ى : ل اي ك ل = ى^{٢}

و ك + ى + ل = ١٤ وك^{٢} + ى^{٢} + ل^{٢} = ٨٤ الاعداد ٢ و٤ و٨

(٢) مطلوب ثلثة اعداد على سلسلةٍ هندسية حاصلها ٦٤ ومجموع كعابها ٥٨٤

ك = الحلقة الاولى وى = التناسب فتكون السلسلة ك ك ى ك ى^{٢}

بالشرط الاول ك × ك ى × ك ى^{٢} اي ك^{٣} ى^{٣} = ٦٤

بالثاني ك^{٣} + ك^{٣} ى^{٣} + ك^{٣} ى^{٦} = ٥٨٤ ك = ٢ ى = ٢

والاعداد ٢ ٤ ٨

(٣) مطلوب ثلثة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاول والثالث ٥٢ ومربع الوسط ١٠٠ الجواب ٢ ١٠ ٥٠

(٤) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاولين ١٥ ومجموع الاخيرين ٦٠ لنفرض السلسلة ك ك ى ك ى^{٢} ك ى^{٣} فنجد الاعداد ٥ ١٠ ٢٠ ٤٠

(٥) رجل قسم ٢١٠ دنانير بين بنيهِ الثلثة وكانت اقسامهم على سلسلة هندسية. وكان للاول ٩٠ دينارًا اكثر من الاخير فكم كان قسم كل واحدٍ منهم

(٦) مطلوب ثلثة اعداد على سلسلة هندسية وفضلة اكبرها واصغرها ١٥ ونسبة فضلة مربعي الاكبر والاصغر الى مجموع مربعات الاعداد الثلثة :: ٥ : ٧

الجواب ٥ ١٠ ٢٠

(٧) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة هندسية الثانية منها اقلُّ من الرابعة باربعة وعشرين ونسبة مجموع الطرفين : مجموع الوسطين :: ٧ : ٣

الجواب ١ ٣ ٩ ٢٧

(٨) رجل استخدم خادمًا الى مدة ١١ سنه. ووعدهُ ان يعطيه في السنة الاولى حبة قمح وغلة هذه الحبة في الثانية وغلة الغلة في الثالثة وهلم جرًّا الى نهاية المدة المذكورة. فان اثمرت كل حبة عشر حبات كل سنة فكم حبة تبلغ

الجواب ١١١١١١١١١١١٠

(٩) رجلٌ هندي اخترع الشطرنج وقدمهُ الى الملك فاعجبهُ جدًّا وقال لهُ مهما طلبت اعطيك. فطلب الرجل حبة قمح للبيت الاول من رقعة الشطرنج وحبتين للثاني واربع حبات للثالث وثماني للرابع وهلم جرًّا الى الاربعة والستين بيتًا فكم حبة اخذ

الفصل السادس عشر

في الغير المتناهيات ونظير الغير المتناهي

٢١٧ الغير المتناهي بحسب مفهومهِ المطلق شيءٌ لا يقبل زيادةً ولا يُتوهَّم لهُ زيادةٌ. وهذا هو المراد بهِ في الادبيات والالهيات. واما في العدد فلا يمكن تصورهُ اذ يمكن ان يزاد عددٌ حتى يتجاوز ايَّ عددٍ فُرِض. وبحسب ذلك يكون العدد الاعظم ما يستحيل الوصول اليهِ. ومهما زيد عددٌ يمكن ان يُتوهَّم لهُ زيادةٌ فيكون المراد بالغير المتناهي في التعليميات غير المراد في غيرها كما مرَّ

٢١٨ الكمية التعليمية اذا تُوُهِمت زيادتها فوق حدودٍ مفروضةٍ سميت غير متناهية. والمراد بالحدود المفروضة ما يستطيع العقل ادراكهُ. وعلى هذا المعنى تكون الاعداد الطبيعية التي هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الى اخرهِ غير متناهية لانها مهما زيدت يمكن ان تزاد ايضًا. وبناءً على هذا يمكن ان يقال في غير متناهٍ انهُ اعظم من غير متناهٍ اخر. مثالهُ ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الى غير نهايةٍ و٤ ٤ ٤ ٤ ٤

الى غير نهايةٍ. فمهما زاد السرْدَانِ يكون الثاني مضاعف الاول وهكذا $ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤}$ الخ و $٩ ت + ٩ ت^{٢} + ٩ ت^{٣} + ٩ ت^{٤}$ الخ. يكون الثاني تسعة امثال الاول

يجب ان نميز بين كميةٍ غير متناهية وعدة اجزآء غير متناهية اذ قد يمكن ان تتعدد الاجزآء الى غير نهايةٍ وتكون الكمية كلها متناهية وصغيرة. مثالهُ اذا أُخِذ واحدٌ ثم نصفهُ ثم ربعهُ وهلم جرًّا يكون لنا $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢}$ الى اخرهِ. فمهما تعددت الاجزآء لا يمكن ان تفوق الواحد. وهكذا $\frac{٨}{٢} + \frac{٨}{٤} + \frac{٨}{٨} + \frac{٨}{١٦} + \frac{٨}{٣٢} + \frac{٨}{٦٤}$ الى اخرهِ لا يمكن ان تفوق الثمانية

٢١٩ اذا هبطت كمية تحت حدٍ مفروض سميت نظير الغير المتناهي مثالهُ $\frac{١}{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠٠}$

وعلى المعنى المذكور يمكن قسمة كمية الى غير نهاية. والكمية التي هي اصغر ما يكون لا يمكن الوصول اليها اذ لا يمكن تجزيها الى حدٍ لا يوهم تجزيها ايضًا وعلى هذا المعنى ايضًا يمكن ان يكون نظير غير متناهٍ اصغر من نظير غير متناهٍ اخر. مثالهُ $\frac{٦}{١٠}$ $\frac{٦}{١٠٠}$ $\frac{٦}{١٠٠٠}$ $\frac{٦}{١٠٠٠٠}$ الى اخرهِ و $\frac{٣}{١٠}$ $\frac{٣}{١٠٠}$ $\frac{٣}{١٠٠٠}$ $\frac{٣}{١٠٠٠٠}$ الى اخرهِ. فيكون الثاني نصف الاول مهما تعددت الاجزآء. وهكذا

$\frac{١}{١٠}$ $\frac{١}{١٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠}$ $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ و $\frac{١}{٤٠}$ $\frac{١}{٤٠٠}$ $\frac{١}{٤٠٠٠}$ $\frac{١}{٤٠٠٠٠}$

٢٢٠ اذا حدثت في الاعمال الجبرية كمية نظير الغير المتناهي يمكن طرحها من العمل بدون ان يَجعَل فرقًا في الحاصل اذ لا اعتبار لما هو صغيرٌ بهذا المقدار حتى لا يشعر بحضورهِ او غيابهِ. مثالهُ في تحويل $\frac{١}{٣}$ الى كسرٍ عشري فان قسمنا الصورة على المخرج يكون لنا $\frac{٣}{١٠}$ وهي تعدل $\frac{١}{٣}$ تقريبًا و $\frac{٣٣}{١٠٠}$ اكثر

تقريبًا و $\frac{٣٣٣}{١٠٠٠}$ اكثر تقريبًا وهلمّ جرًّا حتى يصير الفرق بين $\frac{١}{٣}$ والكسر العشري صغيرًا جدًّا لا اعتبار لهُ

ونرى مما سبق انهُ يمكن لكميةٍ ان تقترب الى اخرى الى غير نهايةٍ بدون ان تبلغ اليها . مثالهُ في تحويل $\frac{١}{٣}$ الى كسر عشري مهما امتدَّ في منازل الكسر العشري لا يمكن ان يبلغ الى $\frac{١}{٣}$ تمامًا . ومهما تعددت المنازل فلا بد ان يبقى بينها وبين $\frac{١}{٣}$ فرق ولو كان صغيرًا الى غير نهايةٍ . وفي كمياتٍ من هذا النوع سميت احدها حدَّ الاخرى . فان $\frac{١}{٣}$ هو حدُّ ٣٣٣٣٣، الى اخرهِ و $\frac{٢}{٣}$ هو حدُّ ٦٦٦٦٦، الخ الى غير نهايةٍ . ثم ان نظير الغير المتناهي وان لم يكن لهُ اعتبارٌ في ذاتهِ ان وقع مضروبًا فيهِ او مقسومًا عليهِ يكون لهُ احيانًا اعتبارٌ كلي . واذا كان نظير الغير المتناهي لا يفرق عن صفرٍ بما يشعر بهِ فيُدَلُّ عليهِ احيانًا بصفرٍ ويُدَلُّ على الغير المتناهي بهذه العلامة ∞

٢٢١ لما كان الغير المتناهي اعظم من نظير الغير المتناهي بما لا يوصف كان يمكن عند ارتباطهما بعلامة الجمع او الطرح اخراج نظير الغير المتناهي من العمل بالكلية . وهكذا اذا ارتبط نظير الغير المتناهي بكميةٍ متناهية . ولكن اذا ضرب غير متناهٍ في متناهٍ يزاد بذلك الغير المتناهي كفية الكميات . مثالهُ ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ ٢ الخ × ٤ يكون الحاصل ٨ ٨ ٨ ٨ ٨ الخ اي اربعة امثال الاولى . واذا انقسم غير متناهٍ على متناهٍ ينقص الاول كفية الكميات مثالهُ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ ٦ الخ ÷ ٢ = ٣ ٣ ٣ ٣ ٣ الخ اي نصف الاولى . وان ضربت كمية متناهية في نظير الغير المتناهي يكون الحاصل نظير الغير المتناهي . مثالهُ اذا فرض ل = المتناهية و ٠ = نظير الغير المتناهي لنا ل × ٠ = ٠ . لانهُ لو كان المضروب فيهِ واحدًا لكان الحاصل مساويًا للمضروب . وان كان اقلَّ من واحدٍ يكون الحاصل اقلَّ من المضروب . وهنا فرضنا المضروب فيهِ اقلَّ من واحدٍ الى غير نهايةٍ فيكون الحاصل اقلَّ من المضروب فيهِ الى غير نهايةٍ . واذا انقسمت كمية متناهية على نظير الغير المتناهي يكون الخارج غير متناهٍ اي $\frac{\text{ل}}{٠} = \infty$ لانهُ كلما قلَّ المقسوم عليهِ زاد

الخارج وهنا قد قلّ المقسوم عليهِ الى غير نهايةٍ فزاد الخارج الى غير نهايةٍ . ومثلهُ ٦ ÷ ٢ = ٣ و٦ ÷ ٢´ = ٣٠ و٦ ÷ ٠٢´ = ٣٠٠ و٦ ÷ ٠٠٢´ = ٣٠٠٠ الخ واذا انقسمت متناهيةٌ على غير متناهٍ يكون الخارج نظير الغير المتناهي اي $\frac{ل}{\infty}$ = ٠ لانهُ كلما زاد المقسوم عليهِ قلّ الخارج. فان زاد المقسوم عليهِ الى غير نهايةٍ يقلّ الخارج الى غير نهايةٍ

* * *

الفصل السابع عشر

في القسمة على المركّب وفي العادّ الاكبر

٢٢٢ اذا اردت القسمة على مقسومٍ عليهِ مركّبٍ فاقسم الجزء الاول من المقسوم على الاول من المقسوم عليهِ واضرب كل المقسوم عليهِ في الخارج واطرح الحاصل من المقسوم. ثم أنزل من اجزاءَ المقسوم ما يقتضي وهلم جرًّا الى نهاية العمل. وهذه صورتهُ وامثلتهُ

(١) اقسم ث س + ب س + ث د + ب د على ث + ب

ث + ب)ث س + ب س + ث د + ب د(س + د

ث س + ب س

+ ث د + ب د

+ ث د + ب د

. .

تنبيه. قبل القسمة يجب ترتيب الاجزاءَ حتى يكون الحرف الاول في المقسوم عليهِ اولاً في المقسوم. وان تكون القوة العليا فيهما اولاً ونكتب بقية القوات على رتبة قواتها

(٢) اقسم ٢ ث^{٢} ب + ب^{٣} + ٢ ث ب^{٢} + ث^{٣} على ث^{٢} + ب^{٢} + ث ب فان اخذنا ث^{٢} للجزء الاول من المقسوم عليهِ يجب ان ناخذ ث^{٣} للاول في المقسوم ونكتب البقية حسب قوات ث

ت^{٢} + ت ب + ب^{٢}) ت^{٣} + ٢ ت^{٢} ب + ٢ ت ب^{٢} + ب^{٣} (ت + ب

ت^{٣} + ت^{٢} ب + ت ب^{٢}

ت^{٢} ب + ت ب^{٢} + ب^{٣}

ت^{٢} ب + ت ب^{٢} + ب^{٣}

. . . .

ويجب في هذه الاعمال ملاحظة العلامات حسب القواعد المتقدمة في الطرح والضرب والقسمة

(٣) اقسم ٢ ت ك − ٢ ت^{٢} ك − ٣ ت^{٢} ك ى + ٦ ت^{٣} ك + ت ك ى − ك ى على ٢ ت − ى فبترتيب الاجزاء حسب قوات ت

٢ت − ى) ٦ت^{٣} ك − ٣ت^{٢} ك ى − ٢ت^{٢} ك + ت ك ى + ٢ت ك − ك ى (٣ت^{٢} ك − ت ك + ك

٦ت^{٣} ك − ٣ت^{٢} ك ى

. . − ٢ت^{٢} ك + ت ك ى

− ٢ت^{٢} ك + ت ك ى

. . + ٢ت ك − ك ى

+ ٢ت ك − ك ى

. .

٢٢٣ قد راينا في الضرب ان بعض الاجزاء احيانًا تفنى وعند القسمة تعود هذه الاجزاء فيكون في الخارج اجزاء لم تُرَ في المقسوم

(٤) اقسم ت^{٣} + ك^{٣} على ت + ك

ت + ك) ت^{٣} + ك^{٣} (ت^{٢} − ت ك + ك^{٢}

ت^{٣} + ت^{٢} ك

− ت^{٢} ك + ك^{٣}

− ت^{٢} ك − ت ك^{٢}

+ ت ك^{٢} + ك^{٣}

+ ت ك^{٢} + ك^{٣}

. . .

(٥) ت^{٢} − ٢ ت ك + ٢ ك^{٢}) ت^{٤} + ٤ ك^{٤} (ت^{٢} + ٢ ت ك + ٢ ك^{٢}

ت^{٤} − ٢ ت^{٣} ك + ٢ ت^{٢} ك^{٢}

+ ٢ ت^{٣} ك − ٢ ت^{٢} ك^{٢} + ٤ ك^{٤}

+ ٢ ت^{٣} ك − ٤ ت^{٢} ك^{٢} + ٤ ت ك^{٣}

+ ٢ ت^{٢} ك^{٢} − ٤ ت ك^{٣} + ٤ ك^{٤}

+ ٢ ت^{٢} ك^{٢} − ٤ ت ك^{٣} + ٤ ك^{٤}

. . .

(٦) اقسم ت^{٤} + ت^{٣} + ت^{٢}ب + ت ب + ٢ت س + ٢ س على ت + ١
الخارج ت^{٣} + ت ب + ٢ س

(٧) اقسم ت + ب − س − ت ك − ب ك + س ك على ت + ب − س
الخارج ١ − ك

(٨) اقسم ٢ ت^{٤} − ١٣ ت^{٣} ك + ١١ ت^{٢} ك^{٢} − ٨ ت ك^{٣} + ٢ ك^{٤} على ٢ ت^{٢} − ت ك + ك^{٢}
الخارج ت^{٢} − ٦ ت ك + ٢ ك^{٢}

٢٢٤ اذا بقيت بقيةٌ بعد انزال جميع الاجزاء تكتب فوق المقسوم عليهِ على صورة كسرٍ كما في الحساب

مثال ٩ ت + ب) ت س + ب س + ت د + ب د + ك (س + د + $\frac{\text{ك}}{\text{ت + ب}}$
ت س + ب س
―――――――
ت د + ب د
ت د + ب د
―――――――
ك
―――――――

مثال ١٠ د − ح) ت د − ت ح + ب د − ب ح + ى (ت + ب + $\frac{\text{ى}}{\text{د − ح}}$
ت د − ت ح
―――――――
ب د − ب ح
ب د − ب ح
―――――――
ى

(١١) اقسم ٦ ت ك + ٢ ك ى − ٣ ت ب − ب ى + ٣ ت س + س ى + ح على ٣ ت + ى
الخارج ٢ ك − ب + س + $\frac{\text{ح}}{\text{٣ ت + ى}}$

(١٢) اقسم ت^{٢}ب − ٣ت^{٢} + ٢ت ب − ٦ت − ٤ ب + ٢٢ على ب − ٣
الخارج ت^{٢} + ٢ ت − ٤ + $\frac{\text{١٠}}{\text{ب − ٣}}$

(١٣) ت + $\sqrt{\text{ب}}$) ت س + س $\sqrt{\text{ب}}$ + ت $\sqrt{\text{د}}$ + $\sqrt{\text{ب د}}$ (س + $\sqrt{\text{د}}$
ت س + س $\sqrt{\text{ب}}$
―――――――
ت $\sqrt{\text{د}}$ + $\sqrt{\text{ب د}}$
ت $\sqrt{\text{د}}$ + $\sqrt{\text{ب د}}$
―――――――
. .

(١٤) اقسم $ت + \overline{ر٢ى} + ت\,\overline{ر٢ى} + رى$ على $ت + \overline{ر٢ى}$

الخارج $١ + \overline{ر٢ى}$

(١٥) اقسم $ك^{٣} - ٣ ت ك^{٢} + ٣ ت^{٢} ك - ت^{٣}$ على $ك - ت$

(١٦) اقسم $٢ ى^{٣} - ١٩ ى^{٢} + ٢٦ ى - ١٧$ على $ى - ٨$

(١٧) اقسم $ك^{٦} - ١$ على $ك - ١$

(١٨) اقسم $٤ ك^{٤} - ٩ ك^{٢} + ٦ ك - ٣$ على $٢ ك^{٢} + ٣ ك - ١$

(١٩) اقسم $ت^{٤} + ٤ ت^{٢} ب + ٣ ب^{٤}$ على $ت^{٢} + ٣ ب$

(٢٠) اقسم $ك^{٤} - ت^{٢} ك^{٢} + ٢ ت^{٣} ك - ت^{٤}$ على $ك^{٢} - ت ك + ت^{٢}$

٢٢٥ اذا انقسمت فضلة قوتين على فضلة كميتيهما الاصليتين يخرج من ذلك سلسلة قوات

مثالهُ $(ى^{٢} - ت^{٢}) \div (ى - ت) = ى + ت$

$(ى^{٣} - ت^{٣}) \div (ى - ت) = ى^{٢} + ت ى + ت^{٢}$

$(ى^{٤} - ت^{٤}) \div (ى - ت) = ى^{٣} + ت ى^{٢} + ت^{٢} ى + ت^{٣}$

$(ى^{٥} - ت^{٥}) \div (ى - ت) = ى^{٤} + ت ى^{٣} + ت^{٢} ى^{٢} + ت^{٣} ى + ت^{٤}$

ويبرهن ذلك بالضرب

وهكذا يبرهن ان فضلة قوات كميتين اذا كان دليلهما عدد شفع يمكن قسمتها على مجموع الكميتين

مثالهُ $(ى^{٢} - ت^{٢}) \div (ى + ت) = ى - ت$

و $(ى^{٤} - ت^{٤}) \div (ى + ت) = ى^{٣} - ت ى^{٢} + ت^{٢} ى - ت^{٣}$

و $(ى^{٦} - ت^{٦}) \div (ى + ت) = ى^{٥} - ت ى^{٤} + ت^{٢} ى^{٣} - ت^{٣} ى^{٢} +$

$ت^{٤} ى - ت^{٥}$

ومجموع قوتين من كميتين ان كان الدليل وترًا يُقسَم على مجموع الكميتين

مثالهُ $(ى^{٣} + ت^{٣}) \div (ى + ت) = ى^{٢} - ت ى + ت^{٢}$

$(ى^{٥} + ت^{٥}) \div (ى + ت) = ى^{٤} - ت ى^{٣} + ت^{٢} ى^{٢} - ت^{٣} ى + ت^{٤}$

(ى^{٧} + ت^{٧}) ÷ (ى + ت) = ى^{٦} − ت ى^{٥} + ت^{٢} ى^{٤} − ت^{٣} ى^{٣} + ت^{٤} ى^{٢} − ت^{٥} ى + ت^{٦}

في العادّ الاكبر للكميتين

٢٢٦ لكي تجد العادَّ الاكبر اقسم احدى الكميتين على الاخرى والمقسوم عليهِ على الباقي ثم المقسوم عليهِ الثاني على الباقي الثاني وهلم جرًّا الى ان لا يبقى شيءٌ فيكون المقسوم عليهِ الاخير العادَّ الاكبر. وان اريد العادُّ الاكبر لثلاث كميات يجب اخذهُ لاثنين منهما ثم العادّ الاكبر بين الثالثة والعادّ الاكبر الاول وهكذا مهما تعددت الكميات

٢٢٧ في اخذ العاد الاكبر لكمياتٍ مركبة يجب احيانًا تنقيص المقسوم عليهِ او زيادة المقسوم. ويمكن ذلك بدون تغيير العادّ الاكبر اذا ضُرِب او انقسم احدهما على كميةٍ لا ينقسم عليها الاخر وليس فيها جزءٌ ينقسم عليهِ الاخر. مثالهُ ان العادُّ الاكبر بين ت ب وث س هو ت ان ضربت احداهما في د فيكون العاد الاكبر بين ت ب د وث س هو ت ايضًا. وان فرض ت ب وث س د يكون العاد الاكبر بينهما ت ايضًا. واذا انقسم ت س د على د يبقى ت س فيكون ت العادُّ الاكبر بينهما كما كان. وبحسب ذلك يمكن تسهيل العمل في اخذ العاد الاكبر بقسمة المقسوم عليهِ على كمية ليست بمقسومٍ عليهِ للمقسوم او ضرب المقسوم في كميةٍ لا تعدُّ المقسوم عليهِ

مثال اول ما هو العادُّ الاكبر بين ٦ ت^{٢} + ١١ ت ك + ٣ ك^{٢} و٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢}

وهذه صورة العمل

٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢}) ٦ ت^{٢} + ١١ ت ك + ٣ ك^{٢} (١

٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢}

\+ ٤ ت ك + ٦ ك^{٢} اقسم على ٢ ك

٢ ت + ٣ ك) ٦ ت^{٢} + ٧ ت ك − ٣ ك^{٢} (٣ ت − ك

٦ ت^{٢} + ٩ ت ك

− ٢ ت ك − ٢ ك^{٢}

− ٢ ت ك − ٣ ك^{٢}

٠ ٠

فالعادُّ الاكبر بين الكميتين ٢ ت + ٣ ك

٢ ما هو العادُ الاكبر بين $ك^{٣}$ − $ب^{٢}$ ك و$ك^{٢}$ + ٢ ب ك + $ب^{٢}$

الجواب ك + ب

٣ ما هو العادُ الاكبر بين س ك + $ك^{٢}$ و$ت^{٢}$ س + $ت^{٢}$ ك الجواب س + ك

٤ ما هو العادُ الاكبر بين ٣ $ك^{٢}$ − ٢٤ ك − ٩ و ٢ $ك^{٢}$ − ١٦ ك − ٦

الجواب $ك^{٢}$ − ٨ ك − ٣

٥ ما هو العاد الاكبر بين $ت^{٤}$ − $ب^{٤}$ و$ت^{٥}$ − $ب^{٢}$ $ت^{٣}$ الجواب $ت^{٢}$ − $ب^{٢}$

٦ ما هو العاد الاكبر بين $ك^{٢}$ − $ت^{٢}$ و$ك^{٤}$ − $ت^{٤}$

٧ ما هو العادُ الاكبر بين $ك^{٢}$ − ١ وك ى + ى الجواب ك + ١

٨ ما هو العاد الاكبر بين $ت^{٢}$ − ت ب − ٢ $ب^{٢}$ و$ت^{٢}$ − ٣ ت ب + ٢ $ب^{٢}$

٩ ما هو العاد الاكبر بين $ت^{٤}$ − $ك^{٤}$ و$ت^{٣}$ − $ت^{٢}$ ك − ت $ك^{٢}$ + $ك^{٣}$

١٠ ما هو العاد الاكبر بين $ت^{٣}$ − ت $ب^{٢}$ و$ت^{٢}$ + ٢ ت ب + $ب^{٢}$

الفصل الثامن عشر

في ترقية الكميات الثنائية وبسطها

٢٢٨ قد رأينا سابقًا كيفية ترقية الكميات بالضرب غير انها اذا كانت القوة المطلوبة عالية يطول بها العمل جدًا . وقد اخترع الفيلسوف اسحق نيوتون قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية ولشدة اعتبارها عند علماء هذا الفن كتبوها على قبرهِ في كنيسة وستمنستر في لندن

٢٢٩ اذا ضربت كمية مثل ت + ب فلنا هذه القوات

($ت$ + ب)^{٢} = $ت^{٢}$ + ٢ ت ب + $ب^{٢}$

($ت$ + ب)^{٣} = $ت^{٣}$ + ٣ $ت^{٢}$ ب + ٣ ت $ب^{٢}$ + $ب^{٣}$

($ت$ + ب)^{٤} = $ت^{٤}$ + ٤ $ت^{٣}$ ب + ٦ $ت^{٢}$ $ب^{٢}$ + ٤ ت $ب^{٣}$ + $ب^{٤}$

$(ت + ب)^{٥} = ت^{٥} + ٥ ت^{٤} ب + ١٠ ت^{٣} ب^{٢} + ١٠ ت^{٢} ب^{٣} + ٥ ت ب^{٤} + ب^{٥}$

فنرى من ذلك ان الدلايل جارية على اسلوبٍ واحدٍ ابدًا. اي ان دليل ت في الجزء الاول ودليل ب في الجزء الاخير يعدل دليل اسم القوة المفروضة. وان دلايل ت تهبط بواحدٍ في كل جزء. وان دلايل ب تعلو بواحدٍ في كل جزء بعد الاول

واذا قطعنا النظر عن المسمّيات نرى مما سبق ان دلايل اية قوة فرضت من كميةٍ ثنائية تعدل اسم القوة المفروضة في الجزء الاول والاخير وان دلايل الاصلية تهبط ودلايل التابعة تعلو واحدًا في كل جزء

تنبيه. يراد بالاصلية الجزء الاول من الكمية الثنائية وبالتابعة الجزء الثاني. مثالهُ في ت + ب سميت ت الاصلية وب التابعة

ثم ان قيل ما هي القوة الثامنة من ت + ب بقطع النظر عن المسميات فالجواب

$ت^{٨} + ت^{٧} ب + ت^{٦} ب^{٢} + ت^{٥} ب^{٣} + ت^{٤} ب^{٤} + ت^{٣} ب^{٥} + ت^{٢} ب^{٦} + ت ب^{٧} + ب^{٨}$

ثم نرى عدد الاجزاء اكثر من الآحاد في اسم القوة بواحدٍ ابدًا. فاذا نرى في المربع ثلثة اجزاء وفي المكعب اربعة وفي القوة الرابعة خمسة وفي الخامسة ستة وهلم جرًا

٢٣٠ ثم لكي نجد المسميات اذا نظرنا الى القوات المتقدمة (٢٢٩) نرى

مسميات المربّع ١ ٢ ١ = ٤ = $٢^{٢}$

ومسميات المكعّب ١ ٣ ٣ ١ = ٨ = $٢^{٣}$

ومسميات القوة الرابعة ١ ٤ ٦ ٤ ١ = ١٦ = $٢^{٤}$

ومسميات القوة الخامسة ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١ = ٣٢ = $٢^{٥}$

فنرى ان مسمى الجزء الاول هو واحدٌ ابدًا. وان مسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة المفروضة. ومن ثمَّ اذا ضُرِب مسمّى جزء في دليل الكمية الاصلية وانقسم الحاصل على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء الذي يتلوهُ

واذا نظرنا الى المسميات المذكورة آنفًا نرى انها اولًا تزيد الى حدٍ معلوم ثم تهبط

مثلما زادت فتكون متساوية في الجزء الاول والاخير وفي الثاني والذي قبل الاخير وفي الثالث والذي قبل ما قبل الاخير . فاذا عرفنا مسميات نصف الاجزاء نعرف منها مسميات البقية

وفي اية قوةٍ فرضت من كمية ثنائية مثل ت + ب يعدل مجموع المسميات تلك القوة من اثنين كما ترى قُبيل هذا

٢٢١ ان القضايا الماضي ذكرها قد انحصرت في نظريةٍ واحدة تُسمّى النظرية الثنائية . وهي

انهُ في كل قوةٍ من كمية ثنائية يكون دليل الاصلية مساويًا لاسم القوة . ومن ثمَّ يهبط بواحدٍ في كل جزءٍ . ودليل التابعة يبتدي بواحدٍ في الجزء الثاني . ومن ثم يعلو بواحدٍ في كل جزءٍ

مسمّى الجزء الاول واحدٌ ومسمى الجزء الثاني يعدل دليل القوة المفروضة . ومن ثمَّ اذا ضرب مسمى جزءٍ في دليل الاصلية وانقسم على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمّى الجزء التالي لهُ

وتُكتَب هذه النظرية في عبارةٍ جبرية هكذا $(\text{ت}+\text{ب})^{\text{ن}} = \text{ت}^{\text{ن}} + \text{ن} \times \text{ت}^{\text{ن}-١}\,\text{ب} + \text{ن} \times \frac{\text{ن}-١}{٢}\,\text{ت}^{\text{ن}-٢}\,\text{ب}^{٢}$ الى اخرهِ

مثال اول ما هي القوة السادسة من ك + ى

الجواب $\text{ك}^{٦} + ٦\,\text{ك}^{٥}\,\text{ى} + ١٥\,\text{ك}^{٤}\,\text{ى}^{٢} + ٢٠\,\text{ك}^{٣}\,\text{ى}^{٣} + ١٥\,\text{ك}^{٢}\,\text{ى}^{٤} + ٦\,\text{ك}\,\text{ى}^{٥} + \text{ى}^{٦}$

$\overline{٢}$ $(\text{د}+\text{ح})^{٥} = \text{د}^{٥} + ٥\,\text{د}^{٤}\,\text{ح} + ١٠\,\text{د}^{٣}\,\text{ح}^{٢} + ١٠\,\text{د}^{٢}\,\text{ح}^{٣} + ٥\,\text{د}\,\text{ح}^{٤} + \text{ى}^{٥}$

$\overline{٣}$ ما هي القوة الخامسة من $\text{ك}^{٢} + ٣\,\text{ى}^{٢}$

بوضع ت عوض $\text{ك}^{٢}$ ووضع ب عوض $٣\,\text{ى}^{٢}$ لنا

$(\text{ت}+\text{ب})^{٥} = \text{ت}^{٥} + ٥\,\text{ت}^{٤}\,\text{ب} + ١٠\,\text{ت}^{٣}\,\text{ب}^{٢} + ١٠\,\text{ت}^{٢}\,\text{ب}^{٣} + ٥\,\text{ت}\,\text{ب}^{٤} + \text{ب}^{٥}$

ثم بترجيع $ك^{٢}$ و $٣ ى^{٢}$ عوض ت وب لنا

$ك^{١٠} + ١٥ ك^{٨} ى^{٢} + ٩٠ ك^{٦} ى^{٤} + ٢٧٠ ك^{٤} ى^{٦} + ٤٠٥ ك^{٢} ى^{٨} + ٢٤٣ ى^{١٠}$

$\overline{٤}$ ماهي القوة السادسة من $٣ ك + ٢ ى$

الجواب $٧٢٩ ك^{٦} + ٢٩١٦ ك^{٥} ى + ٤٨٦٠ ك^{٤} ى^{٢} + ٤٣٢٠ ك^{٣} ى^{٣} + ٢١٦٠ ك^{٢} ى^{٤} + ٥٧٦ ك ى^{٥} + ٦٤ ى^{٦}$

٢٣٢ الكمية الفضلية ترقى كالايجابية غير ان علاماتها تتغير فان $(ت - ب)^{٢} = ت^{٢} - ٢ ت ب + ب^{٢}$

و$(ت - ب)^{٣} = ت^{٣} - ٣ ت^{٢} ب + ٣ ت ب^{٢} - ب^{٣}$

و$(ت - ب)^{٤} = ت^{٤} - ٤ ت^{٣} ب + ٦ ت^{٢} ب^{٢} - ٤ ت ب^{٣} + ب^{٤}$ الخ

فنرى ان كل جزء يقع فيهِ قوة وتريَّة من الكمية التابعة تكون علامتهُ سلبية

القوة السادسة من $ك - ى = ك^{٦} - ٦ ك^{٥} ى + ١٥ ك^{٤} ى^{٢} - ٢٠ ك^{٣} ى^{٣} + ١٥ ك^{٢} ى^{٤} - ٦ ك ى^{٥} + ى^{٦}$

٢٣٣ متى كان احد جزءي كميةٍ ثنآئية واحدًا يمكن تركهُ الا من الجزء الاول او الاخير لان كل قوةٍ من واحدٍ واحدٌ وضرب كميةٍ في واحد لا يغيرها شيئًا. مثالهُ

$(ك + ١)^{٣} = ك^{٣} + ٣ ك^{٢} \times ١ + ٣ ك \times ١^{٢} + ١^{٣}$

وذاك $= ك^{٣} + ٣ ك^{٢} + ٣ ك + ١$

فلا داعيَ الى كتابة الواحد الا لحفظ الدليل لاجل معرفة المسميات. وليس لها لزومٌ ايضًا من هذا القبيل لاننا نعرف الدلايل من كون مجموع الدليلين في كل جزء يعدل اسم القوة المفروضة

مثالهُ $(١ - ى)^{٦} = ١ - ٦ ى + ١٥ ى^{٢} - ٢٠ ى^{٣} + ١٥ ى^{٤} - ٦ ى^{٥} + ى^{٦}$

اننا نرى مما سبق ان العبارة الدالة على قوةِ الجزء الاول من جذرها واحد هي بسيطة جدًا. فاذا تحولت ثنآئيةٌ ما الى اخرى الجزء الاول منها واحدٌ يمكن الدلالة على كل قوةٍ منها بالعبارة المذكورة. مثالهُ $ت + ك ÷ ت = (١ + \frac{ك}{ت})$ او $ت + ك = ت \times (١ + \frac{ك}{ت})$ فاذًا

$(ت+ك)^{٢} = ت^{٢} \times (١ + \frac{ك}{ت})^{٢}$ وبالبسط تصير

$ت^{٢} \times (١ + ٢\frac{ك}{ت} + \frac{ك^{٢}}{ت^{٢}})$ وقس على ذلك

٢٢٤ متى كان دليل قوةٍ مفروضة من ثنآئيةٍ صحيحًا ايجابيًا تنتهي السلسلة حسبما تقدم . ومتى كان دليل القوة المفروضة سلبيةً لاتنتهي السلسلة بل يمكن الامتداد فيها الى غير نهايةٍ ككثيرٍ من الكسور العشرية . مثالهُ لو قيل ابسط $\frac{١}{(ت+ى)^{٢}}$ او $(ت+ى)^{-٢}$ لقيل $ت^{-٢} - ٢ت^{-٣}ى + ٣ت^{-٤}ى^{٢} - ٤ت^{-٥}ى^{٣} + ٥ت^{-٦}ى^{٤}$ الخ

فنرى هنا المسميات تعلو في كل جزء بواحد والعلامات ايجابية وسلبية بالتداول

٢٢٥ ثم ان النظرية الثنآئية تفيد جدًا في تجذير الثنآئيات لانها تدل على الجذر كما تدل على القوة غير ان دليل القوة صحيح ودليل الجذر كسرٌ مثالهُ $(ت+ب)^{ن}$ فان كانت ن عوضًا عن ٢ مثلاً تكون العبارة دالة على قوةٍ وان كانت عوضًا عن $\frac{١}{٢}$ مثلاً تكون جذرًا

اذا انبسط جذرٌ بواسطة النظرية الثنآئية فالسلسلة لاتنتهي لان السلسلة انما تنتهي عند ما يصير دليل الاصلية صفرًا حتى تفنى المسميات . والكسر لا يمكن ان ينتهي الى صفرٍ بطرح واحدٍ منهُ على التوالي . فان كان الدليل في الجزء الاول $\frac{١}{٢}$ يكون في الثاني $\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$ وفي الثالث $-\frac{١}{٢} - ١ = -\frac{٣}{٢}$ وفي الرابع $-\frac{٣}{٢} - ١ = -\frac{٥}{٢}$ مثالهُ لو قيل ما هو الجذر المالي من ت + ب اي $(ت+ب)^{\frac{١}{٢}}$ لقيل $ت^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}ت^{-\frac{١}{٢}}ب - \frac{١}{٨}ت^{-\frac{٣}{٢}}ب^{٢} + \frac{١}{١٦}ت^{-\frac{٥}{٢}}ب^{٣}$ الخ

مثال اول ابسط $(ت^{٢}+ك)^{\frac{١}{٢}}$ بوضع ب عوض $ت^{٢}$ تصير $(ب+ك)^{\frac{١}{٢}}$

وبسطها $= ب^{\frac{١}{٢}} + \frac{١}{٢}ب^{-\frac{١}{٢}}ك - \frac{١}{٨}ب^{-\frac{٣}{٢}}ك^{٢} + \frac{٣}{٤٨}ب^{-\frac{٥}{٢}}ك^{٣}$

$-\frac{١٥}{٢٤٨} ب^{-\frac{٧}{٢}} ك^{٤}$ الى اخره

وذاك $= ب^{\frac{١}{٢}} + \frac{ك}{٢ ب^{\frac{١}{٢}}} - \frac{ك^{٢}}{٨ ب^{\frac{٣}{٢}}} - \frac{١٥ ك^{٤}}{٢٨٤ ب^{\frac{٥}{٢}}}$ الخ

ثم بترجيع $ت^{٢}$ عوض ب تصير

$ت + \frac{ك}{٢ ت} - \frac{ك^{٢}}{٨ ت^{٣}} + \frac{٣ ك^{٣}}{٤٨ ت^{٥}} - \frac{١٥ ك^{٥}}{٢٨٤ ت^{٧}}$ الخ

$\overline{٢}$ ابسط $(١ + ك)^{\frac{١}{٢}}$

الجواب $١ + \frac{ك}{٢} - \frac{ك^{٢}}{٨} + \frac{٣ ك^{٣}}{٤٨} - \frac{١٥ ك^{٤}}{٢٨٤}$ الخ

$\overline{٣}$ ابسط $\sqrt{٢}$ اي $(١ + ١)^{\frac{١}{٢}}$

الجواب $١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٨} + \frac{٣}{٤٨} - \frac{١٥}{٢٨٤} + \frac{١٠٥}{٢٨٤٠})$ الخ

$\overline{٤}$ ابسط $(ت + ك)^{\frac{١}{٢}}$ او $ت^{\frac{١}{٢}} \times (١ + \frac{ك}{ت})^{\frac{١}{٢}}$

الجواب $ت^{\frac{١}{٢}} \times (١ + \frac{ك}{٢ ت} - \frac{ك}{٨ ت^{٢}} + \frac{٣ ك^{٣}}{٤٨ ت^{٣}} - \frac{١٥ ك^{٤}}{٢٨٤ ت^{٤}})$ الخ

$\overline{٥}$ ابسط $(ت + ب)^{\frac{١}{٣}}$ او $ت^{\frac{١}{٣}} \times (١ + \frac{ب}{ت})^{\frac{١}{٣}}$

الجواب $ت^{\frac{١}{٣}} \times (١ + \frac{ب}{٣ ت} - \frac{٢ ب^{٢}}{١٨ ت^{٢}} + \frac{١٠ ب^{٣}}{١٦٢ ت^{٣}} - \frac{٨٠ ب^{٤}}{١٩٤٤ ت^{٤}})$ الخ

$\overline{٦}$ ابسط $(ت - ب)^{\frac{١}{٤}}$

الجواب $ت^{\frac{١}{٤}} \times (١ - \frac{ب}{٤ ت} + \frac{٣ ب^{٢}}{٣٢ ت^{٢}} - \frac{٢١ ب^{٣}}{٣٨٤ ت^{٣}} + \frac{٢٣١ ب^{٤}}{٦١٤٤ ت^{٤}})$ الخ

$\overline{٧}$ ابسط $(ت + ك)^{-\frac{١}{٢}}$ $\overline{٨}$ ابسط $(١ - ك)^{\frac{٢}{٥}}$

$\overline{٩}$ ابسط $(١ + ك)^{-\frac{١}{٥}}$ $\overline{١٠}$ ابسط $(ت^{٢} + ك)^{-\frac{١}{٢}}$

٢٣٦ ثم ان النظرية الثنائية تُستعمَل في كميات لها اكثر من جزءين بالتعويض عن الاجزاء حتى تتحول الى جزءين. ثم عند ترجيع المعوض عنها تبسط التي كان لها دلايل بمفردها. مثالهُ ما هو كعب ت + ب + س عوّض عن ب + س واجعل ح $=$ ب + س فتكون العبارة ت + ح و$(ت + ح)^{٣} = ت^{٣} + ٣ ت^{٢} ح + ٣ ت^{٢} ح$

$+ ح^{٣}$ ثم بترجيع قيمة ح لنا $(ت + ب + س)^{٣} = ت^{٣} + ٣ ت^{٢} × (ب + س) +$
$٣ ت × (ب + س)^{٢} + (ب + س)^{٣}$ ثم نرقي ب + س حسبما تقدم

امثلة

١ ما هي القوة الثامنة من (ت + ب)

الجواب $ت^{٨} + ٨ ت^{٧} ب + ٢٨ ت^{٦} ب^{٢} + ٥٦ ت^{٥} ب^{٣} + ٧٠ ت^{٤} ب^{٤} +$
$٥٦ ت^{٣} ب^{٥} + ٢٨ ت^{٢} ب^{٦} + ٨ ت ب^{٧} + ب^{٨}$

٢ ما هي القوة السابعة من ت − ب

٣ ابسط $\frac{١}{١ - ت}$ او $(١ - ت)^{-١}$

الجواب $١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ت^{٥}$ الخ

٤ ابسط $\frac{ح}{ت - ب}$ او $ح × (ت - ب)^{-١}$

الجواب $ح × (\frac{١}{ت} + \frac{ب}{ت^{٢}} + \frac{ب^{٢}}{ت^{٣}} + \frac{ب^{٣}}{ت^{٤}})$ الخ

او $(\frac{ح}{ت} + \frac{ح ب}{ت^{٢}} + \frac{ح ب^{٢}}{ت^{٣}} + \frac{ح ب^{٣}}{ت^{٤}})$ الخ

٥ ابسط $(ت^{٢} + ب^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

الجواب $ت + \frac{ب^{٢}}{٢ ت} - \frac{ب^{٤}}{٨ ت^{٣}} + \frac{ب^{٦}}{١٦ ت^{٥}}$ الخ

٦ ابسط $(ت + ى)^{-٤}$

الجواب $\frac{١}{ت^{٤}} - \frac{٤ ى}{ت^{٥}} + \frac{١٠ ى^{٢}}{ت^{٦}} - \frac{٢٠ ى^{٣}}{ت^{٧}} + \frac{٣٥ ى^{٤}}{ت^{٨}}$ الخ

٧ ابسط $(س^{٣} + ك^{٣})^{\frac{١}{٣}}$

الجواب $س × (١ + \frac{ك^{٣}}{٣ س^{٣}} - \frac{٢ ك^{٦}}{١٨ س^{٦}} + \frac{١٠ ك^{٩}}{١٦٢ س^{٩}})$ الخ

٨ ابسط $\frac{د}{\sqrt[٢]{س^{٢} + ك^{٢}}}$ او $د × (س^{٢} + ك^{٢})^{-\frac{١}{٢}}$

الجواب $\frac{د}{س} × (١ - \frac{ك^{٢}}{٢ س^{٢}} + \frac{٣ ك^{٤}}{٢ × ٤ س^{٤}} - \frac{٣ × ٥ ك^{٦}}{٢ × ٤ × ٦ س^{٦}} +$
$\frac{٣ × ٥ × ٧ ك^{٨}}{٢ × ٤ × ٦ × ٨ س^{٨}})$ الخ

٩ ما هي القوة الخامسة من $(ت^{٢} + ى^{٢})$

١٠ ما هي القوة الرابعة من ث + ب + ك

١١ ابسط $(\text{ث}^{٢} - \text{ك})^{\frac{١}{٢}}$

١٢ ابسط $(١ - \text{ى}^{٢})^{\frac{١}{٢}}$

١٣ ابسط $(\text{ث} - \text{ك})^{\frac{١}{٣}}$

١٤ ابسط ح $(\text{ث}^{٢} - \text{ى}^{٢})^{\frac{١}{٣}}$

الفصل التاسع عشر

في تجذير الكميات المركبة

٢٣٧ قاعدة. رتب الكميات على موجب قوات احد حروفها حتى تكون العليا اولاً. وهكذا على التوالي. ثم تاخذ جذر الجزء الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب. وترقّي ذلك الجزء الى قوةٍ من اسم دليل الجذر المطلوب وتطرحهُ من الكمية نفسها ثم تنزل الجزء الثاني وتقسمهُ على الجذر الذي اخذته بعد ترقيتهِ الى قوةٍ دليلها اقلّ من دليل الجذر المطلوب بواحدٍ وضربهِ في دليل الجذر المطلوب فيكون الخارج الجزء الثاني من الجذر. ثم ترقّي الجزءين من الجذر الى قوةٍ من اسم دليل الجذر المطلوب وتطرحها من الباقي وتقسم كما تقدم.

وهذه صورة العمل

ما هو الجذر الكعبي من

$$\text{ث}^{٦} + ٢\text{ث}^{٥} - ٣\text{ث}^{٤} - ١١\text{ث}^{٣} + ٦\text{ث}^{٢} + ١٢\text{ث} - ٨ \,(\, \text{ث}^{٢} + \text{ث} - ٢$$

$$\text{ث}^{٦}$$

$$٣\text{ث}^{٤}\,)\; ٢\text{ث}^{٥} - ٣\text{ث}^{٤} - ١١\text{ث}^{٣} + ٦\text{ث}^{٢} + ١٢\text{ث} - ٨$$

$$\text{ث}^{٦} + ٢\text{ث}^{٥} + ٣\text{ث}^{٤} + \text{ث}^{٣}$$

$$٣\text{ث}^{٤}\,)\; -٦\text{ث}^{٤} - ١٢\text{ث}^{٣} + ٦\text{ث}^{٢} + ١٢\text{ث} - ٨$$

$$\text{ث}^{٦} + ٢\text{ث}^{٥} - ٣\text{ث}^{٤} - ١١\text{ث}^{٣} - ٦\text{ث}^{٢} + ١٢\text{ث} - ٨$$

لا نحتاج الى انزال اكثر من جزء واحد من الجذر لان القسمة تجري على جزء واحدٍ منهُ فقط

$\overline{\text{٢}}$ ما هو الجذر الرابع من

ت^{٤} + ٨ ت^{٣} + ٢٤ ت^{٢} + ٣٢ ت + ١٦) ت + ٢

ت^{٤}

٤ ت^{٣}) + ٨ ت^{٣}

ت^{٤} + ٨ ت^{٣} + ٢٤ ت^{٢} + ٣٢ ت + ١٦

$\overline{\text{٣}}$ ما هو الجذر الخامس من ت^{٥} + ٥ ت^{٤} ب + ١٠ ت^{٣} ب^{٢} + ١٠ ت^{٢} ب^{٣} + ٥ ت ب^{٤} + ب^{٥} الجواب ت + ب

$\overline{\text{٤}}$ ما هو الجذر الكعبي من ت^{٣} − ٦ ت^{٢} ب + ١٢ ت ب^{٢} − ٨ ب^{٣}

الجواب ت − ٢ ب

$\overline{\text{٥}}$ ما هو الجذر المالي من

٤ ت^{٢} − ١٢ ت ب + ٩ ب^{٢} + ١٦ ت ح − ٢٤ ب ح + ١٦ ح^{٢}) ٢ ت − ٣ ب + ٤ ح

٤ ت^{٢}

٤ ت) − ١٢ ت ب

٤ ت^{٢} − ١٢ ت ب + ٩ ب^{٢}

٤ ت) + ١٦ ت ح

٤ ت^{٢} − ١٢ ت ب + ٩ ب^{٢} + ١٦ ت ح − ٢٤ ب ح + ١٦ ح^{٢}

هنا كانت القوة التي هي اقل بواحدٍ من اسم الجذر القوةَ الاولى فلم نُرَقِّ ت قبل القسمة عليها

٢٢٨ الجذر المالي يوخذ غالبًا على موجب قاعدة كقاعدة علم الحساب لذلك وهي ان ترتب الكمية حسب قوات احد احرفها. ثم تاخذ جذر الجزء الاول للجزء الاول من الجذر المطلوب وتطرح قوتهُ من الكمية نفسها. ثم تنزل جزءين اخرين وتقسم على مضاعف الجذر الموجود وتضيف الخارج الى الجذر والى المقسوم عليهِ. ثم تضرب المقسوم عليهِ في الجزء الاخير من الجذر الموجود وتطرح الحاصل من المقسوم ثم تنزل جزءين اخرين وتكرر العمل الى هذا الاسلوب الى نهايته

مثال اول ما هو الجذر المالي من

ت^{٢} + ٢ ت ب + ب^{٢} + ٢ ت س + ٢ ب س + س^{٢} (ت + ب + س
ت^{٢}
٢ ت + ب) + ٢ ت ب + ب^{٢}
+ ٢ ت ب + ب^{٢}
٢ ت + ٢ ب + س) + ٢ ت س + ٢ ب س + س^{٢}
+ ٢ ت س + ٢ ب س + س^{٢}

٢ ما هو الجذر المالي من
١ − ٤ ب + ٤ ب^{٢} + ٢ ى − ٤ ب ى + ى^{٢} (١ − ٢ ب + ى
١
٢ − ٢ ب) − ٤ ب + ٤ ب^{٢}
− ٤ ب + ٤ ب^{٢}
٢ − ٤ ب + ى) + ٢ ى − ٤ ب ى + ى^{٢}
+ ٢ ى − ٤ ب ى + ى^{٢}
٠ ٠ ٠

٣ ما هو الجذر المالي من ت^{٦} − ٢ ت^{٥} + ٣ ت^{٤} − ٢ ت^{٣} + ت^{٢}

الجواب ت^{٣} − ت^{٢} + ت

٤ ما هو الجذر المالي من ت^{٤} + ٤ ت^{٢} ب + ٤ ب^{٢} − ٤ ت^{٢} − ٨ ب + ٤

الجواب ت^{٢} + ٢ ب − ٢

يسهل العمل احيانًا بحل دليل الجذر الى جزءين

مثالهُ ت$^{\frac{١}{٤}}$ = ت$^{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}$ وت$^{\frac{١}{٦}}$ = ت$^{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٣}}$

اي ان الجذر الرابع = الجذر المالي من الجذر المالي

والجذر السادس = الجذر المالي من الجذر الكعبي

والجذر الثامن = الجذر المالي من الجذر الرابع

١ ما هو الجذر المالي من ك^{٤} − ٤ ك^{٣} + ٦ ك^{٢} − ٤ ك + ١

٢ ما هو الجذر الكعبي من ك^{٦} − ٦ ك^{٥} + ١٥ ك^{٤} − ٢٠ ك^{٣} + ١٥ ك^{٢} − ٦ ك + ١

٣ ما هو الجذر المالي من ٤ ك^{٤} − ٤ ك^{٣} + ١٣ ك^{٢} − ٦ ك + ٩

٤ ما هو الجذر الرابع من ١٦ ت^{٤} − ٩٦ ت^{٣} ك + ٢١٦ ت^{٢} ك^{٢} − ٢١٦ ت ك^{٣} + ٨١ ك^{٤}

٥ ما هو الجذر الخامس من ك^{٥} + ٥ ك^{٤} + ١٠ ك^{٣} + ١٠ ك^{٢} + ٥ ك + ١

٦ ما هو الجذر السادس من $ت^{٦} - ٦ ت^{٥} ب + ١٥ ت^{٤} ب^{٢} - ٢٠ ت^{٣} ب^{٣} + ١٥ ت^{٢} ب^{٤} - ٦ ت ب^{٥} + ب^{٦}$

في جذور كميات ثنائية صمّاء

٢٢٩ تلزم احياناً الدلالة على الجذر المالي من كمية على صورة $ت \pm \sqrt{ب}$ التي تسمى ثنائية او فضلية صمّاء بواسطة مجموع اخريين صمّاوين او فضلتهما ونستدل على عبارة جبرية لهذه الدلالة من هذه القضايا الثلاث

الاولى ان جذر صحيح لا يمكن ان يتركب من جزءين احدهما منطق والآخر اصمّ فان كان ممكناً فلنفرض

$\sqrt{ت} = ك + \sqrt{ى}$ فبتربيع الجانبين نصير

$ت = ك^{٢} + ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

وبالتحويل $\sqrt{ى} = \frac{ت - ك^{٢} - ى}{٢ ك}$ وهي منطقة وذاك خلاف المفروض

الثانية انهُ في كل معادلة على صورة $ك + \sqrt{ى} = ت + \sqrt{ب}$ تكون الاجزاء المنطقة على الجانبين متساوية والصمّاء كذلك فان لم تكن $ك = ت$ لنفرض $ك = ت \pm ل$

ثم بالتعويض $ت \pm ل + \sqrt{ى} = ت + \sqrt{ب}$ وبالمقابلة $\sqrt{ب} = ل + \sqrt{ى}$ اي يكون $\sqrt{ب}$ مركباً من جزءين احدهما منطق والآخر اصمّ وقد تبرهن ان ذلك لا يمكن وهكذا يبرهن انهُ في المعادلة $ك - \sqrt{ى} = ت - \sqrt{ب}$ تكون الاجزاء المنطقة على الجانبين متساوية والصمّاء كذلك

الثالثة اذا فرض $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = ك + \sqrt{ى}$ يكون $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$

لانه بتربيع الاولى تصير $ت + \sqrt{ب} = ك^{٢} + ٢ ك \sqrt{ى} + ى$ وحسب القضية الثانية

$ت = ك^{٢} + ى$

و $\sqrt{ب} = ٢ ك \sqrt{ى}$

بالطرح $ت - \sqrt{ب} = ك^{٢} - ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

بالتجذير $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$

٢٤٠ ثم لننظر الى كيفية استخراج عبارة دالة على جذر كمية ثنائية او فضلية صمّاء مما سبق

ولنفرض $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = ك + \sqrt{ى}$

اذاً $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$

بتربيع الجانبين فيهما لنا $ت + \sqrt{ب} = ك^{٢} + ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

و $ت - \sqrt{ب} = ك^{٢} - ٢ ك \sqrt{ى} + ى$

بجمعهما والقسمة على ٢ $ت = ك^{٢} + ى$

بضرب الاولين $\sqrt{ت^{٢} - ب} = ك^{٢} - ى$

بجمع هاتين $ت + \sqrt{ت^{٢} - ب} = ٢ ك^{٢}$

و $ك = \sqrt{\frac{ت + \sqrt{ت^{٢} - ب}}{٢}}$

بطرحهما $ت - \sqrt{ت^{٢} - ب} = ٢ ى$

$$\sqrt{ى} = \sqrt{\frac{ت - \sqrt{ت^{٢} - ب}}{٢}}$$

وقد فرض ان $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = ك + \sqrt{ى}$

و $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = ك - \sqrt{ى}$

اذاً $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{ت + \sqrt{ت^{٢} - ب}}{٢}} + \sqrt{\frac{ت - \sqrt{ت^{٢} - ب}}{٢}}$

و $\sqrt{ت - \sqrt{ب}} = \sqrt{\frac{ت + \sqrt{ت^{٢} - ب}}{٢}} - \sqrt{\frac{ت - \sqrt{ت^{٢} - ب}}{٢}}$

ثم بوضع د عوض $\sqrt{ت^{٢} - ب}$ تصير

(١) $\sqrt{ت + \sqrt{ب}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(ت + د)} + \sqrt{\tfrac{1}{2}(ت - د)}$

$$(٢)\quad \sqrt{\text{ت} - \sqrt{\text{ب}}} = \sqrt{\tfrac{١}{٢}(\text{ت} + \text{د})} - \sqrt{\tfrac{١}{٢}(\text{ت} - \text{د})}$$

مثال اول ما هو الجذر المالي من $٣ + ٢\sqrt{٢}$

هنا $\text{ت} = ٣$ $\quad \text{ت}^{٢} = ٩$ $\quad \sqrt{\text{ب}} = ٢\sqrt{٢}$ $\quad \text{ب} = ٨$ $\quad \text{ت}^{٢} - \text{ب} = ٩ -$
$٨ = ١$

اذاً $\sqrt{٣ + ٢\sqrt{٢}} = \sqrt{\frac{٣ + ١}{٢}} + \sqrt{\frac{٣ - ١}{٢}} = \sqrt{٢} + ١$

٢ ما هو الجذر المالي من $١١ + ٦\sqrt{٢}$	الجواب $٣ + \sqrt{٢}$
٣ ما هو الجذر المالي من $٦ - ٢\sqrt{٥}$	الجواب $\sqrt{٥} - ١$
٤ ما هو الجذر المالي من $٧ + ٤\sqrt{٣}$	الجواب $٢ + \sqrt{٣}$
٥ ما هو الجذر المالي من $٧ - ٢\sqrt{١٠}$	الجواب $\sqrt{٥} - \sqrt{٢}$

* * *

الفصل العشرون

في السرد الغير المتناهي

٢٤١ انهُ في تجذير كمية او في قسمة كمية على اخرى يحدث احياناً اننا لا نستطيع الوصول الى الجذر او الى الخارج بالتمام ولكن نمتدُّ في العمل الى غير نهاية والحادث من ذلك يُسمَّى سرداً غير متناهٍ

٢٤٢ الكسر يُبسط احياناً كثيرة الى سردٍ غير متناهٍ بقسمة الصورة على المخرج. لان قيمة الكسر هي الخارج من تلك القسمة. وان لم يُوجد المخرج في الصورة مراراً معلومة يبقى بعد كل قسمةٍ باقٍ فيمتد في العمل الى غير نهايةٍ مثالهُ لو قيل ابسط $\frac{١}{١ - \text{ت}}$ الى سرد غير متناهٍ لقيل

$$\begin{array}{l} (١ - \text{ت})\ ١\ (١ + \text{ت} + \text{ت}^{٢} + \text{ت}^{٣} + \text{ت}^{٤}\ \text{الخ} \\ \underline{١ - \text{ت}} \\ + \text{ت} \\ \underline{\text{ت} - \text{ت}^{٢}} \\ + \text{ت}^{٢} \\ \underline{+ \text{ت}^{٢} - \text{ت}^{٣}} \\ + \text{ت}^{٣} \\ \underline{+ \text{ت}^{٣} - \text{ت}^{٤}} \\ + \text{ت}^{٤}\ \text{الخ} \end{array}$$

وعلى هذا المنوال يكون السرد $١ + ت + ت^{٢} + ت^{٣} + ت^{٤} + ت^{٥} + ت^{٦}$ الخ

ثم لكي يقترب السرد الى قيمة الكسر في كل جزء منهُ اكثر فاكثر يقتضي ان يكون الجزء الاول من المقسوم عليهِ اكبر من الثاني كما نرى من المثال السابق فان كان ت اكبر من واحد يبعد كل جزء من السرد اكثر فاكثر عن قيمة الكسر الحقيقية لانهُ بعد كل قسمةٍ يبقى باقٍ يجب اضافتهُ الى الخارج او طرحهُ منهُ وكل ما كان هذا الباقي اعظم ابتعد عن القيمة الحقيقية ولكن ان كان ت اصغر من واحد كما لو فرض ت $= \frac{١}{٢}$ تكون $ت^{٢} = \frac{١}{٤}$ و$ت^{٣} = \frac{١}{٨}$ $ت^{٤} = \frac{١}{١٦}$ و$ت^{٥} = \frac{١}{٣٢}$ الخ

ويكون السرد $\frac{١}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{\frac{١}{٢}} = ٢ = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢} + \frac{١}{٦٤}$ الخ فكلما امتدَّ في العمل يقترب اكثر فاكثر الى اثنين

مثال ٢ ابسط $\frac{١}{١ + ت}$

هنا يكون السرد كما تقدم في $\frac{١}{١ - ت}$ غير ان كل جزء دليلهُ وتريٌّ تكون علامتهُ سلبيةً فلنا $\frac{١}{١ + ت} = ١ - ت + ت^{٢} - ت^{٣} + ت^{٤} - ت^{٥} + ت^{٦}$ الخ

(٣) ابسط $\frac{ح}{ت - ب}$ الى سرد غير متناهٍ

$$ت - ب)\,ح\,(\frac{ح}{ت} + \frac{ب ح}{ت^{٢}} + \frac{ب^{٢} ح}{ت^{٣}} \text{ الخ}$$

$$\underline{ح - \frac{ب ح}{ت}}$$

$$+ \frac{ب ح}{ت}$$

$$\underline{\frac{ب ح}{ت} - \frac{ب^{٢} ح}{ت^{٢}}}$$

$$+ \frac{ب^{٢} ح}{ت^{٢}} \text{ الخ}$$

فيكون السرد $\frac{ح}{ت} + \frac{ب ح}{ت^{٢}} + \frac{ب^{٢} ح}{ت^{٣}} + \frac{ب^{٣} ح}{ت^{٤}} + \frac{ب^{٤} ح}{ت^{٥}}$ الخ

(٤) ابسط $\frac{١ + ت}{١ - ت}$ الى سرد غير متناهٍ

$$١ + ٢ت + ٢ت^{٢} + ٢ت^{٣} + ٢ت^{٤} + ٢ت^{٥} \text{ الخ}$$

٢٤٣ تتحول كميةٌ الى سردٍ غير متناهٍ بتجذيرها حسبما تقدم في الفصل التاسع عشر

مثال ١ ابسط $\sqrt{ت^{٢} + ب^{٢}}$ باستخراج الجذر المالي

$$ت^{٢} + ب^{٢} \big(ت + \frac{ب^{٢}}{٢ت} - \frac{ب^{٤}}{٨ت^{٣}} + \frac{ب^{٦}}{١٦ت^{٥}} \text{ الخ}$$

$$٢ت + \frac{ب^{٢}}{٢ت} \big) \overline{ت^{٢}} \quad \underline{+ ب^{٢}}$$

$$\underline{+ ب^{٢} + \frac{ب^{٤}}{٤ت^{٢}}}$$

$$٢ت + \frac{ب^{٢}}{ت} - \frac{ب^{٤}}{٨ت^{٢}} \big) \underline{- \frac{ب^{٤}}{٤ت^{٢}}}$$

٢ ابسط $\sqrt{ت^{٢} - ب^{٢}}$

الجواب $ت - \frac{ب^{٢}}{٢ت} - \frac{ب^{٤}}{٨ت^{٣}} - \frac{ب^{٦}}{١٦ت^{٥}}$ الخ

٣ ابسط $\sqrt{٢}$ اي $\sqrt{١ + ١}$

الجواب $١ + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦}$ الخ

٤ ابسط $\sqrt{١ + ك}$

الجواب $١ + \frac{ك}{٢} - \frac{ك^{٢}}{٨} + \frac{ك^{٣}}{١٦} - \frac{٥ك^{٤}}{١٢٨}$ الخ

كل كمية ثنائية لها دليلٌ سلبيٌّ او كسري تُبسَط الى سردٍ غير متناهٍ حسب النظرية الثنائية. انظر الامثلة في آخر الفصل الثامن عشر

في المسميات الغير المتعينة

٢٤٤ لنا واسطة اخرى لبسط عبارة جبرية وهي ان يوخذ سردٌ لهُ مسمَّياتٌ غير معيَّنة ثم تستعلم قيمتها فلنفرض ان عبارة جبرية ما تعدل هذا السرد $\bar{ت} + \bar{ب}ك + \bar{س}ك^{٢} + \bar{د}ك^{٣} + \bar{ر}ك^{٤}$ الخ $=$ العبارة ثم بنقل العبارة الى الجانب الاول يصير الجانب الثاني صفرًا والامر واضحٌ ان المعادلة تكون حينئذٍ صحيحة لان السرد $=$ العبارة فاذاً السرد $-$ العبارة $= ٠$

ثم ان عُيّن لكل المسميات تَ بَ سَ الخ قيمات حتى تكون قيمة كل جزء صفرًا فالامر واضحٌ ان الكل = ٠ ونستعلم قيمة كل مسمى من المعادلة التي وقع فيها

مثال اول ابسط $\frac{\text{ت}}{\text{س} + \text{ب ك}}$

لنفرض $\frac{\text{ت}}{\text{س} + \text{ب ك}} = \text{تَ} + \text{بَ ك} + \text{سَ ك}^{٢} + \text{دَ ك}^{٣} + \text{رَ ك}^{٤}$ الخ

بضرب الجانبين في س + ب ك ونقل ت تصير $٠ = (\text{تَ س} - \text{ت}) + (\text{تَ ب} + \text{بَ س})\,\text{ك} + (\text{بَ ب} + \text{سَ س})\,\text{ك}^{٢} + (\text{سَ ب} + \text{دَ س})\,\text{ك}^{٣}$ الخ

فان جعل (تَ س − ت) و (تَ ب + بَ س) و (بَ ب + سَ س) كل واحد = ٠ يكون الكل = ٠ فلنا

$\text{تَ س} - \text{ت} = ٠ \qquad \text{تَ} = \frac{\text{ت}}{\text{س}}$

$\text{تَ ب} + \text{بَ س} = ٠ \qquad \text{بَ} = -\frac{\text{ب}}{\text{س}}\,\text{تَ}$

$\text{بَ ب} + \text{سَ س} = ٠ \qquad \text{سَ} = -\frac{\text{ب}}{\text{س}}\,\text{بَ}$

$\text{سَ ب} + \text{دَ س} = ٠ \qquad \text{دَ} = -\frac{\text{ب}}{\text{س}}\,\text{سَ}$

اي كل واحدٍ من هذه المسمَّيات = الذي قبلهُ × $-\frac{\text{ب}}{\text{س}}$

فلنا اذًا بالتعويض عن المسميات بهذه القيمات

$$\frac{\text{ت}}{\text{س} + \text{ب ك}} = \frac{\text{ت}}{\text{س}} - \frac{\text{ت ب}}{\text{س}^{٢}}\,\text{ك} + \frac{\text{ت ب}^{٢}}{\text{س}^{٣}}\,\text{ك}^{٢} - \frac{\text{ت ب}^{٣}}{\text{س}^{٤}}\,\text{ك}^{٣} + \frac{\text{ت ب}^{٤}}{\text{س}^{٥}}\,\text{ك}^{٤}\ \text{الخ}$$

$\overline{٢}$ ابسط $\frac{\text{ت} + \text{ب ك}}{\text{د} + \text{ح ك} + \text{س ك}^{٢}}$

لنفرض $\frac{\text{ت} + \text{ب ك}}{\text{د} + \text{ح ك} + \text{س ك}^{٢}} = \text{تَ} + \text{بَ ك} + \text{سَ ك}^{٢} + \text{دَ ك}^{٣}$ الخ

ثم بالضرب في المخرج ونقل ت + ب ك الى الجانب الاخر تصير $٠ = (\text{تَ د} - \text{ت}) + (\text{بَ د} + \text{تَ ح} - \text{ب})\,\text{ك} + (\text{سَ د} + \text{بَ ح} + \text{تَ س})\,\text{ك}^{٢} + (\text{دَ د} + \text{سَ ح} + \text{بَ س})\,\text{ك}^{٣}$ الخ

وبتحويل هذه المعادلات كما تقدم لنا $\text{تَ} = \frac{\text{ت}}{\text{د}} \qquad \text{بَ} = -\frac{\text{ح}}{\text{د}}\,\text{تَ} + \frac{\text{ب}}{\text{د}}$

$$سَ = -\frac{ح}{د}بَ - \frac{س}{د}تَ \qquad دَ = -\frac{ح}{د}سَ - \frac{س}{د}بَ$$

وبالتعويض عن المسميات لنا

$$\frac{ت + ب\,ك}{د + ح\,ك + س\,ك^{٢}} = \frac{ت}{د} - \left(\frac{ح}{د}تَ - \frac{ب}{د}\right)ك - \left(\frac{ح}{د}بَ + \frac{س}{د}تَ\right)ك^{٢} \text{ الخ}$$

٣ ابسط $\frac{١ + ٢ك}{١ - ك - ك^{٢}}$

الجواب $١ + ٣ك + ٤ك^{٢} + ٧ك^{٣} + ١١ك^{٤} + ١٨ك^{٥} + ٢٩ك^{٦}$ الخ

الذي فيهِ نرى مسمَّى ك = مجموع مسمَّيِ الجزءين السابقين

٤ ابسط $\frac{د}{ب - ت\,ك}$

الجواب $\frac{د}{ب}\left(١ + \frac{ت\,ك}{ب} + \frac{ت^{٢}ك^{٢}}{ب^{٢}} + \frac{ت^{٣}ك^{٣}}{ب^{٣}} + \frac{ت^{٤}ك^{٤}}{ب^{٤}} \text{ الخ}\right)$

٥ ابسط $\frac{١ - ك}{١ - ٢ك - ٣ك^{٢}}$

الجواب $١ + ك + ٥ك^{٢} + ١٣ك^{٣} + ٤١ك^{٤} + ١٢١ك^{٥} + ٣٦٥ك^{٦}$ الخ

٦ ابسط $\frac{١}{١ - ك - ك^{٢} + ك^{٣}}$

الجواب $١ + ك + ٢ك^{٢} + ٢ك^{٣} + ٣ك^{٤} + ٣ك^{٥} + ٤ك^{٦} + ٤ك^{٧}$ الخ

٧ ابسط $\frac{ت}{١ - ب\,ك}$ ٨ ابسط $\frac{١ - ك}{١ - ٥ك + ٦ك^{٢}}$

٩ ابسط $\frac{ت + ب\,ك}{(١ - د\,ك)^{٢}}$ ١٠ ابسط $\frac{١ + ك}{(١ - ك)^{٢}}$

نبذة

في جمع الاسراد

٢٤٥ يراد بمجموع السرد كميةٌ يكون الفرق بينها وبين قيمة السرد جميعهِ قليلاً جدًّا لا يعتدّ بهِ وتسمى تلك القيمة حدَّ السرد مثالهُ الكسر العشري ٠٫٣٣٣٣٣ يقترب الى $\frac{١}{٣}$ الى غير نهايةٍ ولا يصل اليهِ بالتمام فيكون $\frac{١}{٣}$ حد الكسر $٠٫٣٣٣٣٣٣ = \frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠٠}$ الخ فان تعددت

اجزاءه السرد الى غير نهايةٍ يكون الفرق بينهُ وبين $\frac{١}{٢}$ صغيراً الى غير نهايةٍ

٢٤٦ اذا هبطت اجزاء سردٍ بمقسومٍ عليهِ مشترك يعرف مجموعهُ بقاعدة جمع سلسلة هندسيَّة

فقد راينا سابقاً ان $م = \frac{ب ل - ث}{ب - ١}$ اي المجموع = حاصل الجزء الاكبر في التناسب الا الجزء الاصغر مقسوماً على التناسب الا واحداً وفي سردٍ هابطٍ يكون الجزء الاصغر صغيراً الى غير نهاية فيحسب لاشيء فتصير العبارة

$م = \frac{ب ل - ٠}{ب - ١}$ او $م = \frac{ب ل}{ب - ١}$

مثال ١ ما هو مجموع هذا السرد

$\frac{٣}{١٠} + \frac{٣}{١٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠٠} + \frac{٣}{١٠٠٠٠٠}$ الخ

الجزء الاعظم = $\frac{٣}{١٠}$ والتناسب = ١٠

$م = \frac{ب ل}{ب - ١} = \frac{١٠ \times \frac{٣}{١٠}}{١٠ - ١} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

٢ ما هو مجموع هذا السرد $١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} + \frac{١}{١٦} + \frac{١}{٣٢} + \frac{١}{٦٤}$ الخ

$م = \frac{ب ل}{ب - ١} = \frac{٢ \times ١}{٢ - ١} = ٢$

٣ ما هو مجموع هذا السرد $١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١}$ الخ

الجواب $= \frac{٣}{٢} = ١ + \frac{١}{٢}$

٢٤٨ ثم انهُ يوجد مجموع بعض انواع السرد بواسطة الطرح لانهُ حسب قواعد الكسور

$$\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣} = \frac{٣ - ٢}{٢ \times ٣} = \frac{١}{٢ \times ٣}$$

$$\frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} = \frac{٤ - ٣}{٣ \times ٤} = \frac{١}{٣ \times ٤}$$

$$\frac{١}{٤} - \frac{١}{٥} = \frac{٥ - ٤}{٤ \times ٥} = \frac{١}{٤ \times ٥}$$

فان جعلت الكسور الواقعة عن اليسار في سردٍ فالامر واضحٌ انهُ يعدل فضلة السردين المركبين من الكسور عن اليمين. وتوجد تلك الفضلة بسهولةٍ لانهُ ان طُرح الجزء الاول من احد هذين السردين فالباقي يعدل السرد الاخر

فلنفرض سردًا غير متناهٍ $\frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \frac{١}{٤ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٦}$ الخ لنا ان نجد مجموعهُ فنصنع منهُ سردًا جديدًا بطرح الضلع الثاني من المخارج وليكن مجموع هذا السرد الجديد = م

اي م $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥}$ الخ

اذًا م $- \frac{١}{٢} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦}$ الخ

وبالطرح $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \frac{١}{٤ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٦}$ الخ

مثال ٢ ما هو مجموع السرد $\frac{١}{١ \times ٣} + \frac{١}{٢ \times ٤} + \frac{١}{٣ \times ٥} + \frac{١}{٤ \times ٦} + \frac{١}{٥ \times ٧}$ الخ

لنفرض م $= ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥}$ الخ

اذًا م $- \frac{٣}{٢} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٧}$ الخ

بالطرح $\frac{٣}{٢} = \frac{٢}{١ \times ٣} + \frac{٢}{٢ \times ٤} + \frac{٢}{٣ \times ٥} + \frac{٢}{٤ \times ٦} + \frac{٢}{٥ \times ٧}$ الخ

او $\frac{٣}{٤} = \frac{١}{١ \times ٣} + \frac{١}{٢ \times ٤} + \frac{١}{٣ \times ٥} + \frac{١}{٤ \times ٦} + \frac{١}{٥ \times ٧}$ الخ

٣ ما هو مجموع سردٍ اجزآؤهُ هذه

$\frac{١}{٢ \times ٤ \times ٦} + \frac{١}{٤ \times ٦ \times ٨} + \frac{١}{٦ \times ٨ \times ١٠} + \frac{١}{٨ \times ١٠ \times ١٢}$ الخ

فبترك الجزء الاخير من المخارج والطرح لنا $\frac{١}{٨} = \frac{٤}{٢ \times ٤ \times ٦} + \frac{٤}{٤ \times ٦ \times ٨} + \frac{٤}{٦ \times ٨ \times ١٠} + \frac{٤}{٨ \times ١٠ \times ١٢}$ الخ

او $\frac{١}{٣٢} = \frac{١}{٢ \times ٤ \times ٦} + \frac{١}{٤ \times ٦ \times ٨} + \frac{١}{٦ \times ٨ \times ١٠} + \frac{١}{٨ \times ١٠ \times ١٢}$ الخ

٤ ما هو مجموع هذا السرد

$$\frac{١}{١ \times ٢ \times ٣} + \frac{١}{٢ \times ٣ \times ٤} + \frac{١}{٣ \times ٤ \times ٥} + \frac{١}{٤ \times ٥ \times ٦} \text{ الخ}$$

الجواب $\frac{١}{٤}$

(٢٤٩) طريقةٌ اخرى لجمع اسرادٍ جمعها ممكن

افرض سردًا هابطاً فيهِ قوات كميةٍ غير ثابتة القيمة مثل ك وليكن مجموعهُ = م ثم اضرب جانبي المعادلة في كمية مركبة من ك وكمية اخرى ثابتة واجعل للكاف قيمةً حتى تكون قيمة الكمية المركبة المضروب فيها صفرًا فان نقل جزء او اكثر الى الجانب الاول يعدل الجانب الثاني مثالهُ

(١) افرض $م = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك^٢}{٣} + \frac{ك^٣}{٤} + \frac{ك^٤}{٥} + \frac{ك^٥}{٦}$ الخ

اضرب الجانبين في ك − ١ لنا

$$م \times (ك - ١) = - ١ + \frac{ك}{١ \times ٢} + \frac{ك^٢}{٢ \times ٣} + \frac{ك^٣}{٣ \times ٤} + \frac{ك^٤}{٤ \times ٥} + \frac{ك^٥}{٥ \times ٦} \text{ الخ}$$

فان فرض ك − ١ = ٠ يصير الجانب الاول اي م × (ك − ١) = ٠ ثم بنقل − ١ الى الجانب الاول لنا $١ = \frac{١}{١ \times ٢} + \frac{١}{٢ \times ٣} + \frac{١}{٣ \times ٤} + \frac{١}{٤ \times ٥} + \frac{١}{٥ \times ٦}$ الخ

(٢) مفروض $م = ١ + \frac{ك}{٢} + \frac{ك^٢}{٣} + \frac{ك^٣}{٤} + \frac{ك^٤}{٥}$ الخ

اضرب الجانبين في ك² − ١ فلنا

$$م \times (ك^٢ - ١) = - ١ - \frac{ك}{٢} + \frac{٢ ك^٢}{١ \times ٣} + \frac{٢ ك^٣}{٢ \times ٤} + \frac{٢ ك^٤}{٣ \times ٥} \text{ الخ}$$

ثم ان فرض ك = ١ يكون ك² − ١ = ٠ وبنقل جزءين الى الجانب الاول لنا

$$\text{١} + \frac{\text{١}}{\text{٢}} = \frac{\text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{٢}}{\text{١}\times\text{٣}} + \frac{\text{٢}}{\text{٢}\times\text{٤}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}\times\text{٥}} + \frac{\text{٢}}{\text{٤}\times\text{٦}} + \frac{\text{٢}}{\text{٥}\times\text{٧}}\ \text{الخ}$$

(٣) مفروض $\text{م} = \text{١} + \frac{\text{ك}}{\text{٢}} + \frac{\text{ك}^{\text{٢}}}{\text{٣}} + \frac{\text{ك}^{\text{٣}}}{\text{٤}}\ \text{الخ}$

اضرب الجانبين في $\text{٢ك}^{\text{٢}} - \text{٣ك} + \text{١}$ فلنا

$$\text{م} \times (\text{٢ك}^{\text{٢}} - \text{٣ك} + \text{١}) = \text{١} - \frac{\text{٥ك}}{\text{٢}} + \frac{\text{٥ك}^{\text{٢}}}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}} + \frac{\text{٦ك}^{\text{٣}}}{\text{٢}\times\text{٣}\times\text{٤}}$$

$$+ \frac{\text{٧ك}^{\text{٤}}}{\text{٣}\times\text{٤}\times\text{٥}}\ \text{الخ}$$

وان فرض $\text{ك} = \text{١}$ لنا

$$\frac{\text{٣}}{\text{٢}} = \frac{\text{٥}}{\text{١}\times\text{٢}\times\text{٣}} + \frac{\text{٦}}{\text{٢}\times\text{٣}\times\text{٤}} + \frac{\text{٧}}{\text{٣}\times\text{٤}\times\text{٥}} + \frac{\text{٨}}{\text{٤}\times\text{٥}\times\text{٦}}\ \text{الخ}$$

فنرى من المثالين الاخيرين ان سردين مختلفين قد يكونان من قيمةٍ واحدة

نبذة في تعكيس الاسراد

٢٥٠ لكي تعكس سردًا مثل هذا

$$\text{ك} = \text{ت ن} + \text{ب ن}^{\text{٢}} + \text{س ن}^{\text{٣}} + \text{د ن}^{\text{٤}} + \text{ر ن}^{\text{٥}} + \text{الخ}$$

اي لنجد قيمة ن في اجزآ من ك افرض سردًا لهُ مسميات غير معينة

$$\text{فلنفرض ن} = \bar{\text{ت}}\,\text{ك} + \bar{\text{ب}}\,\text{ك}^{\text{٢}} + \bar{\text{س}}\,\text{ك}^{\text{٣}} + \bar{\text{د}}\,\text{ك}^{\text{٤}} + \bar{\text{ر}}\,\text{ك}^{\text{٥}} + \text{الخ}$$

ثم لنجد قيمة قوات ن بموجب هذا المفروض لنا

$$\text{ن}^{\text{٢}} = \bar{\text{ت}}^{\text{٢}}\,\text{ك}^{\text{٢}} + \text{٢}\bar{\text{ت}}\,\bar{\text{ب}}\,\text{ك}^{\text{٣}} + \left\{\begin{matrix}\text{٢}\bar{\text{ت}}\,\bar{\text{س}} \\ +\ \bar{\text{ب}}^{\text{٢}}\end{matrix}\right\}\text{ك}^{\text{٤}} + \left\{\begin{matrix}\text{٢}\bar{\text{ب}}\,\bar{\text{س}} \\ +\ \text{٢}\bar{\text{ت}}\,\bar{\text{د}}\end{matrix}\right\}\text{ك}^{\text{٥}} + \text{الخ}$$

$$\text{ن}^{\text{٣}} = \bar{\text{ت}}^{\text{٣}}\,\text{ك}^{\text{٣}} + \text{٣}\bar{\text{ت}}^{\text{٢}}\bar{\text{ب}}\,\text{ك}^{\text{٤}} + \left\{\begin{matrix}\text{٣}\bar{\text{ت}}^{\text{٢}}\bar{\text{س}} \\ +\ \text{٣}\bar{\text{ت}}\,\bar{\text{ب}}^{\text{٢}}\end{matrix}\right\}\text{ك}^{\text{٥}} + \text{الخ}$$

$$\text{ن}^{\text{٤}} = \bar{\text{ت}}^{\text{٤}}\,\text{ك}^{\text{٤}} + \text{٤}\bar{\text{ت}}^{\text{٣}}\bar{\text{ب}}\,\text{ك}^{\text{٥}} + \text{الخ}$$

$$\text{ن}^{\text{٥}} = \bar{\text{ت}}^{\text{٥}}\,\text{ك}^{\text{٥}} + \text{الخ}$$

ثم بالتعويض عن قوات ن في السرد الاول بهذه القيمات لنا

ك = { ت تَ ك + ت بَ + ب تَ^{٢} } كَ^{٢} { + ت سَ + ٢ ب تَ بَ + س تَ^{٢} } كَ^{٣} { + ت دَ + ٢ ب تَ سَ + ب بَ^{٢} + ٣ س تَ^{٢} بَ + د تَ^{٤} } كَ^{٤} { + ت رَ + ٢ ب بَ سَ + ٢ ب تَ دَ + ٣ س تَ^{٢} سَ + ٣ س تَ بَ^{٢} + ٤ د تَ^{٣} بَ + ر تَ^{٥} } كَ^{٥} الخ

ثم بمقابلة ك وجعل مسميات قوات ك مساوية لصفرٍ لنا ت تَ − ١ = ٠

ت بَ + ب تَ^{٢} = ٠

ت سَ + ٢ ب تَ بَ + س تَ^{٢} = ٠

ت دَ + ٢ ب تَ سَ + ب بَ^{٢} + ٣ س تَ^{٢} بَ + د تَ^{٤} = ٠

ت رَ + ٢ ب بَ سَ + ٢ ب تَ دَ + ٣ س تَ^{٢} سَ + ٣ س تَ بَ^{٢} + ٤ د تَ^{٣} بَ + ر تَ^{٥} = ٠

بتحويل هذه المعادلات لنا تَ = $\frac{١}{ت}$ ب = − $\frac{ب}{ت^{٢}}$

$$سَ = \frac{٢ب^{٢} - ب س}{ت^{٥}} \qquad دَ = \frac{٥ب^{٢} - ٥ت ب س + ت^{٢} د}{ت^{٧}}$$

$$رَ = \frac{١٤ب^{٤} - ٢١ت ب^{٢} س + ٣ت^{٢} س^{٢} + ٦ت^{٢} ب د - ت^{٣} ر}{ت^{٩}}$$

هذه اذًا قيمات المسميات الغير المعينة في السرد الذي فرضناهُ سابقًا اي $ن = تَ ك + بَ ك^{٢} + سَ ك^{٣} + دَ ك^{٤} + رَ ك^{٥} +$ الخ

ثم لنفرض سردًا

$$ك = ن - \frac{١}{٢}ن^{٢} + \frac{١}{٣}ن^{٣} - \frac{١}{٤}ن^{٤} + \frac{١}{٥}ن^{٥} - \text{الخ}$$

حيث يكون $ت = ١$ $ب = -\frac{١}{٢}$ $س = \frac{١}{٣}$ $د = -\frac{١}{٤}$ $ر = \frac{١}{٥}$ فحسب قيمات المسميات المذكورة لنا

$$تَ = \frac{١}{ت} = ١ \qquad بَ = -ب = \frac{١}{٢}$$

$$سَ = ٢ب^{٢} - ت س = \frac{١}{٢\times٣} \qquad دَ = \frac{١}{٢\times٣\times٤} \qquad رَ = \frac{١}{٢\times٣\times٤\times٥}$$

$$\text{اذًا } ن = ك + \frac{ك^{٢}}{٢} + \frac{ك^{٣}}{٢\times٣} + \frac{ك^{٤}}{٢\times٣\times٤} + \frac{ك^{٥}}{٢\times٣\times٤\times٥} + \text{الخ}$$

في السرد الدآبر

٢٥١ في هذا السرد $١ + ٣ك + ٤ك^{٢} + ٧ك^{٣} + ١١ك^{٤} + ١٨ك^{٥}$ نرى ان مجموع كل مسمَّيين متوالين يعدل الذي يليهما عن اليسار اي $١ + ٣ = ٤$ و $٤ + ٣ = ٧$ الخ وكل جزء بعد الثاني يعدل الذي قبلهُ في ك مع الذي قبل ذلك في $ك^{٢}$

في هذا السرد $١ + ٢ك + ٣ك^{٢} + ٤ك^{٣} + ٥ك^{٤} + ٦ك^{٥}$ الخ نرى كل جزء بعد الثاني $= ٢ك$ في الجزء الذي قبلهُ $- ك^{٢}$ في الذي قبل ذلك فالاسراد التي هي على هذا النسق اي التي يعرف كل جزء منها مما قبلهُ يسمى سردًا دآبرًا ومسميات ك و$ك^{٢}$ اي $+ ٢ - ١$ تسمى قياس النسبة

في هذا السرد $١ + ٤ك + ٦ك^{٢} + ١١ك^{٣} + ٢٨ك^{٤} + ٦٢ك^{٥}$ الخ

نرى كل جزء بعد الثالث = ٢ ك في الذي قبلهُ − ك^{٢} في الذي قبل ذلك + ٢ ك^{٢} في الثالث قبل ذلك فيكون قياس النسبة ٢ − ١ + ٢

لنفرض سردًا دآيرًا تَ + بَ + سَ + دَ + ىَ + فَ الخ

فان كان قياس النسبة مركبًا من جزءين كالاول المفروض سابقًا فليكونا م ون

ثم سَ = بَ م ك + تَ ن ك^{٢} = الجزء الثالث

دَ = سَ م ك + بَ ن ك^{٢} = الرابع

ىَ = دَم ك + سَ ن ك^{٢} = الخامس

الخ الخ

ان كان قياس النسبة مركبًا من ثلثة اجزآء مثل الثاني المفروض سابقًا فلتكن م + ن + ر

ثم دَ = سَ م ك + بَ ن ك^{٢} + تَ ر ك^{٣} = الجزء الرابع

ىَ = دَم ك + سَ ن ك^{٢} + بَ ر ك^{٣} = الخامس

فَ = ىَ م ك + دَ ن ك^{٢} + سَ ر ك^{٣} = السادس الخ

٢٥٢ في كل سردٍ دآيرٍ يوجد قياس النسبة بتحويل معادلتين من هذه المعادلات ان كان مركبًا من جزءين وبتحويل ثلاثٍ منها ان كان مركبًا من ثلاثة اجزآء

فلنفرض ك = ١ ولناخذ الجزء الرابع والخامس مما سبق ذكرها واذا فرضنا ك = ١ فلنا

$$\left.\begin{array}{r}\text{دَ = سَ م + بَ ن}\\ \text{ىَ = دَ م + سَ ن}\end{array}\right\}\ \text{لنا ان نجد قيمة م ون}$$

بتحويل هاتين المعادلتين لنا

$$\text{م} = \frac{\text{دَسَ − بَىَ}}{\text{سَسَ − بَدَ}} \qquad \text{ن} = \frac{\text{سَىَ − دَدَ}}{\text{سَسَ − بَدَ}}$$

ثم في هذا السرد ١ + ٢ ك + ٥ ك^{٢} + ٧ ك^{٣} + ٩ ك^{٤} + ١١ ك^{٥} } الخ
ت ب س د ى ف

ان جعل ك = ١ فلنا

$$\text{م} = \frac{٧ \times ٥ + ٢ \times ٩}{٥^{٢} - ٢ \times ٧} = ٢ \qquad \text{ن} = \frac{٥ \times ٩ - ٧^{٢}}{٥^{٢} - ٢ \times ٧} = -١$$

فيكون قياس النسبة ٢ − ١

٢٥٢ متى عرفنا قياس النسبة لسردٍ هابطٍ نجد من ذلك مجموع السرد

$$\text{لنفرض} \left\{ \begin{array}{l} \text{ت}' \quad \text{ب}' \quad \text{س}' \quad \text{د}' \quad \text{ى}' \quad \text{ف}' \\ \text{ت} + \text{ب ك} + \text{س ك}^{٢} + \text{د ك}^{٣} + \text{ى ك}^{٤} + \text{ف ك}^{٥} \text{ الخ سرداً دايراً} \\ \text{قياس النسبة لهُ م} + \text{ن} \end{array} \right.$$

$$\text{فيكون ت}' = \text{الجزء الاول} \qquad \text{ب}' = \text{الثاني}$$

$$\text{س}' = \text{ب}' \times \text{م ك} + \text{ت}' \times \text{ن ك}^{٢} = \text{الثالث}$$

$$\text{د}' = \text{س}' \times \text{م ك} + \text{ب}' \times \text{ن ك}^{٢} = \text{الرابع}$$

$$\text{ى}' = \text{د}' \times \text{م ك} + \text{س}' \times \text{ن ك}^{٢} = \text{الخامس الخ}$$

فنرى هنا م ك مضروباً في كل جزء الاّ الاول والاخير و ن ك^{٢} في كل جزء الاّ الاخيرَين وان وهم امتداد السرد الى غير نهاية يمكن ترك الاخيرين كما لا قيمة لها

(ع $\overline{٢٢١}$) وان فرض ع = مجموع السرد فلنا

$$\text{ع} = \text{ت}' + \text{ب}' + \text{م ك} \times (\text{ب}' + \text{س}' + \text{د}' \text{ الخ}) + \text{ن ك}^{٢} \times (\text{ت}' + \text{ب}' + \text{س}' \text{ الخ})$$

$$\text{وع} - \text{ت}' = \text{ب}' + \text{س}' + \text{د}' \text{ الخ} \qquad \text{وع} = \text{ت}' + \text{ب}' + \text{س}' \text{ الخ}$$

$$\text{فاذاً ع} = \text{ت}' + \text{ب}' + \text{م ك} \times (\text{ع} - \text{ت}') + \text{ن ك}^{٢} \times \text{ع}$$

$$\text{وبتحويل هذه المعادلة تصير ع} = \frac{\text{ت}' + \text{ب}' - \text{ت}' \text{ م ك}}{١ - \text{م ك} - \text{ن ك}^{٢}}$$

مثال $\overline{١}$ ما هو مجموع $١ + ٦\,\text{ك} + ١٢\,\text{ك}^{٢} + ٤٨\,\text{ك}^{٣} + ١٢٠\,\text{ك}^{٤}$ الخ

قياس النسبة = ١ + ٦

$$\text{اذاً ت}' = ١ \qquad \text{ب}' = ٦\,\text{ك} \qquad \text{م} = ١ \qquad \text{ن} = ٦$$

$$\text{والمجموع} = \frac{١ + ٥\,\text{ك}}{١ - \text{ك} + ٦\,\text{ك}^{٢}}$$

$\overline{٢}$ ما هو مجموع $١ + ٣\,\text{ك} + ٤\,\text{ك}^{٢} + ٧\,\text{ك}^{٣} + ١١\,\text{ك}^{٤} + ١٨\,\text{ك}^{٥} + ٢٩\,\text{ك}^{٦}$ الخ

$$\text{الجواب } \frac{١ + ٢\,\text{ك}}{١ - \text{ك} - \text{ك}^{٢}}$$

٣ ماهو مجموع ١ + ك + ٥ك^{٢} + ١٣ك^{٣} + ٤١ك^{٤} + ١٢١ك^{٥} + ٣٦٥ك^{٦} الخ

الجواب $\frac{\text{١ − ك}}{\text{١ − ٢ك − ٣ك}^{٢}}$

٤ ماهو مجموع ١ + ٢ك + ٣ك^{٢} + ٤ك^{٣} + ٥ك^{٤} الخ

الجواب $\frac{\text{١ + ٢ك − ٢ك}}{\text{١ − ٢ك + ك}^{٢}} = \frac{\text{١}}{(\text{١ − ك})^{٢}}$

٥ ماهو مجموع ١ + ٣ك + ٥ك^{٢} + ٧ك^{٣} + ٩ك^{٤} + ١١ك^{٥} الخ

الجواب $\frac{\text{١ + ك}}{(\text{١ − ك})^{٢}}$

٦ ماهو مجموع ١ + ٢ك + ٨ك^{٢} + ٢٨ك^{٣} + ١٠٠ك^{٤} الخ

الجواب $\frac{\text{١ − ك}}{\text{١ − ٣ك − ٢ك}^{٢}}$

في ترتيب الفضلات

٢٥٤ لكي نجد قيمة بعض اجزآ سردٍ الى حدٍّ ما يلزم التدقيق المقصود في عمل ما يوخذ عدّة رتبٍ من فضلات اجزآء السرد مثالهُ ان فرض سرد

١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ بطرح كل جزء مما بعدهُ

لنا ٧ ١٩ ٣٧ ٦١ الرتبة الاولى من الفضلات

١٢ ١٨ ٢٤ الرتبة الثانية

٦ ٦ الثالثة وهلم جرًّا

فان فرض ت ب س د ى ف الخ

فلنا ب − ت   س − ب   د − س   ى − د   ف − ى الخ = الاولى

س − ٢ب + ث   د − ٢س + ب   ى − ٢د + س   ف − ٢ى + د الخ = الثانية

د − ٣س + ٣ب − ت   ى − ٣د + ٣س − ب   ف − ٣ى + ٣د − س الخ = الثالثة

ى − ٤د + ٦س − ٤ب + ث   ف − ٤ى + ٦د − ٤س + ب الخ = الرابعة

ف − ٥ى + ١٠د − ١٠س + ٥ب − ت الخ = الخامسة

فان لاحظنا مسميات هذه الاجزآء نرى مسميات الاجزآء

في الرتبة الثانية ١ ٢ ١

في الثالثة ١ ٣ ٣ ١

في الرابعة ١ ٤ ٦ ٤ ١

في الخامسة ١ ٥ ١٠ ١٠ ٥ ١

وهي اذًا كمسميات قوات كميات ثنآئية فتكون مسميات ع علةٍ من رتب فضلات

$$١ \quad ع \quad ع\times\frac{ع-١}{٢} \quad ع\times\frac{ع-١}{٢}\times\frac{ع-٢}{٣}\ \text{الخ}$$

٢٥٥ ثم لكي نجد عبارة عمومية دالة على جزء ما في سرد مثل ت ب س د الخ لنفرض د′ د″ د‴ د⁗ الخ = الجزء الاول في الرتبة الاولى والثانية والثالثة والرابعة الخ

اذًا د′ = ب − ت

د″ = س − ٢ب + ت

د‴ = د − ٣س + ٣ب − ت

د⁗ = ى − ٤د + ٦س − ٤ب + ت الخ

بالمقابلة نجد قيمات اجزآء السرد المفروض اي ت ب س د الخ

ب = ت + د′

س = ت + ٢د′ + د″

د = ت + ٣د′ + ٣د″ + د‴

ى = ت + ٤د′ + ٦د″ + ٤د‴ + د⁗

فاذًا لنا هذه العبارة للدلالة على ع جزء من سردٍ اولهُ ت

$$ت+(ع-١)د′+(ع-١)\frac{ع-٢}{٢}د″+ع-١\frac{ع-٢}{٢}\times\frac{ع-٣}{٣}د‴\ \text{الخ}$$

مثال اول ما هو الجزء العشرون من هذا السرد

١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ ٢١ الخ

الرتبة الاولى من فضلات = ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

الثانية = ١ ١ ١ ١

الثالثة = . . .

هنا ت = ١ د′ = ٢ د″ = ١ د‴ = ٠

والجزء العشرون = ١ + ٣٨ + ١٧١ = ٢١٠

والجزء الخمسون = ١٢٧٥

مثال $\overline{٣}$ ما هو الجزء العشرون من $١^{٣}$ $٢^{٣}$ $٣^{٣}$ $٤^{٣}$ $٥^{٣}$ الخ

السرد ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ الخ

٧ ١٩ ٣٧ ٦١ = الرتبة الاولى من فضلات

١٢ ١٨ ٢٤ = الثانية

٦ ٦ = الثالثة

هنا ت = ١ $د' = ٧$ $د'' = ١٢$ $د''' = ٦$

والجزء العشرون = ٨٠٠٠

$\overline{٣}$ ما هو الجزء الثاني عشر من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٣٠ الخ

الجواب ١٥٦

$\overline{٤}$ ما هو الجزء الخامس عشر من $١^{٢}$ $٢^{٢}$ $٣^{٢}$ $٤^{٢}$ $٥^{٢}$ $٦^{٢}$ الخ

الجواب ٢٢٥

٢٥٦ لنا ايضاً هذه العبارة الدالة على مجموع ع اجزآء من سردٍ اولهُ ت

$$ع ت + ع\frac{ع-١}{٢}د' + ع\frac{ع-١}{٢}\times\frac{ع-٢}{٣}د'' + ع\frac{ع-١}{٢}\times\frac{ع-٢}{٣}\times\frac{ع-٣}{٤}د''' + \text{الخ}$$

مثال اول ما هو مجموع ٢٠ جزءا من ١ ٣ ٥ ٧ ٩ الخ

السرد ١ ٣ ٥ ٧ ٩

٢ ٢ ٢ ٢ = الرتبة الاولى من فضلات

٠ ٠ ٠ = الثانية

هنا ت = ١ $د' = ٢$ $د'' = ٠$

$$\text{اذاً المجموع} = ٢٠ + ٢٠\frac{٢٠-١}{٢}\times ٢ = ٤٠٠ \text{ اي } ع^{٢}$$

$\overline{٢}$ ما هو مجموع ٢٠ جزءا من $١^{٢}$ $٢^{٢}$ $٣^{٢}$ $٤^{٢}$ $٥^{٢}$ الخ

ت = ١ $د' = ٣$ $د'' = ٢$ $د''' = ٠$ ومجموع عشرين جزءا = ٢٨٧٠

$\overline{٣}$ ما هو مجموع ٥٠ جزءا من $١^{٣}$ $٢^{٣}$ $٣^{٣}$ $٤^{٣}$ الخ

$\text{ت} = ١$ $\text{د}' = ٧$ $\text{د}'' = ١٢$ $\text{د}''' = ٦$ $\text{د}'''' = ٠$

المجموع ١٦٢٥٦٢٥

$\overline{٤}$ ما هو مجموع ١٥ جزءا من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٣٠ الخ

$\overline{٥}$ ما هو مجموع ٢٠ جزءا من ١ ٣ ٦ ١٠ ١٥ الخ

$\overline{٦}$ ما هو مجموع ١٢ جزءا من $١^{٤}$ $٢^{٤}$ $٣^{٤}$ $٤^{٤}$ $٥^{٤}$ الخ

* * *

الفصل الحادي والعشرون

في المعادلات التامة من الدرجة الثالثة

٢٥٧ متى وجد في معادلةٍ مكعّب المجهول ومربعه سميت معادلة تامّة من الدرجة الثالثة وهذه عبارة عمومية لمعادلاتٍ من هذا النوع بعد نقل الاجزاء الى جانب واحدٍ

$$\text{ت}\,\text{ك}^{٣} \pm \text{ب}\,\text{ك}^{٢} \pm \text{س}\,\text{ك} \pm \text{د} = ٠$$

ولا بد لكل معادلةٍ من هذا النوع من ثلاثة اجوبة كما ان المعادلات من الدرجة الثانية لها جوابان

فلو فرضنا $(\text{ك} - ١) \times (\text{ك} - ٢) \times (\text{ك} - ٣) = ٠$ لكان لنا من ذلك $\text{ك}^{٣} - ٦\,\text{ك}^{٢} + ١١\,\text{ك} - ٦ = ٠$

ولكي تعدل هذه الكميات صفرًا لا بد ان يكون احد الاضلاع التي حصلت المعادلة منها صفرًا اي تكون $\text{ك} - ١ = ٠$ و$\text{ك} = ١$ او $\text{ك} - ٢ = ٠$ و$\text{ك} = ٢$ او $\text{ك} - ٣ = ٠$ و$\text{ك} = ٣$ واذا عوضنا عن المجهول بكمية اخرى ايّة كانت غير واحدة من هذه الثلاث لم يكن الحاصل صفرًا فلا يكون للمعادلة غير هذه الاجوبة الثلاثة واجوبة المعادلات هذه تسمى اصولها

٢٥٨ لاجل ايضاح كيفيّة استعلام اصول معادلةٍ من هذا النوع لنفرض

$\text{ك} - \text{ف}$ $\text{ك} - \text{ق}$ $\text{ك} - \text{ر}$

وبضرب الاولى في الثانية لنا ك^{٢} − (ف + ق) ك + ف ق وان ضربت هذه في ك − ر فلنا

ك^{٣} − (ف + ق + ر) ك^{٢} + (ف ق + ف ر + ق ر) ك − ف ق ر وهذه العبارة تعدل صفرًا متى كان ك − ف = ٠ وك = ف او ك − ق = ٠ وك = ق او ك − ر = ٠ وك = ر فلنعوض عن هذه المعادلة باخرى مثل ك^{٣} − ث ك^{٢} + ب ك − س = ٠ فلكي تكون الاصول الثلاثة على ما تقدم اي ك = ف او ك = ق او ك = ر يلزم ان يكون

(١) ث = ف + ق + ر

(٢) ب = ف ق + ف ر + ق ر

(٣) س = ف ق ر

فنرى ان الجزء الثاني من المعادلة مشتملٌ على مجتمع اصولها الثلاثة. وان الجزء الثالث منها مشتمل على مجتمع حاصل كل اثنين اثنين من الاصول الثلاثة. والجزء الرابع مشتمل على حاصل الاصول الثلاثة. ونرى ايضًا ان كل معادلة من الدرجة الثالثة لا يكون لها اصولٌ منطقة الاّ الكميات التي تفني الجزء الرابع منها. فمن حيث ان ذلك الجزء هو حاصل الاصول الثالثة لا بد ان يقبل الانقسام على كل واحدٍ منها. ومن ذلك نستدل بسهولة على الكميات التي يجب ان نستعملها في تفتيشنا على اصول المعادلة. فلو فرض ك^{٣} = ك + ٦ لكان لنا بالمقابلة ك^{٣} − ك − ٦ = ٠ ومن حيث ان هذه المعادلة ليس لها اصول منطقة الاّ التي تنقسم ٦ عليها نعلم ان تلك الاصول هي ثلاثة من هذه الاربعة اي ١ ٢ ٣ ٦ لان ٦ لا تنقسم الا على هذا الاربعة

فان فرض ك = ١ لنا ١ − ١ − ٦ = − ٦

وان فرض ك = ٢ لنا ٨ − ٢ − ٦ = ٠

وان فرض ك = ٣ لنا ٢٧ − ٣ − ٦ = ١٨

وان فرض ك = ٦ لنا ٢١٦ − ٦ − ٦ = ٢٠٤

فلنا من ذلك ك = ٢ واحد من الاصول الثلاثة

فيكون ك − ٢ ضلعًا من الاضلاع التي حصلت المعادلة من ضرب بعضها في بعض. ونجد الاخر بالقسمة هكذا

$$\begin{array}{l} ك - ٢)\, ك^٣ - ك - ٦ \,(ك^٢ + ٢ك + ٣ \\ \underline{\quad ك^٣ - ٢ك^٢} \\ \quad ٢ك^٢ - ك - ٦ \\ \underline{\quad ٢ك^٢ - ٤ك} \\ \quad ٣ك - ٦ \\ \underline{\quad ٣ك - ٦} \\ \quad ٠ \end{array}$$

ثم $ك^٢ + ٢ك + ٣ = ٠$ $ك^٢ + ٢ك = -٣$ و$ك = -١ \pm \sqrt{-٢}$

فيكون الاصلان الآخران وهميَّين

٢٥٩ هذا متى كان للقوة العليا من المجهول مسمّى هو واحدٌ ولبقية قواته مسميات صحيحة

وان لم يكن كذلك يجب تحويل المعادلة الى الحالة المشار اليها فلنفرض

$$ك^٣ - ٣ك^٢ + \frac{١١}{٤}ك - \frac{٣}{٤} = ٠$$

فمن حيث ان في المسميات ارباعًا لنفرض $ك = \frac{ى}{٢}$ ثم بالتعويض عن ك في المعادلة لنا

$\frac{ى^٣}{٨} - \frac{٣ى^٢}{٤} + \frac{١١ى}{٨} - \frac{٣}{٤} = ٠$ اضرب في ٨ فتصير $ى^٣ - ٦ى^٢ + ١١ى - ٦ = ٠$ فتكون الاصول $ى = ١$ $ى = ٢$ $ى = ٣$ وبارجاع ك $ك = \frac{١}{٢}$ $ك = ١$ $ك = \frac{٣}{٢}$

٢٦٠ لنفرض معادلة مسمي القوة العليا منها غير واحد وجزؤها الاخير واحد مثل هذه

$٦ك^٣ - ١١ك^٢ + ٦ك - ١ = ٠$ بالقسمة على ٦ لنا $ك^٣ - \frac{١١}{٦}ك^٢ + ك - \frac{١}{٦} = ٠$

ثم لنفرض $ك = \frac{ى}{٦}$ وبالتعويض لنا

$\frac{ى^٣}{٢١٦} - \frac{١١ى^٢}{٢١٦} + \frac{ى}{٦} - \frac{١}{٦} = ٠$ اضرب في ٢١٦ فتصير $ى^٣ - ١١ى^٢ + ٣٦ى - ٣٦ = ٠$

فلو اردنا امتحان المعادلة بجميع الاعداد التي يمكن انقسام ٣٦ عليها لطال بنا العمل فلنفرض $ك = \frac{١}{د}$ ثم بالتعويض لنا

$\frac{٦}{د^{٣}} - \frac{١١}{د^{٢}} + \frac{٦}{د} - ١ = ٠$ اضرب في $د^{٣}$ فتصير $د^{٣} - ٦\,د^{٢} + ١١\,د - ٦ = ٠$ اي $د = ١$ $د = ٢$ $د = ٣$ فاذًا $ك = ١$ $ك = \frac{١}{٢}$ $ك = \frac{١}{٣}$

٢٦١ متى كانت العلامات في المعادلة ايجابيّة وسلبية بالتداول كما في المعادلات المذكورة انفًا وفي هذه $ك^{٣} - ت\,ك^{٢} + ب\,ك - س = ٠$ تكون جميع الاصول ايجابيّة. ولو كانت جميع العلامات ايجابيّة كما في هذه $ك^{٣} + ت\,ك^{٢} + ب\,ك + س = ٠$ لكانت جميع الاصول سلبية كما يتضح من ضربها مثالهُ $ك = ٢$ $ك = ٣$ $ك = ٤$

بالمقابلة $ك - ٢ = ٠$ $ك - ٣ = ٠$ $ك - ٤ = ٠$

وبالضرب $(ك - ٢) \times (ك - ٣) \times (ك - ٤) = ك^{٣} - ٩\,ك^{٢} + ٢٦\,ك - ٢٤ = ٠$

ولو فرض $ك = -٢$ $ك = -٣$ $ك = -٤$

لكان $ك + ٢ = ٠$ $ك + ٣ = ٠$ $ك + ٤ = ٠$

فالضرب لنا $ك^{٣} + ٩\,ك^{٢} + ٢٦\,ك + ٢٤ = ٠$

فنرى ان عدد الاصول السلبيّة يماثل مرار تغيير العلامات في المعادلة. وعدد الاصول الايجابيّة يماثل مرار تتابع العلامات المتشابهة

وفي هذه المعادلة $ك^{٣} + ك^{٢} - ٣٤\,ك + ٥٦ = ٠$

نرى العلامات تتغير من + الى − ثم من − الى + اي مرتين و+ يتبع + مرة واحدة فقط. ونستدل بذلك ان للمعادلة اصلين ايجابيّين واصلًا واحدًا سلبيًا. ولا بد ان ٥٦ يقبل الانقسام على هذه الاصول و٥٦ ينقسم على ± ١ ٢ ٤ ٧ ٨ ١٤ ٢٨ ٥٦ فاذا فرضنا $ك = ٢$ فلنا $٨ + ٤ - ٦٨ + ٥٦ = ٠$ فاذًا $ك = ٢$ هو اصل واحد. ولكي نجد الاخرين نقسم على

$ك - ٢)\ ك^{٣} + ك^{٢} - ٣٤\,ك + ٥٦\ (ك^{٢} + ٣\,ك - ٢٨$

$\underline{ك^{٣} - ٢\,ك^{٢}}$

$٣\,ك^{٢} - ٣٤\,ك$

$\underline{٣\,ك^{٢} - ٦\,ك}$

$-٢٨\,ك + ٥٦$

$\underline{-٢٨\,ك + ٥٦}$

والخارج $ك^{٢}$ + ٢ ك − ٢٨ = ٠   و$ك^{٢}$ + ٢ ك = ٢٨   ك = ٤   وك = − ٧

(مسئلة ١) ما عددان فضلتهما ١٢ واذا ضرب حاصلها في مجتمعهما كان الحاصل ١٤٥٦٠

لنفرض ك = اصغرها. وك + ١٢ = اكبرها. وحاصلها $ك^{٢}$ + ١٢ ك   ومجتمعها ٢ ك + ١٢   وهذا في حاصلها يعطينا ٢ $ك^{٣}$ + ٣٦ $ك^{٢}$ + ١٤٤ ك = ١٤٥٦٠ وبالقسمة على ٢ $ك^{٣}$ + ١٨ $ك^{٢}$ + ٧٢ ك = ٧٢٨٠ ولو اردنا ان نمتحن جميع الاعداد التي تقبل ٧٢٨٠ الانقسام عليها لطال بنا العمل ولكن نرى ان ينقسم على ٨ فلنفرض ك = ٢ ى ثم بالتعويض لنا ٨ $ى^{٣}$ + ٧٢ $ى^{٢}$ + ١٤٤ ى = ٧٢٨٠ وبالقسمة على ٨ لنا $ى^{٣}$ + ٩ $ى^{٢}$ + ١٨ ى = ٩١٠ و٩١٠ يقبل الانقسام على ١ و٢ و٥ و٧ و١٠ و١٣ الى اخره فلا داعي لامتحان ١ و٢ و٥ لاننا نراها من اول وهلة صغيرة فلنمتحن اولاً ٧ اي نفرض ى = ٧ فلنا ٣٤٣ + ٤٤١ + ١٢٦ = ٩١٠ فاذاً ى = ٧ فاذاً ك + ١٤ هو واحد من اصول المعادلة ونجد الاخرين بالقسمة هكذا

ى − ٧) $ى^{٣}$ + ٩ $ى^{٢}$ + ١٨ ى − ٩١٠ ($ى^{٢}$ + ١٦ ى + ١٣٠
$ى^{٣}$ − ٧ $ى^{٢}$
١٦ $ى^{٢}$ + ١٨ ى
١٦ $ى^{٢}$ − ١١٢ ى
١٣٠ ى − ٩١٠
١٣٠ ى − ٩١٠
٠

فلنا $ى^{٢}$ + ١٦ ى = − ١٣٠   ى = − ٨ ± $\sqrt{-٦٦}$ وهي كمية وهمية. وذلك يدل على ان الاصلين الآخرين وهميان   فاذاً ك = ١٤ و١٤ + ١٢ = ٢٦

(مسئلة ٢) ما عددان فضلتهما ١٨ ومجتمعهما في فضلة مكعبيهما = ٢٧٥١٨٤

لنفرض اكبرهما = ك فيكون اصغرهما ك + ١٨ وكعب الاكبر $ك^{٣}$ وكعب الاصغر $ك^{٣}$ + ٥٤ $ك^{٢}$ + ٩٧٢ ك + ٥٨٣٢ وفضلة كعبيهما ٥٤ $ك^{٢}$ + ٩٧٢ ك + ٥٨٣٢ اي ٥٤ × ($ك^{٢}$ + ١٨ ك + ١٠٨) وهذا في ٢ ك + ١٨ اي ٢ (ك + ٩) يعطينا

١٠٨ ($ك^{٣}$ + ٢٧ $ك^{٢}$ + ٢٧٠ ك + ٩٧٢) = ٢٧٥١٨٤ وبالقسمة على ١٠٨ تصير

ك^{٣} + ٢٧ ك^{٢} + ٢٧٠ ك + ٩٧٢ = ٢٥٤٨

اي ك^{٣} + ٢٧ ك^{٢} + ٢٧٠ ك = ١٥٧٦

و١٥٧٦ يقبل الانقسام على ١ و٢ و٤ و٨ الى اخره ونرى من اول وهلة ان ١ و٢ اصغر مما يلزم واذا امتحنا المعادلة باربعة نجدها صحيحة. فاذاً ك = ٤ هي واحد من اصول المعادلة. وبالقسمة على ك − ٤ لنا ك^{٢} + ٣١ ك + ٣٩٤ = ٠ وبتحويلها لنا ك $= -\frac{٣١}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩٦١}{٤} - \frac{١٥٧٦}{٤}}$ وهي كميات وهمية. فيكون العددان المطلوبان ٤ و١٨ + ٤ = ٢٢

(مسئلة ٣) ما عددان فضلتهما ٧٢٠ واذا ضرب اصغرهما في جذر اكبرهما يكون الحاصل ٢٠٧٣٦ لنفرض الاصغر ك والاكبر ك + ٧٢٠ فلنا ك $\sqrt{ك + ٧٢٠}$ = ٢٠٧٣٦ = ٨ × ٨ × ٤ × ٨١

بتربيع الجانبين ك^{٣} + ٧٢٠ ك^{٢} = ٨^{٢} × ٨^{٢} × ٤^{٢} × ٨١^{٢}

ثم لنفرض ك = ٨ ى فبالتعويض لنا

٨^{٣} ى^{٣} + ٧٢٠ × ٨^{٢} ى^{٢} = ٨^{٢} × ٨^{٢} × ٤^{٢} × ٨١^{٢}

بالقسمة على ٨^{٣} لنا ى^{٣} + ٩٠ ى^{٢} = ٨ × ٤^{٢} × ٨١^{٢}

ثم لنفرض ى = ٢ ل فبالتعويض لنا

٨ ل^{٣} + ٤ × ٩٠ ل^{٢} = ٨ × ٤^{٢} × ٨١^{٢}

بالقسمة على ٨ لنا ل^{٣} + ٤٥ ل^{٢} = ٤^{٢} × ٨١^{٢}

ثم لنفرض ل = ٩ م فلنا بتعويض

٩^{٣} م^{٣} + ٤٥ × ٩^{٢} م^{٢} = ٤^{٢} × ٩^{٤}

بالقسمة على ٩^{٣} لنا م^{٣} + ٥ م^{٢} = ٤^{٢} × ٩

اي م^{٢} × (م + ٥) = ٤^{٢} × ٩

اذاً م^{٢} = ٤^{٢} وم = ٤ م + ٥ = ٩ م = ٤

فلنا ل = ٤٦ ى = ٧٢ ك = ٥٧٦ = الاصغر

و٥٧٦ + ٧٢٠ = ١٢٩٦ = الاكبر

ولنا طريقة اخرى لحل هذه المسئلة

لنفرض اكبرهما ك^{٢} فالاصغر ك^{٢} − ٧٢٠

بالضرب في $\sqrt{ك^{٢}}$ لنا ك^{٢} − ٧٢٠ ك = ٢٠٧٣٦

اي ك^{٢} − ٧٢٠ ك = ٦٤ × ٢٧ × ١٢

لنفرض ك = ٤ ى فلنا ٦٤ ى^{٢} − ٧٢٠ × ٤ ى = ٦٤ × ٢٧ × ١٢

بالقسمة على ٦٤ لنا ى^{٢} − ٤٥ ى = ٢٧ × ١٢

لنفرض ى = ٣ ل فلنا ٢٧ ل^{٢} − ١٣٥ ل = ٢٧ × ١٢

بالقسمة على ٢٨ لنا ل^{٢} − ٥ ل = ١٢

وهنا نرى من اول نظرة ان ل = ٣ ومن ثمَّ لنا

ى = ٩ ك = ٣٦ ك^{٢} = ١٢٩٦ = اكبرها

(مسئلة ٤) ما عددان فضلتهما ١٢ واذا ضُربت هذه الفضلة في مجموع كعبيها كان الحاصل ١٠٢١٤٤

لنفرض ك = اصغرها وك + ١٢ = اكبرها

كعب الاول = ك^{٣} وكعب الثاني = ك^{٣} + ٣٦ ك^{٢} + ٤٣٢ ك + ١٧٢٨ فلنا

١٢ (٢ ك^{٣} + ٣٦ ك^{٢} + ٤٣٢ ك + ١٧٢٨) = ١٠٢١٤٤

بالقسمة على ١٢ و٢ لنا ك^{٣} + ١٨ ك^{٢} + ٢١٦ ك + ٨٦٤ = ٤٢٥٦

اي ك^{٣} + ١٨ ك^{٢} + ٢١٦ ك = ٣٣٩٢ = ٨ × ٨ × ٥٣

لنفرض ك = ٢ ى ونقسم على ٨ فلنا

ى^{٣} + ٩ ى^{٢} + ٥٤ ى = ٨ × ٥٣ = ٤٢٤

و٤٢٤ يقبل الانقسام على ١ و٢ و٤ و٨ و٥٣ الى اخرهِ

فنفرض ى = ٤ فلنا ٦٤ + ١٤٤ + ٢١٦ = ٤٢٤

فاذًا ى = ٤ ك = ٨ ٨ + ١٢ = ٢٠

(مسئلة ٥) رجال عقدوا شركةً على شرط ان يضع كل واحدٍ منهم في راس المال من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات فربحوا في المائة ٦ اكثر من عدد الشركاء وكان كل الربح ٣٩٢ دينارًا فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = عدد الشركاء ثم ١٠ ك = ما وضعهُ كل واحدٍ و١٠ ك^{٢} = ما وضعهُ جميعهم والربح في المائة ك + ٦ فيكون ربح دينارٍ واحدٍ $\frac{ك + ٦}{١٠٠}$

وهذا في $\text{١٠ ك}^{٢} = \frac{\text{ك}^{٣} + \text{٦ ك}^{٢}}{١٠} =$ الربح كله

فلنا $\frac{\text{ك}^{٣} + \text{٦ ك}^{٢}}{١٠} = ٣٩٢$

و $\text{ك}^{٣} + \text{٦ ك}^{٢} = ٣٩٢٠$

لنفرض $\text{ك} = \text{٢ ى}$ ثم نقسم على ٨ فلنا

$\text{ى}^{٣} + \text{٣ ى}^{٢} = ٤٩٠$

و ٤٩٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٥ و ٧ و ١٠ الى اخرهِ

فنرى من اول وهلةٍ ان ١٠ هي اكثر مما يلزم وا و ٢ و ٥ اصغر مما يلزم. فلنفرض $\text{ى} = ٧$ فلنا

$٣٤٣ + ١٤٧ = ٤٩٠$ فاذاً $\text{ى} = ٧$ $\text{ك} = ١٤$

الشركاء ١٤ وكل واحدٍ وضع في راس المال ١٤٠ دينارًا

(مسئلة ٦) شركاء في تجارة كان راس مالهم ٨٢٤٠ دينارًا فاضاف اليه كل شريك من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء ٤٠ مرة فربحوا في المائة من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء وعند قسمة الربح اخذ كل واحدٍ من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات وبقي ٢٢٤ دينارًا فكم عدد الشركاء

لنفرض $\text{ك} =$ الشركا و $\text{٤٠ ك} =$ ما اضافهُ كل واحد من راس المال و $\text{٤٠ ك}^{٢}$ ما اضافهُ الجميع و $\text{٤٠ ك}^{٢} + ٨٢٤٠ =$ راس المال كلهُ بعد الاضافات المذكورة وربح في المائة ك فيكون كل الربح $\frac{\text{٤٠ ك}^{٣}}{١٠٠} + \frac{\text{٨٢٤٠ ك}}{١٠٠}$ اي $\frac{٢}{٥}\text{ك}^{٣} + \frac{٤١٢}{٥}\text{ك}$ ومن هذا المبلغ اخذ كل واحد ١٠ ك والكل اخذوا $\text{١٠ ك}^{٢}$ وبقي ٢٢٤ فلنا $\frac{\text{٢ ك}^{٣}}{٥} + \frac{\text{٤١٢ ك}}{٥} = \text{١٠ ك}^{٢} + ٢٢٤$

$\text{ك}^{٣} - \text{٢٥ ك}^{٢} + \text{٢٠٦ ك} - ٥٦٠ = ٠$

فنرى العلامات تتغير ثلاث مرات فتكون الاصول جميعها ايجابيّة و ٥٦٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٥ و ٧ و ٨ الخ فان فرضنا $\text{ك} = ٤$ نجد ان المعادلة لا تصح وكذلك اذا فرضنا $\text{ك} = ٥$ واذا فرضنا $\text{ك} = ٧$ نجد المعادلة صحيحة فاذًا

ك = ٧ ونجد الاصلين الاخرين بالقسمة فلنا بعد القسمة ك^{٢} − ١٨ ك + ٨٠ = ٠ ك = ٩ ± ١ اي ك = ٨ او ١٠ وكل واحد من هذه الاجوبة الثلاثه يطابق شروط المسئلة هكذا

عدد الشركاء	٧	٨	١٠
كل واحد اضاف ٤٠ ك	٢٨٠	٣٢٠	٤٠٠
الكل اضافوا ٤٠ ك^{٢}	١٩٦٠	٢٥٦٠	٤٠٠٠
راس المال	٨٢٤٠	٨٢٤٠	٨٢٤٠
٤٠ ك^{٢} + ٨٢٤٠ =	١٠٢٠٠	١٠٨٠٠	١٢٢٤٠
ربحوا في المائة ما يماثل عدد الشركاء	٧١٤	٨٦٤	١٢٢٤
كل واحدٍ اخذ	٧٠	٨٠	١٠٠
الكل اخذوا	٤٩٠	٦٤٠	١٠٠٠
فبقي	٢٢٤	٢٢٤	٢٢٤

(مسئلة ٧) ما عددان مجتمعهما ١٣ وان ضرب كل واحدٍ في جذر الاخر كان مجتمع الحاصلين ٣٠

لنفرض احدهما ك^{٢} والاخرى ى^{٢}

(١) بشروط المسئلة ك^{٢} + ى^{٢} = ١٣

(٢) اضف ٢ك ى الى الجانبين ك^{٢} + ٢ك ى + ى^{٢} = ١٣ + ٢ك ى

(٣) بالتجذير ك + ى = $\sqrt{١٣ + ٢ك ى}$

(٤) بالشرط الثاني ك^{٢} ى + ى ك^{٢} = ٣٠

اي ك ى (ك + ى) = ٣٠

(٥) بالقسمة ك + ى = $\frac{٣٠}{ك ى}$

(٦) بالمساواة بين (٣) و(٥) $\frac{٣٠}{ك ى}$ = $\sqrt{١٣ + ٢ك ى}$

(٧) بالترقية $\frac{٩٠٠}{ك^{٢} ى^{٢}}$ = ١٣ + ٢ك ى

(٨) بالجبر ٢ك^{٣} ى^{٣} + ١٣ك^{٢} ى^{٢} = ٩٠٠

(٩) افرض ك ى = ف   ٢ف^{٤} + ١٢ ف^{٢} = ٩٠٠

اي   ف^{٤} + $\frac{١}{٢}$٦ ف^{٢} = ٤٥٠

او اذا فرض   ك + ى = س   وك ى = ف

فلنا من (٤)   ك ى (ك + ى) = ف س

و   ك^{٢} + ٢ ك ى + ى^{٢} = س^{٢}

اي   ك^{٢} + ٢ ف + ى^{٢} = س^{٢}

و   ك^{٢} + ى^{٢} = س^{٢} − ٢ ف

ومن (١) لنا   س^{٢} − ٢ ف = ١٢

بالمقابلة   ٢ ف = س^{٢} − ١٢

لنا من (٤)   ف س = ٣٠

بالقسمة ف = $\frac{٣٠}{س}$ ٢ ف = $\frac{٦٠}{س}$

وبالمساواة   س^{٢} − ١٢ = $\frac{٦٠}{س}$

بالجبر   س^{٣} − ١٢ س = ٦٠

افرض   س = ٥ فلنا ١٢٥ − ٦٥ = ٦٠

و   ف س = ٣٠   ف = ٦

ك ى = ٦   ك = $\frac{٦}{ى}$ $\frac{٦}{ى}$ + ى = ٥

ى = ٣   ى^{٢} = ٩   ك = ٢   ك^{٢} = ٤

* * *

الفصل الثاني والعشرون

في حل المعدلات من كل درجةٍ بالاستقراء

٢٦٢ قد تقدم القول ان حاصل اصول معادلةٍ ما يعدل جزءها الاخير. فمن النظر الى هذا الجزء يمكننا ان نفرض احد الاصول فرضًا تقريبيًا. واذا فرضنا للاصل قيمتين وامتحناهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة نجد الخطأة. ثم نصلح المفروضين على موجب هذه النسبة

نسبة فضلة الخطأَين الى فضلة المفروضين كالمفروض الاصغر الى الاصلاح المقتضي لهُ

ونكرر هذا العمل حتى نصل الى المطلوب ونُسمّى هذه الطريقة استقرآء. ويسهل العمل اذا فرضنا عددين فضلتهما ´١ او ´٠١ او ´٠٠١ الى اخره

(١) مفروض $ك^٣ - ٨ك^٢ + ١٧ك - ١٠ = ٠$ مطلوب قيمة ك

نرى في هذه المعادلة ان العلامات تغيرت ثلاث مرات فيقتضي ان تكون الاصول الثلاثة ايجابيّةً وان يكون حاصلها ١٠ ومجتمعها ٨ (٢٥٨)

فلنفرض احدها ٥´١ او ٥´٢

بالاول		بالثاني
$ك^٣$ =	١٣٢´٦٥١	١٤٠´٦٠٨
−٨$ك^٢$ =	−٢٠٨´٠٨	−٢١٦´٣٢
١٧ك =	٨٦´٧	٨٨´٤
−١٠ =	−١٠´٠	−١٠´٠
الخطآن =	+١´٢٧١	+٢´٦٨٨
بالطرح		١´٢٧١
فضلة الخطآين		+١´٤١٧

ثم بالنسبة ١´٤ : ٠´١ :: ١´٢٧ : ٠´٠٩ اي ٠´٠٩ يجب طرحها من المفروض الاول فلنا ٥´١ — ٠´٠٩ = ٥´٠١

ثم لنفرض ك = ٥´٠١ او ٥´٠٢

	بالاول	بالثاني
$ك^٣$ =	١٢٥´٧٥١	١٢٦´٥٠٦
−٨$ك^٢$ = −	٢٠٠´٨	− ٢٠١´٦
١٧ك =	٨٥´١٧	٨٥´٣٤
−١٠ = −	١٠	− ١٠
الخطآن +	٠´١٢١	+ ´٢٤٦

وبالطرح ٢٤٦´٠ − ١٢١´٠ = ١٢٥´٠

ثم ١٢٥´٠ : ٠١´٠ :: ١٢١´٠ : ٠١´٠ = الاصلاح

و٠١´٥ − ٠١´٠ = ٥ وهي تطابق المعادلة فلنا ك = ٥ واحد من الاصول الثلثة. وبالقسمة

ك − ٥) ك^{٣} − ٨ ك^{٢} + ١٧ ك − ١٠ (ك^{٢} − ٣ ك + ٢ = ٠

وباتمام التربيع الى اخرهِ ك = ٢ او ١ وهذه الاصول الثلثة اي ٥ و٢ و١ بعد تبديل علاماتها يكون مجمعها − ٨ وحاصلها − ١٠

(٢) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} − ٨ ك^{٢} + ٤ ك + ٤٨ = ٠

الجواب − ٢ + ٤ + ٦

(٣) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} − ١٦ ك^{٢} + ٦٥ ك − ٥٠ = ٠

الجواب ١ ٥ ١٠

(٤) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} + ٢ ك^{٢} − ٣٣ ك = ٩٠

الجواب ٦ − ٥ − ٣

(٥) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبًا وهي ك^{٣} + ٩ ك^{٢} + ٤ ك = ٨٠

(٦) مطلوب اصل من اصول هذه المعادلة تقريبًا وهي ك^{٣} + ك^{٢} + ك = ١٠٠

٢٦٣ طريقة اخرى

لنفرض ر = عددًا قد وجدنا بالامتحان انهُ يعدل قيمة المجهول ك تقريبًا. ولنفرض ل = الفرق بين ر والاصل الحقيقي ك ثم في المعادلة المفروضة نعوض عن ك بواسطة ر ± ل ونسقط الاجزاء المحتوية قوات من ل فتصير المعادلة بسيطة.

مثالهُ

(١) مفروض ك^{٣} − ١٦ ك^{٢} + ٦٥ ك = ٥٠

لنفرض ك = ر − ل

فلنا ك^{٣} = ر^{٣} − ٣ ر^{٢} ل + ٣ ر ل^{٢} − ل^{٣}

− ١٦ ك^{٢} = − ١٦ ر^{٢} + ٣٢ ر ل − ١٦ ل^{٢}

٦٥ ك = ٦٥ ر − ٦٥ ل

} = ٥٠

باسقاط الاجزاء التي فيها ل^{٢} ول^{٣} لنا

ر^{٣} −− ١٦ ر^{٢} + ٦٥ ر − ٣ ر^{٢} ل + ٣٢ ر ل − ٦٥ ل = ٥٠

و $$ل = \frac{٥٠ - ر^{٣} + ١٦ ر^{٢} - ٦٥ ر}{- ٣ ر^{٢} + ٣٢ ر - ٦٥}$$

ثم لنفرض ر = ١١ فاذاً $ل = \frac{٦٠}{٧٦}$ = ٠'٨ تقريباً

ك = ر − ل اي = ١١ − ٠'٨ = ١٠'٢

ثم افرض ر = ١٠'٢ في المعادلة الاخيرة فلنا ل = ٠'١٨٨ ور − ل = ١٠'٠١٢

افرض ر = ١٠'٠١٢ فلنا ل = ٠'٠١٢

و ر − ل = ١٠'٠١٢ − ٠'٠١٢ = ١٠ = ك

(٢) نطلب اصلاً لهذه المعادلة تقريباً وهي ك^{٣} + ١٠ ك^{٢} + ٥ ك = ٢٦٠٠
الجواب ١١'٠٠٦٧

(٣) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٣} + ٢ ك^{٢} − ١١ ك = ١٢

(٤) ما هي اصول هذه المعادلة ك^{٤} + ٤ ك^{٣} − ٧ ك^{٢} − ٣٤ ك = ٢٤

* * *

الفصل الثالث والعشرون

في المسائل الغير المحدودة وهي السيالة

٢٦٤ ان كانت المعادلات التي تتركب من شروط مسئلة اقل عدداً من مجاهيلها تكون المسئلة غير محدودةٍ. ويمكن ان يُفرض لاحد المجاهيل اية قيمة كانت فتخرج البقية بالنسبة الى المفروض. وفي مسائل هذا الباب تستعمل القواعد السابقة ولكن ينبغي التبصر والاحتيال لكي توجد الطريقة الفُضلَى لاستعمالها في كل مسئلة بمفردها. فلو طُلب عددان صحيحان ايجابيَّان مجتمعهما عشرة وفرضنا احدهما ك والآخر ى كان لنا ك + ى = ١٠ ك = ١٠ − ى فكمية ى لم نتحد بالمسئلة سوى ان تكون صحيحة ايجابيَّة فيمكن ان نفرض لها اية قيمة صحيحة كانت من ١ الى ١٠ ولكن

يجب ان تكون ك ايضاً صحيحة ايجابيّة فلا تُفرض ى اكثر من ١٠ والاّ لكانت ك سلبيّة فلا تكون ى اكثر من ٩

فان فرض ى = ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ تكون ك = ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ والمجتمعات الاربع الاخيرة هي مثل الاربع الاولى. فيكون للمسئلة خمسة اجوبة

(مسئلة ١) اقسم ٢٥ الى قسمين احدهما قابل الانقسام على ٢ والاخر على ٣

لنفرض احدهما ٢ك والاخر ٣ى

فلنا ٢ك + ٣ى = ٢٥ ك = $\frac{٢٥ - ٣\text{ى}}{٢}$

فنرى من هذا الكسر ان ٣ ى اقلّ من ٢٥ فيكون ى اقلّ من ٨ واذا قسمنا صورة الكسر على المخرج فلنا ك = ١٢ − ى + $\frac{١ - \text{ى}}{٢}$ فنرى ان ١ − ى او بالاحرى ى − ١ يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض ى − ١ = ٢ل فاذاً ى = ٢ل + ١

وبالتعويض ك = ١٢ − ٢ل − ١ − ل = ١١ − ٣ ل ولا يمكن ان تكون ى اكثر من ٨ فنفرض ل ايَّ عددٍ كان على شرط ان لا يكون ٢ ل + ١ اكثر من ٨ فلا بد ان تكون ل اقلَّ من ٤ ولا تكون اكثر من ٣

فان فرض ل = ٠ ل = ١ ل = ٢ ل = ٣
لنا ى = ١ ى = ٣ ى = ٥ ى = ٧
و ك = ١١ ك = ٨ ك = ٥ ك = ٢

فاذاً ٢ك + ٣ى = ٢٢ + ٣ او ١٦ + ٩ او ١٠ + ١٥ او ٤ + ٢١

(مسئلة ٢) اقسم ١٠٠ الى قسمين احدهما يقبل الانقسام على ٧ والاخر على ١١

لنفرض القسمين ٧ك و١١ى فلنا ٧ك + ١١ى = ١٠٠ ك =

$$\frac{١٠٠ - ١١\text{ى}}{٧} = \frac{٩٨ + ٢ - ٧\text{ى} - ٤\text{ى}}{٧} = ١٤ - \text{ى} + \frac{٢ - ٤\text{ى}}{٧}$$

فاذاً ٢ − ٤ ى او ٤ ى − ٢ يقبل الانقسام على ٧ وان كان ٤ ى − ٢ يقبل الانقسام

على ٧ فنصفها اي ٢ ى − ١ يقبل الانقسام على ٧ ايضاً. فلنفرض ٢ ى − ١ = ٧ ل فلنا ٢ ى = ٧ ل + ١

وبالتعويض ك = ١٤ − ى − ٢ ل وقد فُرِض ٢ ى = ٧ ل + ١ = ٦ ل + ل + ١ فلنا

ى = ٣ ل + $\frac{ل + ١}{٢}$ ثم لنفرض ل + ١ = ٢ ر فلنا ل = ٢ ر − ١

وبالتعويض ى = ٣ ل + ر فنفرض ر ايَّ عددٍ صحيحٍ شئنا على شرط ان لا يكون ك او ى سلبيَّين. وبالتعويض لنا ى = ٧ ر − ٣ وك = ١٩ − ١١ ر فنرى من الاولى ان ٧ ر هي اكثر من ٣ ومن الثانية ان ١١ ر هي اقلُّ من ١٩ اي ر هي اقلُّ من $\frac{١٩}{١١}$ فلا تكون ر اكثر من ٢ ولا يمكن ان تكون صفراً. فلا بد ان تكون واحدًا. فلنا ك = ٨ ى = ٤ ٧ × ٨ = ٥٦ ٤ × ١١ = ٤٤ فالقسمان هما ٥٦ و٤٤

(مسئلة ٣) اقسم ١٠٠ الى قسمين بحيث اذا انقسم الاول على ٥ يبقى ٢ واذا انقسم الثاني على ٧ يبقى ٤

لنفرض الواحد ٥ ك + ٢ والثاني ٧ ى + ٤ فلنا

٥ ك + ٧ ى + ٦ = ١٠٠ ٥ ك = ٩٤ − ٧ ى = ٩٠ + ٤ − ٥ ى − ٢ ى ك = ١٨ − ى + $\frac{٤ - ٢ ى}{٥}$

فاذًا ٤ − ٢ ى او ٢ ى − ٤ او نصفها ى − ٢ يقبل الانقسام على ٥

فلنفرض ى − ٢ = ٥ ل ى = ٥ ل + ٢ وقد تقدم ان ٥ ك + ٧ ى = ٩٤ فلنا بالتعويض ك = ١٦ − ٧ ل فلا بد ان يكون ٧ ل اقلَّ من ١٦ ول اقلَّ من $\frac{١٦}{٧}$ اي لا تكون ل اكثر من ٢

فان فرض ل = ٠ فلنا ك = ١٦ ى = ٢ والقسمان هما ١٦ × ٥ + ٢ = ٨٢ و٢ × ٧ + ٤ = ١٨

وان فرض ل = ١ فلنا ك = ٩ ى = ٧ والقسمان هما ٩ × ٥ + ٢ = ٤٧ ٧ × ٧ + ٤ = ٥٣

وان فرض ل = ٢ فلنا ك = ٢ ى = ١٢ والقسمان هما ٢ × ٥ + ٢ = ١٢ ١٢ × ٧ + ٤ = ٨٨

(مسئلة ٤) امرأتان معهما ١٠٠ بيضة فقالت الواحدة ان عددت البيض الذي معي ثمانية ثمانية يبقى ٧ بيضات وقالت الاخرى ان عددت الذي معي عشرة عشرة يبقى ايضاً ٧ بيضات فكم بيضة مع كل واحدةٍ منهما. لنفرض ما مع الواحدة ٨ ك + ٧ وما مع الاخرى ١٠ ى + ٧ فلنا ٨ ك + ١٠ ى + ١٤ = ١٠٠ ٨ ك = ٨٦ − ١٠ ى ٤ ك = ٤٣ − ٥ ى = ٤٠ + ٣ − ٤ ى − ى ك = ١٠ − ى + $\frac{\text{٣ − ى}}{\text{٤}}$

فاذاً ٣ − ى او ى − ٣ يقبل الانقسام على ٤

فلنفرض ى − ٣ = ٤ ل فلنا ى = ٤ ل + ٣ وك = ١٠ − ٤ ل − ٣ − ل = ٧ − ٥ ل فلا بد ان تكون ٥ ل اقلّ من ٧ ول اقلّ من ٢ فان فرض ل = ٠ فلنا ك = ٧ ى = ٣ وكان للاولى ٦٣ وللثانية ٣٧ بيضة

وان فرض ل = ١ فلنا ك = ٢ ى = ٧ وكان للاولى ٢٣ وللثانية ٧٧ بيضة

(مسئلة ٥) اعجام وعرب صنعوا وليمةً وانفقوا فيها ١٠٠٠ غرش اما الاعجام فلحق كل واحد منهم ١٩ غرشاً واما الاعراب فلحق كل واحد منهم ١٢ غرشاً فكم نفراً كان كل فريقٍ منهم

لنفرض الاعجام = ك والعرب = ى فلنا

١٩ ك + ١٢ ى = ١٠٠٠ ١٢ ى = ١٠٠٠ − ١٩ ك = ٩٨٨ + ١٢ − ١٢ ك − ٦ ك

ى = ٧٦ − ك + $\frac{\text{١٢ − ٦ك}}{\text{١٢}}$ فاذاً ٢ . − ٦ ك او ٦ ك − ١٢ يقبل الانقسام على ١٢ وك − ٢ كذلك لنفرض ك − ٢ = ١٢ ل فلنا ك = ١٢ ل + ٢ وى = ٧٦ − ١٢ ل − ٢ − ٦ ل = ٧٤ − ١٩ ل

فلا بد ان تكون ل اقلّ من $\frac{\text{٧٤}}{\text{١٩}}$ اي اقلّ من اربع فتكون للمسئلة

اربعة اجوبة   فاذا فرض ل = ٠   لنا ك = ٢   ى = ٧٤   ٢ × ١٩ = ٣٨
و٧٤ × ١٣ = ٩٦٢

ل = ١   ك = ١٥   ى = ٥٥   ١٥ × ١٩ = ٢٨٥
و ٥٥ × ١٣ = ٧١٥

ل = ٢   ك = ٢٨   ر = ٣٦   ٢٨ × ١٩ = ٥٣٢
و ٣٦ × ١٣ = ٤٦٨

ل = ٣   ك = ٤١   ى = ١٧   ٤١ × ١٩ = ٧٧٩   و١٧ × ١٣ = ٢٢١

(مسئلة ٦)   رجلٌ انفق ١٧٧٠ دينارًا في شرآء خيل وبقر وكان ثمن راس الخيل ٣١ دينارًا وثمن راس البقر ٢١ دينارًا فكم راسًا اشترى من كل جنس

لنفرض ك = الخيل   وى = البقر   فلنا

٣١ ك + ٢١ ى = ١٧٧٠ اي ٢١ ى = ١٧٧٠ − ٣١ ك = ١٧٦٤ + ٦ − ٢١ ك − ١٠ ك

ى = ٨٤ − ك + $\frac{٦ − ١٠ ك}{٢١}$

فلا بد من ان ١٠ ك − ٦ يقبل الانقسام على ٢١ وكذلك نصفها اي ٥ ك − ٣   فلنفرض ٥ ك − ٣ = ٢١ ل فلنا ٥ ك = ٢١ ل + ٣   وبالتعويض ى = ٨٤ − ك − ٢ ل   ك = $\frac{٢١ ل − ٣}{٥}$ = ٤ ل + $\frac{ل + ٣}{٥}$ فلنفرض

ل + ٣ = ٥ ر   ل = ٥ ر − ٣   ك = ٢١ ر − ١٢

ى = ٨٤ − ٢١ ر + ١٢ − ١٠ ر + ٦ = ١٠٢ − ٣١ ر

فلا بد ان تكون ر اكبر من صفرٍ واقلَّ من ٤

فلنفرض ر = ١   فلنا ك = ٩   ى = ٧١   ٢٧٩ = ثمن الخيل و١٤٩١ = ثمن البقر

ر = ٢ فلنا ك = ٣٠   ى = ٤٠   ٩٣٠ = ثمن الخيل   ٨٤٠ = ثمن البقر

ر = ٣   ك = ٥١   ى = ٩   ١٥٨١ = ثمن الخيل   ١٨٩ = ثمن البقر

٢٦٥   في المسائل المتقدم ذكرها كانت المعادلات على هيئة ت ك + ب ى = س وكانت ث وب وس كميات ايجابية صحيحة. وقيمة ك وى كذلك. ولكن

ان كانت ب سلبية والمعادلة على هيئة ت ك − ب ى = س تكون المسائل من نوعٍ اخر غير المتقدمة ولها اجوبة كثيرة الى ما لا نهاية لهُ. ومثالهُ لو قيل ايُّ عددين فضلهما ٦

فلو فرضنا اصغرها ك واكبرها ى لكان لنا

ى − ك = ٦ ى = ٦ + ك فيمكننا ان نفرض بآء اي عددٍ شئنا كما هو واضحٌ من اول نظرةٍ

٢٦٦ متى كان س = ٠ تكون ت ك = ب ى

كما لو قيل نريد عددًا يقبل الانقسام على ٥ وعلى ٧

ولنفرضهُ ن فلنا ن = ٥ ك ون = ٧ ى و ٥ ك = ٧ ى ك = $\frac{٧ ى}{٥}$ فلان ٧ لا يقبل الانقسام على ٥ فلا بد ان ى يقبل الانقسام عليها. فلنفرض ى = ٥ ل فاذًا ك = ٧ ل فتكون ن = ٣٥ ل ويمكننا ان نفرض ل ايَّ عددٍ شئنا. فلنا ٣٥ ٧٠ ١٠٥ ١٤٠ ١٧٥ ٢١٠ الى اخرهِ

ولو زِيدَ على الشروط المذكورة ان العدد يقبل الانقسام على ٩ ايضًا لكان لنا مما تقدم ن = ٣٥ ل ولنفرض ن = ٩ ر ٣٥ ل = ٩ ر ر = $\frac{٣٥ ل}{٩}$ ولا بد ان ل تقبل الانقسام على ٩ فلنفرض ل = ٩ س فلنا ر = ٣٥ س ون = ٩ × ٣٥ س = ٣١٥ س فلنا ٣١٥ و٦٣٠ و٩٤٥ الى اخرهِ

٢٦٧ ان لم تكن س = ٠ فتعسر المسئلة اكثر فلو قيل ما العدد الذي يقبل الانقسام على ٥ واذا انقسم على ٧ يبقى ٣ فلنا ٥ ك = ن و٧ ى + ٣ = ن فاذًا

٥ ك = ٧ ى + ٣ ك = $\frac{٧ ى + ٣}{٥}$ = $\frac{٥ ى + ٢ ى + ٣}{٥}$ = ى + $\frac{٢ ى + ٣}{٥}$ فلنفرض ٢ ى + ٣ = ٥ ل

ل = $\frac{٢ ى + ٣}{٥}$ فاذًا ك = ى + ل ٢ ى = ٥ ل − ٣ ى = $\frac{٥ ل − ٣}{٢}$ = ٢ ل + $\frac{ل − ٣}{٢}$ ولنفرض ل − ٣ = ٢ ر فاذًا ل = ٢ ر + ٣ وى = ٥ ر + ٦

ك = ى + ل = (٥ ر + ٦) + (٢ ر + ٣) = ٧ ر + ٩

فاذًا ن = ٣٥ ر + ٤٥ فيمكن ان نفرض ر ايَّ عددٍ صحيحٍ شيئاً ايجابياً او سلبيًّا اذ يكفي ان تكون ن ايجابية. فان فرض ر = −١ لنا ن = ١٠ وباضافة ٣٥ لنا ٤٥ ٨٠ ١١٥ ١٥٠ الى اخرهِ

ثم ان حلَّ مسائل من هذا النوع يتيسَّر او يتعسَّر حسب النسبة الواقعة بين الاعداد المقسوم عليها ومن المسائل السهلة هذه

ايُّ عددٍ اذا انقسم على ٦ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٢ يبقى ٣ فلنفرض العدد ن فلنا

ن = ٦ ك + ٢ ن = ١٢ ى + ٣ ٦ ك + ٢ = ١٢ ى + ٣ ٦ ك = ١٢ ى + ١

ك = $\frac{١٢ ى + ١}{٦}$ = ٢ ى + $\frac{ى + ١}{٦}$ لنفرض ى + ١ = ٦ ل

ى = ٦ ل − ١ ك = ٢ ى + ل = ١٢ ل − ٢

ن = ٧٨ ل − ١٠ فلنا

ن = ٦٨ ١٤٦ ٢٢٤ ٣٠٢ ٣٨٠ الى اخرهِ

(مسئلة ٨) ايُّ عددٍ ن اذا انقسم على ٣٩ يبقى ١٦ واذا انقسم على ٥٦ يبقى ٢٧

لنفرض ن = ٣٩ ف + ١٦ ن = ٥٦ ق + ٢٧

٣٩ ف + ١٦ = ٥٦ ق + ٢٧ ٣٩ ف = ٥٦ ق + ١١

ف = $\frac{٥٦ ق + ١١}{٣٩}$ = ق + $\frac{١٧ ق + ١١}{٣٩}$ افرض $\frac{١٧ ق + ١١}{٣٩}$ = ر ثم ٣٩ ر = ١٧ ق + ١١ ق = $\frac{٣٩ ر − ١١}{١٧}$ = ٢ ر + $\frac{٥ ر − ١١}{١٧}$

افرض $\frac{٥ ر − ١١}{١٧}$ = س ثم ١٧ س = ٥ ر − ١١ ر = $\frac{١٧ س + ١١}{٥}$ = ٣ س + $\frac{٢ س + ١١}{٥}$

افرض $\frac{٢ س + ١١}{٥}$ = ت ٥ ت = ٢ س + ١١

س = $\frac{٥ ت − ١١}{٢}$ = ٢ ت + $\frac{ت − ١١}{٢}$

افرض $\frac{ت - ١١}{٢}$ = د   ت = ٢د + ١١

فقد خلصنا من الكسور ولنعوّض عن كل كمية بقيمتها

ت = ٢د + ١١

س = ٥د + ٢٢

ر = ١٧د + ٧٧

ق = ٣٩د + ١٧٦

ف = ٥٦د + ٢٥٢

ن = ٣٩ × ٥٦د + (٣٩ × ٢٥٢) + ١٦ = ٣٩ × ٥٦د + ٩٨٨٣

ون = ٥٦ × ٣٩د + (٥٦ × ١٧٦) + ٢٧ = ٥٦ × ٣٩د + ٩٨٨٣

اي ن = ٢١٨٤د + ٩٨٨٣ و $\frac{٩٨٨٣}{٢١٨٤}$ = ٤ + فلا تكون د اقلّ من − ٤ وعلى هذا المفروض لنا ن = ١١٤٧ وان فرضنا د = ك − ٤ فلنا ن = ٢١٨٤ك + ١١٤٧ وهما على سلسلةٍ حسابيةٍ الحلقة الاولى منها ١١٤٧ وفضلها المشترك ٢١٨٤ فلنا ١١٤٧ و٣٣٣١ و٥٥١٥ و٧٦٩٩ و٩٨٨٣ الى اخرهِ

(مسئلة ٩) رجالٌ ونساءٌ جمعوا صدقةً فدفع كل رجلٍ ٢٥ غرشًا وكل امرأةٍ ١٦ غرشًا. فكان ما دفعهُ النساءُ جميعهنّ اكثر مما دفعهُ الرجال جميعهم بغرشٍ واحدٍ. فكم رجلاً وكم امرأة كانوا

لنفرض الرجال ق والنساءَ ف فلنا

١٦ف = ٢٥ق + ١   ف = $\frac{٢٥ق + ١}{١٦}$ = ق + $\frac{٩ق + ١}{١٦}$ = ق + ر اي ١٦ر = ٩ق + ١

ق = $\frac{١٦ر - ١}{٩}$ = ر + $\frac{٧ر - ١}{٩}$ = ر + س   ٩س = ٧ر − ١

ر = $\frac{٩س + ١}{٧}$ = س + $\frac{٢س + ١}{٧}$ = س + ت   ٧ت = ٢س + ١

س = $\frac{٧ت - ١}{٢}$ = ٣ت + $\frac{ت - ١}{٢}$ = ٣ت + د

باخراج ٢ ت من الجانبين لنا ٢ د = ت − ١

ت = ٢ د + ١ ثم بالتعويض في هذه المعادلات

ت = ٢ د + ١ س = ٣ ت + د = ٧ د + ٣

ر = س + ت = ٩ د + ٤

ق = ر + س = ١٦ د + ٧

ف = ق + ر = ٢٥ د + ١١

فكان عدد النسآء ٢٥ د + ١١ وعد الرجال ١٦ د + ٧ فنفرض د ايّ عددٍ صحيحٍ شئنا فلنا الرجال = ٧ ٢٣ ٣٩ ٥٥ ٧١ الى اخرهِ

والنسآء ١١ ٣٦ ٦١ ٨٦ ١١١ الى اخرهِ

وعلى موجب الجواب الاول دفعت النسآء ١٧٦ والرجال ١٧٥ غرشًا

(مسيلة ١٠) رجلٌ اشترى خيلاً وبقرًا وكان ثمن راس الخيل ٢١ دينارًا وثمن راس البقر ٢٠ دينارًا فكان ثمن البقر بقدر ثمن الخيل و٧ دنانير زيادة فكم راسًا اشترى من كل جنس

لنفرض ف = البقر وق = الخيل فلنا

ف = $\frac{\text{٢١ ق + ٧}}{\text{٢٠}}$ = ق + $\frac{\text{١١ ق + ٧}}{\text{٢٠}}$ = ق + ر ٢٠ ر = ١١ ق + ٧

ق = $\frac{\text{٢٠ ر − ٧}}{\text{١١}}$ = ر + $\frac{\text{٩ ر − ٧}}{\text{١١}}$ = ر + س ١١ س = ٩ ر − ٧

ر = $\frac{\text{١١ س + ٧}}{\text{٩}}$ = س + $\frac{\text{٢ س + ٧}}{\text{٩}}$ = س + ت ٩ ت = ٢ س + ٧

س = $\frac{\text{٩ ت − ٧}}{\text{٢}}$ = ٤ ت + $\frac{\text{ى − ٧}}{\text{٢}}$ = ٤ ت + د ٢ د = ت − ٧ فلنا ت = ٢ د + ٧

س = ٤ ت + د = ٩ د + ٢٨

ر = س + ت = ١١ د + ٣٥

ق = ر + س = ٢٠ د + ٦٣

ف = ق + ر = ٣١ د + ٩٨

ونجد قيمة ف وق الصغرى اذا فرضنا د = − ٣

فلنا البقر = ٥   ٣٦   ٦٧   ٩٨   ١٢٩   ١٦٠ الى اخرهِ

فلنا الخيل ٣   ٢٣   ٤٣   ٦٣   ٨٣   ١٠٣ الى اخرهِ

(مسئلة ١١) ايّ عددٍ اذا انقسم على ١١ يبقى ٣ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥

لنفرض ن = ١١ ف + ٣   ن = ١٩ ق + ٥   ١١ ف = ١٩ ق + ٢

فاذا تصرّفنا في هذه المسئلة على نسق المسايل المتقدم ذكرها يكون لنا بحلّ الاعداد الواقعة فيها

١٩ = ١ × ١١ + ٨   ف = ق + ر

١١ = ١ × ٨ + ٣   ق = ر + س

٨ = ٢ × ٣ + ٢   ر = ٢ س + ث

٣ = ١ × ٢ + ١   س = ث + د

٢ = ٢ × ١ + ٠   ث = ٢ د + ٢

ثم لنا ث = ٢ د + ٢   س = ٣ د + ٢

ر = ٨ د + ٦   ق = ١١ د + ٨

ف = ١٩ د + ١٤   لنفرض د = ٠

فلنا ن = ١١ ف + ٣ = ١١ (١٩ د + ١٤) = ٢٠٩ د + ١٥٧ ولكن ٢٠٩ د = ٠   فاذًا ١٥٧ هو اقلّ عددٍ تصحّ عليه شروط المسئلة

(مسئلة ١٢) ما العدد الذي اذا انقسم على ١١ يبقى ٣ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥ واذا انقسم على ٢٩ يبقى ١٠

قد مضى حساب الشرطين الاولين في المسئلة السابقة فلنا هنا زيادةً عمّا هناك

ن = ٢٩ ف + ١٠   وقد وجدنا هناك ان

ن = ٢٠٩ د + ١٥٧   فلنفرض هنا ن = ٢٠٩ ق + ١٥٧

فلنا ٢٩ ف + ١٠ = ٢٠٩ ق + ١٥٧   اي

٢٩ ف = ٢٠٩ ق + ١٤٧   ثم لنا حسبما تقدم

٢٠٩ = ٧ × ٢٩ + ٦   ف = ٧ ق + ر

٢٩ = ٤ × ٦ + ٥   ق = ٤ ر + س

٦ = ١ × ٥ + ١   ر = س + ت

٥ = ٥ × ١ + ٠   س = ٥ ت − ١٤٧

ثم بالتعويض س = ٥ ت − ١٤٧

ر = ٦ ت − ١٤٧   ق = ٢٩ ت − ٧٣٥

ف = ٢٠٩ ت − ٥٢٩٢

ن = ٦٠٦١ ت − ١٥٢٤٥٨ ونجد العدد الاقلّ

اذا فرضنا ت = ٢٦ ثم ن = ٤١٢٨

(مسئلة ١٣) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش في بشالك بسعر ٥ غروش وانصاف المانوت بسعر ٩ غروش

لنفرض ٥ ك = البشالك   ٩ ى = عدة انصاف المانوت

٥ ك + ٩ ى = ١٠٠   ٥ ك = ١٠٠ − ٩ ى = ١٠٠ − ٥ ى − ٤ ى

ك = ٢٠ − ى − $\frac{\text{٤ ى}}{\text{٥}}$

فاذًا ى تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض $\frac{\text{ى}}{\text{٥}}$ = ف   ى = ٥ ف   ك = ٢٠ − ٥ ف − ٤ ف = ٢٠ − ٩ ف فاذًا تكون ف اقلّ من $\frac{\text{٢٠}}{\text{٩}}$ اي اقل من ٢ واكثر من صفر اي ١   فلنفرض ف = ١   فاذًا ك = ١١   ١١ × ٥ = ٥٥ ى = ٥ و٥ × ٩ = ٤٥ و٤٥ + ٥٥ = ١٠٠ اي ليس لذلك الا طريقة واحدة

(مسئلة ١٤) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش غوازي بسعر ٢٠ غرشًا وفرنكات بسعر ٤ غروش. لنفرض الغوازي = ٢٠ ك والفرنكات = ٤ ى

٢٠ ك + ٤ ى = ١٠٠   ٤ ى = ١٠٠ − ٢٠ ك

ى = ٢٥ − ٥ ك   لنفرض ٢٥ − ٥ ك = ف   ثم

٥ ك = ٢٥ − ف   ك = ٥ − $\frac{\text{ف}}{\text{٥}}$ لنفرض ف = ٥ د   ك = ٥ − د

ى = ٥ د فلابد ان تكون د اكثر من صفر واقلَّ من ٥ اي للمسئلة اربعة اجوبة. فعلى فرض

د = ١ ك = ٤ ى = ٥ اي ٨٠ + ٢٠ = ١٠٠
د = ٢ ك = ٣ ى = ١٠ اي ٦٠ + ٤٠ = ١٠٠
د = ٣ ك = ٢ ى = ١٥ اي ٤٠ + ٦٠ = ١٠٠
د = ٤ ك = ١ ى = ٢٠ اى ٢٠ + ٨٠ = ١٠٠

(مسئلة ١٥) ثلثون نفرًا من رجالٍ ونسآءٍ واولادٍ انفقوا ٥٠ دينارًا وكل رجلٍ منهم انفق ٣ دنانير وكل امراةٍ دينارَين وكل ولدٍ دينارًا واحدًا. فكم كان كل فريقٍ

لنفرض الرجال = ف والنسآء = ق والاولاد = ر
فلنا (١) ف + ق + ر = ٣٠
وايضًا (٢) ٣ ف + ٢ ق + ر = ٥٠
من الاولى لنا ر = ٣٠ − ف − ق
فنرى ان ف + ق اقل من ٣٠
وبالتعويض في (٢) ٢ ف + ق + ٣٠ = ٥٠
بالمقابلة والجمع ق = ٢٠ − ٢ ف
بنقل ف واحدة ف + ق = ٢٠ − ف

وذلك ايضًا اقلُّ من ٣٠ فبشروط المسئلة لا تكون ف اكثر من ١٠ ويمكن ان نفرض ف اي عددٍ شئنا من ١ الى ٩ فلنا

ف = ١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ق = ١٨	١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٦	٤	٢
ر = ١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩

(مسئلة ١٦) رجل اشترى من البقر والمعزى والغنم ١٠٠ راس بماية دينار وكان ثمن الراس من البقر $\frac{١}{٢}$ ٣ دينار وثمن الراس من المعز $\frac{١}{٢}$ ١ دينار وثمن الراس من الغنم $\frac{١}{٢}$ دينار. فكم راسًا اشترى من كل جنسٍ

لنفرض ف = البقر ق = المعزى و ر = الغنم

فلنا (١) ف + ق + ر = ١٠٠

(٢) ٢$\frac{١}{٢}$ ف + ١$\frac{١}{٢}$ ق + $\frac{١}{٢}$ ر = ١٠٠

اضرب في ٦ ٢١ ف + ٨ ق + ٣ ر = ٦٠٠

بالاولى لنا ر = ١٠٠ − ف − ق

عوضاً عن ر في (٢) ١٨ ف + ٥ ق = ٣٠٠

٥ ق = ٣٠٠ − ١٨ ف ق = ٦٠ − $\frac{١٨ ف}{٥}$

فلا بد ان ف تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض ف = ٥ س فلنا ق = ٦٠ − ١٨ س

ر = ١٢ س + ٤٠ فيمكن ان نفرض قيمة س ايَّ عددٍ شئنا على شرط ان ق لا تصير بذلك سلبيةً فلا يمكن ذلك الا على فرض س اقلَّ من ٤

فلنا س =	١	٢	٣
ف =	٥	١٠	١٥
ق =	٤٢	٢٤	٦
ر =	٥٣	٦٦	٧٩

٢٦٧ في اختراع مسايل من هذا الباب ينبغي الاحتراس من استحالتها. ولا بد في ذلك من ملاحظة ما سنذكرهُ هنا. فنضع عوض المعادلتين اللتين في المسئلة السابقة هاتين ك + ى + ل = ت

ف ك + غ ى + ح ل = ب

حيث تكون ف غ ح ت ب معلومات

فان فرضنا ف اكبر من غ وح اصغر من غ وضربنا الجانبين في ف اي (ك + ى + ل) ف = ف ت فلا شك ان تكون ف ك + ف ى + ف ل اكبر من ف ك + غ ى + ح ل وتكون ف ت اكبر من ب اي ب < ف ت وايضاً اذا فرضنا (ك + ى + ل) ح = ح ت تكون ح ك + ح ى + ح ل اصغر من ف ك + غ ى + ح ل وتكون ح ت اصغر من ب اي ب > ح ت فاذاً ان لم تكن ب اصغر من ف ت واكبر من ح ت تستحيل المسئلة فاذاً يجب ان تقع ب بين الحدَّين ف ت ح ت ولا يجب ان تكون قريبة جدًّا من احداهما والاَّ فلا يمكن استعلام

الاحرف الأُخَر ففي المسئلة السابقة ت = ١٠٠ ف = ٢$\frac{١}{٢}$ ح = $\frac{١}{٢}$ والحدّان هما ٢٥٠ و ٥٠ وان فرضنا ب = ٥١ عوض ١٠٠ كما في المسئلة فلنا

ك + ى + ل = ١٠٠

٢$\frac{١}{٢}$ ك + ١$\frac{١}{٢}$ ى + $\frac{١}{٢}$ ل = ٥١ اضرب الاولى في ٣

٣ ك + ٣ ى + ٣ ل = ٣٠٠ اضرب الثانية في ٦

٢١ ك + ٨ ى + ٣ ل = ٣٠٦

بالطرح ١٨ ك + ٥ ى = ٦

وذاك محالٌ لانهُ بفرض كون ك وى صحيحين

(مسئلة ١٧) صايغٌ عنده من الفضة ثلاثة انواع

الاول في كل ٨ دراهم منه ٧ فضة ودرهم زيف

الثاني . . ٥$\frac{١}{٢}$ . . ٢$\frac{١}{٢}$.

الثالث . . ٤$\frac{١}{٢}$ . . ٣$\frac{١}{٢}$.

فاراد ان يصوغ مصاغًا وزنهُ ٢٤٠ درهمًا في كل ٨ دراهم منهُ ٦ دراهم فضة ودرهمان زيف فكم درهمًا يجب ان ياخذ من كل صنفٍ

لنفرض ما يجب اخذهُ من النوع الاول = ك ومن الثاني = ى ومن الثالث = ل فلنا ك + ى + ل = ٢٤٠ ويكون في الكل ٧ ك + ٥$\frac{١}{٢}$ ى + ٤$\frac{١}{٢}$ ل من الفضة الخالصة ووزن هذا المزيج = ٢٤٠ درهمًا و $\frac{٢٤٠}{٨}$ = ٣٠

و ٣٠ × ٦ = ١٨٠ = الفضة الخالصة في المزيج

فلنا ٧ ك + ٥$\frac{١}{٢}$ ى + ٤$\frac{١}{٢}$ ل = ١٨٠

اضرب في ٢ ١٤ ك + ١١ ى + ٩ ل = ٣٦٠

اضرب الاولى في ٩ ٩ ك + ٩ ى + ٩ ل = ٢٧٠

بالطرح ٥ ك + ٢ ى = ٩٠

من الاولى ل = ٣٠ − ك − ى

وايضًا ٢ ى = ٩٠ − ٥ ك ى = ٤٥ − $\frac{٥ ك}{٢}$

لنفرض ك = ٢ د فلنا   ى = ٤٥ − ٥ د

وايضاً   ل = ٣ د − ١٥

فلا بد ان تكون د اكبر من ٤ واصغر من ١٠ فلنا

د = ٥	٦	٧	٨	٩
ك = ١٠	١٢	١٤	١٦	١٨
ى = ٢٠	١٥	١٠	٥	٠
ل = ٠	٣	٦	٩	١٢

(مسئلة ١٨) رجلٌ اشترى من الخيل والبقر والحمير والغنم ١٠٠ راس بماية دينار وكان ثمن راس الخيل ١٠ دنانير وثمن راس البقر ٥ دنانير وثمن الحمار دينارين وثمن راس الغنم نصف دينار فكم اشترى من كل جنس. لنفرض الخيل = ف البقر = ق الحمير = ر والغنم = س

فلنا (١) ف + ق + ر + س = ١٠٠

و (٢) ١٠ ف + ٥ ق + ٢ ر + $\frac{١}{٢}$ س = ١٠٠

اضرب في ٢   ٢٠ ف + ١٠ ق + ٤ ر + س = ٢٠٠

بالطرح   ١٩ ف + ٩ ق + ٢ ر = ١٠٠

بالمقابلة والقسمة ر = ٣٣ + $\frac{١}{٢}$ − ٦ ف − $\frac{١}{٢}$ ف − ٣ ق اي

ر = ٣٣ − ٦ ف − ٣ ق + $\frac{١ - ف}{٢}$

فاذاً ١ − ف او ف − ١ يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض ف − ١ = ٢ ث ف = ٢ ث + ١ ق = ق ر = ٢٧ − ١٩ ث − ٣ ق س = ٧٢ + ٢ ق + ١٦ ث

فاذاً تكون ١٩ ث − ٣ ق اقلّ من ٢٧ وعلى هذا الشرط نفرض ك و ث ايَّ عددٍ شئناً

(١) ث = ٠   (٢) ث = ١

ف = ١   ف = ٤

ق = ق   ق = ق

ر = ٢٧ – ٣ ق   ر = ٨ – ٣ ق

س = ٧٢ + ٢ ق   س = ٨٨ + ٢ ق

ولا يمكن ان نفرض ت = ٣ لان بذلك تصير ر سلبيّة. وعلى المفروض الاول لا تكون ق اكثر من ٩ وعلى الثاني لا تكون اكثر من ٢ فعلى الاول لنا

ق =	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ف =	١	١	١	١	١	١	١	١	١	١
ق =	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
ر =	٢٧	٢٤	٢١	١٨	١٥	١٢	٩	٦	٣	٠
س =	٧٢	٧٤	٧٦	٧٨	٨٠	٨٢	٨٤	٨٦	٨٨	٩٠

وعلى الثاني

ت =	١	٢	٣
ف =	٤	٤	٤
ق =	٠	١	٢
ر =	٨	٥	٣
س =	٨٨	٩٠	٩٣

(مسئلة ١٩) مطلوب ثلثة اعداد صحيحة اذا ضرب الاول منها في ٣ والثاني في ٥ والثالث في ٧ يكون مجتمع الحواصل ٥٦٠ واذا ضرب الاول في ٩ والثاني في ٢٥ والثالث في ٤٩ يكون مجتمع الحواصل ٢٩٢٠

لنفرض (١)   ٣ ك + ٥ ى + ٧ ل = ٥٦٠

(٢)   ٩ ك + ٢٥ ى + ٤٩ ل = ٢٩٢٠

اضرب الاولى في ٣   ٩ ك + ١٥ ى + ٢١ ل = ١٦٨٠

بالطرح   ١٠ ى + ٢٨ ل = ١٢٤٠

بالقسمة على ٢   ٥ ى + ١٤ ل = ٦٢٠

وبالمقابلة والقسمة   ى = ١٢٤ – $\frac{\text{١٤ ل}}{\text{٥}}$

لنفرض ل = ٥ د فاذًا ى = ١٢٤ – ١٤ د

ثم بالتعويض في الاول لنا ٣ ك – ٣٥ د + ٦٢٠ = ٥٦٠

اي ٣ ك = ٣٥ د – ٦٠

$ك = \frac{٢٥ د}{٣} - ٢٠$ فلنفرض د = ٣ت

فاذًا ك = ٢٥ت − ٢٠ ى = ١٢٤ − ٤٢ت . ل = ١٥ت فتكون ت اكبر من صفر واصغر من ٣ ولنا جوابان فقط اي

ت = ١ ك = ١٥ ى = ٨٢ ل = ١٥
ت = ٢ ك = ٥٠ ى = ٤٠ ل = ٣٠

(مسئلة ٢٠) مطلوب عددان مجتمعهما مع حاصلهما ٧٩

لنفرض العددين ك وى فلناك ى + ك + ى = ٧٩ ك ى + ى = ٧٩ − ك $ى = \frac{٧٩ - ك}{ك + ١} = -١ + \frac{٨٠}{ك + ١}$ فنرى ان ٨٠ يقبل الانقسام على ك + ١ و٨٠ يقبل الانقسام على ١ ٢ ٤ ٥ ٨ ١٠ ١٦ ٢٠ ٤٠ ٨٠

فاذًا ك = ٠ ١ ٢ ٤ ٧ ٩ ١٥ ١٩ ٣٩ ٧٩
ى = ٧٩ ٣٩ ١٩ ١٥ ٩ ٧ ٤ ٢ ١ ٠

ومن هذه العشرة الخمسة الاخيرة مثل الخمسة الاولى. فلنا في الحقيقة ٥ اجوبة فقط وهي

ك = ٠ ١ ٢ ٤ ٧
ى = ٧٩ ٣٩ ١٩ ١٥ ٩

(مسئلة ٢١) اربعة رجال نزلوا الى السوق فوجدوا جوهرة تباع. فقالوا كم ثمن الجوهرة فقيل اذا أُخِذ ما مع الاول منكم مع $\frac{١}{٢}$ ما مع الثاني و$\frac{١}{٣}$ ما مع الثالث و$\frac{١}{٤}$ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة. واذا أُخِذ ما مع الثاني و$\frac{١}{٥}$ ما مع الاول و$\frac{١}{٦}$ ما مع الثالث و$\frac{١}{٧}$ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة. واذا أُخِذ ما مع الثالث مع $\frac{١}{٨}$ ما مع الاول و$\frac{١}{٩}$ ما مع الثاني و$\frac{١}{١٠}$ ما مع الرابع كان المجتمع ثمن الجوهرة. واذا أُخِذ ما مع الرابع و$\frac{١}{١١}$

مامع الاول و $\frac{١}{١٢}$ مامع الثاني و $\frac{١}{١٣}$ مامع الثالث كان المجتمع ثمن الجوهرة مطلوب اصغر الاعداد الصحيحة التي تصح عليها شروط المسئلة

نرى من شروط المسئلة ان الحصة الصغرى للاول من الاربعة فلنفرض الرجال ك وى ول ون وثمن الجوهرة ت فلنا

$$\text{ك} + \frac{\text{ی}}{٢} + \frac{\text{ل}}{٣} + \frac{\text{ن}}{٤} = \text{ت} \qquad \text{ن} = \frac{\text{١٢ت} - \text{١٢ك} - \text{٦ی} - \text{٤ل}}{٣}$$

$$\text{ی} + \frac{\text{ك}}{٥} + \frac{\text{ل}}{٦} + \frac{\text{ن}}{٧} = \text{ت} \qquad \text{ن} = \frac{\text{٢١٠ت} - \text{٤٢ك} - \text{٢١٠ی} - \text{٣٥ل}}{٣٠}$$

$$\text{ل} + \frac{\text{ك}}{٨} + \frac{\text{ی}}{٩} + \frac{\text{ن}}{١٠} = \text{ت} \qquad \text{ن} = \frac{\text{٣٦٠ت} - \text{٤٥ك} - \text{٤٠ی} - \text{٣٦٠ل}}{٣٦}$$

$$\text{ن} + \frac{\text{ك}}{١١} + \frac{\text{ی}}{١٢} + \frac{\text{ل}}{١٣} = \text{ت} \qquad \text{ن} = \frac{\text{١٧١٦ت} - \text{١٥٦ك} - \text{١٤٣ی} - \text{١٣٢ل}}{١٧١٦}$$

ثم بالمساواة

$$\frac{\text{١٢ت} - \text{١٢ك} - \text{٦ی} - \text{٤ل}}{٣} = \frac{\text{٢١٠ت} - \text{٤٢ك} - \text{٢١٠ی} - \text{٣٥ل}}{٣٠}$$

$$\frac{\text{٢١٠ت} - \text{٤٢ك} - \text{٢١٠ی} - \text{٣٥ل}}{٣٠} = \frac{\text{٣٦٠ت} - \text{٤٥ك} - \text{٤٠ی} - \text{٣٦٠ل}}{٣٦}$$

$$\frac{\text{٣٦٠ت} - \text{٤٥ك} - \text{٤٠ی} - \text{٣٦٠ل}}{٣٦} = \frac{\text{١٧١٦ت} - \text{١٥٦ك} - \text{١٤٣ی} - \text{١٣٢ل}}{١٧١٦}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{١٥٠ی} - \text{٧٨ك} - \text{٩٠ت}}{٥}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{٥٤٠ت} + \text{٢٧ك} + \text{١٠٦٠ی}}{١٥٩٠}$$

$$\text{ل} = \frac{\text{٤٦٣٣٢ت} - \text{٥٩٦٧ك} - \text{٥٢٩١ی}}{٥١٠٨٤}$$

بالمساواة ايضاً

$$\frac{\text{١٥٠ی} - \text{٧٨ك} - \text{٩٠ت}}{٥} = \frac{\text{٥٤٠ت} + \text{٢٧ك} + \text{١٠٦٠ی}}{١٥٩٠}$$

$$\frac{\text{٥٤٠ت} + \text{٢٧ك} + \text{١٠٦٠ی}}{١٥٩٠} = \frac{\text{٤٦٣٣٢ت} - \text{٥٩٦٧ك} - \text{٥٢٩١ی}}{٥١٠٨٤}$$

$$\text{ی} = \frac{\text{٢٩١٦٠ت} + \text{٢٤٨٣١ك}}{٤٦٦٤٠}$$

$$\text{ى} = \frac{\text{٧٦٨٠٤٢٠ ت} - \text{١٨١١١٣٣ ك}}{\text{١٠٤٢٦٩٥٥}}$$

بالمساواة ايضاً

$$\frac{\text{٢٩١٦٠ ت} + \text{٢٤٨٣١ ك}}{\text{٤٦٦٤٠}} = \frac{\text{٧٦٨٠٤٢٠ ت} - \text{١٨١١١٣٣ ك}}{\text{١٠٤٢٦٩٥٥}}$$

$$\text{ك} = \frac{\text{٢٤٠٧٣٢٣٦٠ ت}}{\text{١٥٢٦١٤٦٥٠١}}$$

فاذاً ت تقبل الانقسام على مخرج هذا الكسر . ولكي يكون لنا عددٌ صحيحٌ يجب ان نفرض ت هذا المخرج ذاتهُ . فلنا ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١

ك = ٢٤٠٧٣٢٣٦٠	ى = ١٠٨٢٣٣٣٩٨٨
ل = ١٢٤٣٩٥٧٨٠٦	ن = ١٣١٨٢٧٨١٨٠

ك = ٢٤٠٧٣٢٣٦٠	ى = ١٠٨٢٣٣٣٩٨٨
$\frac{\text{ى}}{\text{٢}}$ = ٥٤١١٦٦٩٩٤	$\frac{\text{ك}}{\text{٥}}$ = ٤٨١٤٦٤٧٢
$\frac{\text{ل}}{\text{٣}}$ = ٤١٤٦٥٢٦٠٢	$\frac{\text{ل}}{\text{٦}}$ = ٢٠٧٣٢٦٣٠١
$\frac{\text{ن}}{\text{٤}}$ = ٣٢٩٥٦٩٥٤٥	$\frac{\text{ن}}{\text{٧}}$ = ١٨٨٣٢٩٧٤٠
ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١	١٥٢٦١٤٦٥٠١

ل = ١٢٤٣٩٥٧٨٠٦	ن = ١٣١٨٢٧٨١٨٠
$\frac{\text{ك}}{\text{٨}}$ = ٣٠٠٩١٥٤٥	$\frac{\text{ك}}{\text{١١}}$ = ٢١٨٨٤٧٦٠
$\frac{\text{ى}}{\text{٩}}$ = ١٢٠٢٥٩٣٣٢	$\frac{\text{ى}}{\text{١٢}}$ = ٩٠١٩٤٤٩٩
$\frac{\text{ن}}{\text{١٠}}$ = ١٣١٨٢٧٨١٨	$\frac{\text{ل}}{\text{١٣}}$ = ٩٥٦٨٩٠٦٢
ت = ١٥٢٦١٤٦٥٠١	١٥٢٦١٤٦٥٠١

(مسئلة ٢٢) مطلوب عددان مربَّعان يكون مجموعهما مربعًا ايضاً

لنفرض العددين $ك^٢$ و$ت^٢$ فيكون $ك^٢ + ت^٢$ مربعًا. وكمية $ك^٢ + ت^٢$ هي اكبر من كمية $(ك - ت)^٢$ لان هذه الاخيرة $= ك^٢ - ٢ ك ت + ت^٢$ فلنفرض $ك^٢ + ت^٢ = (م ك - ت)^٢$ فلنا $ك^٢ + ت^٢ = م^٢ ك^٢ - ٢ م ك ت + ت^٢$ وبالمقابلة

$ك^٢ = م^٢ ك^٢ - ٢ م ك ت$ اي $ك = م^٢ ك - ٢ م ت$ $م^٢ ك - ك = ٢ م ت$ $ك = \frac{٢ م ت}{م^٢ - ١}$ فاذًا العددان هما $ت^٢$ و$\left(\frac{٢ م ت}{م^٢ - ١}\right)^٢$ فيمكن ان نفرض $ت^٢$ وم ايَّ عددين شئنا ولكن لكي يكون $\frac{٢ م ت}{م^٢ - ١}$ صحيحًا ينبغي للصورة ان تقبل الانقسام على المخرج ويكون الخارج صحيحًا. فان فرضِ $م = ٢$ و$ت = ٣$ فلنا العددان ١٦ و٩ ومجتمعها ٢٥ واذا فرض $م = ٣$ و$ت = ٥$ فلنا العددان $\frac{٢٢٥}{١٦}$ و٢٥ ومجتمعها $\frac{٦٢٥}{١٦}$ واذا فرض $م = ٣$ و$ت = ٨$ فلنا ٣٦ و٦٤ ومجتمعها ١٠٠ وهلمَّ جرًّا

(مسئلة ٣٢) مطلوب عدد ك بحيث يكون $ك + ت$ و$ك - ت$ مربَّعين

لنفرض $ك + ت = م^٢$ ثم $ك - ت = م^٢ - ٢ ت$

افرض $م^٢ - ٢ ت = (م - ت)^٢ = م^٢ - ٢ م ت + ت^٢$ ثم $- ٢ ت = - ٢ م ت + ت^٢$ او $٢ م ت = ت^٢ + ٢ ت$ و$م = \frac{ت + ٢}{٢}$ $م^٢ = \frac{ت^٢ + ٤ ت + ٤}{٤}$

و$ك = م^٢ - ت = \frac{ت^٢ + ٤ ت + ٤}{٤} - ت = \frac{ت^٢ + ٤}{٤}$ فلنا هذه القضية العمومية وهي اذا رُبّع عددٌ واضيف الى مربعهِ ٤ وانقسم المجتمع على ٤ يكون الخارج عددًا مجتمعهُ مع العدد المفروض وفضلتهما عددان مربعان. فاذا فرضنا

$ت = ١$ لنا $ك = \frac{ت^٢ + ٤}{٤} = \frac{٥}{٤}$ $ك + ت = \frac{٥}{٤} + ١ = \frac{٩}{٤}$

$ك - ت = \frac{٥}{٤} - ١ = \frac{١}{٤}$

$ت = ٢$ ثم $ك = \frac{٤ + ٤}{٤} = ٢$ $ك + ت = ٤$ $ك - ت = ٠$

ت = ٣   ك = $\frac{٩ + ٤}{٤}$ = $\frac{١٣}{٤}$ ك + ت = $\frac{١٣}{٤}$ + ٣ = $\frac{٢٥}{٤}$

ك − ت = $\frac{١٣}{٤}$ − ٣ = $\frac{١}{٤}$

ت = ٤   ك = $\frac{١٦ + ٤}{٤}$ = ٥   ك + ت = ٩   ك − ت = ١ وهلم جرًّا

(مسئلة ٢٤) لنا ان نجد ثلاثة اعداد مربعة على سلسلة حسابيَّة

لنفرض الاعداد ك^{٢} وى^{٢} ول^{٢} ثم ك^{٢} + ل^{٢} = ٢ ى^{٢} افرض ك = ف + ق ول = ف − ق ثم ك^{٢} + ل^{٢} = ٢ ف^{٢} + ٢ ق^{٢} = ٢ ى^{٢} اي ف^{٢} + ق^{٢} = ى^{٢} فتحولت المسئلة الى نوع مسئلة ٢٢ فلنفرض ف = $\frac{٢ م ت}{م^{٢} − ١}$ حيث ق = ت

ثم ك = ف + ق = $\frac{٢ م ت}{م^{٢} − ١}$ + ت

ل = ف − ق = $\frac{٢ م ت}{م^{٢} − ١}$ − ت

ى = $\sqrt{ف^{٢} + ق^{٢}}$ = $\frac{ت (م^{٢} + ١)}{م^{٢} − ١}$

فيمكن ان نفرض ت وم ايَّ عددٍ شئنا

لنفرض ت = ٣ وم = ٢ ثم ك = ٧ ى = ٥ ل = ١ والاعداد المطلوبة هي ٤٩ ٢٥ ١

افرض ت = ٨ م = ٣ ثم ك = ١٤ ى = ١٠ ل = − ٢ والاعداد هي ١٩٦ ١٠٠ ٤

(مسئلة ٢٥) مفروض ٢٤ك = ١٣ ى + ١٦ فما هي قيمة ك وى صحيحة
الجواب ك = ٥ ى = ٨

(٢٦) مفروض ٨٧ك + ٢٥٦ ى = ١٥٤١٠ مطلوب قيمة ك الصغرى وقيمة ى الكبرى في صحيح
الجواب ك = ٣٠ ى = ١٢٨٠٠

(٢٧) كم قيمة صحيحة للاحرف في ٥ ك + ٧ ى + ١١ ل = ٢٢٤

الجواب ٦٠

(٢٨) رجلٌ اشترى ٢٠ طايرًا بعشرين غرشًا اي اوزًّا بسعر الطير باربعة غروش وحمامًا بسعر الطير نصف غرش وعصافير بسعر الطير $\frac{١}{٤}$ غرش فكم اشترى من كل جنس

الجواب اوز ٣ حمام ١٥ عصافير ٢

(٢٩) ما هو العدد الاصغر الذي يقبل الانقسام على الاعداد الطبيعيّة من ١ الى ٩ بدون باقٍ

الجواب ٢٥٢٠

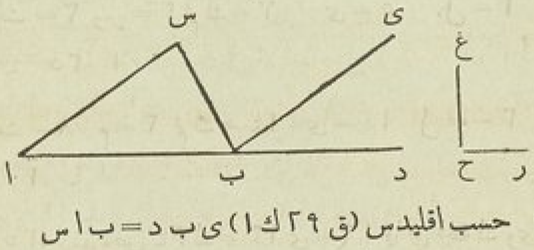
تنبيه . هذا الباب واسعٌ جدًّا ويمكن الامتداد فيه الى ما لا نهاية لهُ . وقد اكتفينا بما ذكرناهُ طلب الاختصار . ولا يمكن وضع قواعد خصوصية لكثيرٍ من مسايلهِ وما نقدم شرحهُ كافٍ للدلالة على الحِيَل التي يستعان بها في حل عقدهِ

* * *

الفصل الرابع والعشرون

في استعمال الجبر في مسايل هندسيّة

٢٦٨ قد يمكن ان تكتب البراهين الهندسية في عبارات جبرية . مثالهُ في ان الزوايا الثلاث من كل مثلث تعدل قآيمتين



(١) حسب اقليدس (ق ٢٩ ك ١) ى ب د = ب ا س

(٢) وس ب ى = ا س ب

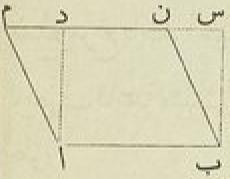
(٣) بالجمع ى ب د + س ب ى = ب ا س + ا س ب

(٤) اضف ا ب س للجانبين فتصير س ب د + ا ب س = ب ا س + ا س ب + ا ب س

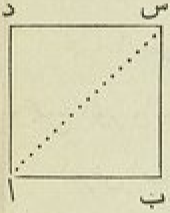
(٥) حسب اقليدس (ق ١٢ ك ١) س ب د + ا ب س = ٢ غ ح ر

(٦) بمساواة (٤) و(٥) ب ا س + ا س ب + ا ب س = ٢ غ ح ر اي قايمتين

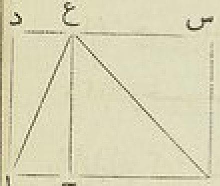
٢٦٩ تُعرَف مساحة معيّن بضرب القاعدة في العمود عليها. مثالهُ في شكل ا ب ن م تكون مساحته ا ب × ب س او م ن × ا د لان ا ب × ب س = مساحة شكل س ا وحسب اقليدس (ق ٣٦ ك ١) اشكال متوازية الاضلاع على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هي متساوية اي س ا = م ب

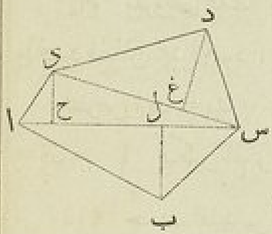


٢٧٠ نعرف مساحة المربع بضرب احد اضلاعهِ في نفسهِ. مثالهُ مساحة المربع ا ب س د = ا ب^{٢} لانهُ = ا ب × ب س وب س = ا ب



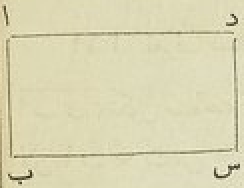
٢٧١ مساحة المثلث هي نصف حاصل القاعدة في علو المثلث. مثالهُ مساحة مثلث ا ب غ = نصف ا ب × غ ح او ب س او $\frac{١}{٢}$ ا ب × ب س او ح غ لان شكل ا ب س د = ا ب × ب س وحسب اقليدس ق ٤١ ك ١ ان كان مثلث وشكل متوازي الاضلاع على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين فيكون المثلث نصف الشكل. وعلى هذا القياس لنا عبارة جبرية دالة على مساحة اي شكلٍ فُرِض اضلاعهُ مستقيمة. لان كل شكل نظير ذلك يمكن انقسامهُ الى مثلثات. مثاله في شكل ا ب س د ى فيه مثلثات ا ب س ا س ى ى س د ومساحة ا ب س = $\frac{١}{٢}$ ا س × ب ل ومساحة ا س ى = $\frac{١}{٢}$ ا س × ح ى و ى س د = $\frac{١}{٢}$ ى س × د غ وكل الشكل





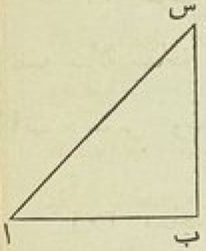
=($\frac{١}{٢}$ ا س × ب ل) + ($\frac{١}{٢}$ ا س × ح ى) + ($\frac{١}{٢}$ ى س × د غ)

٢٧٢ نحتاج احيانًا ان نعكس هذا العمل وان نستعلم اضلاع شكل من مساحته. فيعرف طول مستطيل من قسمة المساحة على عرضهِ. مثالهُ ان فرض مساحة د ب = ك فضلع ا د = $\frac{\text{ك}}{\text{س د}}$ ويوخذ ضلع مربع باخذ الجذر المالي من مساحتهِ.



وتعرف قاعدة مثلثٍ بقسمة مساحتهِ على نصف علوهِ

٢٧٣ راينا ان مساحة سطحٍ يُدَلُّ عليهِ بحاصل طولهِ في عرضهِ فيدل على مساحة الجسم بطولهِ في عرضهِ في عمقهِ



عملية $\overline{\text{١}}$ مفروض قاعدة مثلث قايم الزاوية $\overline{\text{ا ب س}}$ ومجموع الوتر والساق فلنا ان نجد الساق

لنفرض ا ب = ن ب س = ك مجموع الوتر والساق

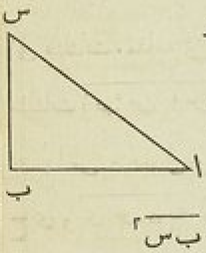
ك + ا س = ت وبمقابلة ك نصير ا س = ت − ك

(١) حسب اقليدس ق ٤٧ ك ١ $\overline{\text{ب س}}^{٢} + \overline{\text{ا ب}}^{٢} = \overline{\text{ا س}}^{٢}$

(٢) وحسب ما فرض ك^{٢} + ن^{٢} = (ت − ك)^{٢} = ت^{٢} − ٢ ت ك + ك^{٢}

بالمقابلة ٢ ت ك = ت^{٢} − ن^{٢} وك = $\frac{\text{ت}^{٢} - \text{ن}^{٢}}{\text{٢ ت}}$ = ب س الضلع

المطلوب اي في كل مثلث قايم الزاوية يعدل العمود مربع مجموع الوتر والعمود الاَّ مربع القاعدة مقسوم على مضاعف مجموع الوتر والعمود



ع $\overline{\text{٢}}$ مفروض قاعدة مثلث قايم الزاوية وفضلة الوتر والعمود فلنا ان نجد العمود

لنفرض ا ب = ت = ٢٠ ب س = ك وفضلتهما = ف = ١٠ فيكون الوتر ا س = ك + ف

(١) حسب اقليدس ق ٤٧ ك ١ $\overline{\text{ا س}}^{٢} = \overline{\text{ا ب}}^{٢} + \overline{\text{ب س}}^{٢}$

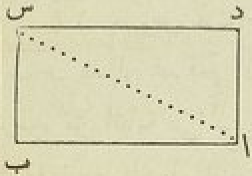
(٢) وبالمفروض $(\text{ك}+\text{ف})^{٢}=\text{ت}^{٢}+\text{ك}^{٢}$

(٣) بالبسط $\text{ك}^{٢}+٢\,\text{ك ف}+\text{ف}^{٢}=\text{ت}^{٢}+\text{ك}^{٢}$

(٤) بالمقابلة والقسمة $\text{ك}=\dfrac{\text{ت}^{٢}-\text{ف}^{٢}}{٢\,\text{ف}}=١٥$

ع ٣ مفروض وتر مثلث قايم الزاوية ٣٠ ذراعًا. وفضلة الضلعين الاخرين ٦ اذرع. فما هو طول القاعدة الجواب ٢٤ ذراعًا

ع ٤ مفروض وتر مثلث قايم الزاوية ٥٠ ذراعًا. ونسبة القاعدة الى العمود كنسبة ٤ : ٣ فما هو طول العمود. الجواب ٣٠ ذراعًا



ع ٥ مفروض محيط شكل متوازي الاضلاع وقطرهُ مثل شكل ا ب س د فلنا ان نجد اضلاعهُ

لنفرض القطر $\overline{\text{اس}}=\text{ح}=١٠$

وضلع $\overline{\text{اب}}=\text{ك}$

نصف المحيط $\text{ب س}+\text{اب}=\text{ب س}+\text{ك}=\text{د}=١٤$

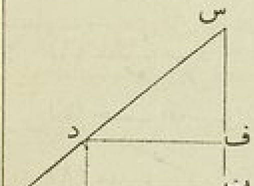
بمقابلة ك تصير $\text{ب س}=\text{د}-\text{ك}$

حسب اقليدس ق ٤٧ ك ١ $\overline{\text{اب}}^{٢}+\overline{\text{ب س}}^{٢}=\overline{\text{اس}}^{٢}$

وحسب المفروض $\text{ك}^{٢}+(\text{د}-\text{ك})^{٢}=\text{ح}^{٢}$

اذًا $\text{ك}=\tfrac{١}{٢}\,\text{د}\pm\sqrt{\tfrac{١}{٤}\,\text{د}^{٢}+\tfrac{١}{٢}\,\text{ح}^{٢}-\tfrac{١}{٢}\,\text{د}^{٢}}=٨=\text{اب}$

و $\text{ب س}=\text{د}-\text{ك}=١٤-٨=٦$



ع ٦ مفروض مساحة مثلث قايم الزاوية $\overline{\text{ا ب س}}$ واضلاع شكل متوازي الاضلاع مرسوم فيهِ. فلنا ان نجد الضلع $\overline{\text{ب س}}$

لنفرض المساحة $=\text{ع}$ و $\text{د ى}=\text{ف ب}=\text{ب}$

$\text{ى ب}=\text{د ف}=\text{د}$ $\quad\text{ب س}=\text{ك}$ $\quad$ اذًا $\text{س ف}=$

$\text{ب س}-\text{ب ف}=\text{ك}-\text{ب}$

(١) بمشابهة المثلثات $\text{س ف}:\text{د ف}::\text{ب س}:\text{ا ب}$

(٢) او حسب المفروض ك − ب : د :: ك : ضلع اب

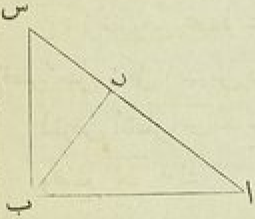
(٣) و $د\,ك = (ك - ب) \times اب$

(٤) حسب رقم ٢٧١ $ع = اب \times \frac{١}{٢} ب\,س = اب \times \frac{١}{٢} ك$

(٥) بالقسمة على $\frac{١}{٢}$ ك $\frac{٢ع}{ك} = اب$

(٦) $د\,ك = (ك + ب) \times \frac{٢ع}{ك} = ٢ع - \frac{٢ع\,ب}{ك}$

(٧) و $ك = \frac{ع}{د} \pm \sqrt{\frac{ع^{٢}}{د^{٢}} - \frac{٢ع\,ب}{د}} = ب\,س$



$\overline{٧٤}$ مفروض ثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية $\overline{اب\,س}$ فلنا ان نجد قسمَي الوتر الحادثين من عمودي مرسومٍ من القائمة على الوتر حسب اقليدس (ق ٨ ك ٦) يقسم المثلث الى اثنين كل واحدٍ منهما قائم الزاوية

(١) حسب اقليدس ق٤٧ ك١ $\overline{ب\,د}^{٢} + \overline{س\,د}^{٢} = \overline{ب\,س}^{٢}$

(٢) بالشكل $س\,د = اس - اد$

(٣) ربّع الجانبين $\overline{س\,د}^{٢} = (اس - اد)^{٢}$

(٤) اذًا بالتعويض في (١) $\overline{ب\,د}^{٢} + (اس - اد)^{٢} = \overline{ب\,س}^{٢}$

(٥) بالبسط $\overline{ب\,د}^{٢} + \overline{اس}^{٢} - \overline{٢\,اس \times اد} + \overline{اد}^{٢} = \overline{ب\,س}^{٢}$

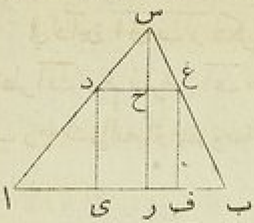
(٦) بالمقابلة $\overline{ب\,د}^{٢} = \overline{ب\,س}^{٢} - \overline{اس}^{٢} + \overline{٢\,اس \times اد} - \overline{اد}^{٢}$

(٧) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب\,د}^{٢} = \overline{اب}^{٢} - \overline{اد}^{٢}$

(٨) بمساواة (٦) و(٧) $\overline{ب\,س}^{٢} - \overline{اس}^{٢} + \overline{٢\,اس \times اد} = \overline{اب}^{٢}$

(٩) بالمقابلة $\overline{٢\,اس \times اد} = \overline{اب}^{٢} + \overline{اس}^{٢} - \overline{ب\,س}^{٢}$

(١٠) بالقسمة $اد = \frac{\overline{اب}^{٢} + \overline{اس}^{٢} - \overline{ب\,س}^{٢}}{٢\,اس}$



$\overline{\text{ع ٨}}$ مفروض مساحة شكل $\overline{\text{د ى ف غ}}$ متوازي الاضلاع مرسوم في مثلث $\overline{\text{ا ب س}}$ فلنا ان نجد اضلاعهُ

ارسم $\overline{\text{س ر}}$ عموديًا على $\overline{\text{ا ب}}$ وحسب المفروض د غ يوازي $\overline{\text{ا ب}}$ اذًا

مثلث $\overline{\text{س غ ح}}$ يشبه مثلث $\overline{\text{س ر ب}}$

و . $\overline{\text{س د غ}}$ . . $\overline{\text{س ا ب}}$

فلنفرض س ر = د وا ب = ب و$\overline{\text{د غ}}$ = ك والمساحة = ع

(١) بمشابهة المثلثات $\overline{\text{س ب}} : \overline{\text{س غ}} :: \overline{\text{ا ب}} : \overline{\text{د غ}}$

(٢) و $\overline{\text{س ب}} : \overline{\text{س غ}} :: \overline{\text{س ر}} : \overline{\text{س ح}}$

(٣) وبمساواة النسب $\overline{\text{ا ب}} : \overline{\text{د غ}} :: \overline{\text{س ر}} : \overline{\text{س ح}}$

(٤) اذًا $\frac{\text{د غ} \times \text{س ر}}{\text{ا ب}} = \text{س ح}$

(٥) بالشكل $\overline{\text{س ر}} - \overline{\text{س ح}} = \text{ح ر} = \text{د ى}$

(٦) بالتعويض $\text{س ر} - \frac{\text{د غ} \times \text{س ر}}{\text{ا ب}} = \overline{\text{د ى}}$

(٧) وبالمفروض $\text{د} - \frac{\text{د ك}}{\text{ب}} = \overline{\text{د ى}}$

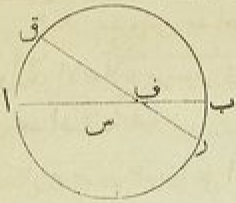
(٨) $\text{ع} = \overline{\text{د غ}} \times \overline{\text{د ى}} = \text{ك} \times (\text{د} - \frac{\text{د ك}}{\text{ب}})$

(٩) اي $\text{ع} = \text{د ك} - \frac{\text{د ك}^{٢}}{\text{ب}}$

(١٠) بالتحويل $\text{ك} = \frac{\text{ب}}{٢} \pm \sqrt{\frac{\text{ب}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ع ب}}{\text{د}}} = \overline{\text{د غ}}$

ثم يعرف $\overline{\text{د ى}}$ بقسمة المساحة على د غ

$\overline{\text{ع ٩}}$ لنا ان نرسم من نقطة مفروضة في دآيرة مفروضة خطاً مستقيمًا حتى يكون بين جزءيهِ الواقعين بين النقطة والمحيط فضلةٌ مفروضة



في دآيرة $\overline{\text{اق ب ر}}$ لتكن ف نقطة مفروضة في القطر $\overline{\text{اب}}$ ثم لنفرض $\overline{\text{اف}}$ = ت وب ف = ب وف ر = ك والفضلة المفروضة = د اذاً $\overline{\text{ف ق}} = \text{ك} + \text{د}$

(١) حسب اقليدس (ق ٣٥ ك ٣) $\overline{\text{ف ر}} \times \overline{\text{ف ق}} = \overline{\text{اف}} \times \overline{\text{ب ف}}$

(٢) وبالمفروض $\text{ك} \times (\text{ك} + \text{د}) = \text{ت} \times \text{ب}$

(٣) اي $\text{ك}^2 + \text{د ك} = \text{ت ب}$

(٤) باتمام التربيع $\text{ك}^2 + \text{د ك} + \frac{1}{4}\text{د}^2 = \frac{1}{4}\text{د}^2 + \text{ت ب}$

(٥) بالتجذير والمقابلة $\text{ك} = -\frac{1}{2}\text{د} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\text{د}^2 + \text{ت ب}} = \overline{\text{ف ر}}$

ع ١٠ مفروض مجموع ضلعي مثلث ١١٥٥ وطول العمود من الزاوية الواقعة بينهما على الضلع الثالث ٣٠٠ وفضلة قسمي الضلع الثالث الحادثين من وقوع العمود عليهِ ٤٩٥ فما هو طول الاضلاع الثلاثة

الجواب ٩٤٥ و٣٧٥ و ٧٨٠

ع ١١ مفروض محيط مثلث قايم الزاوية ٧٢٠ وطول العمود الواقع من القايمة على الوتر ١٤٤ فما هو طول الاضلاع الجواب ٣٠٠ و ٢٤٠ و ١٨٠

ع ١٢ مفروض فضلة قطر مربع واحد اضلاعهِ فلنا ان نجد الاضلاع ليكن ك = الضلع المطلوب وف = الفضلة بينهُ وبين القطر اذاً $\text{ك} = \text{ف} + \text{ف}\sqrt{2}$

ع ١٤ مفروض قاعدة مثلث مستوٍ وعلوه فلنا ان نجد ضلع مربعٍ مرسوم في المثلث قايم على القاعدة مثل شكل $\text{د ى} \overline{\text{ف غ}}$ في $\overline{\text{ع ٨}}$ لنفرض ك = ضلع المربع وق = قاعدة المثلث وع = علوهُ اذاً $\text{ك} = \frac{\text{ق ع}}{\text{ق} + \text{ع}}$

ع ١٥ مفروض ضلعا مثلثٍ وطول خط ينصّف الزاوية الواقعة بينهما. فلنا ان نجد طول القاعدة اي الضلع الثالث الذي يقع عليهِ الخط المنصّف للزاوية لنفرض ك = القاعدة ت = احد الضلعين المفروضين وس = الآخر

و ب = الخط المنصف اذاً ك = (ت + س) × $\sqrt[٢]{\frac{ت س - ب^{٢}}{ت س}}$

ع ١٦ مفروض وتر مثلث قايم الزاوية ٣٥ وضلع مربعٍ مرسوم فيهِ (مثل شكل د ى ف ب فى ع ٦) = ١٢ مطلوب الضلعان الآخران من المثلث

الجواب ٢٨ و ٢١

ع ١٧ في مثلث قايم الزاوية كانت الاذرع في محيطهِ مساوية للاذرع المربعة في مساحته ونسبة القاعدة الى العمود :: ٤ : ٣ مطلوب طول كل ضلع من اضلاعهِ

الجواب ٦ و ٨ و ١٠

ع ١٨ دارٌ طولها ١٨ ذراعًا وعرضها ١٢ ذراعًا يحيط بها ممشي متساوي العرض ومساحتهُ تساوي مساحة الدار. فما هو عرض الممشى

ع ١٩ حقلة زواياها قايمة نسبة ضلعٍ منها الى آخر :: ٦ : ٥ وسُدُس مساحتها ١٢٥ قصبة مربعة فما هو طول الاضلاع

ع ٢٠ في مثلث قايم الزاوية نسبة مساحتهِ الى مساحة مستطيل مفروض :: ٥ : ٨ والضلع الاقصر من كل واحدٍ منهما ٦٠ قصبة. والضلع الاخر من المثلث المتوالي للقايمة مساوٍ لقطر المستطيل فما هي مساحة المثلث والمستطيل

الجواب ٤٨٠٠ و ٣٠٠٠ قصبة مربعة

ع ٢١ صندوقان زواياهما قايمة اعظمهما يسع ٢٠ قدمًا مكعَّبًا اكثر من اصغرها ومساحة الاصغر الى مساحة الاكبر :: ٤ : ٥ وقاعدتاها معربعتان وضلع الواحد مساوٍ لعمق الصندوق الآخر فما هو عمق الصندوقين

الجواب ٤ و ٥ اقدام

ع ٢٢ مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية مرسومة من نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع الى الاضلاع الثلاثة فما طول الاضلاع

لنفرض ت وب وس = الخطوط العمودية وك = نصف احد الاضلاع اذاً

ك = $\frac{ت + ب + س}{\sqrt{٣}}$

ع ٢٣ ساحة مربّعة احاط بها سوقٌ متساوى العرض وطول ضلع الساحة ثلاث قصبات اقل من تسعة اضعاف عرض السوق والقصبات المربعة في السوق اكثر من القصبات في محيط الساحة بمايتين وثمانية وعشرين فما هي مساحة الساحة

الجواب ٥٧٦ قصبة مربعة

ع ٢٤ مفروض طول خطين مرسومين من الزاويتين الحادتين من مثلث قايم الزاوية الى نقطة انتصاف الضلعين المتقابلين. فلنا ان نجد طول الاضلاع لنفرض ك = نصف القاعدة وى = نصف العمود وت وب = الخطين المفروضين اذًا

$$ك = \sqrt{\frac{٤ب^{٢} - ت^{٢}}{١٥}} \qquad وى = \sqrt{\frac{٤ت^{٢} - ب^{٢}}{١٥}}$$

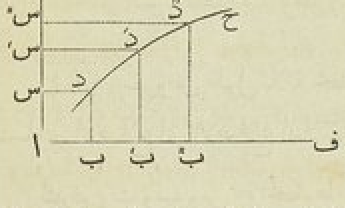
* * *

الفصل الخامس والعشرون

في تعديل المنحنيات

٢٧٤ قد نظرنا في ما تقدم الى استعمال الجبر في معرفة اشكال هندسية محاطة بخطوط مستقيمة. فلننظر الان الى مناسبة الجبر لمعرفة الخطوط المنحنية وكيفية الدلالة على خصايصها ونسبة بعضها الى بعض بواسطة معادلة

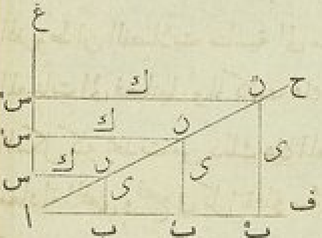
ان اوضاع نقط خطٍ منحنٍ مرسوم على سطحٍ مستوٍ تُعيَّن من بُعد كل واحدة عن خطين مستقيمين احدهما عمودي على الاخر



ليكن اغ اف عمودين احدهما على الاخر ودب ودُبُ ودٌبٌ اعمدة على اف وس د وسُ دُ وسٌ دٌ اعمدة على اغ فيعرف وضع د من طول خطَّي ب د وس د ووضع دُ بطول خطي بُ دُ وسُ دُ ووضع دٌ من خطي بٌ دٌ وسٌ دٌ وقد سمي الخطان المرسومان كما ذكر من نقطة ما في خط منحنٍ معيَّنَي تلك

النقطة ولاجل التمييز بين الخطين قد سمّي ب د مثلاً معيّن نقطة د و س د فصلتها فنستعمل غالبًا المعيّنة على خط ا ف وهي مساوية للفصلة على ا غ اي ا ب = ا س و ب بُ = س سُ الخ (اقليدس ك ١ ق ٣٤) وسمي ا ف و ا غ محورَي المعيّن

٢٧٥ انه ان رسم خطوط معيّنة من كل نقطة في خط منحنٍ ودُلّ على نسبة المعينة الى فصلاتها بواسطة معادلة فيعين بذلك كل نقطة من المنحنى لا محالة. ويُعلم شكلهُ وكثير من خصايصهِ بواسطة تحويل المعادلة بالمقابلة والقسمة والترقية والتجذير وهلم جرًّا. واما نقط منحنٍ غير معدودة فلا يمكن رسم معين لكل واحدة منها ولكن لنا طريقة لتحصيل معادلة دالة على جميع اجزاء المنحني وهي ببناء المعادلة على خاصيّة مشتركة بين كل زوج مركب من معيّن وفصلتهِ وفي ايضاح ذلك لننظر اولاً الى خطٍ مستقيم ليكن ا ح خطا وليرسم منهُ معينات وفصلات على المحورين ا ف و ا غ العمودين احدهما على الآخر ولتجعل زاوية ف ا ح حتى تكون الفصلة س د او ا ب مضاعف المعين ب د فتكون المثلثات ا ب د ا بُ دُ و ا بٌ دٌ متشابهة اقليدس (ق ٢٩ ك ١) اذًا



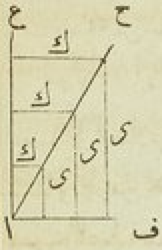
ا ب : ب د :: ا بُ : بُ دُ :: ا بٌ : بٌ دٌ وان فرض ا ب = ٢ ب د فحينيذٍ ا بُ = ٢ بُ دُ و ا بٌ = ٢ بٌ دٌ الخ اي كل فصلة = مضاعف معينها. ولكن لا نحتاج الى معادلة لكل زوج من معين مع فصلتهِ بل تكفي واحدة للجميع. فلنفرض ك = احدى الفصلات و ى = معيّنها اذًا ك = ٢ ى او ى = ½ ك وهذه معادلة دالة على نسبة المعينات والفصلات بعضها لبعض. ولا فرق بينها وبين ما سواها من المعادلات غير انه ليس لحرفي ك و ى قيمة معلومة الّا انهما دالّتان على معيّن نقطةٍ وفصلتها. ثم ان فرض ك = ا ب اذًا ى = ب د

وان فرض ك = ا بُ . ى = بُ دُ

. . ك = ا بٌ . ى = بٌ دٌ الخ

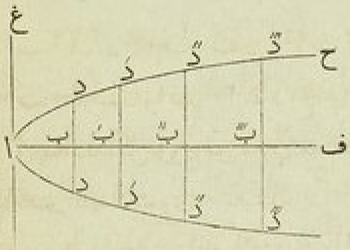
فان عُيّن طول احد الزوجين يعرف الاخَر من المعادلة فان فرض ك = ٢

اذاً ی = ١ وان فرض ك = ٨ فاذاً ی = ٤ وان فرض ك = ١٠٠ فاذاً ی = ٥٠ الخ



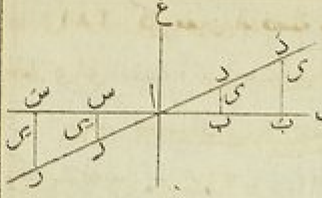
٢٧٦ اذا اختلفت زاوية ح $\overline{\text{اف}}$ عما سبق في الرسم السابق كما يُرى في هذا الرسم تبقى المعادلة على حالها الأ في مسمى ك فلنفرض ت دالة على نسبة ی الى ك اي ی : ك :: ت : ١ فتصير المعادلة . ت ك = ی فيكون المسمى ت صحيحاً او كسراً حسبما كانت ی اكبر من ك او اصغر منها

ثم لنستعمل ما قد اوضح في تحصيل معادلة دالة على خط منحنٍ . ولنفرض انهُ يراد معادلة دالَّة على شكل شلجمي . فمن خصايص هذا الشكل كما يتضح في حساب قطع المخروط ان الفصلات مناسبة الى مربعات المعينات . فلتكن ت نسبة مربع احدى المعينات الى فصلتها . ولما كانت هذه النسبة هي هي بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل كلهِ يحدث من ذلك هذه المعادلة $ی^٢$: ك :: ت : ١ وت ك = $ی^٢$ وهي معادلة المنحني وتصح في كل نقطةٍ منهُ . ومهما تغيرت ك وی تبقى ت على حالها ثم ان كان ت ك = $ی^٢$ فبالتجذير ی = $\sqrt{\text{ت ك}}$ وان كان ت = ٢ اذاً ی = $\sqrt{\text{٢ ك}}$



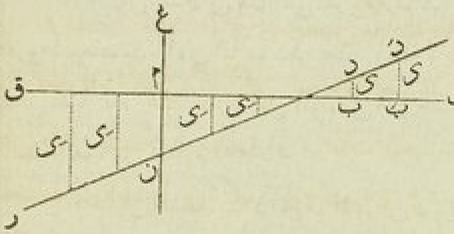
وان فرض ك = ٤٫٥ = اب فاذاً ی = $\sqrt{\text{٢ × ٤٫٥}}$ = $\sqrt{\text{٩}}$ = ٣ = $\overline{\text{ب د}}$ وان فرض ك = ٨ = اب′ فاذاً ی = $\sqrt{\text{٢ × ٨}}$ = $\sqrt{\text{١٦}}$ = ٤ = ب′ د′ وان فرض ك = ١٢٫٥ = اب″ فاذاً ی = $\sqrt{\text{٢ × ١٢٫٥}}$ = $\sqrt{\text{٢٥}}$ = ٥ = ب″ د″ وان فرض ك = ١٨ = اب‴ فاذاً ی = $\sqrt{\text{٢ × ١٨}}$ = $\sqrt{\text{٣٦}}$ = ٦ = ب‴ د‴

٢٧٧ متى رسمت المعينات على جانبي القطر تكون الواقعة فوقهُ ايجابية والواقعة تحتهُ سلبية . مثالهُ في الرسم السابق ان حسب المعينات فوق $\overline{\text{اف}}$ ايجابية تكون التي تحتهُ سلبية والفصلات الواقعة عن اليمين مثل اب اب′ الخ ان حسبت



ايجابيّة فتكون الواقعة عن اليسار مثل اس اسُ سلبية. وفي حل مسئلة ان خرج معين او فصلة سلبيًا يوخذ على جانب المحور المقابل للجانب المحسوب ايجابيًا

٢٧٨ اننا في ما تقدم نرى الخط المستقيم او المخني يقطع المحور في نقطة تقاطع المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين. فيمكن ان تحسب الفصلات على المحور ق ف من خط غ ن فلنفرض ك = احدى الفصلات



م ب او م بُ الخ وى = معينها ولنفرض ل = اب ود = م ا وت = نسبة ب د : اب اذاً ت ل = ى ول = $\frac{ى}{ت}$ ولكن بالشكل اب = م ب – م ا اي ل = ك – ب وبمساواة المعادلتين ك – ب = $\frac{ى}{ت}$ وك = $\frac{ى}{ت}$ + ب

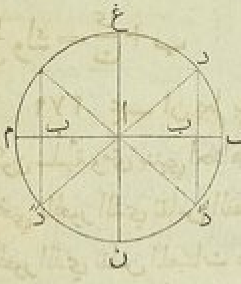
٢٧٩ يجب ان يعلم بالتدقيق متى تكون المعيّنات والفصلات ايجابية ومتى تكون سلبيّة ومتى ينتهي احداها. فنرى ان الفصلة تنتهي وتتلاشى في نقطة التقآء الخط المخني بالمحور الذي تقاس الفصلات عليهِ. والمعيّنة تتلاشى عند نقطة التقآء المخني بالمحور الذي تقاس المعينات عليهِ. مثالهُ في رسم الشلجي السابق نرى المعينات تقاس على خط ا ف فيقلّ طولها شيئًا فشيئًا بتقريب المخني الى المحور الى ان تزول بالكلية في نقطة التقايهما. والفصلات تقاس على خط ا غ وتقل ايضًا كما سبق الى ان تتلاشى عند ا

٢٨٠ الامر واضح انه اذا التقى المحوران بالمخني في نقطة واحدة تتلاشى المعينات والفصلات معًا كما في الرسم المشار اليهِ. ولكن (في رسم رقم ٢٧٨) نرى المحور م ف يقطع خط ن د في ا و غ ن يقطعه في ن فالمعينات اي م ف تتلاشى عند ا والفصلات اى غ ن تتلاشى عند م او ن

٢٨١ كل معين او فصلة يتغير من ايجاب الى سلب عند مروره في نقطة التلاشي اي النقطة التي فيها تكون قيمتهُ صفراً. مثالهُ في رسم رقم ٢٧٧ نرى المعين $\overline{\text{ى}}$ يقلُّ شيئاً فشيئاً الى ان يتلاشى في آ ثم يصير سلبيًّا لانهُ يقع تحت المحور $\overline{\text{س ف}}$ وكذلك الفصلات عن يمين $\overline{\text{آ غ}}$ تقل شيئاً فشيئاً الى ان تتلاشى عند آ ثم تصير سلبية عن يسار $\overline{\text{آ غ}}$ ونرى هنا ان الاثنين تغيَّرتا معًا في نقطةٍ واحدة ولكن في رسم رقم ٢٧٨ نرى المعينات تتغير عند آ والفصلات تبقى ايجابية الى $\overline{\text{غ ن}}$ وبين $\overline{\text{آ ن}}$ $\overline{\text{غ ن}}$ تكون المعينات سلبية والفصلات ايجابية

٢٨٢ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط ومقصودنا الآن انما هو ذكر بعض امثلة لايضاح ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من العلوم التعليمية

$\overline{\text{ع ا}}$ لنا ان نجد معادلة دآيرةٍ ما فلنفرض دايرة $\overline{\text{ف غ م}}$ ولنرسم القطرين $\overline{\text{غ ن}}$ $\overline{\text{ف م}}$ احدهما عمودي على الآخر ارسم من اية نقطةٍ شيت في المنحني اي محيط الدايرة المعيّن $\overline{\text{د ب}}$ عموديًّا على $\overline{\text{ا ف}}$ فيكون $\overline{\text{ا ب}}$ الفصلة المناظرة للعين $\overline{\text{د ب}}$



ثم لنفرض نصف القطر $\overline{\text{ا د}} = \text{ر}$ و $\overline{\text{ا ب}} = \text{ك}$

و $\overline{\text{ب د}} = \text{ى}$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{\text{ب د}}^{2} = \overline{\text{ا د}}^{2} - \overline{\text{ا ب}}^{2}$

وبالمفروض $\text{ى}^{2} = \text{ر}^{2} - \text{ك}^{2}$

بالتجذير $\text{ى} = \pm\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{ك}^{2}}$

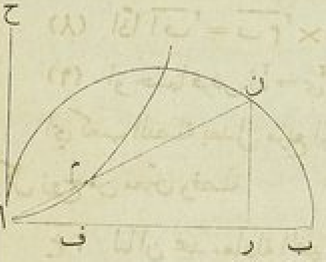
وعلى هذا السبيل $\text{ك} = \pm\sqrt{\text{ر}^{2} - \text{ى}^{2}}$ اي ان الفصلة تساوي الجذر المالي من فضلة مربع نصف القطر ومربع المعين. فان حسب نصف قطر الدآيرة واحدًا تصير المعادلتان $\text{ى} = \pm\sqrt{١ - \text{ك}^{2}}$ و $\text{ك} = \pm\sqrt{١ - \text{ى}^{2}}$ وتحصل هذه المعادلة مهما كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والفصلة يكونان ضلعي مثلث ذى قآيمة و $\overline{\text{ا د}}$ الوتر لانه نصف قطر الدآيرة ونرى للمعادلتين قيمة ملتبسة اي تكون ايجابية او سلبية فتحسب المعينات والفصلات في الربع الاول $\overline{\text{غ ف}}$ ايجابيّة وفي الرابع الثاني $\overline{\text{غ م}}$ تبقى

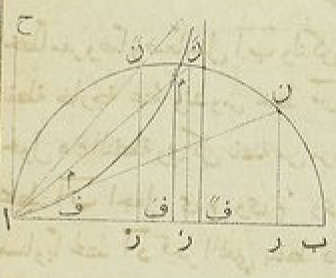
المعينات ايجابية وتصير الفصلات سلبية وفي الربع الثالث م ن تصيران سلبيتين وفي الربع الرابع ن ف تبقى المعينات سلبية وتعود الفصلات ايجابية اي

في ربع ف غ تكون ك + وى +
غ م . ك − وى +
م ن . ك − وى −
ن ف . ك + وى −

٢٨٢ قد يحسب في الهندسة ان الخطوط حاصلة من حركة نقطةٍ. فان تحركت الى جهة واحدة حصل خط مستقيم. وان تغيرت الجهة في كل وقتٍ حصل خطٌ منحنٍ. وكيفية المنحني وشكلهُ متعلقان بكيفية تلك الحركة. فان تحركت النقطة على بُعدٍ واحدٍ من نقطة اخرى ثابتة حصلت دائرة تكون الثابتة مركزها وعرفنا معادلتها من معرفة كيفية هذه الحركة. وهكذا نحصل على معرفة معادلات جميع انواع المنحنيات بمعرفة كيفية حركة النقطة في رسمها كما سنرى من الامثلة الآتية

ع ٢ لنا ان نجد معادلة المنحني المسمى رديف ديوكليس وكيفية رسمهِ هي ان ناخذ نصف دائرة ا ن ب وفي القطر ا ب خذ نقطة ر وليكن بعد ف من ا مساويًا البعد ر من ب ارسم ر ن عمودًا على ا ب وليقطع المحيط في ن اوصل بين ا و ن ومن ف ارسم ف م عمودًا على ا ب يلاقي ا ن في م فالخط المنحني مارٌّ بنقطة م فان اخذ ف على ابعادٍ مختلفة من ا نتعين اية عدةٍ فرضت من نقط المنحني. اذ كلما نقدم خط ف م الى ناحية ب طال. ثم لكي نجد معادلة هذا المنحني ليكن ا ح و ا ب المحورين ولنفرض كل واحدة من الفصلات ا ف ا ف′ ا ف″ = ك





وكل واحدة من المعينات ف م ف′ م′ ف″ م″ = ى

والقطر اب = ب

اذًا ف ب = اب − اف = ب − ك

ولان $\overline{\text{ف م}}$ $\overline{\text{ر ن}}$ عمودان على اب فمثلث اف م يشبه مثلث ا ر ن اقليدس (ق ٢٧ وق ٢٩ ك ١)

(١) بالمثلثات المتشابهة اف : ف م :: ا ر : ر ن

(٢) او بوضع ف ب عوض $\overline{\text{ا ر}}$ تصير اف : ف م :: ف ب : ر ن

(٣) اذًا $\frac{\text{ف م}\times\text{ف ب}}{\text{اف}}=\text{ر ن}$

(٤) بتربيع الجانبين $\frac{\overline{\text{ف م}}^{٢}\times\overline{\text{ف ب}}^{٢}}{\overline{\text{اف}}^{٢}}=\overline{\text{ر ن}}^{٢}$

(٥) حسب اقليدس (ق ٣٥ ك ٢ وق ٣ ك ٣) $\text{ا ر}\times\text{ر ب}=\overline{\text{ر ن}}^{٢}$

(٦) بوضع $\overline{\text{ف ب}}$ عوض $\overline{\text{ا ر}}$ و $\overline{\text{اف}}$ عوض $\overline{\text{ر ب}}$ تصير $\text{ف ب}\times\text{اف}=\overline{\text{ر ن}}^{٢}$

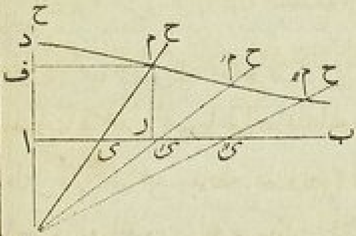
(٧) بمساواة (٤) و(٦) $\text{ف ب}\times\text{اف}=\frac{\overline{\text{ف م}}^{٢}\times\overline{\text{ف ب}}^{٢}}{\overline{\text{اف}}^{٢}}$

(٨) اذًا $\overline{\text{اف}}^{٣}=\overline{\text{ف م}}^{٢}\times\text{ف ب}$

(٩) او حسبما فرض $\text{ك}^{٣}=\text{ى}^{٢}\times(\text{ب}-\text{ك})$

اي كعب الفصلة يعدل مربع المعيّن في فضلة قطر الدائرة والفصلة. وهكذا في كل زوج من معيّن وفصلة

$\overline{\text{ع ٣}}$ لنا ان نجد معادلة المنحني المسمى بوق نكوميدس. وكيفية رسمهِ ان تاخذ



خطًا مفروضًا وضعًا مثل $\overline{\text{ا ب}}$ ولتكن $\overline{\text{س}}$ نقطة خارجة عنهُ ويدور خط $\overline{\text{س ح}}$ حول هذه النقطة وفي كل نقطة من مروره بخط $\overline{\text{ا ب}}$ اجعل ى م وىُ مُ وىٌ مٌ مساويًا لخط $\overline{\text{ا د}}$ فيمر المنحني بنقط د وم ومُ ومٌ الخ. ثم لكي نجد معادلتهُ ليكن $\overline{\text{س د}}$ و $\overline{\text{ا ب}}$ المحورين ارسم ف م يوازي $\overline{\text{ا ر}}$ و $\overline{\text{ر م}}$ يوازي $\overline{\text{س ف}}$ وقد رسم $\overline{\text{ى م}}=\overline{\text{ا د}}$

فلنفرض الفصلة $\overline{\text{اف}} = \overline{\text{فم}} = \text{ك}$

فلنفرض المعينة $\text{رم} = \text{اف} = \text{ى}$

فلنفرض الخط المفروض $\text{سا} = \text{ث}$

و $\text{اد} = \text{ىم} = \text{ب}$

فاذاً $\text{سف} = \overline{\text{سا}} + \overline{\text{اف}} = \text{ت} + \text{ى}$

لان سم يقطع المتوازيين سد و $\overline{\text{رم}}$ وايضاً يقطع $\overline{\text{ار}}$ و $\overline{\text{فم}}$ فمثلثا $\overline{\text{سفم}}$ و $\overline{\text{م رى}}$ متشابهان

(١) بالمثلثات المتشابهة $\overline{\text{سف}} : \overline{\text{فم}} :: \overline{\text{رم}} : \overline{\text{رى}}$

(٢) و $\overline{\text{رى}} = \dfrac{\overline{\text{فم}} \times \overline{\text{رم}}}{\overline{\text{سف}}}$

(٣) بتربيع الجانبين $\overline{\text{رى}}^{٢} = \dfrac{\overline{\text{فم}}^{٢} \times \overline{\text{رم}}^{٢}}{\overline{\text{سف}}^{٢}}$

(٤) حسب اقليدس (ق٤٧ك١) $\overline{\text{رى}}^{٢} = \overline{\text{ىم}}^{٢} - \overline{\text{رم}}^{٢}$

(٥) بمساواة (٣) و(٤) $\overline{\text{ىم}}^{٢} - \overline{\text{رم}}^{٢} = \dfrac{\overline{\text{فم}}^{٢} \times \overline{\text{رم}}^{٢}}{\overline{\text{سف}}^{٢}}$

(٦) اي بالمفروض $\text{ب}^{٢} - \text{ى}^{٢} = \dfrac{\text{ك}^{٢}\,\text{ى}^{٢}}{(\text{ت} + \text{ى})^{٢}}$

(٧) او $(\text{ت} + \text{ى})^{٢} \times (\text{ب}^{٢} - \text{ى}^{٢}) = \text{ك}^{٢}\,\text{ى}^{٢}$

٢٨٤ نرى في الامثلة المتقدمة ان المعادلة اخذت من وصف كيفية المنحني. وقد يُعكَس العمل اي تُفرَض المعادلة ومنها يرسم المنحني بأخْذ فصلات مختلفة وجعل معينات لها فيمرُّ المنحني باطراف هذه المعينات

$\overline{\text{ع ٤}}$ لنا ان نرسم منحنياً معادلتهُ $٢\,\text{ك} = \text{ى}^{٢}$ او $\text{ى} = \sqrt{٢\,\text{ك}}$ (انظر رسم الشلجي)

خذ على خط اف فصلات مختلفة طولاً اي

$\text{اب} = ٤'٥$ فيكون المعين $\overline{\text{بد}} = ٣$

$\text{اب}' = ٨$ فيكون المعين $\text{ب}'\text{د}' = ٤$

ا ب′ = ١٢′٥ فيكون المعين ب′ د′ = ٥

ا ب″ = ١٨ فيكون المعين ب″ د″ = ٦

ثم ركب هذه المعينات مع فصلاتها واوصل بين اطرافها بخط ا د د′ د″ فيكون المنحني المطلوب. ولا ريب ان الخط يكون اقرب الى المطلوب كما زاد عدد المعينات والفصلات الماخوذة

٢٨٥ اذا وُهمت حركة نقطة حتى تمر باطراف جميع المعينات المفروضة في معادلةٍ يسمى الخط الحادث طريق النقطة اي الطريق التي تتحرك فيها والتي توجد فيها ابداً. ويسمى ايضاً طريق المعادلة التي منها توخذ مواضع النقطة في حركتها. مثالهُ ان الشلجمي يسمى طريق نقط د د′ د″ او طريق المعادلة ت ك = $ى^٢$ وقوس الدائرة هو طريق المعادلة $ك = \pm\sqrt{ر^٢ - ى^٢}$ فاذاً معرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المنحني او المستقيم التي هي لهُ

$\overline{ع ٥}$ لنا ان نجد طريق المعادلة $ك = \frac{ى}{ت}$ او ت ك = ى التي فيها تفرض $\overline{ك}$ و $\overline{ى}$ معينات وفصلات مختلفة وت كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين $\overline{ك}$ على اطوال مختلفة فلا بد للفصلة $\overline{ى}$ ان تتغير بالنسبة الى ك حتى تبقى المعادلة ت ك = ى او بحل المعادلة الى نسبة ى : ك :: ت : ١ اي لا تتغير نسبة ى : ك لان ت كمية معينة اي تكون نسبة فصلة الى معينها كنسبة فصلة اخرى الى معينها مهما كان. فلنفرض فصلتين $\overline{ا ب}$ $\overline{ا ب′}$ (رسم رقم ٢٧٥) وب د و ب′ د′ معينيهما اذاً ا ب : ب د :: ا ب′ : ب′ د′ فيكون خط ا د د′ مستقيماً (اقليدس ق ٢٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة

ثم ان كانت المعادلة المفروضة $ك = \frac{ى}{ت} + ب$ فزيادة $\overline{ب}$ لا تسبب تغييراً في الطريق. لان $\overline{ب}$ انما يزيد طول الفصلات فقط. وعوض ان نقاس من آ تقاس من نقطة اخرى مثل $\overline{م}$ في رسم رقم ٢٧٨ وتبقى نسبة ا ب او ا ب′ الى ب د′ او ب′ د′ كما كانت فيكون الخط مستقيماً

٢٨٦ يبرهن مما سبق ان كل معادلة تكون $\overline{ك}$ و $\overline{ى}$ اي الفصلات والمعينات في اجزائه مختلفة منها. وليس لهما الا القوة الاولى تكون طريقها خطاً مستقيماً لان كل معادلة من هذا النوع يمكنها ان تتحول الى $ك = \frac{ى}{ت} \pm ب$ كما يتضح من هذه العملية

ع ٦ لنا ان نجد طريقة المعادلة

س ك − د + ح ك − ى + م = ن

بالمقابلة س ك + ح ك = ى + ن − م + د

وبالقسمة على س + ح تصير ك = $\frac{\text{ى}}{\text{س} + \text{ح}} + \frac{\text{ن} - \text{م} + \text{د}}{\text{س} + \text{ح}}$

فيمكن هنا ان بدل على الكميات الثابتة بالتعويض عنها بحرفٍ واحدٍ . فلنفرض س + ح = ت و $\frac{\text{ن} - \text{م} + \text{د}}{\text{س} + \text{ح}}$ = ب فتصير المعادلة ك = $\frac{\text{ى}}{\text{ت}}$ + ب التى طريقها خط مستقيم كما تقدم

٢٨٧ ثم انهُ متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفصلات او لكعوبها او للقوة الرابعة منها وهلمَّ جرًّا يكون طريق المعادلة خطاً منحنيًا لان نسبة المعينات الموضوعة على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فصلاتها . ولكن لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او كعوبها او قواتها الرابعه والخامسة وهلمَّ جرًّا كما علم من باب النسبة . مثالهُ ان فرض ك^{٢} = ى فتزيد المعينات اكثر من الفصلات فان اخذت الفصلات ١ و٢ و٣ و٤ الخ تكون المعينات مساوية لمربعاتها اي ١ و٤ و٩ و١٦ الخ

٢٨٨ ان عدة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصلات المختلفة هي غير متناهية . وكل معادلة لها طريق مختصة بها . اذًا تكون اشكال المنحنيات غير متناهية ولكن يمكن ان تنحصر في انواعٍ . وقد جرت العادة عند المولَّدين ان يرتبوها في انواع حسب درجات معادلاتها فيُدَلُّ على انواع الخطوط بالدليل الاعظم او بمجموع دلايل المعينات والفصلات في جزء من المعادلة . مثالهُ ت ك = ى تختص بخط من النوع الاول لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحدٌ وليس في هذا النوع منحنٍ كما راينا سابقًا

والمعادلة س ك^{٢} − ت ك ى = ى^{٢} مختصة بالنوع الثاني من الخطوط والنوع الاول من المنحنيات لان الدليل الاعظم هو ٢ وت ى + ك ى = ب ك تختص بالنوع الثاني ايضاً . لانهُ وان لم يكن فيها دليلٌ اكبر من واحدٍ لكن مجموع دلايل ك وى في الجزء الثاني اي ١ + ١ = ٢ وى^{٢} − ٢ ت ك ى = ب ك^{٢} مختصة

بالنوع الثالث من الخطوط والثاني من المنحنيات لان دليل $\overline{\text{ى}}$ الاعظم هو ٢

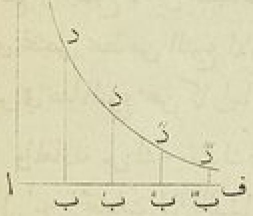
٢٨٩ في منحنيات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصلةٍ ما قيماتٌ مختلفة فيلتقي المعين بالمنحني في نقطٍ متعددة لان طول المعين متوقف على معادلة المنحني . وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى يكون لها قيمتان فاكثر كما راينا سابقًا فتكون للمعيّن قيمات مختلفة

ان معادلة من الدرجة الاولى لها قيمةٌ واحدة فقط وخطها يقطع المعين في نقطة واحدة فقط . مثالهُ معادلة خط $\overline{\text{اح}}$ (رسم رقم ٢٧٥) هي $\text{ا ك} = \text{ى}$ فنرى ان ى لها قيمة واحدة فقط وك لا تتغير . فان اخذ الفصلة $\text{ك} = \text{ا ب}$ يكون المعين $\text{ى} = \text{ب د}$ الذي يمكنهُ ان يلاقي $\overline{\text{اح}}$ في $\overline{\text{د}}$ فقط

ولكن معادلة الشلجمي $\text{ى}^2 = \text{ث ك}$ لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبين اي $\text{ى} = \pm\sqrt{\text{ث ك}}$ احداهما ايجابيّة والاخرى سلبية وذلك دليل على امكان اخراج المعين الى جهتيهِ من طرف الفصلة فيمكنهُ ان يلاقي جزءًا آخر من المنحني . مثالهُ معين الفصلة $\overline{\text{ا ب}}$ (رسم ٨٥) الشلجمي قد يمكنهُ ان يكون $\overline{\text{ب د}}$ فوق الفصلة او $\overline{\text{ب د}}$ تحتها

قد راينا سابقًا ان معادلة مكعبة لها ثلاثة جذور اي ثلاث قيمات فتكون لمعين منحنٍ من نوعها ثلاث قيمات فيمكنهُ ان يلاقي المنحني في ثلاث نقطٍ . مثالهُ معيّن الفصلة $\overline{\text{ا ب}}$ قد يمكن ان يكون $\overline{\text{ب د}}$ او $\text{ب د}'$ او $\text{ب د}''$

٢٩٠ اذا التقى المنحني بالمحور الذي تقاس عليه الفصلات تقلُّ المعينات شيئًا فشيئًا الى ان تتلاشى كما تقدم . وقد يمكن ان يتقرب منحنٍ الى خطٍ ابدًا بدون ان يلاقيه . فلنفرض على خط $\overline{\text{ا ف}}$ ابعادًا متساوية ا ب و$\text{ب ب}'$ و$\text{ب}' \text{ب}''$ ولنفرض شكل المنحني $\text{د د}' \text{د}''$ على كيفية حتى يكون كل معين عند نقط $\text{ب ب}' \text{ب}''$ الخ نصف الذي عن يساره اي $\text{ب}' \text{د}'$ نصف ب د و$\text{ب}'' \text{د}''$ نصف $\text{ب}' \text{د}'$ الخ



فالامر واضح انهُ مهما اخرج المنحني على هذه الكيفية لا يلاقي $\overline{\text{ا ف}}$ بل يبقى متقربًا اليه ابدًا . وكل خطٍ على هذه الكيفية اي الذي يتقرب ابدًا الى منحنٍ بدون ان يلاقيه

يسمى متقاربهُ فالمحور ا ف هو متقارب المنحني د د′ د″ فكلما زادت الفصلة قلّ المعيَّن. ومتى حسبت الفصلة غير متناهية حسبما ذكر في فصل الغير المتناهيات يصير المعين شبيهًا بالغير المتناهي فيُدَلُّ عليهِ بصفرٍ والامتداد في هذا الباب من خصايص حساب قطع المخروط هذا ما اقتضى وضعهُ في علم الجبر والمقابلة

والحمد لله الذي لا يحاط بهِ علمًا

انتهى

وكان الفراغ من تبييضه في الحادي والعشرين من شهر كانون الثاني سنة ١٨٥٢ مسيحية

طبع في بيروت سنة ١٨٥٢ مسيحية

[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

[illegible]

[illegible] ۱۲۸۱ [illegible]