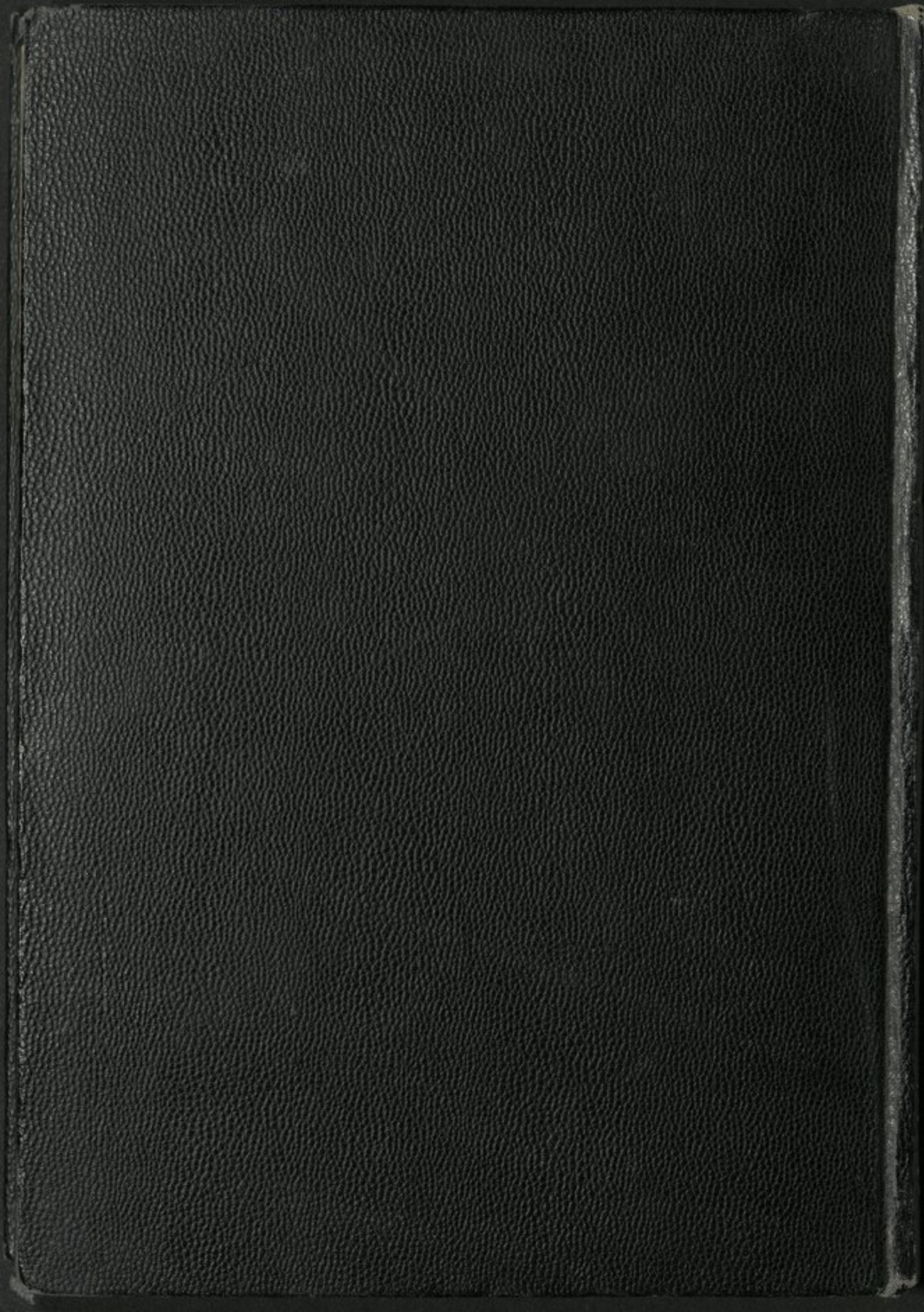
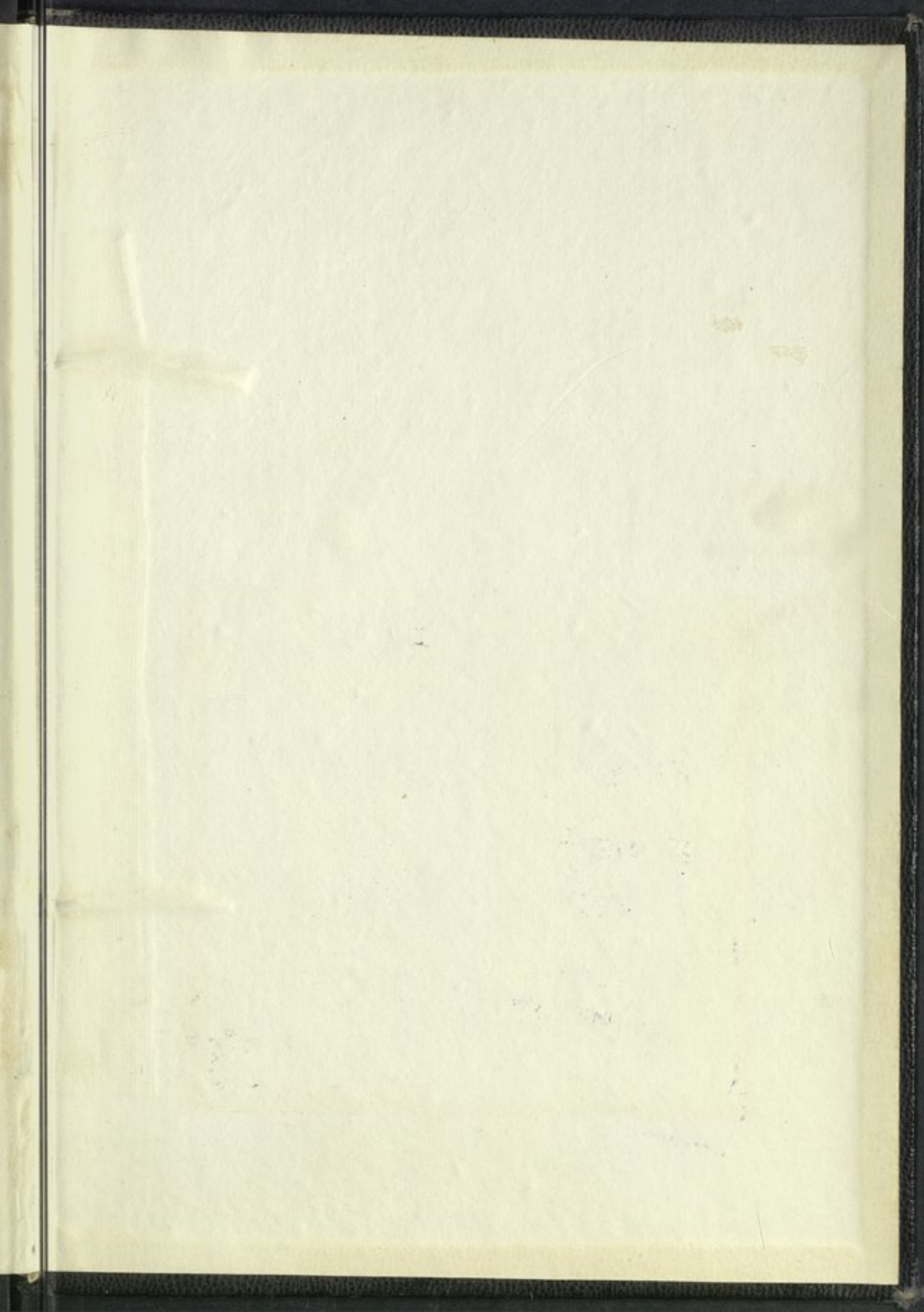
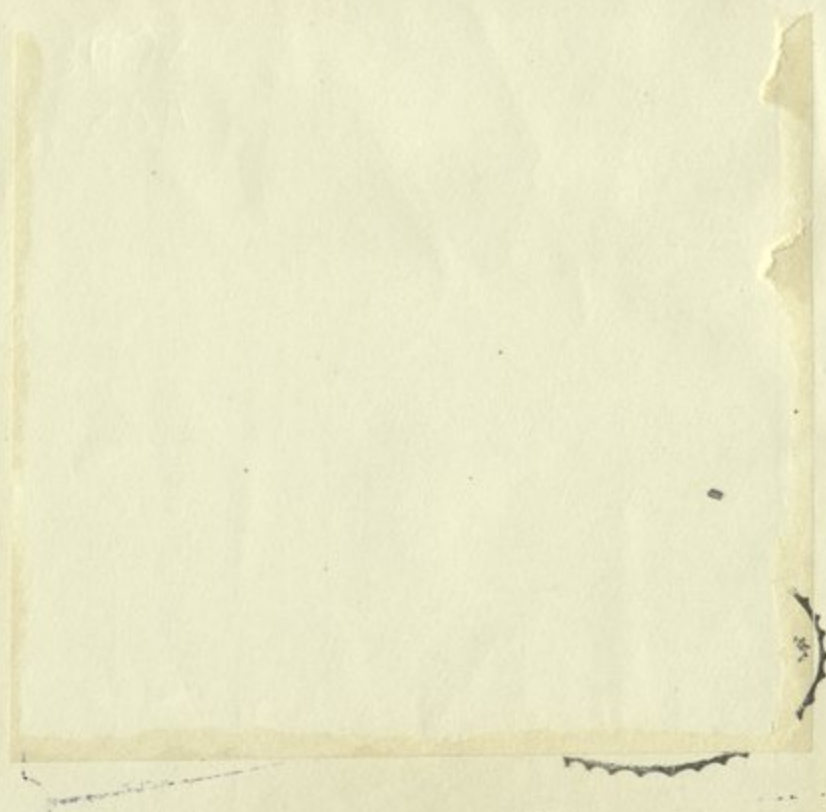
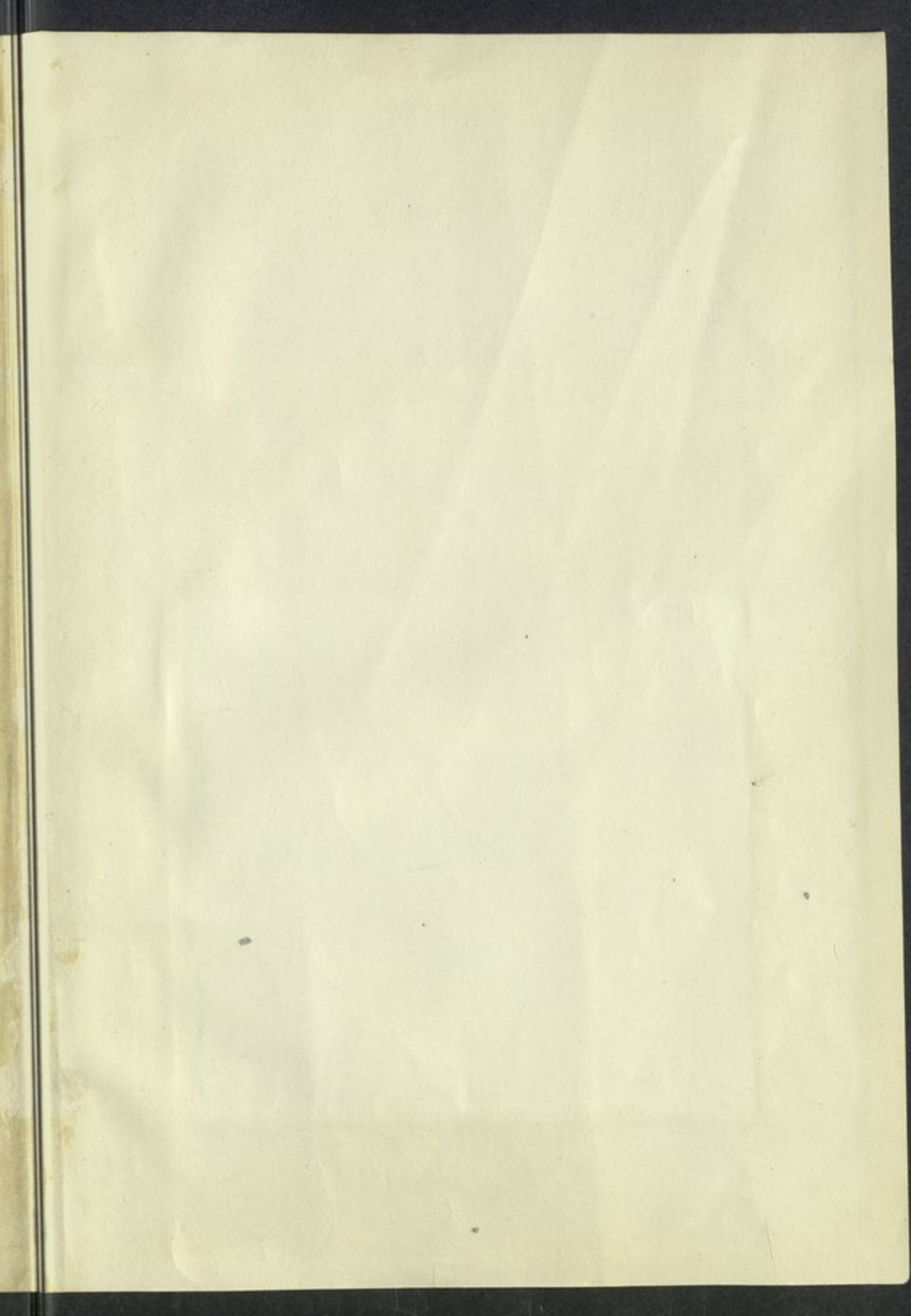


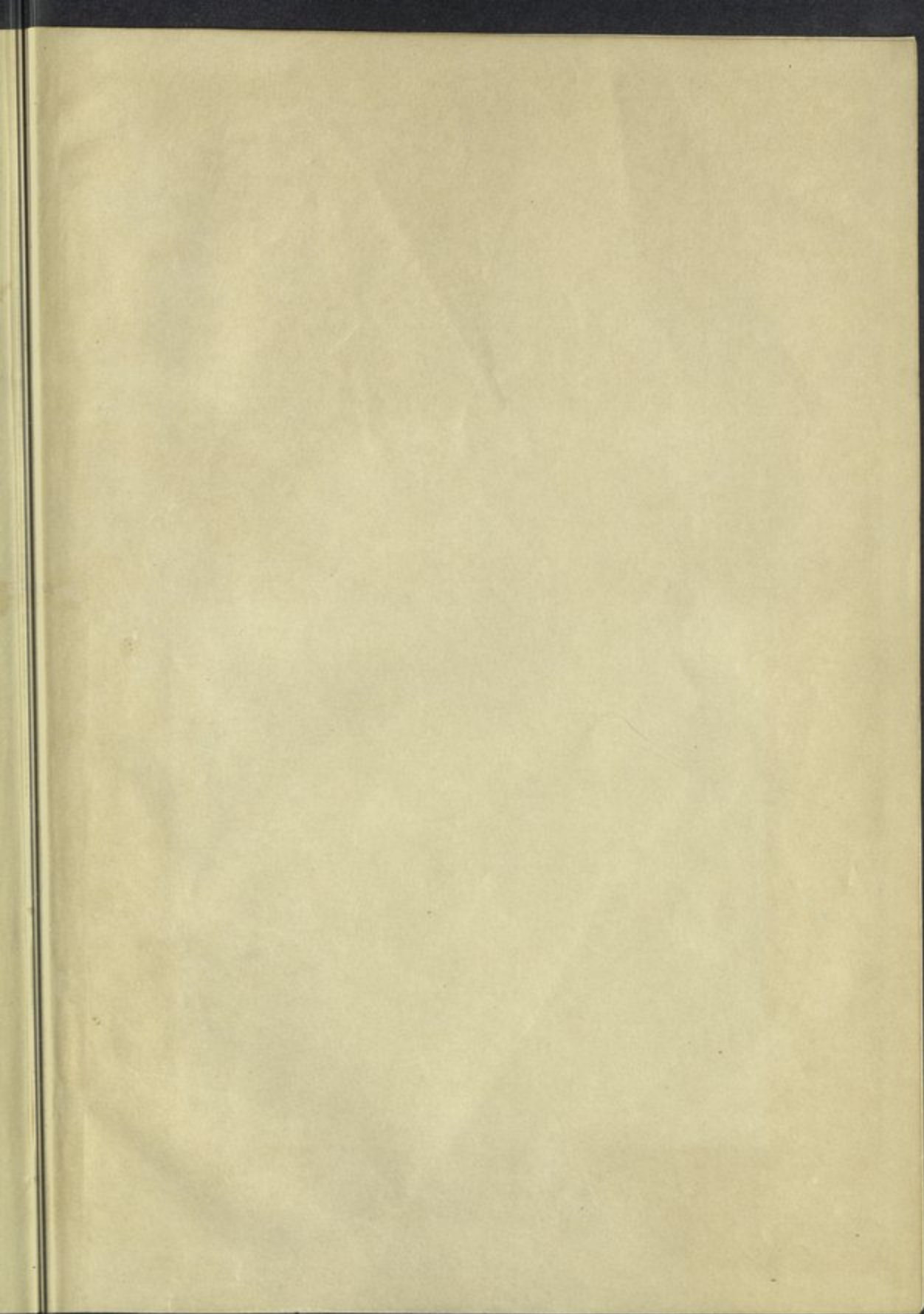








الاحكام الشرعية



الإحصاء الاقتصادي

أحمد بن محمد

تأليفه

تأليفه

تأليفه

الإحصاء الاقتصادي

الجزء الأول

الطبعة

دار الفكر العربي

١٣٣٠ هـ

القاهرة
مطبعة الاعتماد
شارع حسن الأكبر
كل الحقوق محفوظة

311.26
F28iA
v.1

الإحصاء الاقتصادي

أمين يس فواز

للي أمين

الجزء الأول

القاهرة

دار الفكر العربي

٢٣ شارع أمين باشا سامي

٢٥٠١٤
١٩٤٧
١٧



رد، لائحة ١٧. لائحة ١٧

الطبعة الأولى ١٩٤٧

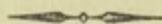
مؤلفه
مطبعة
طبع في
مصر

١٧

مطبعة
طبع في مصر
١٧

مهدى

إلى أمي



"إن كل من في السموات والأرض إلا آتى الرحمن عبدا .
 لقد أحصاهم وعدهم عدا . وكلهم آتية يوم القيامة فردا .
 إن الذين آمنوا وعملوا الصالحات سيجعل لهم الرحمن ودا .
 فإنما يسرناه بلسانك لتبشر به المتقين وتنذر به قوما لدا .
 وكم أهلكنا قبلهم من قرن هل تحس منهم من أحد أو
 تسمع لهم ركزا . "

قرآن كريم - سورة مريم

المحتويات

الفصل	الصفحة
الأول مقدمة	١ - ١٣
الثاني جمع البيانات	١٤ - ٣٠
الثالث التوزيع	٣١ - ٧٣
الرابع التوزيع التكرارى	٧٤ - ١٥٧
الخامس الأوساط	١٥٨ - ٢٤٥
السادس التشتت	٢٤٦ - ٣٠٥
السابع الالتواء	٣٠٦ - ٣٣١

تاریخ

موضوع	صفحات
تاریخ	1 - 71
تاریخ و جغرافیه	71 - 111
تاریخ و جغرافیه	111 - 177
تاریخ و جغرافیه	177 - 201
تاریخ و جغرافیه	201 - 237
تاریخ و جغرافیه	237 - 277

الفصل الأول

مقدمة

١. مقدمة . الإحصاء موضوع لا يمكن فهم طبيعته تماما إلا بعد الوقوف على بعض المعلومات الضرورية عنه . ولا يمكن تعريفه تعريفا يكفي من الناحية العلمية ويكون في نفس الوقت سهلا ميسور الفهم . لكن من الممكن إعطاء تعريف عملي بسيط له . ومن الضروري إعطاء مثل هذا التعريف في مبدأ الأمر حتى يمكن حصر المسائل التي تهتم بالإحصاء . بعد ذلك نهذب هذا التعريف ونعممه حتى يصبح كافيا من الناحية العلمية .

كان المقصود بالإحصاء في بادىء الأمر مجموعة البيانات أو الحقائق الخاصة بالشؤون التي تهتم الدولة مثل أعداد السكان وإيرادات الضرائب وقيم السلع التي تتداول بين الأفراد داخل حدود الدولة أو بين الدولة ودول العالم الأخرى وأعداد الوفيات الحادثة من أمراض معينة ومن جميع الأمراض والأسباب الأخرى مجتمعة إلخ ودراسة هذه البيانات وتفسيرها . لم تكن البيانات عديدة في بادىء الأمر ثم تغير الحال بعد زمن فصارت البيانات عديدة في بعض أجزائها وبقيت كما كانت غير عديدة في البعض الآخر وصار الإحصاء اسما يطلق على كل ما يمكن التعبير عنه في صيغة عديدة من مجموعة البيانات الخاصة بشؤون الدولة . غير أن دقة البيانات العددية وكونها أسهل في تداولها والعمل بها من البيانات غير العددية كانت سببا في انتشار تلك البيانات بشكل أوسع والاقتصار على استخدام كلمة الإحصاء في الحالات التي فيها تكون البيانات بيانات عددية . وفي الوقت الحاضر أصبح الإحصاء اسما يطلق بصفة عامة على مجموعة البيانات العددية أيا كان شأنها أو مصدرها أي

سواء كان لهذه البيانات صلة بتنظيم شؤون الدولة وإدارتها أو لم يكن لها هذه الصلة وعلى الطرائق المستخدمة في دراسة هذه البيانات وتحليلها . ذلك لأن طرائق دراسة الإحصاء واحدة سواء كانت البيانات خاصة بجماعات بشرية أو بأى نوع آخر من فروع العلم أو البحث .

٢ . تعريف الإحصاء . سنأخذ في هذا الكتاب بالرأى المذكور في آخر البند السابق أى بأن الإحصاء هو طريقة علمية عامة لتحليل البيانات العددية . لكن لا يوجد حتى الآن تعريف متفق عليه من الجميع لأن الإحصائيين ما زالوا مختلفين فيما يذهبون عليه على تعريف علمهم . وقد ذهب المتفقون منهم على أن الإحصاء اسم يدل على طريقة علمية عامة في تفسيرهم لهذا التعريف مذاهب شتى فمنهم من قال إن الإحصاء هو علم الحصر والعد ومنهم من قال إنه علم الأعداد الكبيرة ومنهم من قال إنه علم الأوساط . هذه التعاريف المختلفة تشير ولاشك إلى نواح مهمة من نواحي البحث الإحصائي لكنها كلها تعاريف ضيقة النطاق بشكل يجعل كل واحد منها غير كاف لأن يكون تعريفاً أولياً مقبولاً . إلى هذه التعاريف نضيف تعريفاً آخر : الإحصاء هو طريقة علمية عامة لجمع البيانات العددية الناتجة من حصر أو قياس أو تقدير أية ظاهرة من الظواهر وبحث هذه البيانات . هذا التعريف الأخير يمتاز عن جميع التعاريف الأخرى السابقة له بكونه أعم منها جميعاً ومع أنه من السهل أن نتصور وجود مسائل إحصائية لا تدخل تحت نطاقه إلا أننا سنقف في بحثنا وراء التعريف المطلوب عند هذا الحد لأن التعريف الأخير يكفي لجميع الأغراض العملية . لذلك سنقبل هذا التعريف على علته ونفتتح به هذا الكتاب .^١

٣ . تاريخ الإحصاء . الإحصاء بأى واحد من المعاني المذكورة في البند السابق هو فكرة قديمة يرجع منشؤها إلى أقدم العصور المعروفة في تاريخ

١ . في 388 ، 3 (1935) Revue de l'Institut International de Statistique .
Dr. W. F. Willcox . عددًا هائلاً (يربى على المائة) من التعاريف التي أعطيت في أوقات مختلفة للإحصاء .

التقدم البشري . فقد قامت أكثر الدول المتمدينة بجمع عدد غير يسير من البيانات الإحصائية لأغراض شتى بعضها حربى ويختص بتجنيد الجيوش وتجريد الحملات وبعضها مالى ويختص بفرض الضرائب وتوزيعها على الناس وتوزيع الأراضى الزراعية إلخ . فمثلا جاء فى بحث^١ نشر فى برلين عام ١٨٦٢ أن قدماء المصريين قاموا بحصر السكان وعدم كفا قاموا بعمل فهارس عامة لجميع أفراد السكان فى المملكة حتى يتبين لهم مقدار ما يخص كل فرد من الضريبة . وفى بحث آخر^٢ أن البطالة كانوا يعملون بنظام تسجيل السكان وقيدهم بانتظام كل أربع عشرة سنة . وحتى فى القرون الوسطى قام العباسيون فى الغرب بعمل وصف شامل للسكان وأحوال الزراعة والتجارة فى شبه جزيرة أيبيريا . ويقال أيضا إن الأيوبيين قاموا فى عام ١٢٤٠ بعمل فهارس عامة لجميع أفراد السكان فى مصر .

هذا هو العصر الإحصائى الأول وفيه نرى أن الإحصاء كان اسما يطلق على مجموعة البيانات الخاصة بالسكان والقوة المالية والحرية للدولة . أما العصر الإحصائى الثانى فيبدأ فى إنجلترا فى القرن السابع عشر الذى فيه ازدهرت التجارة وشرعت الدول الكبيرة تدرس قواها التجارية وهو عصر الحساب السياسى الذى اختص بدراسة البيانات العددية الخاصة بالمواليد والوفيات وبعض الظواهر الاجتماعية الأخرى . كان الإحصاء فى هذا العصر الثانى يعرف تحت اسم الحساب السياسى الاسم الذى أطلقه عليه نفر من علماء القرن السابع عشر الإنجليز وعلى رأسهم الكاتب John Graunt (١٦٢٠ - ١٦٧٤) أحد تجار لندن فى ذلك الوقت الذى نشر عام ١٦٦٦ كتابه التاريخى المشهور *Natural and Political Annotations made upon the Bills of Mortality* والسير William Petty (١٦٢٣ - ١٦٨٧) الذى نشر عام ١٦٨٣ كتابه *Five Essays in Political Arithmetick* . ثم جاء أحد رجال الدين البروسيين

1 Ernst Engel, Preuss. stat Zeitschrift.

2 E. Ciccotti, Il Problema demografico nel mondo antico, Metron (1931).

Johann Peter Süssmilch (١٧٠٧-١٧٦٧) ففشر عام ١٧٤١ كتاباً قيماً كان من شأنه رفع الحساب السياسى إلى أسنى مرتبة بلغها . وقد عد هذا الكتاب مبدأ الإحصاء بالمعنى الحديث للاسم .

وفي السنين الأولى من القرن التاسع عشر يبدأ العصر الإحصائى الثالث والآخر . يمتاز هذا العصر بإدخال فكرة رياضية جديدة فى البحوث الإحصائية . هذه الفكرة هى فكرة الاحتمالات التى يرجع فضل تهذيبها ورفعها إلى مستوى النظريات الرياضية العامة إلى Pierre Simon de Laplace (١٧٤٩-١٨٢٧) . وفى سنة ١٨١٢ ولأول مرة ظهر للابلاس كتابه الأغر *Théorie analytique des probabilités* فكان فتحاً جديداً فى نظرية الاحتمالات وما زال هذا الكتاب حتى يومنا هذا المرجع الأول لهذه النظرية . لكن بطل هذا العصر هو ولا شك Lambert Adolphe Jacques Quetelet (١٧٩٦-١٨٧٤) .

جاء كتليه فى السنين الأولى من القرن السابع عشر فتخيل وجود رجل متوسط (*l'homme moyen*) عرفه بأب كل صفة جسمانية أو عقلية من صفاته تساوى متوسط الصفات المناظرة لها عند جميع الرجال . فمثلاً طول الرجل المتوسط يساوى متوسط أطوال جميع الرجال ووزنه يساوى متوسط أوزان جميع الرجال وعمره يساوى متوسط أعمار جميع الرجال إلخ . وقد بين كتليه كيف يمكن ترتيب جميع الرجال حسب أية صفة من الصفات حول رجله المتوسط هذا بالضبط كما ترتب أية مجموعة من القيم حول متوسط جميع تلك القيم . ثم استنبط من ذلك أن نظرية الاحتمالات ذات الفائدة العظيمة فى دراسة الأخطاء يمكن استخدامها فى الإحصاء أيضاً وأن الانحرافات عن الوسط تخضع فى كلتا الحالتين لقانون واحد عام . وإلى كتليه يرجع أيضاً

1 Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts ans der Geburt , dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen (Berlin, 1741).

الفضل الأكبر في الكشف عن أهمية قانون الأعداد الكبيرة الذي وضعه Jakob Bernoulli (١٦٥٤-١٧٠٥) من قبل في كتابه العظيم *Ars Conjectandi* المنشور عام ١٧١٣ أى بعد وفاة صاحبه بثمان سنين والذي كان أيضا موضوع بحث قام به S.-D. Poisson (١٧٨١-١٨٤٠).^١ هذا القانون هو أحد الأسس المهمة التي قام عليها صرح النظرية الحديثة للإحصاء وقد كان كتليه أول من لحظ أهميته وساعد على نشره بين الناس.

وفي عام ١٨٥٢ خطا Hain التماسوى بأفكار كتليه خطوة مفيدة مستخدما طريقة أحسن من طريقة كتليه لاحتساب التغير الإحصائي. ثم هذا حذوه بعد ذلك بعدة سنين W. Lexis (١٨٣٧-١٩١٤) و G. F. Knapp (١٨٤٢-١٩٢٦) الألمانيان بدراساتهما في الإحصائيات الحيوية فهذا بذلك السبيل من بعدهما في إنجلترا لأمثال Francis Galton (١٨٢٢-١٩١١) و Francis Y. Edgeworth و Karl Pearson (١٨٥٧-١٩٣٦) ومن أتى من بعدهم.

٤. ملخص تاريخ حياة كتليه. ولد كتليه في مدينة Ghent البلجيكية واشتغل بتدريس الرياضة في الكلية التي كانت قائمة في تلك المدينة أيام شبابه. فلما حصل على درجة دكتور في العلوم عين أستاذا للرياضة في جامعة بروكسل وكان عمره وقتئذ ثلاثا وعشرين سنة. ثم عين بعد ذلك مديرا للمرصد بروكسل الذي كان له من قبل الباع الأكبر في تأسيسه. وفي عام ١٨٤١ عين كتليه رئيسا لجمعية الإحصاء المركزية فصار بذلك في منصب يمكنه من تقديم الكثير من الخدمات الجليلة للحكومة البلجيكية تارة بنصائحه الغالية في المسائل الاجتماعية الكبرى وتارة ببحوثه وكتبه القيمة التي نذكر منها على سبيل المثال *Sur l'homme et le développement de ses facultés, ou essai de physique sociale*

1 Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile (Paris, 1837).

(باريس ١٨٣٥) وLettres sur la théorie des probabilités (بروكسل ١٨٤٥) و
 Recherches statistiques (١٨٤٤). ومن الأعمال الخالدة التي قام بها
 كتليه وهو في هذا المنصب عقد المؤتمر الإحصائي الدولي الذي جمع كبار
 الإحصائيين من مختلف الدول وكان أول اجتماع له في بروكسل عام ١٨٥٣.
 ومات كتليه في سن الثامنة والسبعين.

٥. أغراضه الإحصاء وعلاقته بالعلوم الأخرى وبالأنفص علم
 الاقتصاد. ليس للإحصاء كعلم غرض في ذاته وإنما هو وسيلة تستخدم في
 دراسة العلوم الأخرى وتفسير بعض النقط الغامضة فيها وفي الحياة اليومية
 وفي طرائق التجارة وفي حل المسائل العامة التي تهتم الدولة والجمهور إلخ. وكلما
 زاد فهمنا له ولتكيفية استخدامه زادت نتائج استخدامه حسنا. والطريقة
 الإحصائية للبحث كثيرا ما تؤدي إلى الكشف عن الاتجاهات العامة في
 الأمور المالية والتجارية وغيرها كما أن الإحصاء يخبرنا عن مقدار نجاحنا
 أو فشلنا في صراعنا مع الطبيعة — المحصولات الزراعية وتخفيض نسبة الوفاة
 من الأمراض المعدية إلخ. وسواء كان مجال البحث تجارة أو اقتصادا أو
 خدمات حيوية إلخ فالغرض من الإحصاء هو حشد البيانات وتقسيمها إلى
 ما هو مهم وما هو غير مهم وعرض النتائج في صيغة سهلة الفهم ثم استغلال
 الاتجاهات التي يتم إثباتها في التنبؤ بما يحتمل حدوثه في المستقبل في مجال
 البحث كلما أمكن ذلك.

واضح من التعريف العام المذكور في البند ٢ أن الإحصاء له دخل كبير
 بالعلوم الطبيعية بل وبالعلوم الاجتماعية أيضا وعلى رأسها علم الاقتصاد.
 فالإقتصاد يدور حول السعر والسعر عدد لأنه هو الكمية من شيء التي
 تستبدل بكمية معطاة من شيء آخر. هذا ولا شك مجال يشعر الإحصائي فيه
 بأنه في عقر داره. والمجال واسع.

الإحصاء أداة لا يمكن الاستغناء عنها في دراسة الاقتصاد التاريخي .
 فنمو السكان وقيام الصناعات واندثارها والمد والجزر اللذان ينتابان رخاء
 الأمة وحركة الأسعار وحركة الأجور والتغيرات التي تطرأ على مستوى
 معيشة الناس كلها موضوعات تاريخية لا يمكن أن تدرس دراسة دقيقة إلا
 باستخدام الأرقام وإجراء المقارنات ومن هنا كانت الحاجة إلى الإحصاء .
 وما يقال عن الاقتصاد التاريخي يقال أيضاً عن الاقتصاد الوصفي لأن الحاجة إلى
 استخدام الأرقام وإجراء المقارنات في وصف الأحوال الاقتصادية الحاضرة
 لا تقل عنها في وصف الأحوال الاقتصادية الماضية . والإحصاء أداة نافعة
 إلى أقصى حد في دراسة الاقتصاد النظري للكشف عن العلاقات السببية بين
 الظواهر الاقتصادية المختلفة والحصول على قوانين اقتصادية عامة . ذلك لأن
 الاقتصاد إذا أريد له أن يكون علماً بمعنى الكلمة فواجب أن يكون قادراً على
 إظهار قوانين تعمل في ذلك الجزء من محيط الحياة الإنسانية التي يختص
 الاقتصاد بدراستها والطريقة الإحصائية هي الأداة التي بها يمكن الوصول إلى
 هذه القوانين . ففي الإحصاء نرصد الحقائق على شكل أرقام ثم نصنفها ثم نبينها
 وأخيراً نستنبط النتائج . لكن هذه النتائج يجب أن تكون صحيحة في حدود
 أوسع من مجال الحقائق المرصودة وإلا كانت عديمة المنفعة كوسيلة لتقدم
 العلم . أي أنها يجب أن تمكن الدارس من الوصول إلى قوانين صحيحة بصفة
 عامة . فمثلاً من السهل أن نرى كيف أن الدراسة الدقيقة للأرقام قد تؤدي
 إلى تفسير شيء حدث في الماضي أو إلى الإجابة عن سؤال خاص بالظروف
 الحاضرة كما أنه من السهل أن نرى كيف أن المقارنة بين مجموعة معينة من
 الحالات قد تمكننا من الوصول إلى علاقة بين ناحية عديدة معينة لهذه
 الحالات وبين ناحية عديدة أخرى لها كالعلاقة بين نوع المسكن وبين
 نسبة الوفاة بين الأطفال . ولكي تحقق هذه النتيجة مطلبنا الحالي يجب أن
 نحصل منها على أكثر من مجرد الوصول إلى العلاقة المذكورة بمعنى أن

النتيجة يجب أن تمكننا من القول بأن العلاقة موجودة لا في الحالات المرصودة
فحسب بل في جميع الحالات الممكنة . أى أنها يجب أن تثبت علاقة سببية
صحيحة بوجه عام .

٦ . **الوحدات الإحصائية** . الوحدات الإحصائية هي كميات نمطية أو
صفات تستخدم لوصف السلع والخدمات والأشياء الحية إلخ . أو لوصف أى
مجال للبحث أو أمر من الأمور . وواضح أن الوحدة لكي تكون مقبولة
كمقياس يجب أن توحى إلى كل إنسان تصادفه نفس الفكرة . لذلك يشترط
في الوحدة الإحصائية الجيدة حتى تكون صالحة للقياس

١ . ألا تتغير في أى بحث واحد . أى يجب أن توحى إلى كل شخص له
علاقة بالبحث نفس الأفكار .

٢ . أن تكون مريحة من الناحية الحسابية إذا كان مزعماً إجراء أى
عمليات حسابية أو رياضية على الإحصائيات .

٣ . أن تكون ذات علاقة معقولة وبسيطة بحدود مجال البحث وسعته .
أى بمدى الكميات الداخلة تحت نطاق البحث .

٤ . أن تعطى عند استخدامها نتائج في حدود الخطأ المباح في المسألة . أى
يشترط في الوحدة من حيث المقدار أن تتفق مع حدود الدقة المطلوبة .

هذه الشروط الأربعة لا بد من مراعاتها في الأعمال الإحصائية . ذلك
لأن المسألة الواحدة قد لا تكون كلها من نصيب شخص واحد بل في بعض
الحالات يعمل فيها ألوف كثيرة من الأشخاص . فإذا لم يكن عند كل واحد
من هؤلاء فكرة واضحة عن الوحدة التي يستخدمها في نصيبه من المسألة
فقد تحدث أخطاء كبيرة نسبياً وكثيراً ما يتعذر حساب هذه الأخطاء . إذن
من الضروري في البحوث الإحصائية تعريف الوحدة المختارة بكل وضوح .
إذا فحصنا عدداً كبيراً من الوحدات الإحصائية المستخدمة فإننا نجد أن جميع
هذه الوحدات تشترك في صفتين خاصتين :

أولا أكثر وحداتنا اختيارية . فمثلا لدينا مقاييس يقرها العرف السائد وهذه المقاييس تحتاج إلى تعديل من وقت لآخر . فكلما زادت الحاجة إلى الدقة في أعمالنا الإحصائية احتاج الأمر إلى تعاريف جديدة . أيضا مما يفسد هذه الوحدات الاختيارية في بعض أنواع التجارة ما تمليه العادات . فمثلا المائة من البيض = ١٢٠ والطن الطويل = ٢٢٤٠ رطلا والطن القصير = ٢٠٠٠ رطل إلخ .

ثانيا يندر أن تكون وحدات دولتين مختلفتين واحدة . وليس من السهل في العادة تحديد النسب بين هذه الوحدات .

٧ . النشرات التي تصدرها مصلحة عموم الإحصاء والتعداد المصرية .
في هذا البند نعدد النشرات الرسمية التي تصدرها مصلحة عموم الإحصاء والتعداد في مصر .

١ . التعدادات (كل عشر سنين) .

(١,١) تعداد سكان المملكة المصرية :

الجزء الأول - كراسات تعداد المحافظات والمديريات .

الجزء الثاني - جداول عامة باللغتين العربية والإنجليزية .

(١,٢) التعداد الصناعي والتجاري .

(١,٣) التعداد الزراعي العام .

٢ . الإحصائيات الصحية والمدنية .

(٢,١) المواليد والوفيات والأمراض المعدية والحالة الجوية باللغتين العربية والإنجليزية (كل أسبوع) .

(٢,٢) مواليد ووفيات المحافظات وعواصم المديريات باللغتين العربية والفرنسية (كل شهر) .

(٢,٣) المواليد والوفيات والأمراض المعدية والزواج والطلاق باللغتين العربية والإنجليزية (كل ثلاثة شهور) .

- (٢,٤) الإحصائيات الصحية باللغتين العربية والإنجليزية (كل سنة) .
 (٢,٥) مواليد ووفيات نواحي المملكة المصرية (كل ثلاث سنوات) .
 ٣ . الزراعة والاقتصاد .

- (٣,١) أثمان وموجودات الغلال بأسواق روض الفرج وأثرالنبي والإسكندرية
 ورشيد باللغتين العربية والفرنسية (كل يوم) .
 (٣,٢) أسعار أهم الحاجيات الأولية بالجملة والتجزئة في أسواق القاهرة باللغتين
 العربية والإنجليزية (كل أسبوع) .
 (٣,٣) الأرقام القياسية لأسعار الجملة على أساس يونيو ويوليو وأغسطس
 ١٩٣٩ (كل أسبوع) .

- (٣,٤) نشرة القطن باللغتين العربية والإنجليزية (كل أسبوع) .
 (٣,٥) النشرة الشهرية للإحصائيات الاقتصادية والزراعية باللغتين العربية
 والإنجليزية .

- (٣,٦) الأرقام القياسية لأسعار الجملة ونفقات المعيشة على أساس يونيو ويوليو
 وأغسطس ١٩٣٩ (كل شهر) .

- (٣,٧) أوراق العملة المصدرة والنقود المتداولة المعاونة لها باللغتين العربية
 والفرنسية (كل شهر) .

- (٣,٨) الأرقام القياسية العامة لأسعار الجملة والتجزئة ونفقات المعيشة على
 أساس ١٩١٣ - ١٤ ويونيو ويوليو وأغسطس ١٩٣٩ باللغتين العربية
 والفرنسية (كل شهر) .

- ٤ . التجارة الخارجية .

- (٤,١) الملخص الشهري للتجارة الخارجية باللغتين العربية والإنجليزية .
 (٤,٢) أرقام أولية عن التجارة الخارجية - نشرة تبين أهم الأصناف والبلاد
 (كل شهر) .

(٤,٣) النشرة ربع السنوية عن تجارة مصر الخارجية مع بلدان الشرق الأوسط باللغتين العربية والإنجليزية .

(٤,٤) تجارة مصر الخارجية باللغتين العربية والإنجليزية (كل سنة) .

(٤,٥) ملخص حركة التجارة طبقاً للدليل الدولي باللغة الإنجليزية (كل سنة) .

٥ . الملاحة البحرية .

(٥,١) حركة الملاحة الخارجية في موانئ الإسكندرية وبور سعيد والسويس باللغتين العربية والفرنسية (كل شهر) .

(٥,٢) حركة الملاحة والتجارة البحرية في الثغور المصرية وفي قناة السويس باللغتين العربية والإنجليزية (كل ثلاثة شهور) .

(٥,٣) الإحصائية السنوية لحركة الملاحة والتجارة البحرية في الثغور المصرية وفي قناة السويس باللغتين العربية والإنجليزية .

٦ . نشرة السيارات باللغة الإنجليزية (كل شهر وكل سنة) .

٧ . إحصاء الأجور وساعات العمل بالمملكة المصرية باللغتين العربية والإنجليزية (كل ستة شهور) .

٨ . الإحصاء السنوي للجيب باللغتين العربية والفرنسية .

٩ . إحصاء شركات المساهمة التي يوجد استغلالها الرئيسي في مصر (كل سنة) .

١٠ . إحصاء الموظفين والمستخدمين بالحكومة والهيئات العامة (كل سنة) .

١١ . الإحصاء السنوي العام باللغتين العربية والفرنسية .

١٢ . الإحصاء العام لمعاهد التعليم بالمملكة المصرية باللغتين العربية والفرنسية (كل ثلاث سنين) .

٨ . مثال . في بحوث معينة اقترحت الوحدات الآتية . اذكر رأيك في صلاحيتها .

(١) البقرة .

(ب) أردب القمح .

(ج) الغرفة .

(د) الطن / ميل .

ليست الوحدات المقترحة مرضية تماما . في الحالة الأولى (١) ما الذي نقصده بكلمة البقرة ؟ هل نقصد قصر هذه الكلمة على الحلوب من البقر أم نقصد استخدامها سواء كانت البقرة حلوبا أو غير حلوب ؟ ثم ما هي الأعمار وحالة النمو التي تحدد البيانات ؟ فثلا هل الأبقار الرضيعة تحسب أبقارا ؟ إن الوحدة المقترحة كما هي الآن عديمة الفائدة في معظم الأغراض . (ب) هنا لدينا وحدة معروفة توحى إلى كل باحث نفس الفكرة . إذن هي وحدة مناسبة إلا إذا كانت الكميات الداخلة تحت نطاق البحث كبيرة جدا . فثلا في حالة القمح الصادر من مصر إلى إنجلترا إلخ قد تكون ألوف الأطنان وحدة أنسب من الأراب .

(ج) أول الأسئلة المتبادرة إلى الذهن هو ما هي الغرفة ؟ هل تحسب غرفة الحمام أو المطبخ أو المخزن غرفة ؟ هل هناك حدود لحجم الغرفة أو لكيفية استعمالها ؟ هل الغرفة الكائنة فوق سطح المسكن والمستعملة لخزن الأشياء في بعض الحالات أو للنوم في حالات أخرى غرفة تفي بطلبات الوحدة المقترحة ؟ هذه الوحدة تحتاج رغم كثرة استخدامها إلى تعريف دقيق جدا .

(د) الطن / ميل هو وحدة معروفة في إحصائيات النقل وينتج بقسمة الأطنان المنقولة على الأميال المقطوعة . هذه الوحدة لا عيب فيها في الحالة العامة . لكنها ليست مقياسا جيدا للكفاية العملية في كثير من الحالات لأنها لا تأخذ عامل الزمن في الحسبان .

أسئلة ١

- ١ . تكلم عن أغراض علم الإحصاء كما تفهمها .
- ٢ . ما الكمية التي تأخذها وحدة في البحوث الآتية ؟
(١) الصادر من القطن في المملكة المصرية .
(ب) أجور عمال الصلب .
(ج) مقارنة التعليم في منطقتين .
- ٣ . ابحث فكرة وحدة القياس . ما هي الصفات الواجب توافرها في الوحدة وكيف تصير مسألة اختيار الوحدة ذات أهمية في الأعمال الإحصائية ؟
- ٤ . اذكر الصفتين الخاصتين اللتين ترى أنهما مشتركتان بين جميع المقاييس . كيف تؤثر هاتان الصفتان في أعمالك الإحصائية ؟
- ٥ . اذكر جانباً من المصادر الرسمية العامة للبيانات الإحصائية . اذكر أيضاً المصدر أو المصادر التي تفضلها على غيرها لو أنه طلب إليك القيام بعمل بحث إحصائي .

الفصل الثاني

جمع البيانات

٩ . البيانات الإحصائية والبيانات الثانوية . تقسم البيانات الإحصائية في العادة إلى بيانات ابتدائية وبيانات ثانوية . فالبيانات الابتدائية تتركب من النتائج الأولية التي يحصل عليها من عملية الحصر أو القياس أو التقدير الأصلية . والبيانات الثانوية تتركب من نتائج أجريت عليها بعض العمليات . هذه البيانات الثانوية هي الأساس الذي يبنى عليه السواد الأعظم من البحوث الإحصائية الاقتصادية . أما البيانات الابتدائية فقليلة الاستخدام في هذه البحوث لأن الباحث الإحصائي في الاقتصاد يأخذ البيانات الضرورية له من مصادر منشورة ولا يستخدم البيانات الابتدائية إلا قليلا . ولعله يعتمد إلى حد كبير على البيانات الثانوية لأن كمية الإحصائيات المطبوعة وخاصة في السنوات الأخيرة كبيرة جدا وهذه الإحصائيات متنوعة وتكاد تشمل جميع النواحي الاقتصادية المهمة . لذلك يجد الباحث الإحصائي في المصادر المنشورة ما يلزمه من البيانات لدراسة عدد كبير من المسائل الاقتصادية . وهناك سبب ثان . ذلك هو أن الصعوبة الكامنة في أكثر المسائل الاقتصادية وما تسببه هذه الصعوبات من ضرورة الحصول على بيانات واسعة النطاق تتطلب من الباحث بذل الكثير من المجهود والمال فيقف ذلك حائلا بينه وبين الحصول على البيانات الضرورية له .

وكما تقسم البيانات الإحصائية إلى بيانات ابتدائية وبيانات ثانوية تقسم المصادر الإحصائية بالمثل إلى مصادر ابتدائية ومصادر ثانوية . فالمصدر الابتدائي هو المصدر الذي خلق البيانات أي جمعها وهي جديدة والمصدر

الثانوى هو أى مصدر ينقل هذه البيانات عن مصدر آخر . نقول إذا كان المصدر الناشر للبيانات هو المصدر الذى قام بجمعها أى إذا كانت البيانات ابتدائية بالنسبة إلى ذلك المصدر فإن ذلك المصدر يسمى مصدرا ابتدائيا . وإذا اكتفى المصدر بنقل البيانات من ناشر آخر أى إذا كانت البيانات ثانوية بالنسبة إلى ذلك المصدر فإنه يسمى مصدرا ثانويا .

والقاعدة العامة عند استخدام البيانات الثانوية فى الإحصاء هى استخدام المصدر الابتدائى . لهذه القاعدة استثناءات قليلة لكن هذه الاستثناءات يجب ألا تمنع الطالب من تطبيق القاعدة فى كل حالة يستخدم فيها بيانات ثانوية وهذا صحيح فى كل فرع من فروع البحث العلمى . هذا الإصرار على استخدام المصدر الابتدائى مبنى على سببين . أولا أن أكثر المصادر الابتدائية تصف طريقة جمع البيانات وصفا أدق مما ينتظر من المصادر الثانوية . صحيح إن بعض المصادر الثانوية تعلق على طريقة الجمع وتنقدها لكن هذا ليس سببا كافيا لكسر القاعدة . ثانيا أن المصدر الثانوى لا يمكن الاعتماد عليه فى إعطاء البيانات الإحصائية كاملة وسليمة من كل خطأ كما ظهرت فى المصدر الابتدائى لأن نقل البيانات من مصدرها الابتدائى يعرضها لأخطاء كثيرة . وقد يكتفى فى المصدر الثانوى بإظهار جزء من البيانات وحذف الجزء الآخر . زد على ذلك أن أكثر المصادر الثانوية تغفل ذكر الحواشى والتعليقات المهمة التى استخدمت لتفسير البيانات أو تعريفها هى أو الوحدات فى المصدر الابتدائى . ومع أن بعض المصادر الثانوية يكشف عن أخطاء فى المصدر الابتدائى ويصحح هذه الأخطاء إلا أن عدد هذه الحالات ليس كبيرا إلى الدرجة التى تبرر كسر القاعدة من أجلها .

١٠ . جمع البيانات الابتدائية . قبل الشروع فى جمع البيانات الابتدائية يجب أن نحدد مجال المسألة ونتفق على البيانات التى نريد فعلا الحصول عليها . هذا المجال وهذه البيانات تتوقف على اعتبارات كثيرة . فطبيعة الموضوع

نفسه لها بالطبع دخل كبير في مجال المسألة . وكلفة الحصول على البيانات كثيرا ما تكون عاملا مهما في تحديد مجال المسألة . فمثلا عمليات الحصر الواسعة النطاق تحتاج إلى كلفة كبيرة وقد يصبح ضروريا في بعض الأحيان تحديد مجال المسألة حتى لا تتجاوز الكلفة حدود المبلغ المعتمد للبصروفات . زد على ذلك أن توسيع مجال المسألة إلى الحد الذي تصير فيه كلفة الحصول على البيانات أكبر من قيمة البيانات كبيرا لا مسوغ له ليس من السكياسة أو الحكمة في شيء . أيضا هناك من العوامل التي تؤثر في تحديد مجال المسألة ما يتوقف على القائمين بتنظيم المسألة ومدى إلمامهم بها . وهناك من هذه العوامل ما يتوقف على من يملكون البيانات المطلوبة ومدى استعدادهم للإدلاء بهذه البيانات إذ من الواضح أن عجز هؤلاء عن الإدلاء بالبيانات المطلوبة هو عامل آخر له دخل كبير في تحديد مجال المسألة الأصلية .

لكي نتفق على البيانات التي نريد فعلا الحصول عليها في أية مسألة معينة يجب أن نحصر المصادر المختلفة التي يمكن استقاء البيانات منها . وقد يتبين عند حصر هذه المصادر أن البيانات المطلوبة يمكن الحصول عليها بسهولة بطريقة غير مباشرة من هيئة لها صلة سابقة بموضوع المسألة أو هيئة يسهل عليها الاتصال بمن في مقدورهم إعطاء تلك البيانات . هذه الطريقة غير المباشرة للحصول على البيانات المطلوبة وإن كانت أسهل من الطريقة المباشرة التي فيها تستقى البيانات رأسا من مصادر الأصلية إلا أنها لا يمكن أن تكون أفضل من الطريقة المباشرة . ذلك لأن استقاء البيانات رأسا من مصادرهما يضمن عدم وقوعها في أيدي كثيرة قبل وصولها إلينا . زد على ذلك أننا نحصل عليها بهذه الطريقة رأسا بمن في مقدورهم إعطاؤها لنا خالية من الأخطاء .

بعد حصر المصادر المختلفة واختيار المناسب منها نشرع في وضع الخطة اللازمة للحصول فعلا على البيانات فنجد أن هناك طريقتين ممكنتين مختلفتين كل الاختلاف . فإما أن نكتب إلى من يملكون البيانات وهذه تسمى

طريقة المراسلة وإما أن تصل بهم اتصالا شخصيا مباشرا وهذه تسمى طريقة الميدان . هاتان الطريقتان تستلزمان إقامة نظامين للعمل مختلفين كل الاختلاف لأن ظروف المسألة في الحالتين تختلف . وسنبحث بعض هذه الاختلافات في البندين الآتين .

١١ . طريقة المراسلة . هذه الطريقة لجمع البيانات الابتدائية توفر علينا مشقة تدريب أشخاص يناط بهم الاتصال بمن يراد الحصول منهم على البيانات لكنها تخلق صعابا أخرى قد يستلزم تذليلها اتخاذ إجراءات أطول وأصعب مما يلزم لعملية التدريب . أهم هذه الصعاب يتلخص في كيفية كسب عطف الجمهور وتعزیدهم حتى نحصل منهم على البيانات المطلوبة بمجرد الكتابة إليهم وبدون أى اتصال شخصي . وقد وجد عند استخدام طريقة المراسلة بصفة مستديمة للحصول في فترات منظمة على بيانات من أشخاص لهم صلة قديمة بجماعى البيانات أنه يمكن الحصول في أغلب الحالات على نتائج مرضية . وأنه كلما طالت مدة اتصال أولئك الأشخاص بالجامعين زادت النتائج جودة . أما إذا استخدمت الطريقة بصفة غير مستديمة فإن صعابها تكون كثيرة وفي هذه الحالة يتحتم تضيق نطاق المسألة وتبسيطها والعمل على لفت نظر الجمهور إلى أهميتها وعلى كسب عطفهم وتعزیدهم وإلا كانت النتائج غير مرضية . وسواء كان استخدام هذه الطريقة بصفة مستديمة أو غير مستديمة فلا بد من استخدامها مع شيء من الحذر وبحسن عدم استخدامها إلا في الظروف التي يمكن استخدامها فيها . وعلى المكتب المشرف على عملية جمع البيانات بهذه الطريقة إرفاق الطلب الذى يرسله لكل فرد بالتعليمات والإرشادات اللازمة . ويراعى في هذه الحالة أن تكون التعليمات والإرشادات واضحة تماما وخالية من كل لبس وأن تكون من البساطة والإيجاز بحيث يسهل إدراكها بمجرد قراءتها وأن تصاغ الأسئلة المطلوب الإجابة عنها صياغة لا تنفر القارىء من الإجابات المطلوبة .

١٢ . طريقة المبراه . جمع البيانات الابتدائية بطريقة الميدان نظامان مختلفان . فإما أن يكون الاتصال عن طريق عدادين مؤقتين ينتدبهم المكتب المشرف على جمع البيانات لمدد قصيرة ولا يشترط فيهم أية خبرة سابقة بالموضوع . وإما أن يكون الاتصال عن طريق موظفين ومستخدمين دربوا خصيصا للغرض الذى يعملون من أجله وهؤلاء يعملون لمدد أطول ولهم خبرة سابقة بجميع النواحي الفنية المتعلقة بالمسألة . واضح أن نطاق المسألة عند استخدام عدادين مؤقتين ينبغي أن يكون أضيق وأبسط بكثير منه عند استخدام موظفين مدربين .^١ وواضح أيضا أنه في أية حالة من حالات استخدام العدادين يجب أن تتوخى منتهى الدقة عند اختيارهم ويدرب من يقع الاختيار عليه منهم التدريب الكافى حتى يمكن الحصول منهم على البيانات المطلوبة مضبوطة وصحيحة بقدر المستطاع . ولا يخفى أن كل مجهود يبذل في اختيار العدادين أو في تدريبهم يؤتى ثمرته في الحصول على بيانات أكثر دقة وأقرب إلى الحقيقة . فثلا لاختيار ألوف العدادين اللازمين للقيام بعملية عد السكان يمكننا ضمانا لحسن اختيارهم أن نعقد امتحانا خاصا لجسيع المتقدمين ثم نرتب الناجحين في هذا الامتحان وأخيرا ننتخب من هؤلاء العدد اللازم حسب ترتيبهم ونعينهم .

على العداد أو الموظف فى أية حالة أن يرى أن البيانات التى يعطيها كل فرد هى البيانات المطلوبة وعلى المكتب المشرف على جمع البيانات أن يزود العداد أو الموظف بالتعليقات والإرشادات التى تسكفل حسن سير العمل وأن يزودهما بنصائحه كلما التبس الأمر عليهما ولا مانع من أن تكون التعليقات

١ من الجائز عند استخدام العداد المؤقت أن ترسل الطلقات إلى الأفراد قبيل زيارة العداد لهم ويطلب إليهم ماؤها وعند زيارة العداد لهم يكتبون بمراجعة إجاباتهم ثم يجمع هذه الإجابات منهم . ويجوز أيضا أن يقوم العداد بكتابة الإجابات بنفسه بعد إلقاء الأسئلة شفويا على الأفراد .

أو الإرشادات المعطاة للعددين مطولة ومعقدة . وعند استخدام الموظفين لا مانع من تزويد هؤلاء بتعليقات وإرشادات فنية لا يدركها بسهولة إلا هم .

١٣ . **المستمارات الإحصائية** . ربما كان تحضير الاستمارات أو الكشف اللازمة أهم خطوة في عملية تنظيم جمع البيانات الابتدائية . هذه الاستمارات تختلف باختلاف طريقة الجمع وطبيعة المسألة وحالة الأفراد المطلوب منهم تقديم البيانات . لدرس الشروط التي يجب أن تتوفر في الاستمارة الإحصائية الجيدة سندرس كيفية تحضير الاستمارة اللازمة لمسألة تجمع بياناتها بطريقة المراسلة إذ هنا تكون الصعاب التي تعترض عملية التحضير كثيرة وكلها من نوع جدى . وسنرى كيف يمكن تذليل جميع هذه الصعاب الواحدة تلو الأخرى .

عند تحضير الاستمارة ينبغي أن نبحث العنصرين الرئيسيين الآتين بحثا وافية وهما عدد الأسئلة التي توضع في الاستمارة وصيغة كل سؤال منها ومحتوياته . أما عدد الأسئلة فيراعى في العادة أن يكون أصغر عدد يتفق مع أغراض المسألة . بيد أنه مهما كانت هذه الأغراض لا يجوز أن يكون عدد الأسئلة من الكبر بحيث ينفر القارئ من الإجابة عنها . وأما بخصوص صياغة الأسئلة ومحتوياتها فيراعى أن تكون الأسئلة من الوضوح والبساطة بحيث لا تقبل اللبس بأى حال من الأحوال وأن تصاغ بحيث تكون الإجابات بسيطة بقدر الإمكان كأن يكون الجواب مجرد عدد أو نعم أو لا . ويجب ألا تكون الأسئلة من النوع المخرج وأن تكون خالية من كل تدخل ظاهر في الشؤون الشخصية . ولكي نضمن الحصول على البيانات المطلوبة نضع نصب أعيننا أن يكون كل سؤال محتويا على أقل مما تيسر الإجابة عنه وأكثر مما هو ضرورى للغرض المطلوب . ويجب أن تحتوى الاستمارة على التعليقات والإرشادات اللازمة حتى لا تسكثر الأخطاء ويراعى أن تكون هذه التعليقات والإرشادات قصيرة وخالية من كل تعقيد . ولا بد من ذكر

الدرجة المطلوبة من الدقة : هل يراد أن يكون الجواب صحيحا لأقرب قرش أو مليم أو لأقرب شهر أو يوم إلخ مع مراعاة عدم استخدام أى نظام للقياس غير مفهوم للجميع مهما كان ذلك النظام مريحا للإحصائي . ولا بد من فحص كل كلمة بل كل سنتيمتر مربع من فراغ الاستمارة فحسا دقيقا . وبدهى أن أى مجهود يبذل فى تحضير الاستمارة مهما كان ضئيلا يوفر متاعب كثيرة فى المستقبل .

من الأشياء المهمة التى لا بد من مراعاتها عند تحضير الاستمارة الاتفاق على حجمها وشكلها . جرت العادة على بدء الاستمارة ببناء قصير فيه ملخص موجز للغرض الذى عملت من أجله والأسباب التى أدت إلى عملها وفيه يطلب إلى الجمهور أن يبادر إلى ملء الاستمارة باعتناء ويجوز أيضا ذكر اسم المصلحة أو الهيئة المشرفة على جمع البيانات .^١ ويراعى أن تكون الاستمارة بما فيها النداء صغيرة الحجم بقدر الإمكان .^٢ وإذا احتوت الاستمارة على كلمات غير مألوقة وجب تفسير معنى هذه الكلمات . ويراعى أيضا ذكر الوحدات التى يراد استخدامها عند الإجابة بوضوح تام وأن تكون هذه الوحدات مألوقة بقدر المستطاع . فإن كانت الوحدة التى يراد استخدامها غير مألوقة وجب تعريفها . ولا يجوز أن ننتظر من المكلفين بملء الاستمارة إجراء عمليات حسابية مهما كانت هذه العمليات بسيطة وبالأخص إذا كان أولئك لا يعرفون كثيرا عن الحساب . ويجب أن تنظم الاستمارة بعناية تامة حتى يسهل ملؤها فتوضع الأسئلة فى أحسن ترتيب ثم تفصل الأجزاء المختلفة

١ فى الاستثمارات الحكومية الهامة تذكر عادة المسادة التى تنص على عقاب كل شخص يمتنع عن الإدلاء بالبيانات المطلوبة أو يتأخر أو يعطى بيانات غير صحيحة حال علمه بذلك .

٢ أحيانا تتركب الاستثمارات من عدة أوراق متشابهة فتكون أشبه بكراسة إحصائية منها باستمارة إحصائية . انظر الاستثمار رقم ٣ (إحصاء الإنتاج الصناعى) التى صممها مصلحة عموم الإحصاء والتعداد بالقاهرة — إدارة إحصاء الإنتاج الصناعى والأجور وساعات العمل — سنة ١٩٤٥ . هذه الاستثمار تقع فى ست صفحات من الحجم ٢٤,٣ × ٣٣,٧ سم .

للاستثمار بفواصل أو خطوط مناسبة . وقد لحظ أنه مما يسهل على الأشخاص مهمة الإدلاء بالبيانات المطلوبة السماح لهم بالإجابة عن بعض الأسئلة بوضع إشارة خاصة أمام أحد جوابين ممكنين مطبوعين في الاستثمار أو بشطب بعض العبارات المطبوعة وترك البعض الآخر كما هو . ولا يفوتنا أيضا أن نفكر في تسهيل مهمة استرداد الاستثمارات وصيانتها من الضياع ويتم هذا عادة بأن يرسل مع كل استثمار غلاف يحمل طابع البريد والعنوان لوضع الاستثمار داخله وإرسالها بالبريد بأقل عناء ممكن .

إن نجاح أية مسألة إحصائية تجمع بياناتها بطريقة المراسلة أو بطريقة الميدان يتوقف إلى حد كبير على حسن نية الجمهور . لذلك كان ضروريا السعي بجميع الوسائل الممكنة على حث الجمهور على معاونة المشرفين على المسألة وتمكينهم من الحصول على البيانات المطلوبة بالدقة التامة والسرعة اللازمة . ومما يساعد على تحقيق هذا الغرض أن يؤكد أولو الشأن للجمهور أن جميع البيانات التي يتطوع الجمهور بإعطائها ستعتبر سرية للغاية ولا يجوز إطلاع أى فرد أو هيئة عامة أو خاصة عليها أو إبلاغهم شيئا منها أو استخدامها لغرض غير الوصول إلى نتائج إحصائية عامة تنشر بشكل لا يمكن أن يستدل منه بحال على أى بيان فردى خاص^١ . ومما يساعد أيضا على تحقيق نفس الغرض استخدام جميع الوسائل الممكنة لإذاعة التفاصيل الخاصة بأغراض المسألة وأهميتها للجمهور والإعلان عن هذه الأغراض في الجرائد والمجلات . وعلى العموم يجب ألا يدخر وسع في سبيل خلق جو صالح من حسن التفاهم بين المصلحة أو الهيئة المشرفة على جمع البيانات من جهة وبين الجمهور المدعو إلى إعطاء هذه البيانات من جهة أخرى .

١ نص مشروع القانون بشأن تنظيم التعدادات والإحصائيات الذي وضعته لجنة الشؤون البرلمانية بمجلس النواب على أن البيانات الإحصائية لما تجمع لنشرها في جداول عامة وحرم الإطلاع من طريقها على أى بيان فردى لأن هذه البيانات سرية فإذا أفضاها أحدهم من موظفى مصلحة الإحصاء أو مندوبيها عوقب على ذلك . ويعاقب أيضا كل من يحاول الحصول على بيانات من هؤلاء المندوبين .

مثال . تقوم مصلحة عموم الإحصاء والتعداد كل ستة شهور بإحصاء الأجور وساعات العمل بالمملكة المصرية وفي الصفحتين ٢٣، ٢٤ صورة من الاستثارة التي ترسل إلى أصحاب المحال الصناعية لجمع البيانات اللازمة لهذه المسألة . هذه الاستثارة تحتوي على ٢٢ سؤالاً وحجمها الطبيعي هو $34,7 \times 50$ سم .

١٤ . مراجعة البيانات . مراجعة البيانات هي الحلقة الأخيرة من سلسلة خطوات جمع البيانات . تراجع البيانات عقب وصولها إلى المصلحة أو الهيئة المشرفة على جمعها مباشرة مهما كانت طريقة الجمع . وتتركب عملية المراجعة من التأكد من وجود جميع البيانات المطلوبة وعدم وجود أى تناقض بينها ومن توافر الدرجة المطلوبة من الدقة فيها . فإن وجد أن إحدى الاستثارات تنقصها بعض البيانات الضرورية أو فيها أى خطأ طرحت تلك الاستثارة جانباً ريثما يتم إصلاح ما بها من عيوب ويكتب إلى صاحبها مرة ثانية لاستكمال البيانات الناقصة أو تصحيح الأخطاء إن كانت الطريقة التي اتبعت لجمع البيانات هي طريقة المراسلة أو يكلف عداد أو موظف بالانتقال إلى محل إقامة صاحب الاستثارة إن كانت الطريقة هي طريقة الميدان . فإن أمكن إصلاح العيوب التي في الاستثارة ضمت إلى الاستثارات الأخرى السليمة وإن تعذر إصلاح هذه العيوب فلا فائدة من الاحتفاظ بالاستثارة بعد ذلك ولا بأس من إعدامها . وبدهي أن مراجعة البيانات بدقة وعناية من شأنه أن يزيد من قيمة البيانات ويجعل المشرفين على جمعها ينظرون إليها كأنها بيانات ابتدائية جيدة ويشقون فيها .

١٥ . فحص البيانات الثانوية . كثيراً ما تستخدم في البحوث الإحصائية بيانات جمعت من قبل لأغراض كانت تتعلق ببحوث أخرى سابقة . فلكي يمكن الانتفاع بمثل هذه البيانات في بحث غير البحث الأصلي يتحتم تسكين البحث حتى يتماشى مع البيانات أى بخلاف ما يحدث فيما لو كانت البيانات

ابتدائية والغرض من جمعها هو استخدامها في البحث المذكور . إذن عند التفكير في استخدام بيانات ثانوية أو مطبوعة يجب أن تفحص هذه البيانات فحفا تمهيديا دقيقا حتى يمكن تسكييف البحث لكي يتمشى معها .

تبدأ عملية فحص البيانات الثانوية بالتأكد من مصدرها وهل هو ابتدائي أو ثانوي ومن المصاحبة أو الهئية التي أشرفت على جمعها مع بيان اسم النشرة أو التقرير المحتوى عليها . ويراعى أن يكون هذا البيان واضحا ومفصلا حتى يتسنى لأى قارىء أن يرجع إليه للتحقق من صحة البيانات متى شاء ذلك . وإن كانت البيانات مطبوعة فى أكثر من مكان واحد لزم التنويه عن ذلك . وإن كانت البيانات دورية وجب ذكر تواريخ نشرها . وعلى العموم يجب إعطاء بيان واضح عن المصادر فى كل حالة من حالات استخدام البيانات الثانوية .

أحيانا تظهر البيانات الثانوية فى نشرة ما قبل ظهورها فى نشرة أو نشرات أخرى . فى هذه الحالة يجب ذكر اسم أول نشرة حصل منها على البيانات . وأحيانا تنشر البيانات مبدئيا فى شكل غير نهائى حتى تراجع وتعديل إن اقتضى الأمر ذلك ثم تنشر بعد ذلك فى شكلها النهائى . فى هذه الحالة يلزم التنويه عن ذلك مع ذكر المدة ما بين ظهور البيانات التمهيدية والبيانات النهائية ومدى التعديلات التى أدخلت على البيانات الأصلية كلما أمكن ذلك . هذه الملاحظة مهمة بنوع خاص مع البيانات الدورية .

يراعى عند إعطاء البيان الخاص بأسماء مصادر البيانات ذكر المدة المشمولة بالبيانات . هذه الملاحظة مهمة بنوع خاص مع البيانات الدورية . فقد يحدث فى بعض الحالات أن تغير الوحدة التى تستخدم عند جمع البيانات مع مضى الزمن . وأحيانا تظهر أرقام تحت عنوان ما وبعد مدة تظهر أرقام جديدة تكمل الأرقام القديمة ولكن تحت عنوان جديد أو أرقام جديدة لا تمت بأية صلة إلى الأرقام الأصلية القديمة مكتوبة تحت نفس العنوان مثل الأرقام

القديمة . وقد جرت العادة أن يكتفى أثناء الفحص التمهيدى للبيانات الثانوية بالإشارة إلى أى تغيير من هذا القبيل مع وصف كنه هذا التغيير وصفا دقيقا . من الأشياء الضرورية عند استخدام البيانات الثانوية ذكر الطريقة التى جمعت بها هذه البيانات من قبل : هل كانت طريقة المراسلة أم طريقة الميدان ؟ ثم إذا كانت الطريقة التى جمعت بها البيانات هى طريقة المراسلة فما هى الاستثمارات التى استخدمت وكيف فحصت هذه الاستثمارات وكيف روجعت ؟ وإذا كانت الطريقة هى طريقة الميدان فهل كان الاتصال بالجمهور عن طريق عدادين عاديين أم عن طريق موظفين مدرّبين وما هى الاستثمارات التى استخدمها هؤلاء عند زياراتهم ؟ لسكن الوقوف على حقيقة هذه الأمور لا يكون سهلا إلا إذا كان فاحصو البيانات الثانوية على علم سابق بطريقة جمعها . ولحسن الحظ جرى العرف أخيرا بين المكاتب الإحصائية عند نشر أى بيانات إحصائية على كتابة تقرير واف عن الطريقة التى جمعت بها تلك البيانات .

إذا حصل على البيانات يعمل تقديرات لها بدلا من استخراجها من تقارير وجب ذكر الطريقة التى عملت بها هذه التقديرات . فإن لم يكن منتظرا ظهور مثل هذه البيانات فى المستقبل فلا بد من اتخاذ كل حيلة ممكنة عند استخدام البيانات بعد التأكد من صلاحيتها بالاطلاع على بيانات أخرى لها مصادر معروفة موثوق بها .

تلك هى النقطة الرئيسية التى يجب مراعاتها عند الفحص التمهيدى للبيانات الثانوية وهناك نقط أخرى غيرها . فالفحص التمهيدى للبيانات الثانوية لا يمكن أن يتم إلا إذا نص بوضوح تام على أشياء أخرى معينة غير التى سبق ذكرها مثل الحدود المكانية للبيانات والصفات التى يجب أن تتوافر فى كل حالة حتى تدخل فى دائرة البحث وهل تشمل البيانات جميع الحالات الداخلة فى هذه الدائرة أو هل هى بيانات ناقصة مبنية على عينة من هذه الحالات ؟ فإن كانت البيانات مبنية على عينة فما هى الخطوات التى اتخذت لاختيار العينة والتأكد

من صدق تمثيلها للمجتمع المكون من الحالات جميعها؟ ولا يفوتنا أن نذكر أن الفحص التمهيدى للبيانات الثانوية يجب أن يتعرض لصحة هذه البيانات وخلوها من كل نقص ومن كل عيب . هذه النقط وغيرها ضرورية جدا للفحص التمهيدى للبيانات الثانوية وكلها تحوم حول التأكد من صحة البيانات وخلوها من الأخطاء ولا بد من جمع كل ما يمكن جمعه من المعلومات خاصة بهذه النقط فى المرحلة الأولى من مراحل الفحص التمهيدى . فإذا انتهينا من هذا الفحص أصبحنا فى مركز يحين لنا استخدام البيانات الثانوية والاعتماد عليها فى بحثنا .

أمثلة عامة

١٦ . مثال ١ . اكتب مذكرة قصيرة عن طريقة الاستمارة لجمع البيانات الابتدائية .

يجب ذكر النقط الآتية :

- ١ . كثيرا ما تكون الاستمارة الوسيلة الوحيدة لجمع البيانات الابتدائية .
- ٢ . إذا استخدمت الاستمارة فلا بد من وضع نظام محكم لمراجعة عدد الاستثمارات المرسلة والاستثمارات التى وردت بعد ملئها تماما والتى لم ترد والاستثمارات التى فسدت والاستثمارات التى لم يتم ملؤها أو التى ملئت خطأ .
- ٣ . الحاجة إلى البساطة . يجب أن تكون الإجابات على صيغة (نعم) أو (لا) كلما أمكن ذلك ، وأى بيانات أخرى يجب أن يحقق بعضها بعضها كلما أمكن ذلك .

٤ . يجب استخدام نفس الاستمارة أو الاستثمارات فى البحث من أوله إلى آخره . وأى بيانات خاصة يمكن الحصول عليها من جهة معينة يحسن جعلها موضوعا لاستمارة إضافية وإلا كانت النتائج عرضة لللبس .

١٧. مثال ٢. ضع مشروعاً لاستئارة الغرض منها الحصول بوساطتها من أصحاب المصانع على بيانات عن العمال المستخدمين والأجور المدفوعة. ليس السؤال صريحاً فيما يختص بالغرض من البحث ولا بد من استنتاج أن البحث يشمل جميع العمال. الجدول الآتي يفي بحاجة السؤال لكنه قد يحتاج إلى شيء من التعديل في حالة خاصة.

اسم العامل	الجنس ذكر أو أنثى	المهنة	الأجر باليوم	معدل الأجر بالقطعة	معدل ساعات العمل في اليوم	عدد أيام العمل الفعلية في ثلاثة شهور إلى آخر ديسمبر	مجموع الأجور المدفوعة في ثلاثة شهور إلى آخر ديسمبر

على صفحة ٢٣ نرى الاستئارة الرسمية التي تستخدمها مصلحة عموم الإحصاء والتعداد للحصول بوساطتها على الأجور المدفوعة وساعات العمل في أسبوع معين.

١٨. مثال ٣. إذا طلب إليك جمع بيانات عن حال المساكن في حي ما فما نوع الاستئارة التي تستخدمها إذا كنت مزعماً استخدام الاستئارات؟ تتوقف الخطة التي أتبعها إلى حد كبير على الوسائل الموضوعية تحت تصرفي كباحث. فإن كانت الإجابة عن الأسئلة اختيارية فإن الاستئارة تكون أقل تعقيداً منها في حالة ما إذا كانت الإجابة عن أسئلتى إجبارية بحكم القانون. أيضاً تصميم الاستئارة يتوقف إلى حد كبير على الغرض من البحث: هل هو بحث اجتماعي الغرض منه معرفة العيوب الموجودة في المساكن بقصد إصلاح هذه العيوب أو هو بحث إحصائي يبحث الغرض منه عد المساكن أو العيوب أو أي شيء آخر من هذا القبيل. لكن أياً كان الغرض لا يعقل خلو الاستئارة من النقاط الآتية.

- ١ . عدد الغرف - ويستثنى من ذلك الحمام والمطبخ .
- ٢ . عدد الأشخاص المقيمين في المسكن .
- ٣ . عدد الأطفال دون الثانية عشرة (١) ذكور (ب) إناث .
- ٤ . عدد الأشخاص فوق الثانية عشرة (١) ذكور (ب) إناث .
- ٥ . الإيجار - الشهري .

وقد تدعو الحاجة إلى نقط أخرى تتوقف على الغرض من المسألة (عدد الغرف المعدة للنوم أو عدد الأسرة أو النوافذ إلخ) فتوضع هذه النقاط الأخرى في الاستمارة . والأشياء المذكورة إما أن تحقق نفسها بنفسها أو يمكن التحقق منها بطريقة أخرى . وقد يزيد معرفة المساحة القائم عليها المسكن لكن السؤال عن هذه النقطة ربما كان أكثر مما هو ممكن بالنسبة إلى بعض طبقات المستأجرين . ويجب أن تكون لغاية الاستمارة بسيطة ومباشرة ما أمكن - فتصاغ بحيث تكون مفهومة لأحط طبقات المستأجرين .

١٩ . مثال ٤ . إذا عرضت عليك نتائج إحصائية معينة فاهي المعلومات التي تطلب معرفتها حتى تطمئن إلى تلك النتائج ؟
النقط الرئيسية التي أهتم بمعرفتها هي :

١ . أسماء الباحثين المسؤولين عن النتائج ومؤهلاتهم . والوسائل التي استخدموها لجمع البيانات .

٢ . الغرض من البحث الذي استدعى جمع البيانات التي قامت عليها النتائج المذكورة - وهل استخدمت أرقام تقديرية ؟

٣ . حدود دقة البيانات .

٤ . إذا كانت البيانات مبنية على عينة فما هي الخطوات التي اتخذت لاختيار العينة والتأكد من صدق تمثيلها للمجتمع كله ؟

٥ . هل أعيد اختبار النتائج على العينة الأصلية أو على المجتمع أو هل هي مازالت فروضا لم يتم اختبارها بعد ؟

إذا اطعنا ننت إلى هذه النقطة الخمس وجب على أن أقبل النتائج المعروضة
إذا لا توجد بعد ذلك أسباب وجيهة تدعو إلى رفضها .

أسئلة ٢

١ . تكلم عن الطلبات العامة لإحصاء يزعم تحضير تقرير يحتوى على
بيانات إحصائية أى الصفات التى يحوز أن يتطلع إليها فى مثل هذه البيانات .
٢ . هناك اقتراح بتحديد عدد الطلبة فى جامعة ما . اجث هذا الاقتراح
محاو لا عرض البحث الذى تقوم به

(١) لتدل به على سلامة الاقتراح أو على خطئه .

(ب) لتتمكن به من تحديد العدد المثالى للطلبة إذا كنت ترى سلامة
الاقتراح .

٣ . إذا طلب إليك تحضير استبارة تصرف لأشخاص يتقاضون
إعانات خيرية أسبوعية فهل فيما يختص بالدخل مثلا تستخدم الدخل السنوى؟
وفما يختص بالعمر هل تستخدم العمر معبرا عنه بالسنين وكسور السنة؟

الفصل الثالث

التبويب

٢٠. تصنيف البيانات . البيانات الأصلية إن هي إلا مواد أولية تحتاج إلى علاج طويل منظم حتى يمكن استخلاص النتائج المطلوبة منها . فالحالات الفردية المبعثرة هنا وهناك لا يمكن أن تترك على هذا الحال ولا بد من لم شعثها والحالات المتقاربة لا بد من ترتيبها في شكل منظم .

يبدأ علاج البيانات بعد جمعها ثم مراجعتها أو فحصها بإجراء عملية لها تسمى عملية التصنيف^١ . هذه العملية معروفة للجميع وتتركب من تقسيم أشياء بمجموعة كبرى إلى مجموعات صغرى أو أصناف على أساس قاعدة معينة^٢ . فمثلا لدينا تصانيف السكان حسب الجنس والعمال حسب المهنة والأقطنان حسب الثيلة والسفن حسب القوة المحركة والسيارات حسب الشكل إلى غير ذلك من الأمثلة التي لا حصر لها .

هناك ثلاثة أسس مختلفة لتصنيف البيانات : أساس مكون من صفات مميزة وأساس زمانى وأساس مكاني وليس يوجد غير هذه الأسس الرئيسية الثلاثة لتصنيف البيانات . لناخذ مثالا بسيطا نشرح به هذه الحالات الثلاث وليكن تصنيف السواح الأجانب الذين زاروا مصر في سنة معينة . هؤلاء يمكن تصنيفهم أولا حسب التبعية وهذه صفة مميزة من صفات السائح . وثانيا يمكن تصنيفهم حسب شهر الوصول إلى اثني عشر صنفا لا علاقة لها بأى

١ أحيانا تصنف البيانات في نفس الوقت الذى تجمع فيه . فمثلا في أغلب التعدادات التي تعمل للسكان يصنف السكان حسب الجنس إلى ذكور وإناث . لكن التصنيف يبدأ عادة عقب جمع البيانات مباشرة .

٢ إذا كان عدد الأصناف اثنين سمي التصنيف تصنيفا ثنائيا . وإذا كان عدد الأصناف أكبر من اثنين سمي التصنيف تصنيفا متعددًا .

صفات مميزة أو أى مكان . وثالثا يمكن تصنيفهم حسب ميناء الوصول إلى أصناف لادخل لها بأى صفات مميزة أو أى زمان . هذه الحالات الثلاث واضحة جدا ومختلفة تمام الاختلاف وسنسمى التصنيف تصنيفا وصفيا أو تصنيفا زمنيا أو تصنيفا جغرافيا فى الحالات الثلاث بالترتيب .

يقسم أول هذه الأنواع الثلاثة وهو التصنيف الوصفى إلى نوعين تصنيف حسب الدرجة وتصنيف حسب النوع . التصنيف حسب الدرجة هو تصنيف وصفى تصنف الأشياء فيه حسب صفة واحدة يتغير مقدارها من صنف إلى صنف . والتصنيف حسب النوع هو تصنيف وصفى تصنف الأشياء فيه حسب مجموعة من الصفات المميزة التى تتغير من صنف إلى صنف . فمثلا إذا صنفنا السواح حسب السن إلى عدد ما من الأصناف وليكن ثلاثة صنف للصغار وآخر لمتوسطى السن وثالث للكبار فإن هذا التصنيف يكون تصنيفا حسب الدرجة . لكن التصنيف السابق للسواح حسب التبعية هو تصنيف حسب النوع . وكذلك تصنيفهم حسب الجنس إلى صنفين ذكور وإناث هو تصنيف حسب النوع . لناخذ مثالا آخر نشرح به الفرق بين هذين النوعين للتصنيف الوصفى لأن هذا الفرق مهم فى الإحصاء . إذا صنفنا متاجر التجزئة فى القاهرة حسب الحجم إلى صغيرة ومتوسطة الحجم وكبيرة فإن هذا التصنيف يكون تصنيفا حسب الدرجة . لكن إذا صنفنا المتاجر حسب السلع التى تباع فيها إلى متاجر لبيع الملابس ومتاجر للبقالة ومتاجر للأدوية إلخ فإن هذا التصنيف يكون تصنيفا حسب النوع . والتصنيف حسب النوع مشهور جدا وربما كان أشهر الأنواع كلها وأكثرها استخداما .

يقسم التصنيف الوصفى حسب الدرجة إلى نوعين جديدين تصنيف كفى وتصنيف كمى . فمثلا التصنيف السابق للسواح حسب السن إلى صغار ومتوسطى السن وكبار هو تصنيف كفى . لكن تصنيفهم حسب السن إلى ثلاثة أصناف مثلا ولتكن أصغر من ١٦ سنة ، ١٦ - ٤٤ سنة ، ٤٥ سنة وما فوق هو تصنيف

كفى . والفرق بين هذين النوعين مهم أيضا في الإحصاء . لنأخذ مثالا ثانيا . إذا رتبنا أعمال طلبة فرقة ما في معهد عال على أساس النظام الحرفي المعروف أى ضعيف جدا وضعيف ومقبول وجيد وجيد جدا وممتاز ثم قسم الطلبة إلى مجموعات حسب مراتبهم الحرفية فإن التصنيف الناتج يكون تصنيفا كفييا . لكن إذا رتبنا الأعمال على أساس النسبة المئوية وقسم الطلبة إلى ست مجموعات مثل ٠ - ٢٩ ، ٣٠ - ٤٩ ، ٥٠ - ٦٠ ، ٦١ - ٧٠ ، ٧١ - ٨٠ ، ٨١ - ١٠٠ فإننا نفرق بين الطلبة كفا وبكون التصنيف الناتج تصنيفا كفا . هذا التصنيف مهم جدا وسندرسه بالتفصيل في الفصل الرابع تحت عنوان التوزيع التكرارى . أما هنا فيكفي أن نلاحظ وجود تصانيف تبدو في الظاهر كأنها تصانيف كيفية فإذا ما فحصت فحصا دقيقا اتضح أنها تصانيف كمية . فمثلا عند تصنيف السواح إلى صغار ومتوسطى السن وكبار إذا كان السن الفاصل بين الصنفين الأول والثانى هو ١٦ سنة وبين الصنفين الثانى والثالث هو ٤٥ سنة فإن التصنيف يكون فى الحقيقة تصنيفا كفا . وما يقال عن تصنيف السواح يقال كذلك عن تصنيف الطلبة إلى ضعاف جدا وضعاف ومقبولين إلخ إذا كان الممتحنون يقدرّون أعمال الطلبة أولا على أساس النسبة المئوية ثم يحولون النسب المئوية إلى حروف طبقا لنظام ثابت لكي يصلوا إلى المراتب الحرفية للطلبة .

هناك تقسيم آخر للتصنيف الوصفي إلى نوعين غير تقسيمه إلى تصنيف حسب الدرجة وتصنيف حسب النوع . يقسم التصنيف الوصفي إلى نوعين جديدين تصنيف بسيط وتصنيف مركب . التصنيف البسيط هو تصنيف وصفي تقسم الأشياء فيه حسب صفة واحدة مميزة . والتصنيف المركب هو تصنيف وصفي تقسم الأشياء فيه حسب صفتين مميزتين أو أكثر . فمثلا تصنيف السواح حسب السن إلى أصغر من ١٦ سنة ، ١٦ - ٤٤ سنة ، ٤٤ - ٤٥ سنة وما فوق هو تصنيف وصفي بسيط . لكن تصنيفهم حسب السن إلى أصغر من

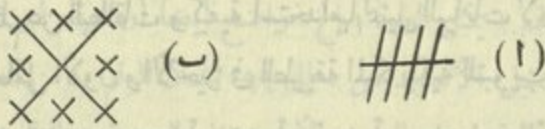
١٦ سنة، ١٦ - ٤٤ سنة، ٤٥ سنة وما فوق وفي نفس الوقت حسب الطول إلى أقصر من ١٥٠ سم، ١٥٠ - ١٥٩ سم، ١٦٠ - ١٦٩ سم، ١٧٠ - ١٧٩ سم، ١٨٠ سم وما فوق هو تصنيف وصفي مركب لأن السواح مقسمون في هذه الحالة على أساس صفتين يميزتين صفة السن وصفة الطول. والتصنيف الوصفي المركب مهم جدا في الإحصاء لكننا سنقتصر في هذا الكتاب على دراسة التصنيف الوصفي البسيط.

تلك هي الأنواع المختلفة للتصنيف ويراعى في كل حالة أن تكون الأصناف المستخدمة شاملة لجميع أشياء المجموعة الكبرى وألا تكون هذه الأصناف متداخلة فيما بينها.

٢١. تبويب البيانات. عملية التصنيف المشار إليها في البند السابق هي جزء أساسي من عملية التبويب التي تتركب من لم شعث الحالات الفردية المبعثرة هنا وهناك وترتيبها في شكل منظم. أما طريقة التبويب فتتوقف على عدد الحالات التي يراد تبويبها. إذا كان عدد الحالات صغيرا فإن التبويب يتم عادة بإحدى طريقتين يدويتين بسيطتين: طريقة الفرز والعد وتتركب من فرز الحالات حالة حالة ثم عد حالات كل صنف من الأصناف وطريقة الورقة والإشارة وتتركب من كتابة الحالات الواحدة تلو الأخرى على ورقة ووضع إشارة أو علامة مناسبة أمام كل حالة ثم عد هذه الحالات بعد ذلك. سنتكلم الآن عن هاتين الطريقتين بالترتيب

إذا كان عدد الحالات صغيرا فإن طريقة الفرز والعد وإن كانت بطيئة ومملة إلا إنها قد تكون أسرع وأحسن طريقة لتبويب البيانات. وقد كانت هذه الطريقة تستخدم قبل إدخال نظام الماكينات في التبويب حتى إذا كان عدد الحالات كبيرا. وطبيعى أن الطريقة لا يمكن استخدامها إلا إذا كانت كل حالة فردية مكتوبة على استمارة مستقلة. فإن كانت البيانات مدونة في استمارات كبيرة الحجم تحتوى كل واحدة منها على أكثر من حالة واحدة

فواضح بالطبع أن فرز الحالات حالة يكون أمرا مستحيلا ولتبويب البيانات في هذه الحالة لا بد من استخدام طريقة غير طريقة الفرز والعد . إذا كان عدد الحالات صغيرا والبيانات مدونة في استمارات كبيرة تحتوي كل واحدة منها على أكثر من حالة واحدة ففي إمكاننا الاستغناء عن طريقة الفرز والعد بطريقة الورقة والإشارة . أما الورقة فهي في الحقيقة جدول يصنع خصيصا لهذا الغرض وترصد كل حالة على الورقة بوضع إشارة داخل الخانة المناظرة لها في الجدول . بعد رصد جميع الحالات يقرأ عدد الإشارات الموجودة داخل كل خانة ويكتب داخل الخانة . وبما يسهل قراءة عدد الإشارات الموجودة داخل أية خانة كتابة الإشارات بإحدى الطريقتين الآتيتين : -



في (١) تكتب الإشارة الخامسة عبر الإشارات الأربع السابقة وفي هذه الحالة يحصل على عدد الإشارات الموجودة داخل أية خانة بعد الإشارات الخماس . تلك هي الطريقة المتبعة في العادة . وفي (ب) تكتب الإشارة العاشرة فوق الإشارات التسع السابقة وعندئذ يحصل على عدد الإشارات الموجودة داخل أية خانة بعد الإشارات عشرا عشرا .

٢٢ . الطريقة الميكانيكية للتبويب . إذا كان عدد الحالات التي تتركب البيانات منها كبيرا (بضع مئات مثلا) فإن الطريقة المتبعة للتبويب تختلف اختلافا بينا عن أى شئ ذكر في البند ٢١ . وحتى إذا كان عدد الحالات صغيرا فإن استخدام الطريقتين اليدويتين المذكورتين في ذلك البند لا يكون مناسبا متى أريد عمل أكثر من تبويب واحد للبيانات . في هذه الحالات تستخدم ماكينات خاصة وتسمى الطريقة المستخدمة الطريقة الميكانيكية للتبويب .

هناك أنواع كثيرة من الماكينات التي يمكن استخدامها لهذا الغرض أهمها
نوعان : ماكينات شركة Tabulating Machine Company وماكينات شركة
Powers Tabulating Machine Company . بعض هذه الماكينات يدار
باليد وبعضها يدار بالكهرباء وكلها تتوقف على نقل البيانات الإحصائية من
الاستثمارات إلى بطاقات خاصة تمثل كل واحدة منها حالة مستقلة بإحداث
ثقوب مناسبة على كل بطاقة . هذه العملية التي فيها تثقب كل بطاقة بطريقة
خاصة تسمى عملية تمثيل البيانات على البطاقات وهناك ماكينات خاصة لعمل
الثقوب اللازمة في البطاقات . في البند التالي سنقوم بشرح نظرية الماكينات
المختلفة التي تستخدم لتبويب البيانات وكيفية إدارتها لكن هذه النظرية لا يمكن
أن تفهم تماما إلا إذا تمرن الإنسان بنفسه على استخدام الماكينات . أما
الآن فإننا نتكلم عن البطاقات وكيفية استخدامها لتمثيل البيانات لأن البطاقة هي
في الحقيقة العامل الأول والأخير في الطريقة الميكانيكية للتبويب .

تتركب البطاقة قبل تخريمها أي قبل أن تحمل أي بيان إحصائي من أعمدة
رأسية يحتوي كل واحد منها على اثني عشر مكانا رأسيا تسمى ص ، س ، ، ، ،
١ ، ، ، ، ٩ مكتوبة بالترتيب من أعلى إلى أسفل ويمكن ثقب أي واحد منها ١ .
أما عدد هذه الأعمدة فليس واحدا في جميع البطاقات ويتراوح عادة بين
عشرين وتسعين . الشكل ١ يمثل البطاقة المستخدمة في ماكينات هولرث قبل
تخريمها . هذه البطاقة تتركب من ثمانين عمودا وحجمها الطبيعي هو
 $18,7 \times 8,3$ سم والشكل ٢ يمثل نفس البطاقة بعد تخريمها . أما الثقوب فإما
أن تكون مستطيلة كما في هذه الحالة وإما أن تكون مستديرة . ويلحظ فصل
الركن الأعلى من جهة اليمين حتى يسهل كشف أية بطاقة موضوعة وضعاً

١ في بعض البطاقات يحتوي العمود الواحد على أحد عشر مكانا رأسيا فقط . وتصنع
البطاقات من أجود أنواع الورق المقوى حتى لا تتقوس تحت تأثير أي تغير في درجة الحرارة
والرطوبة . أما سعر هذه البطاقات المطبوعة فيتوقف على حجم البطاقة والسكينة المطلوبة
منها ويتراوح في العادة بين عشرة قروش وثلاثين قرشا للألف .

الشكل ١ . البطاقة المستخدمة في ماكنات هولرث قبل تعديها

بطاقة إحصائية - نموذج رقم ١ - ملاحظات العمل										ملاحظات									
رقم	الاسم	الجنس	العمر	الدرجة	الوظيفة	المرتبة	الدرجة	المرتبة	الدرجة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة	المرتبة
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠
٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠
٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠
٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦	٨٧	٨٨	٨٩	٩٠	٩١	٩٢	٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠

خطأ في أية مجموعة ويجوز أيضا فصل الركن الأعلى من جهة اليسار . واضح أن أرقام أى عمود يمكن استخدامها لتمثيل الأعداد من ٠ إلى ٩ فمثلا الرقم ٠ يمثل العدد ٠ والرقم ١ يمثل العدد ١ إلخ . واضح أيضا أن أرقام أى عمودين يمكن استخدامها لتمثيل الأعداد من ٠ إلى ٩٩ فمثلا الرقم ٧ من العمود الأيمن مأخوذا مع الرقم ٠ من العمود الأيسر يمثل العدد ٧ والرقم ٣ من العمود الأيمن والرقم ٧ من العمود الأيسر مأخوذين معا يمثلان العدد ٧٣ . أيضا أرقام أى ثلاثة أعمدة يمكن استخدامها لتمثيل الأعداد من ٠ إلى ٩٩٩ أى الأعداد التي لا يتركب أى واحد منها من أكثر من ثلاثة أرقام وهلم جرا . ويلاحظ أن الأصفار التي تسبق الأرقام المعنوية لا تهمل . فمثلا إذا تركب مجال من خمسة أعمدة فإن أى عدد مثل ٣٢١ يثقب (٠٠٣٢١) لا (٣٢١) . لكن هذه الأصفار تهمل في بعض الحسابات تسهيلات للعمل . إذن باستخدام عدد كاف من الأعمدة نستطيع تمثيل أى بيان إحصائي على البطاقة ما دام هذا البيان يمكن تمثيله بعدد . وتركب الخطوة الأولى لتمثيل البيانات على البطاقة من وضع دليل لتمثيل كل بيان يراد تبويبه بعدد .

١ أى عدد من الأعمدة يخصص لتمثيل بيانات إحصائية من نوع واحد على البطاقة يسمى مجالا . فمثلا مجال السن على البطاقة المبنية في الشكل ١ يتركب من العمودين ١٩ ، ٢٠ . وتفصل المجالات المختلفة على البطاقة في المادة بخطوط رأسية ويكتب لكل مجال عنوان يناسبه .

للجنس . البطاقة المبينة في الشكل ٢ تمثل البيانات الخاصة بعامل تابع للحكومة المصرية (٠) يحمل دبلوما صناعيا ابتدائيا (٥٤) منحه إياه وزارة المعارف العمومية (٠٠) ومهنته نساج ميكانيكي (٢٤٥) يعمل في مصنع للنسيج بناحية شبرا الخيمة مركز قليوب (٠٥) مديرية القليوبية (١٥) . هذا المصنع ممثل على البطاقة بالرقم ١٩٨ وصناعة النسيج ممثلة بالرقم ١١١ . أيضا نوع الأجر (باليوم) ممثل بالرقم ١ .

تمثيل البيانات الخاصة بنوع العامل (ذكر أو أنثى) على البطاقة يمكن استخدام عمود واحد لهذا الغرض وواضح أن هذا هو أبسط الأمثلة الممكنة . إذا كان عدد الأعمدة اللازمة لتمثيل البيانات أكبر من ١ يراعى عند استخدام الطريقة اتباع النظام العشري للتصنيف كلها أمكن ذلك بمعنى أن الأرقام الواقعة في عمود واحد يجب أن تمثل أقساما من رتبة واحدة والأرقام الواقعة إلى يمين هذه الأرقام تمثل أقساما من رتبة أصغر . لناخذ مثالا بسيطا نشرح به هذه القاعدة .

نفرض أنه يراد استخدام البطاقة لتمثيل بيانات إحصائية عن المحافظات والمديريات المختلفة في القطر . أولا لابد من تمثيل المحافظات والمديريات بأعداد . وبما أن عدد المحافظات والمديريات معا هو ٢٠ إذن يمكننا أن نمثل المحافظات والمديريات مبدئيا بالأعداد من ١ إلى ٢٠ . بعد ذلك ننتخب أى عمودين على البطاقة ونمثل أية محافظة أو مديرية على المجال المكون من هذين العمودين . إذا كان الغرض هو مجرد تمثيل كل محافظة وكل مديرية على البطاقة فإن التمثيل المذكور يكفي مهما كان نظام تمثيل المحافظات والمديريات بالأعداد من ١ إلى ٢٠ . لكن قد يراد عند تبويب الإحصائيات استخدام التقسيم العادى للمحافظات والمديريات إلى المحافظات ومديريات مصر السفلى ومديريات مصر الوسطى ومديريات مصر العليا . في هذه الحالة يراعى عند تمثيل المحافظات والمديريات بالأعداد من ١ إلى ٢٠ إمكان فصل الأرقام التي تمثل

المحافظات والمديريات التابعة لأي قسم من هذه الأقسام في أى وقت . لذلك يحسن عند تمثيل المحافظات والمديريات بالأعداد من ١ إلى ٢٠ تمثيل المناطق الإدارية الأربع بأرقام العمود الأيسر والمحافظات أو المديريات المختلفة التابعة لهذه المناطق بأرقام العمود الأيمن . فمثلا إذا مثلنا مديريات مصر العليا كمنطقة بالرقم ١ في عمود العشرات فإن مديريات هذه المنطقة وهى أسوان وقنا وجرجا وأسيوط تمثل بالأعداد ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ . بالمثل يمكننا أن نمثل منطقة مصر السفلى بالرقم ٣ في عمود العشرات ومديريات مصر السفلى وهى المنوفية والقليوبية والغربية والبحيرة والشرقية والدقهلية بالأعداد ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ بالترتيب . بهذه الكيفية نستطيع فصل الأرقام التابعة لأي منطقة من المناطق الإدارية الأربع وذلك بفرز البطاقات على أساس رقم واحد فقط في عمود واحد أى العمود الأيسر .

لنأخذ مثالا ثانيا حتى نرى بأنفسنا مدى ما يمكن عمله بهذه الطريقة . نفرض أنه يراد تمثيل كل ميناء من الموانئ المعروفة في عالم التجارة باستخدام مجال مكون من ثلاثة أعمدة على البطاقة . تبدأ العملية في هذه الحالة بتقسيم الكرة الأرضية إلى مساحات أو مناطق رئيسية كما يأتى : الساحل الشرقى لأمريكا الشمالية ، الساحل الغربى لأمريكا الشمالية ، أمريكا الوسطى ، أمريكا الجنوبية ، أوروبا ، حوض البحر الأبيض المتوسط ، الساحل الجنوبى والغربى لأفريقيا ، المحيط الهندى ، الساحل الشرقى لآسيا ، أستراليا . هذه المناطق الرئيسية العشر تمثل بالأرقام . إلى ٩ في أول الأعمدة الثلاثة من جهة اليسار . ثم تقسم المناطق الرئيسية إلى أقاليم تمثل في كل منطقة بالأرقام . إلى ٩ في العمود الثانى . وأخيرا تمثل الموانئ المختلفة الموجودة في كل إقليم بالأرقام . إلى ٩ في العمود الأخير . باتباع هذا النظام نستطيع تمثيل أى ميناء في أى جزء من العالم بعدد يقع بين ٠ ، ٩٩٩ . أيضا يمكننا في أى وقت فصل الحالات المنتمة إلى إحدى المناطق الرئيسية بفرز البطاقات

على أساس أرقام العمود الأيسر ويمكننا أيضا الحصول على تقاسيم أخرى لأية منطقة معينة بفرز بطاقات تلك المنطقة وحدها على أساس أرقام العمود الثاني . بهذه السكيفية إذن نضمن الوصول إلى نتيجتين مختلفتين : أولا تمثيل البيانات الأصلية على البطاقات وثانيا سهولة فرز البطاقات بعد ذلك في المراحل التالية للتبويب .

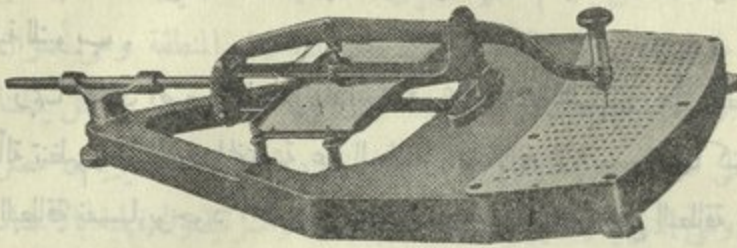
ربما كانت أصعب المسائل الداخلة في عملية تمثيل البيانات على البطاقة . مسألة تنظيم المجالات المختلفة على البطاقة . فمثلا قد لا تسمح الماكينات أو البطاقة نفسها بوجود أكثر من عدد معين من الأعمدة على البطاقة وفي هذه الحالة قد يكون عدد الأعمدة التي تسمح الظروف بتخصيصه لتمثيل أي قسم من البيانات أقل مما يراد استخدامه فعلا فيترتب على ذلك ضرورة حذف بعض تفاصيل البيانات من البطاقة ومن كل عملية تبويب تالية . وقد يكون من الصعب جدا في هذه المرحلة الأولى من تحليل البيانات تحديد البيانات التي تحذف من البطاقة والبيانات التي تمثل عليها .

عملية تمثيل البيانات على البطاقة تكاد تكون العملية الوحيدة في الطريقة الميكانيكية للتبويب التي فيها يدخل العنصر الإنساني فلا بد إذن من مراجعة هذه العملية مراجعة دقيقة للتأكد من صحة الثقوب الموجودة على كل بطاقة . وهناك ماكينات خاصة للمراجعة فتى انتهت عملية المراجعة أمكن البدء في تبويب البيانات .

٣٣ . الماكينات الإحصائية . أول من فكر في استخدام الماكينات في الإحصاء هو Dr. Hermann Hollerith فلما تمكن هولريث من تحقيق فكرته صارت الماكينات تعرف باسمه . وكان أول استخدام واسع النطاق لهذه الماكينات سنة ١٨٩٠ بمناسبة تعداد سكان الولايات المتحدة والشكلان ٣ ، ٤ يبينان الماكينتين اللتين استخدمهما هولريث فعلا في ١٨٩٠ عقب تعاقدته في تلك السنة مع حكومة الولايات المتحدة على القيام بعملية التعداد . هاتان

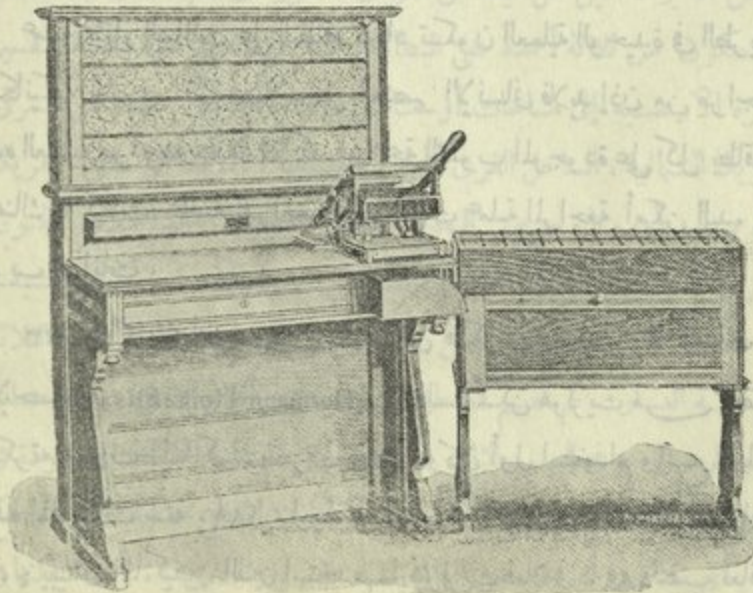
الماكينتان معروضتان الآن مع غيرهما من ماكينات هولريث البدائية في
المتحف العلمي الشهير • Science Museum at South Kensington, London

الشكل ٣ . ما كينة التخريم في ١٨٩٠



هناك أربعة أنواع من هذه الماكينات : ماكينات التخريم وماكينات
المراجعة وماكينات الفرز وماكينات التبويب . ونريد الآن أن نتكلم عن
هذه الأنواع الأربعة بالإيجاز .

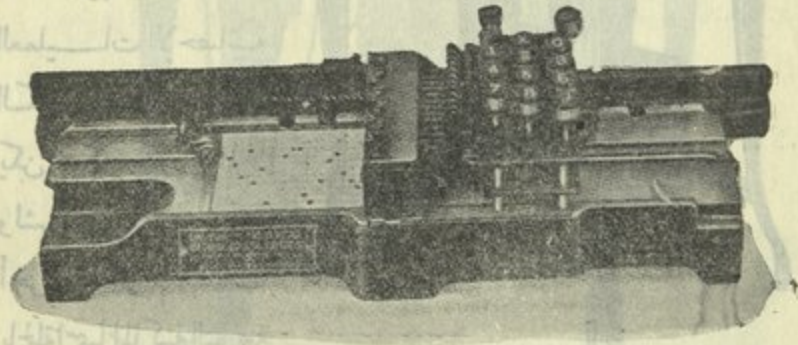
الشكل ٤ . الماكينة التي استخدمها هولريث لفرز والعد في ١٨٩٠



ما كينة التخريم العادية هي الماكينة التي تثقب البطاقة لتمثيل البيانات عليها

(الشكل ٥) . هذه الماكينة تدار باليد وتتركب من اثني عشر مفتاحا (عدد الأماكن الرأسية في العمود الواحد) وكل مفتاح متصل بسكينة . عند استخدام هذه الماكينة تحمل البطاقة على عربة متحركة فإذا ضغط على أى مفتاح مرت السكينة المتصلة بالمفتاح في البطاقة وأحدثت فيها ثقباً ثم تتحرك العربة فينتقل العمود المثقوب ويأتى العمود التالى له تحت المفتاح . باستخدام

الشكل ٥ . ماكينة التخريم العادية



هذه الماكينة يستطيع العامل المتمرن أن ينجز ١٥٠٠٠ - ٢٠٠٠٠ ثقب في الساعة أى بمعدل ٤ - ٦ ثقوب في الثانية دون أن يخطئ . فى أكثر من ٣ فى المائة من البطاقات .

إذا كان عدد البطاقات المزمع تخريمها كبيرا أو إذا احتوت بعض البطاقات على بيانات واحدة فى بعض الأعمدة فإنه يمكن الانتفاع من ثبوت البيانات فى تلك الأعمدة وتخريم البطاقات المذكورة فى نفس الوقت باستخدام ماكينة التخريم بالجملة (الشكل ٦) التى تدار بالكهرباء وتعمل بمعدل ٧٢٠٠ بطاقة فى الساعة والماكينة مجهزة بعدد وظيفته عدد البطاقات المخرومة فى كل مرة . لكن تخريم البطاقات سواء كان ذلك باستخدام الماكينة العادية أو ماكينة الجملة يحتاج عادة إلى وقت طويل لا يجوز تخصيصه لهذه العملية إلا إذا كان عدد الحسابات كبيرا أو إذا أريد عمل أكثر من تبويب واحد

الشكل ٦ . ماكينة التخريم بالجملة



للبينات ١. على أنه متى
تحقق أحد هذين الشرطين
كانت الطريقة الميكانيكية
لتبويب البيانات طريقة
اقتصادية من الدرجة
الأولى . والحق أنه لولا
هذه الطريقة لكان أكثر
العمليات الإحصائية
الكبيرة صعبا جدا إن لم
يكن فوق مقدور البشر .
ولشركة هولبريث ماكينة
أخرى لتخريم البطاقات
بالجملة اسمها الماكينة السريعة
للتخريم بالجملة (الشكل ٧)

وهذه تعمل بمعدل ٢٤٠٠ بطاقة في الساعة وتثقب خمسة عشر عمودا متجاورا
في حالة البطاقات المكونة من ٤٥ عمودا أو عشرين عمودا متجاورا في حالة
البطاقات المكونة من ٨٠ عمودا .

ماكينة المراجعة تشبه ماكينة التخريم العادية وتدار مثلها باليد وبنفس
الطريقة . والفرق الرئيسى بين الماكينتين هو أن ماكينة التخريم العادية تحتوى
على سكاكين ثاقبة بخلاف ماكينة المراجعة فإنها تحتوى على غاطس مسطح
عند طرفه الأخير يحمله زنبرك ويستطيع أن يمر فى أى ثقب فى البطاقة

١ فى تعداد ١٩١٧ الذى كان أول تعداد مصرى استخدمت فيه الطريقة الميكانيكية
للتبويب استغرقت عملية التخريم طول المدة من يوليو ١٩١٧ إلى مايو ١٩١٩ أى زهاء
عامين كاملين . وقام بهذه المهمة أولاد صفار حديثو العهد بالمدارس وكان يصرف للواحد منهم
ما بين ١٥٠ ، ٢٠٠ قرش فى الشهر .

الشكل ٧ . الماكينة السريعة للتخريم بالجملة



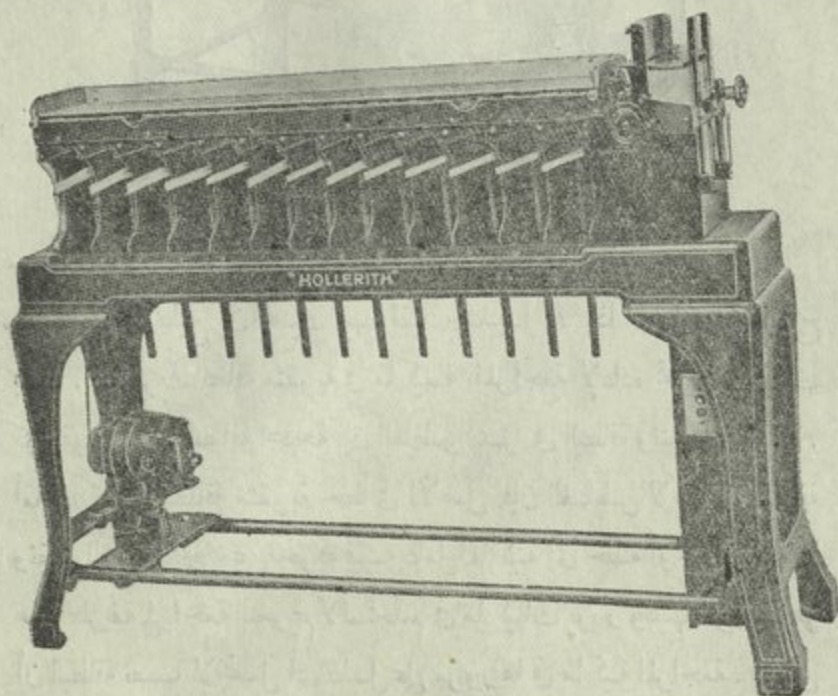
ولكنه لا يستطيع أن يحدث فيها ثقباً جديداً إلا إذا ضغط على المفتاح بشدة . إذا مرت بطاقة مثقوبة في ماكينة المراجعة لإعادة تخريمها وكانت كل ثقب هذه البطاقة صحيحة فإن الغاطس يمر في البطاقة وتتحرك العربة . أما إذا كانت البطاقة مثقوبة خطأ في الأصل فإن الغاطس لا يمر في البطاقة وتقف العربة عاجزة عن الحركة فيتنبه عامل الماكينة إلى خطئه أو خطأ زميله ١ . هذه الطريقة لمراجعة التخريم لا تستخدم في ماكينات بورز وعبها الوحيد هو أن البطاقة نفسها لا تحمل أى دليل على مرورها في ماكينة المراجعة . لتذليل

١ في طريقة ثانية لمراجعة التخريم يقرأ أحد اثنين الثقوب انخرومة ويراجع الآخر عليه في النسخة الأصلية . هذه الطريقة أبطأ من الطريقة الميكانيكية لأن الإنسان يستطيع الضغط على المفاتيح أسرع مما يستطيع قراءة الأرقام . زد على ذلك أن الطريقة المقترحة تستلزم استخدام اثنين أحدهما للقراءة والآخر للسمع .

هذه الصعوبة اخترعت شركة بورز ثقباً نصف قري . في هذه الطريقة لا تحدث ما كينة التخريم ثقباً مستديراً ولكنها تحدث ثقباً نصف مستدير يشبه القمر النصفى . بعد ذلك يعاد تخريم البطاقات بمعرفة عامل آخر يستخدم ما كينة تثقب النصف الناقص للقمر . فإذا اتفق الثقب الثانى مع الثقب الأول فإننا لا نرى عند فحص البطاقة إلا ثقباً مستديراً ويحسن عند فحص البطاقة أن ينظر إليها من الخلف . وأى اختلاف بين الثقبين الأول والثانى يعطى ثقبين نصفين مستديرين فى العمود المناظر وهذان الثقبان يلفتان النظر فى الحال .

بعد مراجعة البطاقات تفرز هذه البطاقات على ما كينة الفرز (الشكل ٨) .

الشكل ٨ . ما كينة الفرز الأفقية

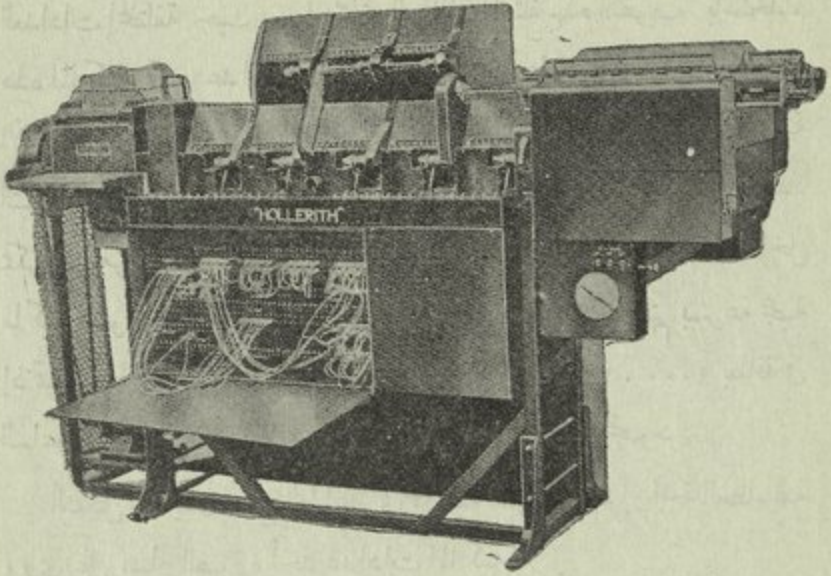


التي تدار بالكهرباء . عند استخدام هذه الماكينة توضع البطاقات مسلسلة بالترتيب على أساس أرقام أى عمود أو على أساس أرقام كل الأعمدة التابعة

لمجال واحد معين مع وضع البطاقات المثقوبة بكيفية واحدة في هذا المجال فوق بعضها ثم تطعم الماكينة أوتوماتيكيا بالبطاقات فتسقطها الماكينة داخل عيون أو صناديق حسب الثقوب المخرومة في العمود أو المجال . وهناك من هذه الصناديق ثلاثة عشر كما في الشكل — صندوق لكل واحد من الأماكن ص ، س ، ... ، ٩ المخصصة للثقوب وصندوق لتلقى البطاقات التي لا ثقوب فيها . ومتى امتلأ أى صندوق أو متى نفدت البطاقات تقف الماكينة من تلقاء نفسها .

لفهم طريقة عمل هذه الماكينة نفرض أن لدينا ١٠٠٠ بطاقة مثقوبة من ٠٠٠ إلى ٩٩٩ وأننا نريد فرز هذه البطاقات على الماكينة . تبدأ العملية بوضع البطاقات مسلسلة بالترتيب العددي ثم نطعمها بالماكينة ووجهها متجه إلى أسفل . عند ذلك تبدأ أولى عمليات الفرز وفي هذه العملية تفرز البطاقات على أساس عمود الوحدات فتسقطها الماكينة في الصناديق العشرة المستخدمة والآن يحتوى الصندوق . على جميع البطاقات التي تنتهى أعدادها بالرقم . مثل ٦٣٠ ، ١٢٠ ، ٤٠ ، ٩٨٠ إلخ ويحتوى الصندوق ٩ على جميع البطاقات التي تنتهى أعدادها بالرقم ٩ مثل ١٨٩ ، ٣٤٩ ، ٢٩ ، ٦٧٩ إلخ . بعد ذلك تفرغ الصناديق العشرة المستخدمة بالترتيب استعدادا لإجراء عملية الفرز الثانية التي فيها تفرز البطاقات على أساس عمود العشرات . بعد إمرار الأصفار في العملية الثانية نجد أن الصندوق . يحتوى على البطاقات العشر المنتهية بالرقمين ٠٠ أى ٦٠٠ ، ١٠٠ ، ٨٠٠ ، ٤٠٠ إلخ وأن الصندوق ٩ يحتوى على البطاقات العشر المنتهية بالرقمين ٩٠ أى ٤٩٠ ، ٢٩٠ ، ٨٩٠ إلخ . وبلى هذه البطاقات مباشرة البطاقات المنتهية بالأرقام ١ ، ٢ ، ... ، ٩ بالترتيب . إذن عند انتهاء عملية الفرز الثانية يحتوى الصندوق . على جميع البطاقات المنتهية بالرقمين ٠٠ وبلى هذه البطاقات المنتهية بالأرقام ١ ، ٢ ، ... ، ٩ . وأما الصندوق ٩ فيحتوى على البطاقات المنتهية بالأرقام ٩٠ ، ٩١ ، ... ،

الشكل ٩ . ماكينة التبويب



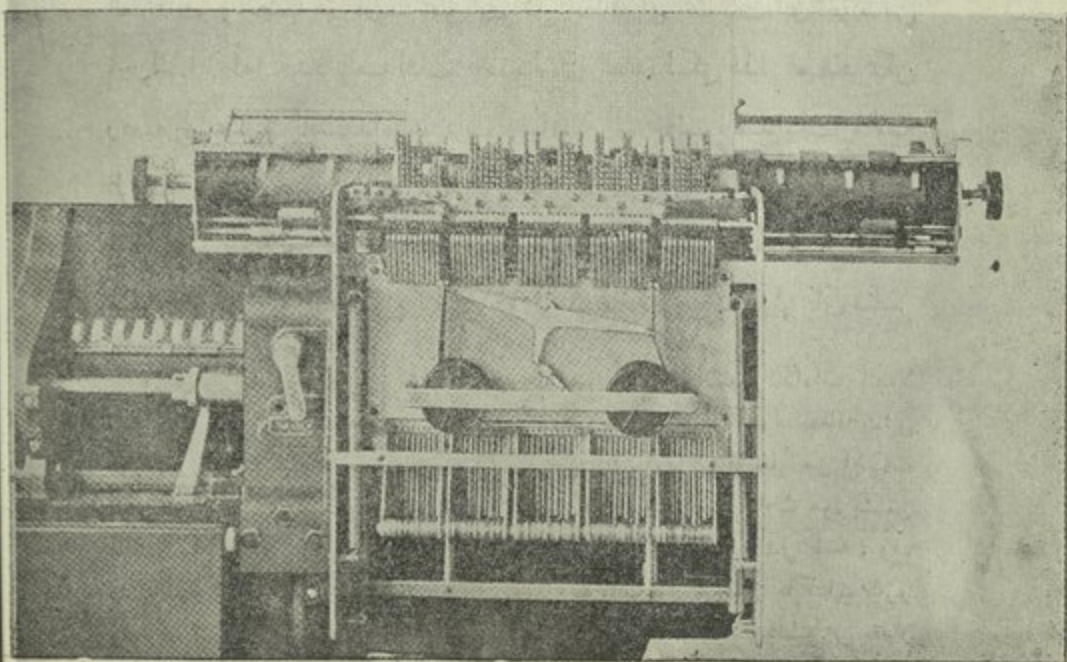
بخمسة أو سبع وحدات أو بنوك مستقلة وتطبع فيه المجاميع الميمنة في العدادات وأيضا متى أريد محتويات كل بطاقة أو محتويات أى جزء من أجزائها . أما عدد العدادات فخمسة في العادة لكن هذا العدد يمكن رفعه إلى عشرة باستخدام عدادات إضافية إلى جانب العدادات الخمسة الرئيسية . والاتصال الموجود داخل هذه الماكينة بين البطاقات والعدادات اتصال كهربائي^١ والماكينة تعمل طبقا لهذا المبدأ العام : عند إمرار بطاقة مثقوبة داخل الماكينة تقفل الثقوب دوائر كهربائية فيمر تيار كهربائي مباشر

١ في ماكينات شركة هورز للتبويب يكون الاتصال بين البطاقات والعدادات اتصالا ميكانيكيا . أما في ماكينات هولرث للتبويب فهذا الاتصال دائما كهربائي وتقوم البطاقة بتمثيل دور العازل في ماكينة التبويب وفي هذه الحالة يجب أن تكون البطاقة خلوا من الجسيمات المعدنية بل ومن كل عيب يؤثر في وظيفتها كمازل . لهذا السبب تصنع بطاقات هولرث من أجود أنواع الورق المقوى بعد اختبار كل جزء فيه اختبارا كهربائيا دقيقا قبل طبعه . وقد دلت الخبرة على أن هذه البطاقات تحتل السرور عدة مئات من المرات في ماكينات الفرز والتبويب قبل أن تصير غير صالحة للاستعمال . لكن عمر البطاقة يتوقف بالطبع على مقدار ما تحس به من العناية أثناء تداولها وفرزها .

يتراوح جهده بين ١٠٠ ، ٢٥٠ فولت في ثقبو البطاقة ومنها يتجه صوب العدادات المختلفة حيث يسجل نتائج البيانات الممثلة بهذه الثقوب . باستخدام هذه الماكينة يمكن عد البطاقات التابعة لأية مجموعة معينة ويمكن أيضا جمع الأعداد الممثلة بثقوب أى مجال . وتنحصر المهارة الفنية فى إدارة ماكينة التبويب بالطبع فى الحصول منها على أكبر عدد ممكن من التبويبات بأقل عدد ممكن من مرات وضع البطاقات داخل الماكينة . وتوضع البطاقات داخل ماكينة التبويب أوتوماتيكيا كما فى ماكينة الفرز . أما العد فيتم بسرعة عجيبة إذ تمر البطاقات فى الماكينة بسرعة تتراوح بين ٣٦٠٠ ، ٩٠٠٠ بطاقة فى الساعة ولا يخفى ما فى ذلك من اقتصاد كبير فى الوقت والجهد .

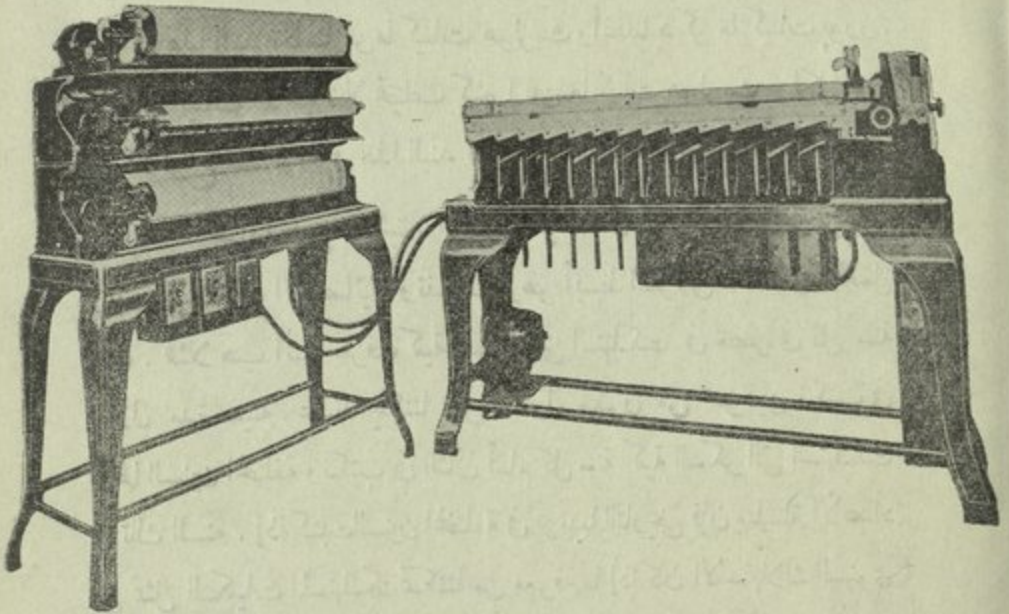
الشكل ١٠ يبين جناح الطباعة فى ماكينة التبويب بعد إزاحة الغطاء عنه ويرى على يسار الصورة أحد عدادات الماكينة .

الشكل ١٠ . جناح الطباعة فى ماكينة التبويب



تلك هي الأنواع الأربعة الرئيسية لماكينات هولريث الإحصائية . وهناك نوع خامس يسمى ما كينة الفرز والطبع والعد أو ما كينة التعداد لأن ماكينات هذا النوع صممت في الأصل لاستخدامها في تبويب إحصائيات التعداد . لكن الماكينة تستخدم اليوم أيضا لإنتاج الإحصائيات الصحية والتربوية والحبوبية وإحصائيات النقل وغيرها . وتركب الماكينة (الشكل ١١) من فارز متصل بجهاز مستقل للعد والطبع وتختلف عن ما كينة التبويب التي تجمع القيمة

الشكل ١١ . ما كينة الفرز والطبع والعد



الفعلية للثقوب المخرومة في أنها تعد الثقوب المخرومة في أى عمود واحد في سلسلة من العدادات لكل منها خمس عجلات — عداد لكل واحد من الاثنى عشر مكانا الممكنة للثقوب وعداد للبطاقات غير المثقوبة . فثلا كل بطاقة مثقوبة في المكان ه تضيف ١ إلى عداد الخمسات . والماكينة مجهزة بعدادين آخرين لكل منهما ست عجلات أحدهما لتسجيل العدد الكلي للبطاقات في كل مرة والآخر للعدد الكلي لجميع البطاقات المعدودة . وباستخدامها يمكن

فرز البطاقات على عمود واحد (استعدادا لعددها بعد ذلك) أثناء العد على عمود آخر . أما جهاز العد فيحتوى إما على بنك واحد أو بنكين أو ثلاثة وفى هذه الحالة الأخيرة يستطيع الجهاز العد على ثلاثة أعمدة فى آن واحد وهذا النوع مفيد مع إحصائيات السكان . لكن الماكينة ذات البنك الواحد كافية لمعظم الأغراض الإحصائية . ويلاحظ عند استخدام هذه الماكينة أنه إذا زاد عدد التصانيف عن اثني عشر فلا بد من ثقب عمودين أو أكثر . وأى مجال مكون من أكثر من عمود واحد لا يمكن عده إلا بعد فرز البطاقات على أعمدة العشرات وما فوقها .

فى هذا البند تكلمنا عن ماكينات هولريث وأغفلنا ذكر ماكينات پورز . هذه الماكينات الأخيرة لا تختلف كثيرا عن ماكينات هولريث ولكل نوع من الأنواع المذكورة فى هذا البند نظيره بين ماكينات پورز .

٢٤ . الجداول الإحصائية . الجدول الإحصائى هو جدول الغرض منه ترتيب البيانات الإحصائية وتنسيقها وهو أبسط الطرائق المعروفة لعمل ذلك . فمثلا هب أننا نعرف كمية السكر التى استهلكنا فى مصر فى كل سنة خلال مدة معينة . عندئذ يمكننا عمل جدول مكون من عمودين نكتب فى أولهما السنين المختلفة ونكتب فى الثانى أمام كل سنة كمية السكر التى استهلكنا فى تلك السنة . إذا كتبت السنين المختلفة فى ترتيبها التاريخى فإن سلسلة الأعداد التى تمثل الكميات المستهلكة تمكنا من معرفة ما إذا كان الاستهلاك السنوى للسكر فى زيادة أو فى نقص مع الزمن وبأى معدل كان يزيد أو ينقص من سنة إلى سنة خلال تلك المدة . واضح أن الزيادة التى نلاحظها عندنا فى عدد السكان من سنة إلى سنة تؤثر فى الكمية المستهلكة كل سنة من أية سلعة شعبية كالسكر وتبيل إلى رفع هذه الكمية من سنة إلى سنة . فإذا أضفنا إلى الأعداد التى تمثل الاستهلاك السنوى للسكر عندنا سلسلة أخرى من الأعداد تمثل عدد الأشخاص الذين يعيشون فى جميع أنحاء المملكة فى كل سنة خلال

المدة المذكورة أصبح لدينا جدول أعم نفعا من الجدول السابق المختصر على السنة والاستهلاك في السنة . بهذه السكيفية يضاف إلى العمودين المحتويين على (١) توارىخ السنين المشمولة بالبيانات ، (ب) كميات السكر المستهلكة في هذه السنين ، عمود ثالث يبين

(ح) عدد الأشخاص المسؤولين عن استهلاك هذه الكميات من السكر . أما أهمية هذا العمود الأخير مع العمودين الأصليين فإنها تظهر في صورة أوضح إذا أضفنا عمودا رابعا (د) يستنتج من العمودين (ب) ، (ح) بقسمة كمية السكر المبينة في أى سطر من سطور الجدول على عدد السكان المبين في نفس السطر . هذه العملية تعطى نصيب الفرد الواحد من السكان من السكر في السنة المبينة في ذلك السطر . الجدول الآتى يوضح شكل الجدول المذكور إيضاحا كافيا في عشر سنين ١٩٢٧ ، ١٩٣٧ .

الجدول ١ . استهلاك السكر في المملكة المصرية

السنة	الاستهلاك المحلي ألف ١٠٠٠	عدد السكان ألف	نصيب الفرد أفة
١٩٢٧	٦٤٣١٥	١٤١٧٨	٤,٥٤
١٩٣٧	١٢٢٦١٣	١٥٩٠٤	٧,٧١

إذا أضفنا إلى هذا الجدول أعمدة جديدة أو إذا كونا جدولا جديدا لعرض البيانات الخاصة باستهلاك الشاى في مصر في نفس السنين فإننا نحصل على سلسلتين من الأرقام وقد تكون المقارنة بين السلسلتين موضوع بحث شيق يهم الدولة والجمهور .

١ دقاتر شركة السكر والتكرير المصرية العمومية ، ١٢ ش طلعت حرب باشا ، القاهرة
بعد تحويل السكيلوجرامات إلى أوق بالقسمة على ١,٢٤٨ .

٢٥ . الجداول الابتدائية والجداول الثانوية . عند التفكير في عمل جداول إحصائية يجب أن نفرق بين نوعين مختلفين : الجداول ذات الغرض العام والجداول ذات الغرض الخاص . هذان النوعان قد يختلفان حتى إذا اشتملا على نفس البيانات . الجدول الإحصائي ذو الغرض العام هو جدول الغرض منه مجرد عرض البيانات الخاصة بمسألة معينة . والجدول ذو الغرض الخاص هو جدول الغرض منه عرض نتائج ذات أهمية خاصة في بحث معين . فكأن الجدول ذا الغرض العام هو عرض منظم لبيانات إحصائية والجدول ذا الغرض الخاص هو عرض منظم لنتائج إحصائية هامة . هذا النوع الثاني هو النوع الذي يستخدم عادة في الأعمال المسكتية .

يسمى الجداول ذات الغرض العام جداول ابتدائية والجداول ذات الغرض الخاص جداول ثانوية (أو تحليلية) . فإذا بحثنا عن قواعد عامة تحدد الشكل العام للجدول الإحصائية وجدنا أن البحث يتشعب إلى بحثين فرعيين بحث عن قواعد تحدد الشكل العام للجدول الابتدائية وبحث عن قواعد تحدد الشكل العام للجدول الثانوية والبحثان مختلفان . أبسط البحثين هو أولهما ولذا سنصرف إلى هذا أولا .

٢٦ . القواعد التي تحدد الشكل العام للجداول الابتدائية . تميز هذه الجداول إلى الكبير والاتساع حتى تضم بين أعمدها وسطورها الكميات الهائلة من البيانات التي يراد عرضها داخلها . لكن حجم الصفحة المطبوعة مهما كان كبيرا يقف حدا طبيعيا منيعا أمام تكبير الجدول أو توسيعه بعد نقطة معينة . هناك بالطبع حالات تكون فيها أبعاد الجدول أكبر من أبعاد الصفحة . في أية حالة من هذه يتحتم تطبيق الجدول وواضح أن اتباع هذه الخطة لا يمكن أن ينظر إليه إلا بعين السخط وعدم الرضا . هناك أيضا جداول منفصلة تطبع بمفردها في أحجام كبيرة غير عادية وهذه أيضا ليست أحسن حالا من الجداول السابقة إن لم تكن أسوأ . أما الجداول التي تشغل

صفحتين تواجه كلتاهما الأخرى فلا بأس بها ولكن حتى هذه يجب أن تجتنب إذا أمكن ذلك . هذه الجداول الأخيرة تشبه الجداول التي تطبع عمودية على طول الصفحة وهذه أيضا يجب ألا تستخدم إلا عند الضرورة القصوى . فالصفحة الواحدة كما تمسك عند القراءة يجب إذن أن تكون الحد الأقصى لحجم الجدول . هذه القاعدة تحدد الأبعاد الخارجية للجدول .

لنبحث الآن عن قواعد تحدد الشكل الداخلي للجدول الابتدائية ولنبدأ بمسألة اختيار الوضع بين الأعمدة والسطور أى الاختيار بين عرض البيانات في أعمدة وعرضها في سطور . هذا الاختيار تحده عادة النسبة بين طول الصفحة وعرضها أى أنه يتحدد بأن أكبر عدد ممكن لسطور الجدول يساوى عددا معينا من أمثال أكبر عدد ممكن لأعمدته . إذن طبعي أن نعرض البيانات المحتوية على عدد أكبر من الأقسام في الأعمدة والبيانات الأخرى في السطور . أيضا إذا كانت عناوين بعض الأقسام أطول بكثير من عناوين أقسام أخرى أى أكثر منها كلمات فإننا نختار الوضع بين الأعمدة والسطور بحيث تظهر الأقسام ذات العناوين الطويلة في السطور لأنه إذا وضعت هذه الأقسام في الأعمدة فإن عناوينها الطويلة إما أن تطبع رأسية فوق الأعمدة وإما أن توسع الأعمدة حتى تسمح بطبع العناوين الطويلة أفقية وكلا هذين الحلين عقيم . إذن مسألة اختيار الوضع بين الأعمدة والسطور تتوقف قبل كل شيء على أن طول الصفحة من أعلى إلى أدنى أكبر من عرضها أو على أن سعة العمود أكبر من سعة السطر وهذا عامل لا يستطيع حتى الإحصائي أن يمس به بأى تعديل .^١

لنبحث الآن مسألة ترتيب الأعمدة فيما بينها والسطور فيما بينها في الجداول الابتدائية . مجال الاختيار في هذه المسألة أوسع بكثير منه في المسألة

١ يحسن متى تم الاتفاق على وضع الأعمدة والسطور في أى جدول ابتدائي اتباع نفس النظام في كل جدول آخر مشابه له لأن هذا يسهل الحصول على البيانات من الجداول الابتدائية .

السابقة لأن أى ترتيب معقول يحل المسألة حلا معقولا . أما أشهر التراتيب المعروفة للأعمدة والسطور فهى التراتيب الأبجدية والتاريخية والجغرافية والترتيب حسب القيمة أو الأهمية . لكن لا يوجد من الأسباب ما يبرر تفضيل أى واحد أو أكثر من هذه التراتيب على الباقى . رغم ذلك توجد قاعدة عامة يجب أن يخضع لها الاختيار النهائى فى كل حالة : يجب اختيار الترتيب الذى يجعل البيانات أقرب ما تكون مجنى من الجداول . فالجدول جدول ابتدائى وقد تعوزنا الحاجة إلى الرجوع إليه فى مناسبات شتى لأغراض مختلفة ولذا يجب أن يصاغ فى الشكل الذى يجعل استخراج البيانات المطلوبة منه أسهل ما يمكن . أيضا ترتيب الأعمدة أو السطور حسب القيمة أو الأهمية ربما كان أصغر شأنًا فى الجداول الابتدائية منه فى الجداول الثانوية لأن هذا الترتيب يتوقف على وجهة نظر واحدة وليس من الحكمة فى العادة أن نقيّد الجدول بهذه الوجهة الواحدة وهو جدول ابتدائى أى ذو غرض عام . أما التراتيب الأخرى فإنها تتفق اتفاقا أحسن مع طبيعة الجداول الابتدائية والأغراض المختلفة التى تستخدمها هذه الجداول .

إذا اتفقنا على ترتيب الأعمدة والسطور ترتيبا تاريخيا أو جغرافيا فواجب أن نتفق أيضا على أى البيانات يوضع فى أعلى الجدول أو على يمينه وأيهما يوضع فى أدناه أو على يساره .^١ لكن الاتفاق على هذه النقطة أصعب فى حالة الترتيب التاريخى منه فى حالة الترتيب الجغرافى . فى حالة الترتيب التاريخى يمكننا دائما أن نضع أقدم التواريخ فى أعلى الجدول أو على يمينه وأحدثها فى أدناه أو على يساره إلا إذا كان ينتظر الرجوع بكثرة إلى الأرقام الحديثة فتوضع هذه الأرقام فى أعلى الجدول أو على يمينه . أما إذا كان ينتظر الرجوع إلى البيانات كلها من أقدم التواريخ إلى أحدثها فإن النظام المقترح

١ عند تبويب أى بيانات عن محافظات ومديريات هذا القطر يمكننا أن نعتبر الترتيب المتبع فى مصلحة الإحصاء مثاليا فنضع البيانات الخاصة بالمحافظات فى أعلى الجدول أو على يمينه والبيانات الخاصة بمديريات مصر العليا فى أدناه أو على يساره .

الذى فيه توضع أحدث التواريخ فى أدنى الجدول أو على يساره يكون أفضل الأنظمة . والقاعدة العامة فى جميع هذه الحالات بسيطة وهى : توضع أكثر البيانات فائدة فى أعلى الجدول أو على يمينه حيث تكون قريبة من عناوين الأعمدة والسطور فيسهل الحصول عليها .

٢٧ . القواعد التى تحدد الشكل العام للجدول الثانوى . تختلف هذه الجداول من وجهة النظر الإحصائية عن الجداول الابتدائية . واضح أن الجدول الثانوى يكون ناقصا إذا عجز عن عرض النتائج التى أعد لعرضها وأنه يجب أن يكون بسيطا ما أمكن وألا يحتوى إلا على النتائج الضرورية للبحث الذى أعد من أجله موضوعه فى أحسن ترتيب .

رغم الاختلاف الرئيسى بين الجداول الابتدائية والثانوية نجد أن بعض القواعد التى تحدد الشكل العام مشتركة بين النوعين . فمثلا القاعدة التى تحدد مسألة اختيار الوضع بين الأعمدة والسطور واحدة فى الحالتين . هذه المسألة مسألة من أهم المسائل الخاصة بعمل الجداول الإحصائية الابتدائية والثانوية على السواء ويجب أن تحل فى حالة الجداول الثانوية بالنظر إلى أهم المقارنات التى يراد عرضها وتفضيل بعض هذه المقارنات على البعض الآخر . فالمقارنة بين عددتين فى عمود واحد أسهل بكثير منها بين عددتين فى سطر واحد . إذن طبيعى أن نضع التصانيف الزمنية والجغرافية والكمية فى السطور والتصانيف السكيفية فى الأعمدة . لكن هذه القاعدة قد لا تكون مناسبة فى كل حالة . لترتيب الأعمدة فيما بينها والسطور فيما بينها فى الجداول الثانوية ننظر إلى النتائج التى يراد عرضها فإن كانت تاريخية فإننا نختار الترتيب التاريخى ١ .

١ جرت العادة على قراءة الزمن من أعلى إلى أدنى أو من اليمين إلى اليسار ولا توجد أسباب تدعو إلى إغفال هذه العادة . إذن فى الجداول الثانوية يجب أن ترتب التواريخ من الأقدم إلى الأحدث من أعلى إلى أدنى أو من اليمين إلى اليسار لأننا اعتدنا لعدة أسباب عند قراءة عددتين أحدهما مكتوب تحت الآخر أو على يساره أن نفرض أن الرقم الأعلى فى الحالة الأولى أو اليمين فى الحالة الثانية هو أقدم الرقمين وأن نبنى استنتاجاتنا على أساس هذا القرض .

وإن كانت جغرافية فإننا نختار الترتيب الجغرافي . وإن كانت النتائج مكونة من حدود جزئية يتركب منها مجموع واحد عام فإننا نختار الترتيب حسب قيمة الحسود أو أهميتها أو حسب أية قاعدة أخرى تناسب المقام . أما الترتيب الأبجدي فقد لا يكون ذا فائدة كبيرة مع الجداول الثانوية لأنه لا يظهر العلاقات المهمة في أغلب الحالات . إذن مسألة ترتيب الأعمدة والسطور فيما بينها تتوقف في حالة الجداول الثانوية على نوع المسألة .

الجداول الثانوية هي جداول الغرض من إعدادها هو كما قدمنا إظهار نتائج وعلاقات وليس إظهار قيم فردية . أيضا هذه العلاقات هي خواص للجدول في مجموعه وليس لأجزاء معينة فيه . رغم ذلك يراد أحيانا في بعض الجداول الثانوية حصر النظر بصفة خاصة في بعض قيم فردية مهمة . في هذه الحالة يجب أن توضع هذه القيم المهمة في أظهر مكان في الجدول أى في أعلاه أو على يمينه حيث تكون قريبة من عناوين السطور والأعمدة مالم يتعارض هذا النظام مع اعتبارات أخرى مهمة . هذه القاعدة تقضى مثلا بوضع حواصل الجمع في أعلى الجدول أو على يمينه إن كانت هذه الحواصل أهم أرقام الجدول بشرط ألا يتعارض هذا مع اعتبارات أخرى مهمة . إذا لم يتحقق أحد هذين الشرطين فإن العادة جرت على وضع حواصل الجمع حيث ينتظر معظم القراء وجودها أى تحت الجدول أو على يساره .

باستخدام هذه القواعد يمكننا في بعض الحالات الوصول إلى رأى قاطع حيال شكل الجدول الثانوى . لسكن هذه القواعد تلعب مع الجدول الثانوى دورا أصغر شأننا من الدور الذى تلعبه قواعد البند السابق مع الجدول الابتدائى . ذلك لأن الجدول الثانوى هو بطبيعة الحال جدول ذو غرض خاص فليس سهلا والحال كذلك تقييده بقواعد عامة تحدد شكله في كل حالة لأن هذا الشكل لا بد أن يتوقف في النهاية على الغرض الخاص للجدول . والإحصائى يستطيع في العادة أن يجعل شكل الجدول الثانوى يناسب الغرض الخاص الذى

من أجله يفكر في عمل الجدول فهو يضع دائما نصب عينيه هذا الغرض الخاص ويكيف شكل الجدول ونظامه بالطريقة التي تتفق مع ذلك الغرض ١. فمثلا إذا احتوى الجدول الثانوى على سلسلة من الأرقام المطلقة والنسب المئوية لهذه الأرقام فإننا نضع النسب بجانب الأرقام إلا إذا تعارض هذا الوضع مع اعتبارات أخرى مهمة فإننا نضع النسب في جانب آخر من الجدول . والأعمدة والسطور التي يراد المقارنة بينها توضع بجوار بعضها أو قريبة ما أمكن من بعضها . والأرقام غير الضرورية يجب أن تحذف وتكتب الأعداد المحتوية عليها مقربة فيسهل بذلك عرضها .

٢٨ . القواعد التي تحدد عناصر الجداول الإحصائية . إن عرض البيانات الإحصائية في جدول يمكن القارئ من تتبعها وإدراك معناها ومدلولها بمجرد اطلاعه عليها وبأقل عناء ممكن هو مرحلة من أدق مراحل التحليل الإحصائي . هناك بالطبع أكثر من طريقة واحدة لعرض أى بيانات في جدول لكن مجرد عرض البيانات في جدول يعطى كل رقم من أرقامها لا يكون عرضا إحصائيا صحيحا إلا إذا خضع الجدول لبعض قواعد عامة . فمثلا لا يجوز بتاتا كتابة البيانات في أعمدة وترك هذه الأعمدة من غير عناوين أو ترك الجدول كله من غير اسم يدل على ما فيه من بيانات . في البندين السابقين تكلمنا عن القواعد التي تحدد الشكل العام للجدول . فهل هناك قواعد معروفة تحدد عناصره؟ سنكتفى هنا بذكر أهم القواعد التي أجمعت عليها الهيئات الإحصائية الكبيرة .

١ . كل جدول يجب أن يكون وحدة منطقية فلا يحتوى على بيانات غير متشابهة أو بيانات لا علاقة بينها .

٢ . كل جدول يجب أن يكون كاملا في ذاته بأن يكون لكل عمود

١ يحسن متى تم الانقياس على شكل الجدول الثانوى اتباع نفس النظام في الجداول الأخرى المشابهة له حتى تسهل المقارنة بين الحالات المختلفة .

ولكل سطر فيه عنوان واضح يشرح معنى كل رقم فيه . هذه العناوين يجب أن تكون قصيرة بقدر الإمكان وبالأخص عناوين الجداول الثانوية .

٣ . كل جدول يجب أن يحتوى على حاشية تعطى مصدر البيانات أو النتائج المعروضة داخله ١ . وتستخدم الحواشى أيضا كلما دعت الضرورة لجعل العناوين واضحة المعنى أو لكتابة ملحوظات مهمة لا يمكن كتابتها في الجدول نفسه . هذه الحواشى والملحوظات يجب أن تكون قصيرة بقدر الإمكان في حالة الجداول الثانوية .

٤ . عند تسطير الخانات المخصصة لكتابة العناوين يراعى عمل التسطير الذى يظهر العلاقات الرئيسية والفرعية بين العناوين . فمثلا هب أننا نريد عمل جدول لإعطاء أعداد العمال في ثلاث جهات مختلفة ١ ، ب ، ح في سنين مختلفة . إذا كانت الأعمدة المخصصة في الجدول لهذه الأعداد متجاورة فإننا نبدأ بوضع العنوان الرئيسى (عدد عمال الجهة) وتحت هذا نضع العناوين الفرعية الثلاثة ١ ، ب ، ح وتحت هذه نكتب الأعداد بترتيب السنين . ويوصف التبويب في هذه الحالة بأنه مزدوج .

٥ . إذا أريد الإشارة فيما بعد إلى أحد العناوين أو بعضها فإنه يحسن عدم الاكتفاء بالعناوين بل تمثل الأعمدة والسطور كذلك بحروف أو أعداد مثل ١ ، ب ، ... أو ١ ، ٢ ،

٦ . تذكر الوحدة أو الوحدات في كل حالة بوضوح تام .

٧ . تفصل الأعمدة بخطوط رأسية ويختار لون هذه الخطوط وسمكها بالطريقة التى تجعل القراءة أسهل ما يمكن . ولا يجوز ترك الأعمدة غير مفصولة بخطوط إلا في الجداول الثانوية .

٨ . يخصص لكل عمود فراغ يتناسب مع ضخامة أرقامه وأهميتها النسبية .

٩ . تستخدم المسافات والفواصل عند كتابة الأعداد الكبيرة كما في

١ . إذا لم يذكر مصدر البيانات فإننا نفهم من ذلك أنها بيانات فرضية أو بمهولة المصدر .

١٩٠٩٠٤٤٨ حتى تكون قراءتها سريعة ومضبوطة . وتفصل الجنيهاً عن المليارات فضلاً وازحاً بالعلامات العشرية . وقس على ذلك بالطبع مع أى أعداد أخرى محتوية على أجزاء كسرية .

١٠ . إذا احتوى عمود على علامات عشرية أو علامات أخرى من هذا القبيل فإن هذه العلامات يجب أن تكون كلها فى خط رأسى واحد .

١١ . فى الجداول الطويلة يحسن ترك مسافة كل سطر خامس أو عاشر (أو رابع أو سابع إلخ) حتى يستطيع القارئ تكوين فكرة سريعة عن أوضاع الأرقام فيما بينها . ولا بأس فى الجداول المفرطة الطول من قسمة الجدول إلى أجزاء وطبع هذه الأجزاء بجوار بعضها مادام عرض الصفحة المطبوعة يسمح بذلك .

١٢ . لإظهار العلاقات الكائنة بين أرقام عمود ما يمكننا عند كتابة هذه الأرقام الابتعاد عن هامش العمود مسافة أكبر فى حالة بعض الأرقام . فمثلاً هب أننا نريد عمل جدول يبين أعداد السكان فى ثلاثة تعدادات مع تقسيم القطر إلى محافظات ومديريات ثم إلى أقسام ومراكز . عند كتابة أسماء الأقسام والمراكز يحسن الابتعاد عن الهامش مسافة أكبر من المسافة التى نبدأ عندها بكتابة أسماء المحافظات والمديريات حتى يظهر القسم أو المركز تابعاً للمحافظة أو المديرية . وما يساعد على إظهار هذه العلاقة فى شكل أوضح طبع اسم المحافظة أو المديرية باستخدام حروف أكبر .

١٣ . إذا كانت بعض الأرقام مجهولة فإنه يحسن ترك الأماكن المخصصة لكتابة هذه الأرقام بيضاء إلا إذا كان عدد هذه الأرقام كبيراً . فمثلاً عند عمل جدول لبيان كمية المنتج من الصابون فى المدة ١٩٣٧ - ١٩٤٦ قد نجد أن البيانات اللازمة معروفة لجميع السنين إلا ١٩٤٠ . رغم ذلك يحسن إدخال ١٩٤٠ فى الجدول وترك خانة بيضاء فى العمود للدلالة على أن كمية المنتج فى تلك السنة مجهولة . وفى هذه الحالة يحسن أيضاً عمل إشارة مناسبة فى الحاشية .

لكن لا يجوز وضع شرطة أفقية في العمود أمام ١٩٤٠ لأن هذه قد يفهم منها أنه في تلك السنة لم يصنع أى صابون .

١٤ . إذا أريد لفت النظر إلى أرقام خاصة في الجدول فإن إحدى الطرائق الممكنة لعمل ذلك تتركب من طبع تلك الأرقام باستخدام حروف أكبر . فمثلا عند عمل جدول يبين كمية المنتج في القطر من الأحذية إذا أريد لفت النظر إلى كمية المنتج من مصانع دمياط بصفة خاصة فإن كلمة دمياط والأرقام الدالة على كمية المنتج من مصانعها تطبع باستخدام حروف أكبر . ويمكننا أيضا الوصول إلى نفس النتيجة بوضع الأرقام الدالة على إنتاج دمياط في أعلى الجدول أو في أدناه مع ترك مسافة بين هذه الأرقام والأرقام المجاورة لها . أو في صميم الجدول مع ترك مسافة قبلها وأخرى بعدها .

١٥ . إذا كان الجدول جزءا من تقرير وجب وضعه قريبا ما أمكن من الكلام الخاص به في التقرير وقبل هذا الكلام أو بعده حسب ظروف المسألة . فأحيانا يحسن وضع الجدول قبل الكلام على أن يكون الشرح بعده وأحيانا يحسن إعطاء الشرح أولا فالجدول بعد ذلك . هذه مسائل لا يمكن البت فيها برأى قاطع بل تدرس في كل حالة على حدة للوقوف على الحل المناسب . ويجوز أيضا وضع الجدول بين الكلام .

١٦ . يكتب اسم الجدول فوقه في كل حالة وكذلك الرقم الدال على ترتيبه بين الجداول الأخرى . ويراعى ألا يكون الاسم طويلا مملًا ولا قصيرا غامضا بل يكتب بحيث يستطيع القارئ فهم محتويات الجدول بمجرد قراءته دون أن يحتاج إلى شرح أو تفسير . وإذا كانت البيانات المعروضة في الجدول خاصة بمكان معين ومدة معينة وجب ذكر هذا المكان وهذه المدة في الاسم . ولا بأس من اختصار الاسم في الجداول الثانوية .

١٧ . يطبع الاسم باستخدام حروف أكبر .

٢٩ . أمثلة من الجداول المصنعية . سنعطى في هذا البند أمثلة من

الجدول الإحصائية توضح بعض القواعد العامة التي نص عنها في البنود الثلاثة الأخيرة .

الجدول ٢ يبين عدد سكان مصر في التعدادات السبعة الأخيرة .

الجدول ٢ . عدد سكان مصر في تعدادات ١٨٨٢ - ١٩٤٧

سنة التعداد	عدد السكان ^٢
١٨٨٢	٦ ٨٠٤ ٠٢١
١٨٩٧	٩ ٧١٤ ٥٢٥
١٩٠٧	١١ ٢٨٧ ٣٥٩
١٩١٧	١٢ ٧٥٠ ٩١٨
١٩٢٧	١٤ ٢١٧ ٨٦٤
١٩٣٧	١٥ ٩٣٢ ٦٩٤
١٩٤٧	١٩ ٠٩٠ ٤٤٨

هذا الجدول يمكن اعتباره مثالا لأبسط الجداول الإحصائية الممكنة .
لا شك أن القارئ يفهم بمجرد الاطلاع عليه فاسمه يفسر نفسه بنفسه وكذلك
العنوانان وليس يوجد أدنى شك في معنى أى عدد فيه . زد على ذلك أن الاسم
والعنوانين كلهما قصيرة وهناك الحاشية المعتادة التي تعطى مصدر البيانات
وملاحظة مهمة تفسر بعض النقاط الخاصة بالجدول .

١ الإحصاء السنوى للجيب لسنة ١٩٤٥ (مصلحة عموم الإحصاء والتعداد) ف ١ ص ١ ج ١
(أى الفصل ١ والصفحة ١ والجدول ١) لتعدادات السنة الأولى والنتائج الإجمالية المنشورة
في عدد جريدة الأهرام الصادر صبيحة يوم الأحد ٢٧ أبريل ١٩٤٧ لتعداد السابع .
سنشير إلى أول هذين المصدرين في المستقبل بكتابة حصص (١٩٤٥) .

٢ الأعداد الخمسة الأخيرة تشمل عريان البدو البالغ عددهم حسب المصدرين المذكورين في ١
(حصص ١٩٤٥ لتعدادات ١٩٠٧ - ١٩٣٧ وجريدة الأهرام لتعداد ١٩٤٧) ٩٧٣٨١
في ١٩٠٧ و ٣٢٦٦٣ في ١٩١٧ و ٤٠٠٠٠ في ١٩٢٧ و ١٢٠٠٠ في ١٩٣٧ و ٥٠٠٠٠
في ١٩٤٧ .

الجدول ٣ يوضح قاعدة ترك المسافة كل سطر معين (خامس في هذه الحالة) في الجداول الطويلة وكيفية ذكر الوحدة في الجداول الإحصائية .

الجدول ٣ . محصول القطن في مصر في السنين ١٩٢٠ — ١٩٤٢
(الوحدة : ١٠٠٠ قنطار)

السنة	المحصول	السنة	المحصول
١٩٢٠	٦٠٣٦	١٩٣٢	٤٩٥٦
١٩٢١	٤٣٥٣	١٩٣٣	٨٥٧٥
١٩٢٢	٦٧١٣	١٩٣٤	٧٥٥٥
١٩٢٣	٦٥٣١	١٩٣٥	٨٥٣٥
١٩٢٤	٧٢٧٤	١٩٣٦	٩١٠٧
١٩٢٥	٧٩٦٥	١٩٣٧	١١٠٠٩
١٩٢٦	٧٦٥٢	١٩٣٨	٨٣٤٠
١٩٢٧	٦٠٨٧	١٩٣٩	٨٦٩٢
١٩٢٨	٨٠٦٨	١٩٤٠	٩١٧٠
١٩٢٩	٨٥٣١	١٩٤١	٨٣٧٤
١٩٣٠	٨٢٧٦	١٩٤٢	٤٢٣٣
١٩٣١	٦٣٥٧		

الجدول ٤ يبين كيفية كتابة سلسلة من القيم الأسبوعية لسنة معينة باستخدام ثمانية أعمدة أى عمودين لكل ربع من أرباع السنة أحدهما لكتابة الشهر وتاريخ الأسبوع والآخر لكتابة القيم . ويلحظ أن عدد السطور اللازمة لكتابة السلسلة الأسبوعية بهذه الطريقة هو خمسة عشر وذلك حتى يستطاع كتابة الأسبوع الخامس المحتمل ظهوره في أى شهر من الربع السنوى .

١ الإحصاء السنوى العام لسنة ١٩٤٢ — ٤٣ (مصلحة عموم الإحصاء والتعداد) ف ١١ ص ٤٧٤ ج ١ .

سنشير إلى هذا المصدر في المستقبل بكتابة حسم (١٩٤٢ — ٤٣) .

الجدول ٤ . سعر فيرتشيلد المتوسط لرطل القطن الخام (بضاعة حاضرة) بالسنت في نيويورك سنة ١٩٢٤

التاريخ	السعر	التاريخ	السعر	التاريخ	السعر	التاريخ	السعر
يناير ٥	٣٥,٦٥	أبريل ٥	٢٩,٥٠	يوليو ٥	٣٠,١٨	أكتوبر ٤	٢٦,٢٣
١٢	٣٥,٠٠	١٢	٣١,١٦	١٢	٣٠,٢٦	١١	٢٥,٣٠
١٩	٣٣,٦٤	١٩	٣٠,٦١	١٩	٣١,٨٤	١٨	٢٣,٥٣
٢٦	٣٣,٤٨	٢٦	٢٩,٨٧	٢٦	٣٤,٦٠	٢٥	٢٣,٦٣
فبراير ٢	٣٣,٨١	٣	٢٩,٩٨	أغسطس ٢	٣٢,٢٤	نوفمبر ١	٢٣,٩٩
فبراير ٩	٣٤,١٠	١٠	٣٠,٧٠	أغسطس ٩	٣٠,٨٨	نوفمبر ٨	٢٣,٨٣
١٦	٣٢,٣١	١٧	٣١,٥٩	١٦	٢٩,٩٠	١٥	٢٤,٦٨
٢٣	٣٠,٣٢	٢٤	٣٢,٢٣	٢٣	٢٧,٩٢	٢٢	٢٤,٢٦
مارس ١	٢٩,٢٣	٣١	٣٢,٦٧	٣٠	٢٦,٦٠	٢٩	٢٤,١٢
مارس ٨	٢٨,٤٨	٧	٣٠,٧١	سبتمبر ٦	٢٥,٧٢	ديسمبر ٦	٢٣,٣٠
١٥	٢٨,٧٩	١٤	٢٩,٤٦	١٣	٢٣,٩٣	١٣	٢٣,٤٣
٢٢	٢٩,٠٠	٢١	٢٩,٦٩	٢٠	٢٢,٥٣	٢٠	٢٤,٠١
٢٩	٢٧,٢٧	٢٨	٢٩,٩٠	٢٧	٢٤,٤٦	٢٧	٢٤,٢٢
						يناير ٣	٢٤,٥٨

هذه الأسعار تمثل أوساط الأسعار اليومية للأسبوع المنتهى يوم السبت والخطوط الأفقية الظاهرة في الجدول تفصل الشهور عن بعضها البعض .

الجدول ٥ . استهلاك المصالح الحكومية من المواد البترولية بالطن في سنة ١٩٤٥ - ٤٦

الصنف	الاستهلاك	المستورد من إنتاج العمل	المشتري من الشركات
بنزين	١٧٠٠٠	٧٠٠٠	١٠٠٠٠
كبروسين	٤٠٠٠	٦٠٠٠	
سولار وديزل	٣٨١٩٢	٥٠٠٠	٣٣١٩٢
مازوت	٤٧٧٩٦٤	٣٥٠٠٠	٤٤٢٩٦٤
أسفلت	١٥٠٠٠	٧٠٠٠	٨٠٠٠
فلسكس	٢٥٠	٢٥٠	
زيت تنظيف وخلافة	١٠٠	١٠٠	

1 Fairchild cotton — average price and index number, Daily News Record, January 20, 1925.

الجدول ٦ يبين الحالة الصحية لأطفال مدارس مقاطعة Surrey الإنجليزية في السنين الخمس ١٩٠٨ - ١٩١٢ وقد كان عدد من فحست حالاتهم من الأطفال ٧٩٠٧٠ طفلا . هذا الجدول يمثل إحدى حالات النوع الكيفي للتصنيف الوصفي حسب الدرجة .

الجدول ٦ . الحالة الصحية لأطفال مدارس صرى
في السنين ١٩٠٨ - ١٩١٢

النسبة المئوية لعدد الأطفال	الطائفة
٠,٥	دون المتوسط بكثير
٧,٦	دون المتوسط
٧٦,٥	عند المتوسط
١٥,٤	فوق المتوسط

الجدول ٧ يعطى الدرجات التي حصل عليها عدد من الطلبة في امتحان ما ويمثل حالة مهمة لثاني نوعي التصنيف الوصفي حسب الدرجة - التصنيف الوصفي الكمي .

الجدول ٧ . الدرجات التي حصل عليها ٥٤٤ طالبا في امتحان معين

الدرجة	عدد الطلبة	الدرجة	عدد الطلبة
٦ - ٣	١٢	٣٠ - ٢٧	٦١
١٠ - ٧	١٩	٣٤ - ٣١	١١٢
١٤ - ١١	٢٨	٣٨ - ٣٥	٩٣
١٨ - ١٥	٣٩	٤٢ - ٣٩	٦٥
٢٢ - ١٩	٤٥	٤٦ - ٤٣	٢٤
٢٦ - ٢٣	٤٣	٥٠ - ٤٧	٣

مثالنا الأخير بين ٨١٨ حالة مصنفة تصنيفا وصفيا مركبا أولا حسب التحصين ضد السكوليرا وثانيا حسب النجاة من الإصابة .

الجدول ٨ . العلاقة بين التحصين ضد الكوليرا والإعفاء من الإصابة^١

المجموع	أصيبوا	لم يصابوا	
٢٧٩	٣	٢٧٦	حصنوا
٥٣٩	٦٦	٤٧٣	لم يحصنوا
٨١٨	٦٩	٧٤٩	المجموع

أمثلة عامة

٣٠ . مثال ١ . في يوم الخميس ١٧ أبريل ١٩٤٧ وردت في جريدة الإيجشان جازيت الصادرة بالقاهرة البيانات الآتية تحت عنوان (نفقات المعيشة ترتفع في جميع أنحاء المعمورة) : —

”ارتفعت الأسعار في اليابان بشكل واضح منذ انتهاء الحرب حتى أصبحت في منتصف ١٩٤٦ ٤٨ مرة مما كانت عليه بدلالة الين في ١٩٣٧ . وقد بينت الإحصائيات أن النفقة العامة للمعيشة ارتفعت في الولايات المتحدة إلى ٤٨ في المائة فوق ١٩٣٧ على حين أن أسعار الطعام قفزت ٧٨ في المائة . وارتفعت الأسعار الكندية ٢٦ في المائة والطعام وحده ٤٢ في المائة خلال ديسمبر ١٩٤٦ . وأما البرازيل فقد أصابها زيادة ١٢٥ في المائة في الأسعار عموماً في أغسطس ١٩٤٦ بينما شعرت كوبا بنفس الزيادة في الطعام وحده . وفي بريطانيا العظمى وإيرلندا الشمالية ظلت الأسعار تصعد تدريجياً حتى بلغت في نوفمبر ١٩٤٦ ٣٢ في المائة فوق ١٩٣٧ بينما زاد الطعام ٢١ في المائة أثناء المدة نفسها . وارتفعت أسعار الطعام في فرنسا خلال أغسطس ١٩٤٦ تسع مرات

1 M. Greenwood and G. U. Yule, The statistics of anti — typhoid and anti — cholera inoculations, and the interpretation of such statistics in general, Proc. Roy. Soc. of Medicine, 8(1915), 113.

فوق ١٩٣٧ . وقفزت الأسعار في روما خلال سبتمبر ١٩٤٦ إلى ١٩ مرة مما كانت عليه في ١٩٣٨ وقفز الطعام أكثر من ذلك ٢٥ مرة .
ومن الزيادات الأخرى على أساس ١٩٣٧ زيادة السويد البالغة في سبتمبر ١٩٤٦ ٤٩،٥٠ في المائة بالترتيب في الأسعار العامة وأسعار الطعام .
وزيادة الزويج البالغة ٦٥،٦١ في المائة بالترتيب في أكتوبر ١٩٤٦ . وفي الأراضي المنخفضة ٨٢،١٠١ في المائة بالترتيب في أغسطس ١٩٤٦ . واتحاد جنوب أفريقيا ٤٩،٣٨ في المائة بالترتيب في أغسطس ١٩٤٦ ومكسيكو ٣٠٠ في المائة أكثر للمعيشة والطعام في أكتوبر ١٩٤٦ . والهند الصينية ٢٠٠ في المائة أكثر للمعيشة ، ٢١٠٠ في المائة أكثر للطعام في يوليو ١٩٤٦ . والنمسا زيادة ٤٧ في المائة فوق ١٩٠٨ في أغسطس ١٩٤٦ حسب الأسعار المتفق عليها رسميا فقط .
وقد بلغ التضخم في نفقات المعيشة حده في المجر . ففي بودابست ارتفعت الأسعار خلال مايو ١٩٤٦ إلى ٢٣٥٧٩٥٠٠٠ مرة مما كانت عليه في أغسطس ١٩٣٩ وصعد الطعام إلى ٢٩٩٩٩٣٠٠٠ مرة فوق السنة الأساسية نفسها بدلالة البنجر المجري .“

هل تستحسن وضع هذه البيانات في جدول إحصائي ولماذا؟ بوب
البيانات على أحسن وجه تراه مستخدما ما تعرفه من القواعد العامة للتبويب .
لاشك أن وضع البيانات المعطاة في جدول إحصائي أفيد بكثير من تركها على حالها . فالبيانات في وضعها الحالي مفككة الأوصال لكثرة أرقامها وتعدد الأسول واختلاف الأسس والتواريخ . زد على ذلك أن المقارنة بين الأرقام المختلفة صعبة بالوضع الحالي لها إذا استثنينا الأرقام المجرية فهذه تشبه الأرقام الفلسكية في ضخامتها وواضح جدا أنها أعلى من كافة الأرقام الأخرى .
لعمل الجدول المطلوب تتبع بقدر الإمكان القواعد العامة المعطاة في هذا الفصل . الجدول الآتي يعطى أحد الحلول الممكنة للسألة ويلحظ أننا لم نترك بياناتا واحدا مما جاء في الجريدة المذكورة إلا ووضعهنا في الجدول .

الجدول ٩. الأرقام القياسية لثقة المعيشة والطعام وحده في دول مختلفة خلال ١٩٤٦

الدولة	نقطة الأساس ١٠٠ =	التاريخ	الرقم القياسي	
			ثقة المعيشة	الطعام
أمريكا : الولايات المتحدة	١٩٣٧	يونيو - يوليو	١٤٨	١٧٨
كندا		ديسمبر	١٢٦	١٤٢
البرازيل		أغسطس	٢٢٥	
كوبا		أغسطس		٢٢٥
مكسيكو	١٩٣٧	أكتوبر	٤٠٠	٤٠٠
أوروبا : بريطانيا العظمى وإيرلندا الشمالية	١٩٣٧	نوفمبر	١٣٢	١٢١
فرنسا	١٩٣٧	أغسطس		٩٠٠
إيطاليا	١٩٣٨	سبتمبر	١٩٠٠	٤٤٠٠
السويد	١٩٣٧	سبتمبر	١٥٠	١٤٩
النرويج	١٩٣٧	أكتوبر	١٦٥	١٠١
الأراضي المنخفضة	١٩٣٧	أغسطس	١٨٢	٢٠١
النمسا	١٩٣٨	أغسطس	١٤٧	١٤٧
المجر	أغسطس ١٩٣٩	مايو	١٠ × ٢٣٥٧٩٥	١٠ × ١٩٩٩٣
أفريقيا : اتحاد جنوب أفريقيا	١٩٣٧	أغسطس	١٣٨	١٤٩
آسيا : اليابان	١٩٣٧	يونيو - يوليو	٤٨٠٠	
الهند الصينية	١٩٣٧	يوليو	٢١٠٠	٢٢٠٠

٣١. مثال ٢. حضر جدولاً يعطى بيانات عن الوارد من الخشب إلى المملكة المصرية خلال ١٠ سنين (الأرقام الفعلية غير مطلوبة) ثم تكلم عن الخطوات التي تتخذها عند تحضير مثل هذا الجدول.

أولى الخطوات اللازمة لتحضير الجدول المطلوب هي اختيار الوحدة التي بها نعبّر عن الواردات. أيضاً واضح أننا سنحتاج إلى إظهار القيم الواردة من الخشب كل سنة فضلاً عن الكميات الفعلية الواردة لأن القيم تميل إلى التقلب وهذه التقلبات قد تؤدي إلى شيء من اللبس إذا لم تمثل بوضوح. أنسب الوحدات للتعبير عن الكميات هي الطن المترى القائم (طنق) لبعض أصناف الخشب والكيلو القائم (كق) لباقي الأصناف. أما القيم فتسكن بألوف الجنيهات أو عشرات ألوف الجنيهات.

أسئلة ٣

١. تكلم عن البطاقات الإحصائية كخطوة أولى نحو تبويب البيانات الإحصائية ميكانيكيا . اشرح العملية شرحا وافيا مع ذكر مثال من عندك .
٢. دأبت مصلحة عموم الإحصاء والتعداد منذ زمن على إعداد نشرة دورية عن التجارة الخارجية تستمد بياناتها من مصلحة الجمارك . وقد ورد إلى مصلحة الإحصاء من مصلحة الجمارك ما يفيد بورود كمية من قماش القطن الملون الذي يزن من ٩ إلى ١١ كيلو صافي لكل مائة متر مربع يوم ٢٣ : ٦ : ١٩٤٧ إلى ميناء الإسكندرية وأن جمرك القاهرة قام بتحصيل الرسوم المطلوبة . أما مقدار هذه الكمية فكان ١١٠ كيلو صافي بالوحدة الأصلية أو ١٠٤٧ مترا مربعا بالوحدة الإضافية كما أن قيمتها بالجنيه المصرى كانت ٢٥٧ .

ارسم بطاقة إحصائية عليها من الأعمدة ما يكفي لتمثيل هذا البيان عليها . استخدم الرموز الآتية المستخرجة من الدليل الرسمى الذى وضعته مصلحة الإحصاء لهذا الغرض . ميناء الوصول (١٠) للإسكندرية . الجمرك الذى دفعت له الرسوم (٠٠) لجمرك القاهرة . اسم البلد (٠١) لإنجلترا . اسم الصنف (٤٩٩٥١) لقماش قطن ٩ - ١١ ملون . ومثل التاريخ بمجال مؤلف من عودين أحدهما للسنة والآخر للشهر . وكلا من المقدار بالوحدة الأصلية والقيمة والمقدار بالوحدة الإضافية بمجال مؤلف من سبعة أعمدة .

٣. كيف تستخدم الماكينات الإحصائية فى تبويب البيانات ؟ اكتب تقريرا وافيا عن ضرورة هذه الماكينات ومزاياها .

٤. فى يوم الجمعة ٦ سبتمبر ١٩٤٦ نشرت جريدة الإيجشان جازيت مقالا تحت عنوان (ما كبده الحرب للعالم من أنفس ومال) جاء فيه ضمن أشياء أخرى ما يلى : -

”... أذيع الآن رسميا أن مجموع ما صرفته روسيا على الحرب العالمية الثانية بلغ ٦٠٠٠٠٠٠٠٠٠٠ روبل . فإذا لحظنا أن المعدل الرسمى للمبادلة

هو ٢١ روبل للجنيه فإن هذا يمثل حوالى ٣٠ جنيه أو عبثا قدره ٤٥٠ جنيها على كل ذى أجر من عموم السكان . وفى ألمانيا بلغت نفقات الحرب المجموع الهائل ٥٠٠ رينكسارك . وهذا يمثل حسب معدل ١٩٣٩ للبيادة ٤٦ جنيه أو ما يقرب من ١٣٠٠ جنيه لكل ذى أجر ألماني . وصرفت اليابان ٢٢٢ ين وهذا يمثل حسب معدل ١٩٣٩ للبيادة ١٤ جنيه أو حوالى ٤٢٠ جنيها لكل ذى أجر . أما إيطاليا فقد صرفت ٤٠ ليرة وهذا يمثل حسب معدل ١٩٣٩ القريب من ٩٠ ليرة للجنيه حوالى ٥ أو ٣٣٠ جنيها لكل ذى أجر .“

ثم جاء فى مكان آخر من المقال أن بريطانيا صرفت ٢٠ جنيه أو ١٣٥٠ جنيها لكل ذى أجر وأن الولايات المتحدة صرفت ٧٠ جنيه أو ١٦٠٠ جنيه لكل ذى أجر .

بواب البيانات المذكورة بوضعها فى جدول مناسب يظهر الحقائق بشكل واضح يساعد القارىء على فهمها وإجراء ما يشاء من المقارنات بينها وأضيف إلى نفس الجدول عمودا يعطى عدد ذوى الأجور فى كل دولة من الدول المذكورة فى المقال .

٥ . يزمع قسم الإحصاء بكلية التجارة (جامعة فزاد الأول) البحث فى حياة الطلبة الجامعيين وقد صمم القسم الاستمارة الخاصة بهذا البحث فظهر فيها السؤالان الآتيان :

(١) الحالة المدنية : لم يتزوج أبدا - متزوج - مطلق - أرمل ،

(ب) شعبة التخصص فى السنة التوجيهية : رياضة - علوم - آداب .

صمم جدولا لتبويب نتائج إجابات ألف طالب عن هذين السؤالين .

٦ . انتقد الجدول الآتى كجدول إحصائى معددا عيوبه ثم أعد تصميمه

بعد إدخال ما تراه من تعديلات عليه :

المجموع	غير نقايين		نقايون		أرباب الحرف الشخصية
	١٩٣٧		١٩٤٧		
	النسبة المئوية	العدد	النسبة المئوية	العدد	
					تلاميذ
					تجار
					محامون
					حدادون
					أساتذة ومدرسون
					طباخون
					أطباء
					عربية وحمارون
					صحافيون
					المجموع

الفصل الرابع

التوزيع التكرارى .

٣٣ . المتغير المتصل والمتغير المنفصل من الصفات المهمة التى تميز المتغيرات فى الإحصاء صفة عامة تسمى الاتصال . على أساس هذه الصفة تقسم المتغيرات إلى متغيرات متصلة ومتغيرات منفصلة .

المتغير المتصل هو الذى يستطيع أخذ كل قيمة بين أى قيمتين ممكنتين له . فمثلا المقاييس الطبيعية بكافة أنواعها مثل الطول والوزن والعمر والسعة الحيوية كلها متغيرات متصلة لأنها تستطيع أخذ جميع القيم الحقيقية . بخصوص هذه المتغيرات نلاحظ أنه مهما توخينا الدقة فى قياسها فإن النتيجة قد لا تمثل الحقيقة المطلقة وأن أى تحسين يطرأ على طريقة القياس قد يؤدى إلى نتائج جديدة أقرب إلى الحقيقة من الأولى . هذه المتغيرات المتصلة إذن لا يمكن قياسها بالضبط مهما بلغت درجة الدقة فى القياس وأى نتائج يحصل عليها فى هذا المضمار لا يمكن اعتبارها إلا تقريبا للحقيقة .

والمتغير المنفصل هو الذى لا يستطيع أخذ كل قيمة بين قيمتين ممكنتين له . فمثلا إذا أحصينا عدد أفراد كل أسرة فى بلدة معينة فقد نجد أسرا عدد أفرادها ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٧ أو أى عدد آخر صحيح موجب لسكننا لا نجد بالطبع أسرة عدد أفرادها ٦,٣ . إذن عدد أفراد الأسرة هو متغير منفصل لأنه يستطيع فى هذه الحالة أخذ القيمتين ٦ و ٧ ولا يستطيع أخذ القيمة ٦,٣ مع أن هذه القيمة تقع بين القيمتين الممكنتين ٦ و ٧ وكان المتغير يثبت فى هذه الحالة من القيمة ٦ إلى القيمة ٧ رأسا دون أن يمر بأية قيمة بينهما . أيضا عدد الكلمات المطبوعة على كل صفحة من صفحات كتاب معين وعدد الأوراق فى المحيط الزهرى أو عدد الزهور الشعاعية فى زهرة معينة كلها

أمثلة لمتغيرات منفصلة . هذه المتغيرات بخلاف المتغيرات المتصلة يمكن قياسها بالضبط . لكن هذا يستدعى فى بعض الحالات دقة متناهية ومهارة منقطعة النظير حتى تظهر النتيجة على حقيقتها خالية من كل تقريب . فالمتغير المنفصل أيا كان نوعه لا يستطيع أن يأخذ إلا قيما خاصة معروفة وهذه القيم يمكن قياسها بالضبط لأن أية قيمة أخرى بينها لا يمكن أن تنشأ .

هناك متغيرات كثيرة منفصلة حسب التقسيم السابق ولكنها تعامل معاملة المتغيرات المتصلة لأن القيم المختلفة التى يستطيع أى واحد منها أخذها متقاربة إلى حد يجعل الفرق بين أى اثنين متجاورين منها صغيرا إذا نسب إلى القيمة العامة للمتغير . إذن افترض أن مثل هذه المتغيرات متصل كاف لجميع الأغراض العملية .^١ فمثلا المتغير الذى يدل على عدد سكان دولة ما فى تواريخ مختلفة هو بطبيعة الحال متغير منفصل لأنه متغير صحيح موجب . معنى ذلك هو أنه إذا توخينا منتهى الدقة أمكننا عد السكان إلى آخر نسمة والحصول على النتيجة المطلوبة مضبوطة وخالية من كل تقريب . هذا المتغير له رغم ذلك من الصفات ما يجعله أشبه بالمتغير المتصل منه بالمتغير المنفصل . فالقيمة العامة للمتغير تكون فى العادة كبيرة جدا إذا نسبت إلى أصغر الفروق الممكنة وهو الواحد الصحيح فى هذه الحالة . إذن افترض أن هذا المتغير متصل لا يترتب عليه أى خطأ كبير . لنضرب لذلك مثلا آخر لمتغير من نوع مختلف يقاس بوحدة النقود . أى متغير يقاس بهذه الوحدة لابد أن يكون متغيرا منفصلا للسبب الواضح وهو استحالة تجزئة أصغر الوحدات المعروفة للنقود . فمثلا المتغير الذى يدل على الدخل الكلى لكل فرد فى المملكة المصرية هو متغير منفصل لاستحالة تجزئة المليم وهو أصغر الوحدات المعروفة للنقود فى مصر . لكن لا بأس من اعتبار هذا المتغير متصلا لأن المليم الواحد يمثل

١ هناك حالات لا يكون فيها هذا الافتراض جائزا بحسب بل يكون ضرورة تقتضيها الأعمال الحسابية كما سيظهر فيما بعد (انظر الفصلين الخامس والسادس) .

فى العادة جزءا صغيرا جدا من القيمة العامة للدخل الكلى مثل النسمة الواحدة تمثل جزءا صغيرا جدا من عدد السكان .

٣٤ . التوزيع التكرارى . التوزيع التكرارى هو تصنيف لأشياء بمجموعة كبرى إلى أصناف حسب صفة واحدة مميزة يتغير مقدارها من صنف إلى صنف (التوزيع التكرارى البسيط) أو حسب صفات مميزة تتغير مقاديرها من صنف إلى صنف (التوزيع التكرارى المركب) . أى أن التوزيع التكرارى بنوعيه البسيط والمركب هو تصنيف وصفى عادى لأشياء المجموعة الكبرى . أما الصفات المميزة التى يبنى التوزيع على أساسها فتقسم إلى أقسام يسمى كل قسم منها فئة . والفئات متساوية فى العادة .^١

للتوزيع التكرارى بنوعيه أهمية خاصة فى الإحصاء وبالأخص إذا تساوت فئاته . لناخذ الآن مثالا بسيطا نرى منه كيفية عمل التوزيع التكرارى البسيط فى حالة معينة .

الجدول ١١ يعطى نسب الوفاة فى الآلاف بين الأطفال فى إحدى وستين مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩ ويراد توزيع هذه النسب توزيعا تكراريا . هذه

الجدول ١١ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩

٧٩	٩٨	١١٣	٨٥	١٠٤	٧١	٧١	٥٥	٦٣	٨٨	٣٠
	٦٥	٥٨	١١١	٦٣	١٢١	٧٢	٩٧	٩٦	٦٩	١٠١
	٨٧	١٠٨	٨٩	١١٤	٨١	٨٤	٦٧	١٠٠	٩٩	١٠٠
	٩٤	٦٦	٤٩	٧٥	٤٨	٦٨	٥٧	٦٨	٨٢	٩٨
	٦٤	٧٤	٦١	٨٠	٩٥	٧١	٧١	٩٩	٧٣	٧٦
	٨٥	٧٩	٩٠	٧٠	٧٥	٨٧	٨٠	٥٣	٥٦	٨٤

١ المتغيرات التى تمثل الصفات المميزة للتوزيع التكرارى يجوز أن تكون كلها متصلة أو كلها منفصلة ويجوز أن يكون بعضها متصلا وبعضها منفصلا . ويجوز أيضا أن يكون بعض هذه المتغيرات مكونا من أرقام سلسلة تدل على تراتيب أو من صفات بمعنى الكلمة لا يمكن قياسها بأعداد .

النسب ليست مرتبة فيما بينها . لكن ترتيب النسب فيما بينها لا أهمية له هنا وإنما المهم هو قيمة كل نسبة ^١ . ليس معنى ذلك أن الترتيب عديم الفائدة في المسألة الحالية لأن الترتيب يساعد في الواقع على عمل التوزيع التكرارى المطلوب وإنما معناه هو أن توزيع البيانات على النحو المذكور يتم عادة من غير ترتيبها وبالأخص إذا تركبت البيانات من حدود كثيرة العدد (ألف أو أكثر مثلاً) . في المسألة الحالية لدينا ٦١ نسبة لا غير وهذا عدد صغير فلا بأس إذن من بدء عملية التوزيع التكرارى بترتيب النسب فيما بينها . الجدول ١٢ يعطى الترتيب التصاعدى لهذه النسب .

الجدول ١٢ . نسب الوفاة بين الأطفال في ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩

١٢١	١٠١	٩٨	٨٩	٨٤	٧٩	٧٣	٧٠	٦٥	٥٧	٣٠
	١٠٤	٩٨	٩٠	٨٥	٨٠	٧٤	٧١	٦٦	٥٨	٤٨
	١٠٨	٩٩	٩٤	٨٥	٨٠	٧٥	٧١	٦٧	٦١	٤٩
	١١١	٩٩	٩٥	٨٧	٨١	٧٥	٧١	٦٨	٦٣	٥٣
	١١٣	١٠٠	٩٦	٨٧	٨٢	٧٦	٧١	٦٨	٦٣	٥٥
	١١٤	١٠٠	٩٧	٨٨	٨٤	٧٩	٧٣	٦٩	٦٤	٥٦

من الجدول ١٢ نرى أن أصغر النسب هى ٣٠ وأكبرها هى ١٢١ والفرق بين هاتين النسبتين هو ١٢١ - ٣٠ أى ٩١ . إذا أخذنا فئات متساوية طول كل منها ١٠ وحدات وجعلنا الفئة الأولى تبدأ عند ٣٠ فإن هذه الفئة تمتد من ٣٠ إلى ٣٩ وتكتب ٣٠ - ٣٩ . أما الفئة الثانية فتبدأ عند ٤٠ وتمتد من ٤٠ إلى ٤٩ وتكتب ٤٠ - ٤٩ . ثم تبدأ الفئة الثالثة عند ٥٠ وتمتد من ٥٠ إلى ٥٩ فتكتب ٥٠ - ٥٩ وهلم جرا إلى الفئة الأخيرة التى نبدأ عندها عند ١٢٠ وتمتد إلى ١٢٩ أى ١٢٠ - ١٢٩ . هذه الفئات مكتوبة بالترتيب من فوق إلى تحت فى العمود الأول من الجدول ١٣ ونلاحظ أن عددها فى هذه الحالة يساوى ١٠ .

^١ ليس الترتيب عديم الأهمية على الدوام . مثلاً فى التصنيفات الزمنية يكون للترتيب شأن أى شأن .

للحصول على التوزيع التكرارى المطلوب نشرع الآن فى توزيع النسب المعطاة على الفئات المختلفة . إذا استخدمنا الجدول ١١ فإن النسبة الأولى ٣٠ تقع فى الفئة الأولى ٣٠ - ٣٩ . لذلك نضع أمام هذه الفئة إشارة واحدة كما فى العمود الثانى من الجدول ١٣ . ثم نأخذ النسبة الثانية فنجد أنها تساوى ١٠١ وهذا العدد يقع فى الفئة ١٠٠ - ١٠٩ فنضع أمام هذه الفئة إشارة . ثم نأخذ النسبة الثالثة ١٠٠ . هذا العدد يقع أيضا فى الفئة ١٠٠ - ١٠٩ فنضع أمام هذه الفئة إشارة ثانية وهلم جرا حتى نفرغ من جميع النسب . بهذه الكيفية نحصل على العمود الثانى من الجدول ١٣ ونلاحظ أن كل إشارة خامسة فى هذا العمود موضوعة عبر الإشارات الأربع السابقة لها على نحو ما جاء فى البند ٢١ . بعد ذلك نعد الإشارات خمسا خمسا ونكتب النتيجة فى العمود الأخير . فمثلا عدد الإشارات الموجودة أمام الفئة ٧٠ - ٧٩ هو $3 + 5 \times 2$ أى ١٣ وهذا هو العدد الذى نكتبه أمام هذه الفئة فى العمود الأخير^١ .

أما إذا استخدمنا الجدول ١٢ فإننا نرى أن النسبة الأولى أى ٣٠ هى النسبة الوحيدة المنتمية إلى الفئة الأولى ٣٠ - ٣٩ فنكتب أمام هذه الفئة العدد ١ . ثم نمضى إلى الفئة الثانية ٤٠ - ٤٩ فنجد أن هناك نسبتين منتميتين إليها أى ٤٨ ، ٤٩ فنكتب أمامها العدد ٢ ونمضى إلى الفئة الثالثة ٥٠ - ٥٩ فنجد أن النسب المنتمية إلى هذه الفئة هى ٥٣ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ وعدد هذه خمس فنكتب أمام الفئة الثالثة العدد ٥ وهلم جرا حتى نفرغ من جميع النسب . وواضح أن الحصول على التوزيع التكرارى المطلوب أسهل فى هذه الحالة بكثير منه فى الحالة الأولى وأن العملية تتم الآن بكتابة الأعداد المطلوبة رأسا أمام فئاتها أى من غير حاجة إلى استخدام عمود الإشارات المساعد .

فى كلتا الحالتين نحصل على التوزيع التكرارى المطلوب ويسمى الجدول

١ إذا كانت البيانات مكونة من حدود كثيرة العدد فإن عملية العد تحتاج إلى وقت طويل وفى هذه الحالة يحسن استخدام ماكينات التيوب .

الجدول ١٣ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩

نسبة الوفاة	عدد المقاطعات	عدد المقاطعات
٣٠ - ٣٩	/	١
٤٠ - ٤٩	//	٢
٥٠ - ٥٩	///	٥
٦٠ - ٦٩	///	١٠
٧٠ - ٧٩	///	١٣
٨٠ - ٨٩	///	١٢
٩٠ - ٩٩	///	٩
١٠٠ - ١٠٩	///	٥
١١٠ - ١١٩	///	٣
١٢٠ - ١٢٩	/	١
		٦١

الناتج جدولاً تكرارياً بسيطاً . أما العدد المكتوب فى الجدول أمام أية فئة فيسمى التكرار المناظر لتلك الفئة وبمجموع التكرارات فى هذه الحالة هو ٦١ أى عدد النسب الأصلية . هذا المجموع يسمى التكرار السكى للتوزيع ١.

بمقارنة الجدول التكرارى ١٣ بالجدول الأصلى ١١ أو ١٢ نرى أن معالم النسب الأصلية قد اختفت تماماً بمعنى أن النسب أصبحت الآن غير معروفة إلا إلى أقرب عشر وحدات . ذلك لأن كل ما استطاع معرفته من الجدول ١٣ هو أن هناك نسبة وفاة واحدة بين ٣٠ ، ٣٩ ونسبتين بين ٤٠ ، ٤٩ وخمسة بين ٥٠ ، ٥٩ إلخ . لكن قيم هذه النسب إلى أقرب وحدة لا يمكن معرفتها من الجدول التكرارى وحده . رغم ذلك نجد أن توزيع النسب توزيعاً

١ إذا اعتبرنا التكرار السكى كأنه ١٠٠ فى المائة فإن التكرارات تتحول إلى نسب مئوية من التكرار السكى ويصبح مجموعها ١٠٠ . هذا التحويل يكون مفيداً بنوع خاص متى أريد المقارنة بين توزيعين تكرر بين مختلفين .

تكراريا كما فى الجدول ١٣ يكسبها معان جديدة لم تكن لها من قبل مما يجعل الجدول التكرارى أهم بكثير من جدول بسيط مثل ١١ أو ١٢ . فمثلا بمجرد النظر إلى الجدول ١٣ نرى أن نسب الوفاة تتكاثر فى الفئة ٧٠ - ٧٩ ثم يقل عددها على جانبى هذه الفئة بالتدرج إلى طرفى التوزيع حيث توجد نسبة واحدة فى الفئة الأولى ونسبة واحدة فى الفئة الأخيرة .

٣٥ . عدد الفئات فى الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية . فى المثال السابق أخذنا طول الفئة يساوى ١٠ فى الألف فكان عدد الفئات اللازمة ١٠ . ولو أننا أخذنا طول الفئة يساوى ٥ فى الألف بدلا من ١٠ فى الألف لكان عدد الفئات ١٩ ولو أننا أخذنا طول الفئة يساوى ١٥ فى الألف لكان عدد الفئات ٧ . واضح إذن أن هناك علاقة تربط الأشياء الثلاثة طول المدى أى الفرق بين أصغر الحدود التى تتركب البيانات منها وأكبر هذه الحدود وطول الفئة وعدد الفئات . فى أية حالة معينة إذا اخترنا طول الفئة فإن عدد الفئات يتحدد وإذا اخترنا عدد الفئات فإن طول الفئة يتحدد . والآن نريد أن نبحث أولا عن قواعد عامة لاختيار طول الفئة ثم عن قواعد عامة لاختيار عدد الفئات .

يختار طول الفئة بالكيفية التى تتفق مع ظروف المسألة . فلا يكون الطول صغيرا بالنسبة إلى المدى فتظهر البيانات مفصلة أكثر مما يجب ولا كبيرا فتظهر البيانات مجملة أكثر مما يجب . فمثلا لا يجوز اختيار طول الفئة صغيرا إلى الحد الذى يجعل نصيب بعض الفئات الواقعة فى أجزاء المدى الرئيسية من البيانات لا شئ . أيضا إذا اتضح أن هناك تحيزا واضحا من جانب البيانات لبعض الأعداد وليكن للأعداد الصحيحة أو المضاعفات ١٠ فى هذه الحالة يجب أن يختار طول الفئة بحيث يكون نصيب كل فئة من هذه الأعداد واحدا ويحسن ألا تحتوى الفئة الواحدة على أكثر من واحد من هذه الأعداد . فمثلا فى البيانات الخاصة بالآعمار نلاحظ أن أكثر الناس يعطون العدد الصحيح من السنين ولا يأبهون بإعطاء الشهور حتى ولو كان عددها

أحد عشر بل إن بعضهم يعطى عمره مقرباً إلى أقرب خمس سنين أو عشر .
 فلكي نعالج هذه الحالة نأخذ طول الفئة يساوى سنة أو أكثر ولا نأخذ
 أقل من سنة لأننا لو بنينا التوزيع على فئة طولها أقل من سنة فإن هذا يترتب
 عليه إعطاء الفئات التى تمثل سنين صحيحة أعماراً غير متممة إليها وحرمان
 الفئات التى تمثل كسوراً من السنة من أعمار متممة إليها . وإذا كان المتغير منفصلاً
 فإن الطول الطبيعى للفئة يكون وحدة القياس . فمثلاً فى البيانات الخاصة بعدد
 أفراد الأسر نختار الفئات الطبيعية ١ ، ٢ ، ٣ وهلم جرا إلى عدد الأفراد فى
 أكبر أسرة معروفة . فإن كان المدى كبيراً فإننا نأخذ طول الفئة مساوياً لعدد
 صحيح من الوحدات ونختار هذا العدد بالسكيفية التى تلائم ظروف المسألة
 ولنذكر دائماً أن الفئات ذات الطول ٥ أو ١٠ أو ١٥ أو ٢٠ أو غير ذلك من
 الأعداد المنتسبة إلى ١٠ خير من غيرها مثل ٣ أو ٧ أو ١١ إلخ .

هذا فيما يتعلق بطول الفئة . وفيما يتعلق بعدد الفئات يراعى عادة ألا يكون
 هذا العدد أصغر من ١٢ وفيما عدا هذه القاعدة العامة البسيطة لا توجد قواعد
 ثابتة تحدد العدد بالضبط . غير أن بعض المؤلفين^١ يرى ألا يكون عدد
 الفئات أصغر من ١٠ ولا أكبر من ٢٠ أى أن يكون عدد الفئات حوالى ١٥
 فى المتوسط ويشترط هذا البعض لتطبيق القاعدة أن يكون المتغير متصلاً
 والتكرار الكلى أكبر من أو يساوى ١٠٠ . فإن كان التكرار الكلى أصغر
 من ١٠٠ جاز كسر القاعدة بأخذ عدد من الفئات أصغر من ١٠ وذلك حتى
 لا يكون التوزيع مخلخلاً . ويرى بعض آخر^٢ ألا يكون عدد الفئات أصغر
 من ١٥ ولا أكبر من ٢٥ أى أن يكون عدد الفئات حوالى ٢٠ فى المتوسط .
 لتطبيق هذه القاعدة الأخيرة نقسم المدى على عدد واقع بين ١٥ ، ٢٥ للحصول
 على تقدير تقريبي لطول الفئة وعلى أساس هذا التقدير نختار طول الفئة الذى
 يلائم ظروف المسألة .

1 H.O. Rugg, Statistical Methods Applied to Education, 83 — 86.

2 G. U. Yule, Introduction to the Theory of Statistics, 79.

٣٦. **مرود الفئات والطرائق المختلفة للتعبير عنها**. فى المثال المذكور فى البند ٣٤ أخذنا طول الفئة يساوى ١٠ فى الألف وجعلنا الفئة الأولى تبدأ عند ٣٠ فى الألف فكانت هذه الفئة ٣٠ - ٣٩. ولو أننا جعلنا هذه الفئة تبدأ عند ٢٥ بدلا من ٣٠ فى الألف لكانت هذه الفئة ٢٥ - ٣٤. والواقع أنه كان يمكننا جعل هذه الفئة تبدأ عند أى واحد من الأعداد العشرة ٢١، ٢٢، ٢٣، ٢٤، ٢٥، ٢٦، ٢٧، ٢٨، ٢٩، ٣٠. لكن على فرض أننا قررنا جعل الفئة الأولى تبدأ عند ٣٠ لماذا اخترنا الصيغة ٣٠ - ٣٩ للتعبير عن هذه الفئة وقد كان يمكننا التعبير عنها بدلالة صيغ أخرى مثل "٣٠ إلى ٤٠" أو "٣٠ ودون ٤٠" إلخ؟ سنبحث الآن هاتين المسألتين بالترتيب : مسألة اختيار حدود الفئات على محور المتغير ومسألة التعبير عن هذه الحدود .

تختار حدود الفئات بالسكيفة التى تلائم ظروف المسألة . فمثلا فى المثال السابق بالرجوع إلى الجدول ١٢ نرى أنه إذا جعلنا الفئة الأولى تبدأ عند أى عدد غير ٣٠ ، ٢٩ يكون نصيب الفئة الثانية من البيانات لاشئ . وإذا جعلنا الفئة الأولى تبدأ عند ٢١ أو ٢٢ أو ٢٣ فإن نصيب الفئة الثانية والثالثة أيضا يكون لاشئ . أيضا إذا ظهر تحيز من جانب البيانات لقيم خاصة للمتغير فى هذه الحالة يجب أن تختار حدود الفئات بحيث تقع تلك القيم إن أمكن عند منتصفات الفئات . لكن اختيار حدود الفئات طبقا لهذه القاعدة لا يكون ممكنا إلا إذا كانت القيم المذكورة موزعة بانتظام على محور المتغير وفرقها المشترك يساوى طول الفئة . أيضا يراعى عند اختيار حدود الفئات جعل قيم المتغير الواقعة عند منتصفات الفئات أعدادا صحيحة كلما أمكن ذلك . ولاحظ دائما أن الفئات التى تبدأ وتنتهى عند أعداد صحيحة أو عند كسور عشرية بسيطة خير من غيرها .

تلك هى القواعد العامة التى يخضع لها اختيار حدود الفئات ولنبحث الآن عن كيفية التعبير عن هذه الحدود . لعمل ذلك طرائق كثيرة . فمثلا فى الجدول ١٣ يمكننا أن نكتب العمود الأول فى أية واحدة من الصيغ الآتية :

(و)	(هـ)	(د)	(ح)	(ب)	(ا)
٣٥	٣٩ —	— ٣٠	٤٠ ودون ٣٠	٤٠ — ٣٠	٣٩ — ٣٠
٤٥	٤٩ —	— ٤٠	٥٠ " ٤٠	٥٠ — ٤٠	٤٩ — ٤٠
٥٥	٥٩ —	— ٥٠	٦٠ " ٥٠	٦٠ — ٥٠	٥٩ — ٥٠
٦٥	٦٩ —	— ٦٠	٧٠ " ٦٠	٧٠ — ٦٠	٦٩ — ٦٠
٧٥	٧٩ —	— ٧٠	٨٠ " ٧٠	٨٠ — ٧٠	٧٩ — ٧٠
٨٥	٨٩ —	— ٨٠	٩٠ " ٨٠	٩٠ — ٨٠	٨٩ — ٨٠
٩٥	٩٩ —	— ٩٠	١٠٠ " ٩٠	١٠٠ — ٩٠	٩٩ — ٩٠
١٠٥	١٠٩ —	— ١٠٠	١١٠ " ١٠٠	١١٠ — ١٠٠	١٠٩ — ١٠٠
١١٥	١١٩ —	— ١١٠	١٢٠ " ١١٠	١٢٠ — ١١٠	١١٩ — ١١٠
١٢٥	١٢٩ —	— ١٢٠	١٣٠ " ١٢٠	١٣٠ — ١٢٠	١٢٩ — ١٢٠

وهناك صيغ أخرى لا تختلف عن هذه كثيرا . فمثلا يجوز استبدال الصيغة (ح) بالصيغة الأدق " أكبر من أو يساوى ٣٠ وأصغر من ٤٠ " إلخ أو بالصيغة المشابهة " أكبر من ٢٩ وأصغر من أو يساوى ٣٩ " إلخ أو " أكبر من ٢٩ إلى ٣٩ " إلخ كما يجوز استبدال كلمة (دون) بكلمتي (أصغر من) أو (أقل من) أو استبدال (ودون) بكلمة (إلى) إلى غير ذلك من التعبيرات البسيطة . لكن الصيغ الست المبينة هي الصيغ الرئيسية المستخدمة .

(١) هي الصيغة التي استخدمناها في الجدول ١٣ وهي صيغة بسيطة ذات معنى واضح وخالية من كل عيب .

واضح أن الصيغة (ب) يعيها الإبهام المتسبب عن تداخل الفئات . فمثلا تظهر القيمة ٤٠ في كلتا الفئتين الأولى والثانية على حين أن هذه الصيغة يقصد بها عادة ٣٠ ودون ٤٠ ، ٤٠ ودون ٥٠ ، إلخ فيترتب على ذلك تعرض الإنسان عند استخدامها للخطأ حتى ولو كان على حذر . لكن هذه الصيغة تستخدم أحيانا بشكل آخر حيث يقصد بها توزيع القيم ٤٠ بالتساوى على الفئتين الأولى والثانية والقيم ٥٠ بالتساوى على الفئتين الثانية والثالثة إلخ .^١ في هذه الحالة يكون

١ يجوز أيضا عند استخدام (ب) توزيع القيم ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ إلخ على الفئات المجاورة بنسبة التكرارات قبل توزيع هذه القيم وذلك هي الطريقة الثالثة لاستخدام (ب) .

تداخل الفئات صحيحا ولا يتسبب عنه أى إبهام . إذا استخدمنا (ب) بهذا المعنى الأخير مع بيانات الجدول ١١ نحصل باستخدام الجدول ١٢ على التوزيع التكرارى الآتى لتلك البيانات :

الجدول ١٤ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩

نسبة الوفاة	عدد المقاطعات
٣٠ — ٤٠	١
٤٠ — ٥٠	٢
٥٠ — ٦٠	٥
٦٠ — ٧٠	١٠ $\frac{1}{2}$
٧٠ — ٨٠	١٣ $\frac{1}{2}$
٨٠ — ٩٠	١١ $\frac{1}{2}$
٩٠ — ١٠٠	٩ $\frac{1}{2}$
١٠٠ — ١١٠	٤
١١٠ — ١٢٠	٣
١٢٠ — ١٣٠	١
	٦١

لكن استخدام (ب) بهذا المعنى ليس عاديا وتبقى هذه الصيغة فى ما هى فيه من إبهام . لكنها رغم هذا العيب الواضح صيغة مشهورة وكثيرة الاستخدام .

(ج) صيغة ذات معنى واضح وهى أدق الطرائق الست وأكثرها وضوحا . لكنها أطول بعض الشيء من (١) ، (ب) .

(د) ، (هـ) صيغتان الغرض منهما اختصار الصيغة (١) إلى أقصى الحدود الممكنة وهما الصيغتان المستخدمتان فى هذا الكتاب وبالأخص (د) .

(و) صيغة أخرى مختصرة مثل (د) ، (هـ) يعبر فيها عن الفئات بدلالة منتصفاتها . هذه الصيغة تختلف عن كل الصيغ الأخرى (١) — (هـ) وهى

قليلة الاستخدام .

٣٧. مراكز الفئات . مركز الفئة فى أى توزيع تكرارى هو قيمة المتغير الواقعة فى منتصف المسافة بين الحدين الأدنى والأعلى للفئة أو هو منتصف الفئة . فمثلا فى التوزيع التكرارى المناظر للجدول ١٣ بما أن طول الفئة يساوى عشر وحدات إذن مركز الفئة يقع على مسافة خمس وحدات من الحد الأدنى للفئة وأيضا على مسافة خمس وحدات من الحد الأعلى لها . هذا يضع مركز الفئة الأولى عند $30 + 5$ وأيضا عند $40 - 5$ أو 35 فى كلتا الحالتين . بما أن المركز فى هذا المثال يساوى $30 + 5$ وأيضا يساوى $40 - 5$ إذن يمكننا أن نقول إن المركز يساوى مجموع هذين العددين مقسوما على ٢ أو $\frac{30 + 40}{2}$. هذا يوضح المبدأ العام الآتى :

$$(1) \quad \text{المركز} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

فى المثال السابق فرضنا ضمنا أن الأعداد التى تمثل نسب الوفاة مضبوطة فكان الحد الأدنى للفئة الأولى ٣٠ وحدها الأعلى ٤٠ ومركزها ٣٥ . نفرض الآن أن الأعداد التى تمثل نسب الوفاة ليست مضبوطة ولكنها مقربة إلى أقرب وحدة . واضح فى هذه الحالة أن العدد ٣٠ لا يمثل النسبة ٣٠ . حسب بل إنه يمثل أية نسبة أكبر من ٢٩,٥ وأصغر من أو تساوى ٣٠,٥ أى أية نسبة ابتداء من ٢٩,٥ إلى ٣٠,٥ . إذن الحد الأدنى للفئة الأولى فى هذه الحالة لا يكون ٣٠ بل ٢٩,٥ . بالمثل حدها الأعلى يكون ٣٩,٥ . بتطبيق القانون (١) نرى أن مركز الفئة الأولى فى هذه الحالة هو $\frac{29,5 + 39,5}{2} = 34,5$ أى أن المركز يتحرك نصف وحدة إلى يسار وضعه الأول .

هذا المثال البسيط يوضح ضرورة الاعتناء بإيجاد حدى الفئة بالضبط إذا أردنا الحصول على المركز المضبوط للفئة . إذا كان المتغير منفصلا فإن حدى الفئة يكونان فى العادة واضحين . فمثلا إذا صنفنا متاجر التجزئة حسب عدد السلع فى كل منها وكانت الفئات ١ - ١١, ١٠ - ٢١, ٢٠ - ٣٠ ، إلخ فمن

الجلى الواضح أن الحدود الدنيا للفئات المتتالية تكون ١، ١١، ٢١، إلخ. والحدود العليا ١٠، ٢٠، ٣٠، إلخ. ويكون مركز الفئة الأولى $\frac{1+10}{2}$ أو ٥,٥ ومركز الفئة الثانية ١٥,٥ ومركز الفئة الثالثة ٢٥,٥ إلخ. أما إذا كان المتغير متصلا فإن المسألة لا تكون على هذا النحو من البساطة كما بينا في مثال سابق.

لنأخذ مثالين آخرين. نفرض أننا قسمنا أطول قامات جماعة من الذكور المكلفين بالبوصات إلى أقرب ثمن بوصة ثم صنفنا هؤلاء الذكور حسب طول القامة مستخدمين لهذا الغرض الفئات ٦٠ - $60\frac{7}{8}$ - $61\frac{1}{8}$ - $61\frac{3}{4}$ - ٦٢ - $62\frac{1}{4}$ - إلخ. إذا فكرنا قليلا نرى أن الأعداد المكتوبة لا تمثل في هذه الحالة حدود الفئات المتتالية. فثلا اعتبر الفئة الأولى. بما أن أطوال القامات صحيحة إلى أقرب ثمن بوصة إذن أى رجل له قامة يتراوح طولها بين $59\frac{1}{16}$ - $60\frac{1}{16}$ بوصة ينتمى إلى الفئة الأولى ولا ينتمى إلى هذه الفئة إلا من يحقق هذا الشرط من الجماعة. إذن حدا الفئة الأولى ليسا ٦٠، ٦١ وإنما $59\frac{1}{16}$ - $60\frac{1}{16}$. بتطبيق (١) ينتج أن مركز هذه الفئة هو $\frac{59\frac{1}{16} + 60\frac{1}{16}}{2} = 59\frac{2}{16} = 59\frac{1}{8}$.

أى $60\frac{7}{16}$. بالمثل الفئة الثانية هي $60\frac{1}{16}$ - $61\frac{1}{16}$ ومركزها هو $61\frac{7}{16}$ وهلم جرا مع باقى الفئات. وإذا قسمنا أطوال القامات بالسنتيمترات إلى أقرب سنتيمتر فإن الفئة "أ كبر من أو يساوى ١٥٠ وأصغر من ١٥٣" يقصد بها الفئة "أ كبر من أو يساوى ١٤٩,٥ وأصغر من ١٥٣,٥" فيكون حدا الفئة عبارة عن ١٤٩,٥، ١٥٣,٥ والمركز حسب (١) هو $\frac{149.5 + 153.5}{2}$ أى ١٥١,٥. من هذه الأمثلة نرى أنه عند استخدام أية واحدة من الصيغ (١) - (هـ) المذكورة فى البند السابق ليس ضروريا أن تكون الحدود المكتوبة للفئات مساوية للحدود الحقيقية. هذه الحدود الحقيقية لا يمكن أن تعرف إلا إذا عرفت دقة المقاييس. فإذا عرفت هذه الدقة أمكن معرفة الحدود الحقيقية للفئات وأيضا مراكزها الحقيقية وفى هذه الحالة يمكننا أن نعبر عن أية فئة بدلا لمركزها كما

فى الصيغة (و) السالف ذكرها . وإذا لم نعرف دقة المقاييس فلا يمكن معرفة الحدود الحقيقية للفئات وبالتالى لا يمكن التعبير عن أية فئة بدلالة مركزها تعبيرا مضبوطا . فى هذه الحالات سنفرض دائما أن المقاييس مضبوطة فتكون الحدود الحقيقية للفئات مساوية لحدودها المكتوبة والمراكز الحقيقية للفئات مساوية لمراكزها التقريبية الناتجة من استخدام (١) مع الحدود المكتوبة للفئات .

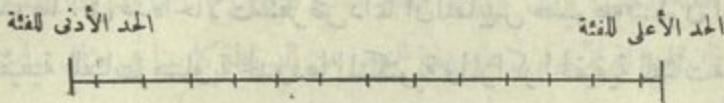
٣٨ . الفرض المركزى . ذكرنا قرب آخر البند ٣٤ ما يفهم منه أن تلخيص البيانات المفصلة بتوزيعها توزيعا تكراريا يفقدها معالمها الأصلية . فمثلا بعد توزيع بيانات الجدول ١١ توزيعا تكراريا على فئات طول كل منها عشر وحدات كما فى الجدول ١٣ لا نستطيع من هذا الجدول وحده معرفة أية نسبة من النسب الأصلية إلا إلى أقرب عشر وحدات . فالنسب المنتمية إلى أية فئة تقع بين حدى الفئة ولا يعرف عنها أكثر من ذلك وواضح أن هذا عيب لا يحتمل للتوزيع التكرارى .

لإصلاح هذا العيب جرت العادة على عمل فرض يمكننا من إعطاء قيم معينة للحدود المنتمية إلى كل فئة فى التوزيع . سنسمى هذا الفرض الفرض المركزى ونصيغه كما يأتى : الحدود المنتمية إلى أية فئة فى توزيع تكرارى توزع داخل الفئة بحيث تكون المسافة بين أصغر هذه الحدود والحد الأدنى للفئة والمسافة بين أكبر الحدود والحد الأعلى للفئة متساويتين وكلتاهما تساوى نصف المسافة بين أى حدين متجاورين من حدود الفئة .

أما إبعاد الحدين الأول والآخر من الحدود المنتمية إلى الفئة عن الحدين الأدنى والأعلى للفئة فوسيلة الغرض منها تحاشي الصعوبة الناتجة من انطباق حد موضوع عند أحد طرفى الفئة على حد موضوع عند طرف الفئة المجاورة^١ . الشكل ١٢ يوضح الفرض المركزى بطريقة بيانية بسيطة . فى هذا الشكل نرى فئة محتوية على ١٣ حدا موزعة بانتظام داخلها والمسافة بين أول هذه الحدود وأو

آخرها وبين الطرفين المجاور للفئة تساوى نصف المسافة بين حدين متجاورين .

الشكل ١٢ . الفرض المركزى



لنأخذ مثالا بسيطا نوضح به طريقة استخدام الفرض المركزى لإعطاء قيم معينة للحدود المنتمة إلى كل فئة فى التوزيع . الفئة الخامسة ٧٠ - ٧٩ فى التوزيع التكرارى المناظر للجدول ١٣ تحتوى على ١٣ نسبة . باستخدام الشكل ١٢ نرى أن المسافة بين نسبتي متجاورتين تساوى $\frac{1}{13}$ أو ٠,٧٧، تقريبا والمسافة بين أول النسب الثلاث عشرة والحد الأدنى للفئة أو بين آخر النسب والحد الأعلى للفئة تساوى $\frac{9}{13}$ أو ٠,٣٨، تقريبا . إذن القيم التى يجب إعطاؤها حسب الفرض المركزى للنسب الثلاث عشرة هى بالترتيب ٣٨, ٧٠, ١٥, ٧١, ٩٢, ٧١, ٦٩, ٧٢, ٤٦, ٧٣, ٢٣, ٧٤, ٧٥, ٧٧, ٧٥, ٧٦, ٥٤, ٧٦, ٣١, ٧٧, ٠, ٧٨, ٨٥, ٧٨, ٦٢, ٧٩. بالرجوع إلى الجدول ١٢ نجد أن القيم الفعلية لهذه النسب هى بالترتيب ٧٠, ٧١, ٧١, ٧١, ٧١, ٧٢, ٧١, ٧٣, ٧٤, ٧٥, ٧٥, ٧٦, ٧٩. هذه القيم مختلفة عن القيم النظرية حسب الفرض المركزى ١. بافتراض صحة الفرض المركزى ينتج أنه إذا أردنا أن نمثل جميع الحدود المنتمة إلى فئة ما من فئات التوزيع التكرارى بقيمة واحدة فإن تلك القيمة يجب أن تكون مركز الفئة لأن الحدود موزعة حسب الفرض بانتظام على جانبي المركز . فمثلا النسب الثلاث عشرة المنتمة إلى الفئة ٧٠ - ٧٩ فى التوزيع التكرارى المناظر للجدول ١٣ تمثل كلها بالقيمة ٧٥. والآن نتساءل هل صحيح

١ إذا كان المتغير منفصلا والفئة لاتساوى وحدة القياس فواضح أن الفرض المركزى لا يكون مناسباً فى هذه الحالة لأن المتغير المنفصل كما نعلم لا يأخذ إلا قيما خاصة . ويبدو أن الفرض الذى يتفق مع المطلق فى هذه الحالة هو أن الحدود المنتمة إلى أية فئة فى التوزيع توزع على الأماكن الممكنة داخل الفئة بحيث تشغل هذه الأماكن بأعداد متساوية من الحدود . هذا الفرض الجديد معقول فى ذاته لكنه ليس عمليا .

أن المركز يمثل جميع الحدود المنتمة إلى الفئة تمثيلا عادلا لا تحيز فيه ؟ بالرجوع إلى الجدول ١٢ مرة أخرى نجد أن من بين الثلاث عشرة نسبة المنتمة إلى الفئة ٧٠ - ٧٩ ذات المركز ٧٥ تقع ثمان (٧٠، ٧١، ٧١، ٧١، ٧١، ٧١، ٧١، ٧١) تحت المركز وثنان (٧٥، ٧٥) على المركز نفسه وثلاث (٧٦، ٧٩، ٧٩) فوق المركز . إذن تمثيل النسب الثلاث عشرة في هذه الحالة بمركز الفئة ليس من العدل في شيء . لنأخذ مثالين آخرين . في الفئة ٩٠ - ٩٩ ذات المركز ٩٥ من نفس التوزيع التكرارى تسع نسب ثنتان منها (٩٠، ٩٤) واقعتان تحت المركز وواحدة (٩٥) على المركز نفسه وست (٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٨، ٩٩، ٩٩) فوق المركز . أيضا النسبة الوحيدة ١٢١ المنتمة إلى الفئة الأخيرة ١٢٠ - ١٢٩ واقعة تحت المركز . وفي كلتا الحالتين نرى أن المركز لا يمثل النسب المنتمة إلى الفئة تمثيلا عادلا لأن عدد النسب الواقعة على أحد جانبي المركز أكبر من العدد الواقع على الجانب الآخر . لكن هذا ربما كان راجعا إلى قلة البيانات في هذه الحالة أو إلى أن الفئات طويلة نوعا ما . فقد وجد في الحالات التي فيها تكون البيانات أكثر من ذلك أن الحدود الواقعة على أحد جانبي مركز الفئة تتعادل مع الحدود الواقعة على الجانب الآخر من المركز تعادلا يكاد يكون تاما كما وجد أيضا أن الفئات القصيرة تجعل المركز يمثل الحدود المنتمة إلى الفئة تمثيلا أقرب إلى العدل من الفئات الطويلة .

في ضوء هذه النتائج يمكننا أن نعتبر المركز أفضل القيم الممكنة لتمثيل الحدود المنتمة إلى الفئة وبالأخص إذا كانت البيانات كثيرة والفئات قصيرة . إذا لم يتحقق أحد هذين الشرطين فإن المركز قد لا يكون أفضل القيم تمثيلا للحدود . فمثلا إذا كانت الفئات طويلة جدا فواضح أن بعض الحدود المنتمة إلى الفئة يقع بعيدا جدا عن المركز . ويترتب على ذلك خطأ كبير عند تمثيل هذه الحدود به . لكن حتى إذا لم يتحقق الشرطان فلا بأس من

استخدام المركز لتمثيل الحدود لأنه فى الحقيقة أوجه القيم الممكنة جميعها وأيضا أبسطها ولأن الخطأ الناشئ من تمثيل الحدود به ليس كبيرا فى العادة لأن عدد الحدود الواقعة تحته فى أية فئة يساوى فى المتوسط عدد الحدود الواقعة فوقه وأى خلل يحدث فى إحدى الفئات يتعادل فى العادة مع خلل مضاد له فى فئة أخرى .

٣٩ . أمثلة من الجداول التكرارية ذات الفئات المتساوية . فى هذا البند تعطى أربعة أمثلة من الجداول التكرارية العملية ذات الفئات المتساوية . مثل هذه الجداول يمكن الحصول عليها بسهولة من الدوريات الإحصائية وبالأخص Biometrika التى توجد منها لحسن الحظ مجموعة تامة فى مكتبة كلية الطب بجامعة فؤاد الأول .

الجدول ١٥ . أطوال قامات جنود الرديف فى جيش الولايات المتحدة بالبوصات ١

عدد الجنود	الطول	عدد الجنود	الطول
٣٤٧٥	— ٦٥	١	— ٥١
٤٠٥٤	— ٦٦	١	— ٥٢
٣٦٣١	— ٦٧	٢	— ٥٣
٣١٣٣	— ٦٨	١	— ٥٤
٢٠٧٥	— ٦٩	٣	— ٥٥
١٤٨٥	— ٧٠	٧	— ٥٦
٦٨٠	— ٧١	٦	— ٥٧
٣٤٣	— ٧٢	١٠	— ٥٨
١١٨	— ٧٣	١٥	— ٥٩
٤٢	— ٧٤	٥٠	— ٦٠
٩	— ٧٥	٥٢٦	— ٦١
٦	— ٧٦	١٢٣٧	— ٦٢
٢	— ٧٧	١٩٤٧	— ٦٣
		٣٠١٩	— ٦٤
٢٥٨٧٨			

1 K. Pearson, Skew variation in homogeneous material, Phil. Trans. Roy. Soc., A, clxxxvi (1895), 343.

الجدول ١٦ . شدة التغميم في جرينتش أثناء يوليو للسنتين ١٨٩٠ - ١٩٠٤ (عدا ١٩٠١)^١

شدة التغميم	عدد مرات الرصد	شدة التغميم	عدد مرات الرصد
٠	٣٢٠	٦	٥٥
١	١٢٩	٧	٦٥
٢	٧٤	٨	٩٠
٣	٦٨	٩	١٤٨
٤	٤٥	١٠	٦٧٦
٥	٤٥		١٧١٥

الجدول ١٧ . الزهور الشعاعية في الكريسانثيم لوكاشيم^٢

عدد الأشعة	عدد الزهور	عدد الأشعة	عدد الزهور
١٦	١	٢٨	١٤
١٧	٠	٢٩	١٢
١٨	٠	٣٠	١٠
١٩	٢	٣١	١٦
٢٠	٨	٣٢	١٨
٢١	١٧	٣٣	٢٩
٢٢	٢٣	٣٤	٢٠
٢٣	٢٢	٣٥	٦
٢٤	٢١	٣٦	٦
٢٥	٢٢	٣٧	٠
٢٦	١٩	٣٨	٠
٢٧	١٦	٣٩	٢
			٢٨٤

1 Gertrude E. Pearse, On corrections for the moment-coefficients of frequency distributions, *Biometrika*, 20 A (1928), 336

2 W. L. Tower, Variation in the ray-flowers of *Chrysanthemum leucanthemum*, *Biometrika*, 1 (1902), 309.

الجدول ١٨ . عدد الأوراق في محيط نخشوش الحوت^١

عدد الأوراق	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
عدد المحيطات	٦	١٦٩	٢٥٨	٤٩٥	٧٢٣	٦١٧	٤٨	٢
٢٣٢٨								

٤٠ . الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية . في الجدول التكرارية إما أن تكون الفئات متساوية كما في جميع الأمثلة المتقدمة أو غير متساوية كما في المثالين الآتين .

الجدول ١٩ . المسافة بين الانعكاسات الحلزونية في شعر القطن^٢

عدد المسافات	المسافة (١٠-٣ مم)	عدد المسافات	المسافة (١٠-٣ مم)
٥٣	— ٢٨,٥	٧	— ٠
٤٥	— ٣٢,٥	٤٨	— ٢,٥
٣٦	— ٣٦,٥	١٠٠	— ٤,٥
٦٩	— ٤٠,٥	١٠٦	— ٦,٥
٤٠	— ٥٠,٥	٨٤	— ٨,٥
٣١	— ٦٠,٥	٧٢	— ١٠,٥
٢١	— ٧٠,٥	١٣٦	— ١٢,٥
١٧	— ٨٠,٥	٩٤	— ١٦,٥
١١	— ٩٠,٥	٧٨	— ٢٠,٥
١١١٧		٦٩	— ٢٤,٥

الفئة الأولى في الجدول ٢٠ هي ١ - ٧ وكل الفئات طولها يساوي ٧ إلا

1 R. Pearl, Variation and differentiation in *Ceratophyllum* (Carnegie Institution of Washington, Washington, D.C., 1907).

2 W. Lawrence Balts and H. A. Hancock, Measurements of the reversing spiral in cotton hairs, Proc. Roy. Soc. B, xcix (1926), 130.

والأولان من كبار موظفي وزارة الزراعة وأولهما هو كبير الفنيين للقطن بالوزارة ومدير مجلس مباحث القطن بالجيزة سابقا .

الجدول ٢٠ . عدد مقاطعات إنجلترا وويلز التى يغشاها ٢٦٦ نوعا من النباتات ١

عدد المقاطعات	٧-	١٤-	٢١-	٢٨-	٣٥-	٤٢-	٤٩-	٥٦-	٦٣-	٧١-
عدد الأنواع	١٢٩	٥٥	٢١	١٨	١١	١٠	١١	٣	٧	١
	٢٦٦									

الفئة الأخيرة فطولها يساوى ٨ .

وقد تكون الفئة الأولى فى الجدول التكرارى بمجولة الحد الأدنى كالفئة "دون ١٦ سنة" أو الفئة "أقل من ١٠٠ جنيه" . مثل هذه الفئة تسمى فئة مفتوحة من أدنى وفى هذه الحالة يوصف الجدول التكرارى بأنه مفتوح من أدنى . وقد تكون الفئة الأخيرة فى الجدول التكرارى بمجولة الحد الأعلى كالفئة "٤٥ سنة وفوق" أو الفئة "١٠٠٠ جنيه وأكثر" . مثل هذه الفئة تسمى فئة مفتوحة من أعلى وفى هذه الحالة يوصف الجدول التكرارى بأنه مفتوح من أعلى . إذا كان الجدول التكرارى مفتوحا من أدنى ومن أعلى فإنه يسمى جدولا تكراريا مفتوحا . وواضح أن الجدول المفتوح أيا كان نوعه هو حالة خاصة من حالات الجداول ذات الفئات غير المتساوية . هذه الجداول المفتوحة يمكن الحصول عليها بسهولة من النشرات الرسمية التى تصدرها مصلحة عموم الإحصاء والتعداد والجدول ٢١ هو أحد هذه الجداول الرسمية . الفئة الأولى لهذا الجدول هى "أكبر من صفر وأصغر من ١" لكن الفئة الأخيرة مفتوحة من أعلى . إذن الجدول جدول مفتوح من أعلى .

فى هذا الجدول يمثل التكرار ٣٠٨٩ المناظر للفئة ٥٠ - عدد المصانع فى فئة طولها نصف طول الفئة التالية ١٠٠ - ذات التكرار ٢٩١٥ . وهذا التكرار الأخير يناظر فئة طولها ثلث طول الفئة التالية ٢٠٠ - ذات التكرار ٣٧٤٨ وهلم جرا . أيضا كل الفئات غير متساوية . إذن لا يمكن المقارنة بين

1 J. R. Matthews, The distribution of certain portions of the British flora, Annals of Botany, xxxvii (1923), 277.

الجدول ٢١ . عدد المصانع المصرية التى لها رأس مال فى ١٩٣٧

عدد المصانع	رأس المال
٥٨٣٤	أقل من جنيه
٤٩٣٥٥	— ١
٣٠٨٩	— ٥٠
٢٩١٥	— ١٠٠
٣٧٤٨	— ٢٠٠
١٤٢٢	— ٥٠٠
٥٩٢	— ١٠٠٠
٨١٤	٢٠٠٠ جنيه وأكثر
٦٧٦٦٩	

التكرارات المتسالية كما هى لأنها تناظر فئات غير متساوية ويترتب على ذلك بقاء هذه التكرارات غامضة المعنى وبقاء العلاقة بين رأس المال وعدد المصانع غامضة حتى يعاد توزيع المصانع على فئات متساوية من رأس المال . هذا هو أحد العيوب الكبيرة للجدول التكرارى ذات الفئات غير المتساوية .

على أن هذا العيب لا يمنع من تقسيم بعض الفئات فى توزيع تكرارى متساوى الفئات إلى فئات أخرى متساوية وأصغر من الفئات الأصلية وذلك فى أى جزء من المدى يكون تغير الصفة المميزة فيه بالغاً حد السرعة حتى تتمكن من دراسة هذا التغير فى شىء من التفصيل . فإذا تم لنا ذلك أمكننا الرجوع إلى التوزيع الأصيل ذى الفئات المتساوية بعملية بسيطة تتركب من جمع التكرارات المناظرة للفئات الصغرى .

وأما بخصوص الفئات المفتوحة فواضح أن استخدام هذه الفئات يسهل

١ - ج (١٩٤٥) ف ٢ من ٧٠ - ٧١ ج ١٨ . هذه البيانات لاشمل بالطبع المصانع التى لا رأس مال لها وعددها ٣٤٢٥٣ .

عملية التوزيع التكرارى ويبدو أن هذا هو المبرر الوحيد لاستخدام هذه الفئات . ويحسن عند استخدام فئة مفتوحة في جدول تكرارى ذكر قيمة كل حد منتم إلى الفئة أو إن تعذر ذلك لسكثرة الحدود المنتمية إلى الفئة أو لآى سبب آخر فلا أقل من ذكر متوسط قيم الحدود المنتمية إلى الفئة المفتوحة .

٤١ . التمثيل البياني للتوزيع التكرارى . أى توزيع تكرارى يمكن تمثيله بيانيا برسم بياني أو بخط بياني . فالرسم البياني يتركب من مستطيلات رأسية موضوعة جنبا على جنب ويسمى المدرج التكرارى أو المستو جرام . والخط البياني إما أن يتركب من خطوط مستقيمة منكسرة وهذا يسمى المضلع التكرارى أو من منحنى خال من الكسور وهذا يسمى المنحنى التكرارى . هناك إذن على الأقل ثلاثة أشكال تكرارية مختلفة لتمثيل التوزيعات التكرارية بيانيا .^١

أما طريقة رسم هذه الأشكال الثلاثة فتختلف باختلاف الشكل وسندرس طرائق رسم هذه الأشكال على انفراد فى البنود التالية . غير أن هناك قواعد مشتركة يخضع لها رسم أى شكل من الأشكال الثلاثة ولا بأس من ذكر هذه هنا . فمحور الصفة المميزة للتوزيع هو المحور الأفقى فى الأشكال الثلاثة ومحور التكرار المتغير هو المحور الرأسى . وصفر المحور الرأسى يجب أن يظهر عند أوطأ نقطة على هذا المحور فى كل شكل من الأشكال الثلاثة . ويرى بعض الإحصائيين^٢ أن صفر المحور الأفقى أيضا يجب أن يظهر فى الشكل ويوضع عند الطرف الأقصى لهذا المحور من جهة اليسار . لكن الصفر الأفقى يكون أحيانا بعيدا جدا عن قيم الصفة المميزة فإذا وضعنا هذا الصفر فى الشكل كما

١ من الأشكال التكرارية الأخرى شكل يتركب من رسم بياني مكون من خطوط مستقيمة رأسية موضوعة جنبا إلى جنب . كل واحد من هذه الخطوط يمثل حدا من حدود البيانات الأصلية قبل توزيعها توزيعا تكراريا وعد ترتيبها حسب القيمة كما فى الجدول ١٢ .

2 Earle Clark, The horizontal zero in frequency diagrams, Quarterly Publication of the American Statistical Association (June, 1917), 662-669.

تطلب القاعدة فإن هذا قد يستلزم استخدام وحدة صغيرة جدا وغير مناسبة للقياس على المحور الأفقى وربما استلزم أيضا استخدام ورقة كبيرة الحجم. فى مثل هذه الحالات يجوز رسم الشكل من غير صفر أفقى إلا إذا كان الغرض من الشكل هو مقارنة التوزيع التكرارى بتوزيع آخر فى هذه الحالة ربما كان مد المحور الأفقى حتى الصفر ضروريا فى كلا الشكلين.

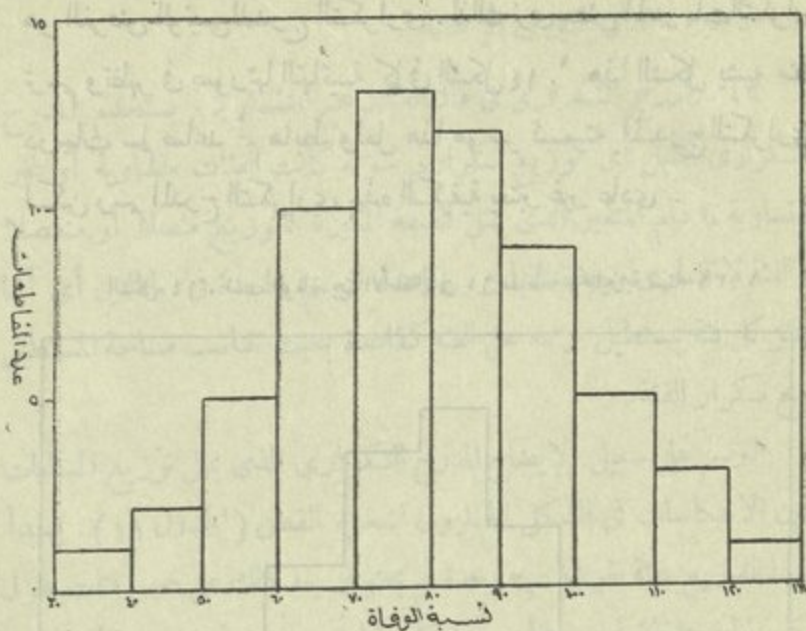
وفى كل واحد من الأشكال الثلاثة تراعى عند اختيار الوحدتين المستخدمتين للقياس على المحورين نفس الاعتبارات العامة المعروفة فيما يتعلق بطول الشكل وعرضه وتكتب الأعداد اللازمة لتدريج المحورين تحت الشكل فى حالة المحور الأفقى وإلى يساره فى حالة المحور الرأسى.

٤٢. المربع التكرارى. إذا كان المتغير الذى يمثل الصفة المميزة للتوزيع التكرارى متصلا أو كان منفصلا والفئة لا تساوى وحدة القياس فلرسم المدرج التكرارى نمثل كل فئة بمستطيل نرسمه على الفئة كمقاعدة بحيث تتناسب مساحة المستطيل مع تكرار الفئة. فإن كانت الفئات كلها متساوية فإن ارتفاع المستطيل الذى يمثل أية فئة يتناسب مع تكرار الفئة.

الشكل ١٣ يمثل المدرج التكرارى للتوزيع المناظر للجدول ١٣ بفرض أن الأعداد التى تمثل نسب الوفاة مضبوطة^١. فالمستطيل الأول فى الشكل يمثل نسبة الوفاة الواحدة المنتمية إلى الفئة الأولى. قاعدة هذا المستطيل هى الفئة الأولى ٣٠ - ٤٠ وارتفاعه يساوى وحدة واحدة من وحدات القياس الرأسية. وكل مستطيل آخر مرسوم على فئة واحدة كمقاعدة وارتفاعه يساوى عددا من وحدات القياس الرأسية مساويا لتكرار الفئة المناظرة. وأعلى

١ إذا لم تكن هذه الأعداد مضبوطة فإن الشكل يختلف. فمثلا إذا كانت الأعداد مقربة إلى أقرب وحدة فإن الفئة الأولى تكون فى الحقيقة ٢٩,٥ - ٣٩,٥ فيرسم المستطيل الأول على هذه الفئة لا على الفئة ٣٠ - ٤٠ كما فى الشكل ١٣. بالمثل قاعدة المستطيل الثانى تكون الفئة ٣٩,٥ - ٤٩,٥ وهلم جرا.

الشكل ١٣ . نسب الوفاة بين الأطفال في ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩



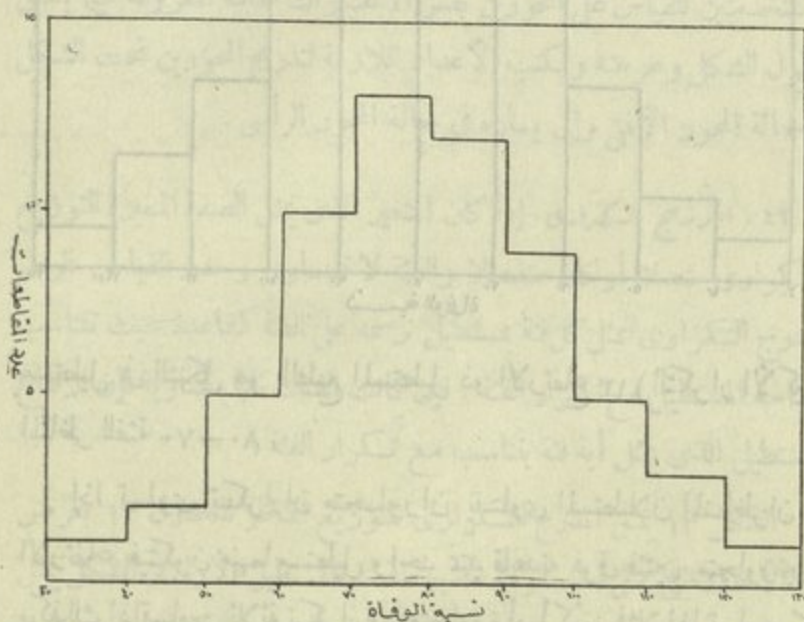
مستطيل فى الشكل هو بالطبع المستطيل ذو الارتفاع ١٣ (التكرار الأكبر) المناظر للفترة ٧٠ - ٨٠ .

إذا تساوى تكراران متجاوران يتساوى المستطيلان المناظران فى الارتفاع فيتكون منهما مستطيل واحد تمتد قاعدته فوق فئتين متجاورتين . وكذلك إذا تساوت ثلاثة تكرارات متجاورة أو أكثر . فثلاً إذا تساوت كل التكرارات تتساوى كل مستطيلات المدرج التكرارى فى الارتفاع فيتكون منها مستطيل واحد تمتد قاعدته فوق المدى بأجمعه وهذا المستطيل الواحد تقسمه إلى مستطيلات صغيرة متساوية خطوط توازى الضلعين الرأسيين . أما عدد هذه المستطيلات الصغيرة فيساوى عدد الفئات .

تمثل كل فئة فى المدرج التكرارى بمستطيل مستقل غير أن مد الأضلاع الرأسية للمستطيلات حتى تصل إلى المحور الأفقى كما فى الشكل ١٣ ليس ضرورياً لأن منسوب المحيط الخارجى للمستطيلات فوق المحور الأفقى كافى فى

ذاته ليان الزيادة أو النقص فى عدد النسب من فئة إلى فئة وهذا فى الحقيقة هو الغرض الرئيسى للمدرج التكرارى . لذلك نرى بعض المدرجات التكرارية ترسم وتظهر فى صورتها النهائية كما فى الشكل ١٤ . هذا الشكل يشبه منظر درجات سلم صاعد ثم هابط ولعل هذا هو سر تسميته المدرج التكرارى . لكن رسم المدرج التكرارى بهذه الكيفية يعتبر غير عادى .

الشكل ١٤ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩



بما أن مساحة كل مستطيل تتناسب بالتعريف مع تكرار الفئة المناظرة وثابت التناسب واحد فى كل حالة إذن مجموع مساحات مستطيلات المدرج يتناسب مع التكرار الكلى للتوزيع . أى أن التكرار الكلى للتوزيع يمثل هندسياً بمساحة مدرجه أى المساحة الواقعة تحت المدرج . أيضاً التكرار المحصور بين أى حدين هو المساحة الواقعة تحت المدرج بين خطين رأسيين

1 See National Bureau of Economic Research, Income in the United States, 1, 128.

مرسومين عند الحدين . هذه العلاقة بين التكرار والمدرج التكرارى تجعل هذا الأخير ذا شأن كبير فى الإحصاء .

٤٣ . المدرج التكرارى فى عاز الفئات غير المتساوية . يستخدم المدرج التكرارى لتمثيل أى توزيع تكرارى سواء كانت الفئات متساوية أو غير متساوية ما دام المتغير الذى يمثل الصفة المميزة للتوزيع متصلا أو منفصلا والفئة لا تساوى وحدة القياس . وقاعدة الرسم واحدة فى الحالتين أى أننا نمثل كل فئة بمستطيل نرسمه على الفئة كقاعدة بحيث تتناسب مساحة المستطيل مع تكرار الفئة .

لنرسم على سبيل الإيضاح المدرج التكرارى الذى يمثل توزيع المسافات بين الانعكاسات فى الشكل الحلىزوى لشعرة القطن (الجدول ١٩) . يبدأ هذا التوزيع بفئة طولها ٢,٥ وحدة ثم يحتوى بعد ذلك على خمس فئات طول كل منها وحدتان فسيبع فئات طول كل منها أربع وحدات فست فئات طول كل منها عشر وحدات . للحصول على الشكل المطلوب يحسن أن نبدأ بإضافة عمود ثالث إلى الجدول ١٩ يعطى عدد المسافات المنتمية إلى فئات متساوية ولتكن فئات طول كل منها خمس وحدات . لهذا العمود الإضافى فائدتان أولاها أنه يمكننا من المقارنة بين التكرارات المتتالية بإعطائه عدد المسافات فى كل فئة طولها ٠,٥ مم من فئات المدى والفائدة الثانية هى أنه يساعدنا على رسم الشكل المطلوب . أما احتساب هذا العمود الإضافى فلا صعوبة فيه . فمثلا التكرار ٧ الذى يمثل عدد المسافات فى الفئة الأولى . - ٢,٥ ذات الطول ٠,٢٥ مم ينساظر تكرارا أو عددا من المسافات قدره ١٤ فى فئة طولها ضعف طول هذه الفئة أى ٠,٥ مم . وقس على ذلك مع التكرارات الباقية (الجدول ٢٢) .

بفحص العمود الثانى من الجدول ٢٢ نجد أن تكرارى الفئتين ١٢,٥ - ٥٠,٥ ، ١٦,٥ - ٤٠,٥ كلاهما يزيد على تكرار الفئة السابقة . لكن هذه

الجدول ٢٢ . المسافة بين الانعكاسات الحلزونية في شعر القطن

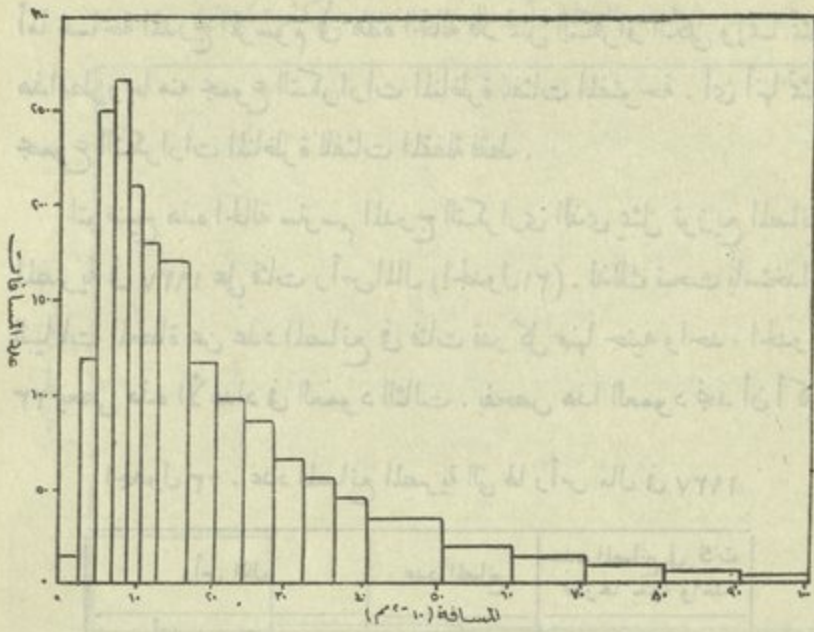
المسافة (١٠-٢ مم)	عدد المسافات	العدد المقدر للمسافات في كل ٠,٠٥ مم
— ٠	٧	١٤
— ٢,٥	٤٨	١٢٠
— ٤,٥	١٠٠	٢٥٠
— ٦,٥	١٠٦	٢٦٥
— ٨,٥	٨٤	٢١٠
— ١٠,٥	٧٢	١٨٠
— ١٢,٥	١٣٦	١٧٠
— ١٦,٥	٩٤	١١٧
— ٢٠,٥	٧٨	٩٧
— ٢٤,٥	٦٩	٨٦
— ٢٨,٥	٥٣	٦٦
— ٣٢,٥	٤٥	٥٦
— ٣٦,٥	٣٦	٤٥
— ٤٠,٥	٦٩	٣٤
— ٥٠,٥	٤٠	٢٠
— ٦٠,٥	٣١	١٥
— ٧٠,٥	٢١	١٠
— ٨٠,٥	١٧	٨
— ٩٠,٥	١١	٥
	١١١٧	

الزيادة ظاهرة فقط وسببها هو تغير طول الفئة عند التقطين المذكورتين كما يرى من العمود الثالث حيث يزيد التكرار المقدر من ١٤ في أعلى الجدول حتى يصل إلى أكبر قيمة له أمام الفئة الرابعة ثم ينقص بعد ذلك بالتدرج حتى يصل إلى ٥ في أدنى الجدول . هذا يوضح صعوبة المقارنة بين التكرارات المتتالية في الجداول التكرارية ذات الفئات غير المتساوية .

باستخدام العمود الثالث من الجدول ٢٢ نحصل بسهولة على المدرج التكرارى المطلوب (الشكل ١٥) .

في هذا الشكل تمتد قاعدة المستطيل الأول على المحور الأفقى من ٠ إلى ٢,٥ وارتفاع هذا المستطيل يساوى ١٤ وحدة من وحدات القياس الرأسية .

الشكل ١٥. المسافة بين الانعكاسات الحزونية في شبر الفطن



إذن مساحة المستطيل تساوى $2,5 \times 14$ أو 35 وحدة مربعة . فإذا جعلنا كل وحدة مربعة في الشكل تمثل $0,2$ مسافة فإن مساحة المستطيل الأول تساوى 7 مسافات . أى أن مساحة المستطيل الأول تتناسب مع عدد المسافات المنتمية إلى الفئة الأولى وبالمثل مع باقى المستطيلات . أيضا المساحة الكلية الواقعة تحت المدرج التكرارى تساوى 5585 وحدة مربعة أى أنها تتناسب مع التكرار الكلى 1117 . إذن حتى في حالة الفئات غير المتساوية يمثل التكرار الكلى للتوزيع هندسيا بالمساحة الواقعة تحت المدرج التكرارى .

إذا احتوى توزيع تكرارى على فئات مفتوحة (وكان المتغير الذى يمثل الصفة المميزة للتوزيع متصلا أو منفصلا والفئة لا تساوى وحدة القياس) فإنه يمكن تمثيله بيانيا بمدرج تكرارى إذا أهملنا الفئات المفتوحة واعتبرناها كأنها لم تسكن وإلا فلرسم المدرج لابد من عمل تقدير للحد المجهول من الفئة المفتوحة حتى نستطيع تحديد طول قاعدة المستطيل الذى يناظرها فى المدرج .

فإن تعذر عمل هذا التقدير فلا بد من إهمال الفئة المفتوحة وكأنها لم تكن . أما مساحة المدرج المرسوم في هذه الحالة فلا تمثل التكرار الكلى وإنما تمثل هذا مطروحا منه مجموع التكرارات المناظرة للفئات المفتوحة . أى أنها تمثل مجموع التكرارات المناظرة للفئات المقفلة فقط .

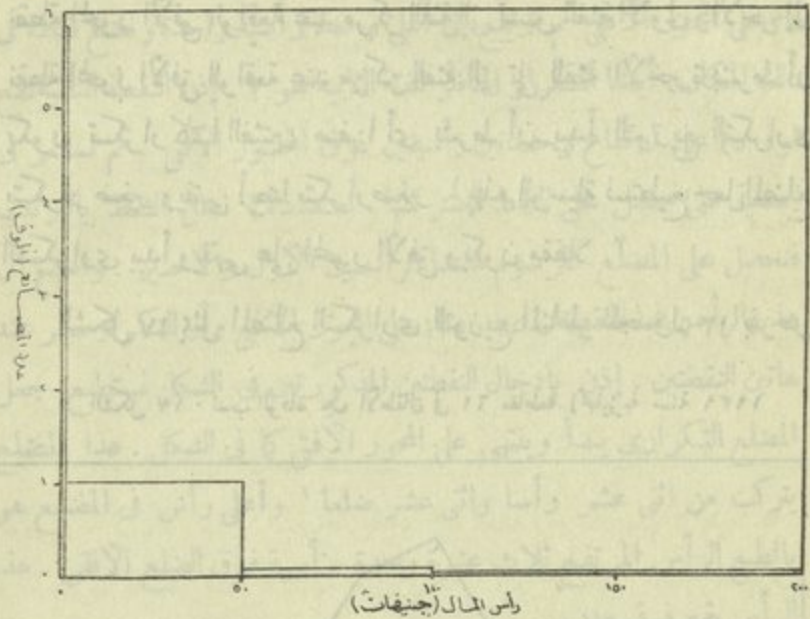
لتوضيح هذه الحالة سنرسم المدرج التكرارى الذى يمثل توزيع المصانع المصرية في ١٩٣٧ على فئات رأس المال (الجدول ٢١) . لذلك نبحت باستخدام البيانات المعطاة عن عدد المصانع في فئات قدر كل منها جنيه واحد . الجدول ٢٣ يعطى هذه الأعداد في العمود الثالث . بفحص هذا العمود نجد أن أكبر

الجدول ٢٣ . عدد المصانع المصرية التى لها رأس مال في ١٩٣٧

عدد المصانع في فئات قدرها جنيه واحد	عدد المصانع	رأس المال
٥٨٣٤	٥٨٣٤	أقل من جنيه
١٠٠٧	٤٩٣٥٥	١ —
٦٢	٣٠٨٩	٥٠ —
٢٩	٢٩١٥	١٠٠ —
١٢	٣٧٤٨	٢٠٠ —
٣	١٤٢٢	٥٠٠ —
١	٥٩٢	١٠٠٠ —
	٨١٤	٢٠٠٠ جنيه وأكثر
	٦٧٧٦٩	

التكرارات يقع في هذه الحالة عند صدر التوزيع . باستخدام هذه التكرارات الجديدة نحصل بسهولة على المدرج التكرارى المرسوم في الشكل ١٦ . في هذا الشكل اقتصرنا على رسم المستطيلات الأربعة الأولى لأن المستطيلات الثلاثة التالية لا يمكن إظهارها لحاجتها إلى ورقة كبيرة الحجم من ناحية ولفرط قصرها من ناحية أخرى . أما المستطيل الأخير فلا يمكن رسمه لأن قاعدته مجهولة .

الشكل ١٦ . عدد المصانع المصرية التى لها رأس مال فى ١٩٣٧
(المصانع التى لها رأس مال ٢٠٠٠ جنيه وأكثر محذوفة)



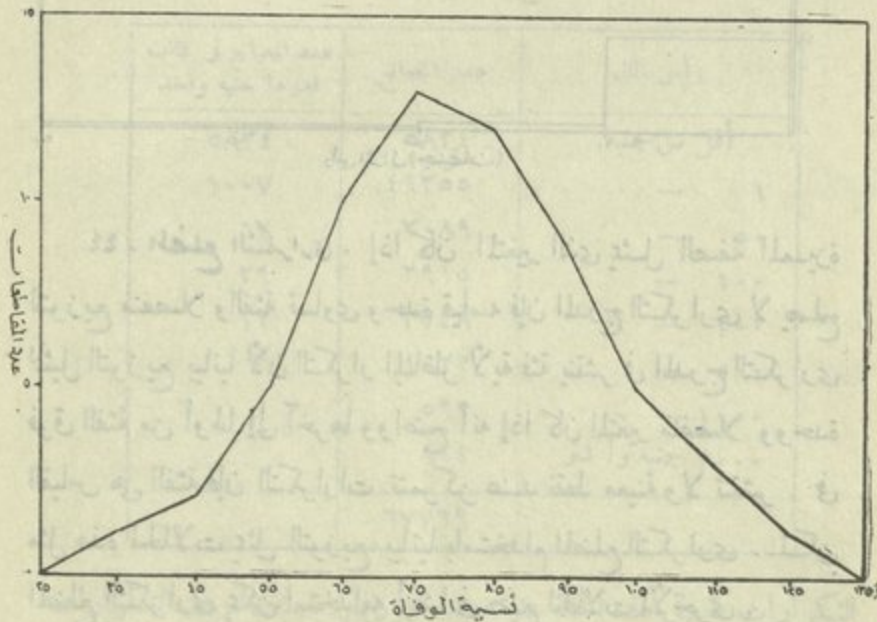
٤٤ . **المضلع التكرارى** . إذا كان المتغير الذى يمثل الصفة المميزة للتوزيع منفصلا والفئة تساوى وحدة قياسه فإن المدرج التكرارى لا يصلح لتمثيل التوزيع بيانيا لأن التكرار المناظر لأية فئة ينتشر فى المدرج التكرارى فوق الفئة من أولها إلى آخرها وواضح أنه إذا كان المتغير منفصلا ووحدة القياس هى الفئة فإن التكرارات تتمركز عند نقط معينة ولا تنتشر . فى مثل هذه الحالات يمثل التوزيع بيانيا باستخدام المضلع التكرارى . لكن المضلع التكرارى يمكن استخدامه أيضا فى جميع الحالات الأخرى .

لرسم المضلع التكرارى الذى يمثل أى توزيع نقيم عند مركز كل فئة عمودا يساوى تكرار الفئة مقسوما على طولها ثم نصل أطراف هذه الأعمدة بخطوط مستقيمة كل بالطرف التالى له فيكون الشكل الناتج بهذه الكيفية هو المضلع التكرارى المطلوب . إذا تساوت كل الفئات فإن طول العمود المقام

عند مركز أية فئة يتناسب مع تكرار الفئة وفى هذه الحالة يمد من طرفى العمودين المناظرين للفئتين الأولى والأخيرة خطان مستقيمان أحدهما إلى نقطة المحور الأفقى الواقعة عند مركز الفئة التى تسبق الفئة الأولى والآخر إلى نقطة المحور الأفقى الواقعة عند مركز الفئة التى تلى الفئة الأخيرة بشرط أن يكون تكرار كلتا الفئتين صفرا أى بشرط أن يبدأ التوزيع التكرارى بتكرار صغير وينتهى أيضا بتكرار صغير^١. بهذه الوسيلة نستطيع جعل المضلع التكرارى يبدأ وينتهى على المحور الأفقى ويكون مقفلا^٢.

الشكل ١٧ يمثل المضلع التكرارى للتوزيع المناظر للجدول ١٣ بفرض

الشكل ١٧ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩



- ١ هذا الشرط يتحقق دائما إذا كان المتغير منفصلا والفئة تساوى وحدة القياس .
- ٢ يكفى أحيانا برسم سلسلة الأعمدة المقامة عند مراكز الفئات ويترك الشكل على هذا الحال . هذا الشكل التكرارى يمثل مرحلة الانتقال من المدرج التكرارى إلى المضلع التكرارى . لكن الشكل المذكور لا يستخدم فى العادة إلا إذا كان المتغير منفصلا ووحدة قياسه هى الفئة وحتى عندئذ لا يستخدم إلا قليلا .

أن الأعداد التى تمثل نسب الوفاة مضبوطة . هناك نسبة وفاة واحدة منتمية إلى الفئة الأولى ذات المركز ٣٥ . لتمثيل هذه النسبة على شكلنا نتجه إلى النقطة ٣٥ على المحور الأفقى ثم نرفع إلى أعلى وحدة رأسية واحدة ونضع نقطة فى ذلك المكان . أيضا التكرار المناظر للفئة الثانية هو ٢ . إذن النقطة الثانية تقع فوق ٤٥ على ارتفاع وحدتين رأسيين فوق المحور الأفقى . ثم نستمر فى العملية حتى نحصل على النقط العشر كلها . بعد ذلك نصل النقط بالترتيب فنحصل على المضلع المرسوم ماعدا الرأسين الأول والأخير . واضح أن هذين الرأسين هما النقطتان ٢٥ ، ١٣٥ على المحور الأفقى وأن التكرار صفر عند هاتين النقطتين . إذن بإدخال النقطتين المذكورتين فى الشكل نستطيع جعل المضلع التكرارى يبدأ وينتهى على المحور الأفقى كما فى الشكل . هذا المضلع يتركب من اثني عشر رأسا واثني عشر ضلعا ١ وأعلى رأس فى المضلع هو بالطبع الرأس المرتفع ثلاث عشرة وحدة رأسية فوق الضلع الأفقى . هذا الرأس يقع فوق ٧٥ .

واضح من الشكل أن مساحة المضلع التكرارى فى حالة الفئات المتساوية تساوى التكرار الكلى . من هذا ينتج أن التكرار الكلى للتوزيع يمثل هندسيا فى حالة الفئات المتساوية بمساحة المضلع التكرارى . لكن التكرار المحصور بين أى حدين لا يمثل دائما بالمساحة الواقعة تحت المضلع بين الخطين الرأسين المرسومين عند الحدين كما فى حالة المدرج التكرارى . لهذا السبب كان المدرج أقدر من المضلع على تمثيل النسب بين الأجزاء المختلفة للتكرار الكلى من فئة إلى فئة .

أيضا إذا لم تسكن كل الفئات متساوية فليس ضروريا أن تكون مساحة المضلع التكرارى مساوية للتكرار الكلى . إذن فى هذه الحالة يكون المدرج التكرارى أصح من المضلع التكرارى لتمثيل التوزيع .

٤٥ . المنحنى التكرارى . لتعريف المنحنى التكرارى تعريفا متينا نحتاج إلى إلمام بنظرية الاحتمالات أوسع مما نفرضه فى هذا الكتاب . لذلك نكتفى هنا بتعريف هذا المنحنى بأنه خط خال من الكسور (أى ليس له إلا اتجاه واحد عند كل نقطة عليه) يمر بين رؤوس المضلع التكرارى بحيث تكون المساحة الواقعة تحت المنحنى بين أى خطين رأسيين مستقيمين مساوية للمساحة الواقعة تحت المضلع التكرارى بين نفس الخطين . هذه العملية تسمى تمهيد المضلع التكرارى وهناك طريقتان تقريبيتان معروفتان للتمهيد غير الطريقة الرياضية المضبوطة . هاتان هما طريقة اليد المطلقة وطريقة الوسط المتحرك أو الجارى .

من طريقة اليد المطلقة للتمهيد يمكن الحصول أحيانا على منحنيات تكرارية لا بأس بها . هذه الطريقة بدائية للغاية ومن السهل الاعتماد عليها والحصول منها على نتائج مرضية غير أنها تتطلب من المهارة وحسن التصرف أكثر مما يوجد فى العادة عند شخص لا خبرة له بها من قبل . وحتى الخبراء قد يختلفون اختلافا كبيرا فى الكيفية التى يرسمون بها منحنياتهم التكرارية عند استخدام الطريقة .

وتتوقف طريقة الوسط المتحرك لتمهيد المضلع التكرارى على احتساب تكرارات جديدة اسمها التكرارات الممهدة . لشرح كيفية احتساب هذه التكرارات سنأخذ حالة الجدول ١٣ . لإيجاد التكرار الممهد المناظر لـ ١ تكرار فى الجدول غير التكرارين الأول والآخر نجمع ذلك التكرار والتكرارين المجاورين له أى التكرار السابق له مباشرة والتكرار التالى له مباشرة ونقسم النتيجة على ٣ . فمثلا التكرار الممهد المناظر للفترة ٤٠ - ٤٩ هو $\frac{1+2+3}{3}$ أو ٢,٦٧ تقريبا والتكرار الممهد للفترة ٥٠ - ٥٩ هو $\frac{2+3+4}{3}$ أو ٣,٠٠ وهلم جرا . بهذه الكيفية نحصل على جميع التكرارات الممهدة إلا الأول والآخر . لإيجاد التكرار الممهد المناظر للتكرار الأول فى الجدول

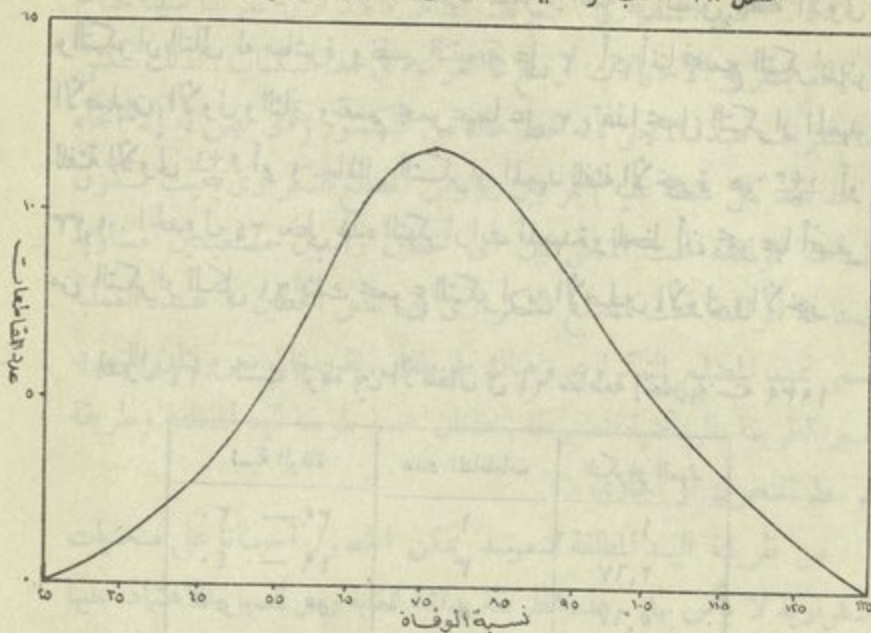
نضيف إلى هذا التكرار الصفر باعتباره تكرار الفئة التى تسبق الفئة الأولى والتكرار التالى له مباشرة ونقسم النتيجة على ٣ . أى أننا نجمع التكرارين الأصليين الأول والثانى ونقسم مجموعهما على ٣ . هذا يجعل التكرار الممهد للفئة الأولى $\frac{2+1}{3}$ أو ١ . بالمثل التكرار الممهد للفئة الأخيرة هو $\frac{1+2}{3}$ أو ١,٣٣ . الجدول ٢٤ يعطى هذه التكرارات الممهدة ونلاحظ أن مجموعها أصغر من التكرار الكلى ٦١ بثلاث مجموع التكرارين الأصليين الأول والآخر .

الجدول ٢٤ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩

نسبة الوفاة	عدد المقاطعات	التكرار الممهد
٣٠ — ٣٩	١	١
٤٠ — ٤٩	٢	٢,٦٧
٥٠ — ٥٩	٥	٥,٦٧
٦٠ — ٦٩	١٠	٩,٣٣
٧٠ — ٧٩	١٣	١١,٦٧
٨٠ — ٨٩	١٢	١١,٣٣
٩٠ — ٩٩	٩	٨,٦٧
١٠٠ — ١٠٩	٥	٥,٦٧
١١٠ — ١١٩	٣	٣
١٢٠ — ١٢٩	١	١,٣٣
	٦١	٦٠,٣٤

الشكل ١٨ يمثل المنحنى التكرارى المرسوم باستخدام التكرارات الممهدة . إذا مهدنا التكرارات الممهدة باستخدام طريقة الوسط المتحرك مرة ثانية نحصل على منحنى تكرارى آخر وهذا المنحنى الآخر يكون فى العادة أقرب إلى المنحنى التكرارى الأمثل من المنحنى الأصلى . لكن الاستمرار فى تمهيد التكرارات على هذا النحو أمر غير مرغوب فيه لأن التكرارات الممهدة لا تمثل البيانات الأصلية على حقيقتها وإنما تمثل هذه البيانات لو أنها

الشكل ١٨ . نسب الوفاة بين الأطفال في ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩



كانت أقل عرضة للخطأ الإحصائى مما هى عليه أو بعبارة أخرى لو أن التكرار الكلى كان أكبر . فقد وجد أنه كلما كان التكرار الكلى كبيرا كانت البيانات أقل عرضة للخطأ والتعديل الناتج من تمهيد التكرارات طفيفا . إذن فى الحالات التى فيها يكون التكرار الكلى عددا كبيرا جدا ليس من الضروري أن تمهد التكرارات .

- ٤٦ . المقاضاة بين الأساطير التكرارية المتماثلة . إذا أعطينا توزيعا تكراريا وأريد تمثيل التوزيع بيانيا فأي الأشكال التكرارية الثلاثة نتخير المدرج أم المضلع أم المنحنى ؟ هذا السؤال لا يمكن أن يجاب عنه بإعطاء قاعدة عامة تسرى على جميع الحالات . لسكننا نزاعى الاعتبارات الآتية :
- (أ) انسجام الشكل مع طبيعة المتغير الذى يمثل الصفة المميزة للتوزيع .
 - (ب) دقة الشكل كصورة هندسية للتوزيع .
 - (ج) منظر الشكل وما يتركه من أثر فى النفس .

لندرس هذه الاعتبارات الثلاثة بالترتيب . فيما يختص بانسجام الشكل مع طبيعة المتغير يمكننا أن نقول بصفة عامة إن المدرج التكرارى يستخدم إذا كان المتغير متصلا أو إذا كانت الفئات غير متساوية أو إذا كانت التكرارات صغيرة . ويستخدم المضلع التكرارى إذا كان المتغير منفصلا وبالأخص عندما يكون عدد القيم التى يستطيع هذا المتغير أخذها صغيرا مثل المتغير الذى يمثل عدد أفراد الأسرة .

وفما يختص بدقة الشكل كصورة هندسية للتوزيع رأينا أن المدرج أقدر من المضلع على تمثيل التوزيع تمثيلا هندسيا دقيقا بدلالة المساحة لأن المساحة الواقعة تحت المدرج بين أى خطين رأسيين تمثل التكرار المحصور بين الحدين المناظرين للخطين لكن هذا ليس صحيحا دائما مع المضلع .

وأما فيما يختص بمنظر الشكل وما يتركه هذا المنظر من أثر فى النفس فيبدو ولو أن هذه مسألة شخصية أن المنحنى التكرارى هو أفضل الأشكال الثلاثة وبليه المضلع . أما المدرج فهو أقل الأشكال الثلاثة قدرة على إعطاء صورة بيانية بسيطة للتوزيع . ذلك لأن المنحنى والمضلع يتوقفان مبدئيا على فكرة الطول على حين أن المدرج يتوقف مبدئيا على فكرة المساحة وواضح أن فكرة الطول أبسط من فكرة المساحة . لكن رسم المنحنى التكرارى صعب وهذا يجعل الانتخاب محصور فى العادة بين المضلع والمدرج وأسهل هذين رسما هو المضلع . إذن المضلع التكرارى هو أفضل الأشكال الثلاثة من حيث الاعتبار الأخير .

أيضا المضلع التكرارى هو أكثر الأشكال الثلاثة صلاحية للمقارنة بين توزيعين تكراريين مختلفين أو أكثر كما سنرى فى البند التالى .

مما تقدم ينتج أنه ما لم يكن المدرج التكرارى مناسبا حقا أو المنحنى التكرارى ضروريا بصفة خاصة يكون المضلع التكرارى أفضل الأشكال الثلاثة . وبليه المدرج فالمنحنى .

٤٧ . المقارنة البيانية بين التوزيعات التكرارية . تستخدم الأشكال التكرارية الثلاثة لتمثيل أى توزيع تكرارى تمثيلا بيانيا . لكن المصطلح والمنحنى أصح بكثير جدا من المدرج للمقارنة بين توزيعين تكرارين مختلفين أو أكثر مقارنة بيانية .

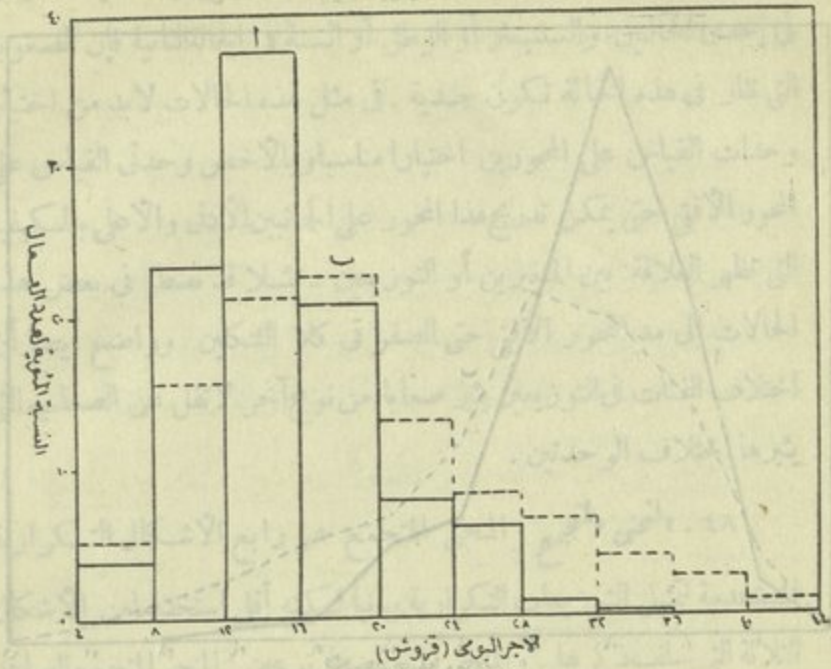
لنأخذ على سبيل الإيضاح التوزيعين التكرارين المبينين فى الجدول ٢٥ ولنقارن بينهما بيانيا أولا برسم المدرجين التكرارين ثم برسم المصطلحين التكرارين . فى الجدول ٢٥ نعبّر عن التكرارات بدلالة نسب مئوية من التكرار الكلى لأننا لا نريد أكثر من المقارنة بين التوزيعين . باستخدام هذه النسب المئوية نحصل على المدرجين التكرارين المرسومين فى الشكل ١٩ .

الجدول ٢٥ . الأجور اليومية لعمال مصنعين ١ ، ب بالقاهرة

النسبة المئوية لعدد عمال المصنع		الأجر اليومى (قروش)
ب	ا	
٥,٢	٣,٧	٤ —
١٥,٦	٢٣,٣	٨ —
٢١,٤	٣٧,٤	١٢ —
٢٢,٦	٢٠,٦	١٦ —
١٣,٠	٧,٦	٢٠ —
٨,٠	٦,٠	٢٤ —
٦,٤	١,٠	٢٨ —
٤,٠	٠,٤	٣٢ —
٢,٨		٣٦ —
١,٠		٤٠ —
١٠٠,٠	١٠٠,٠	

هذان المدرجان لا يمكننا من رؤية الفروق بين التوزيعين إلا بصعوبة . ذلك لأن الأضلاع الرأسية الكثيرة فى المدرجين منطبقة على بعضها كما نرى وينشأ

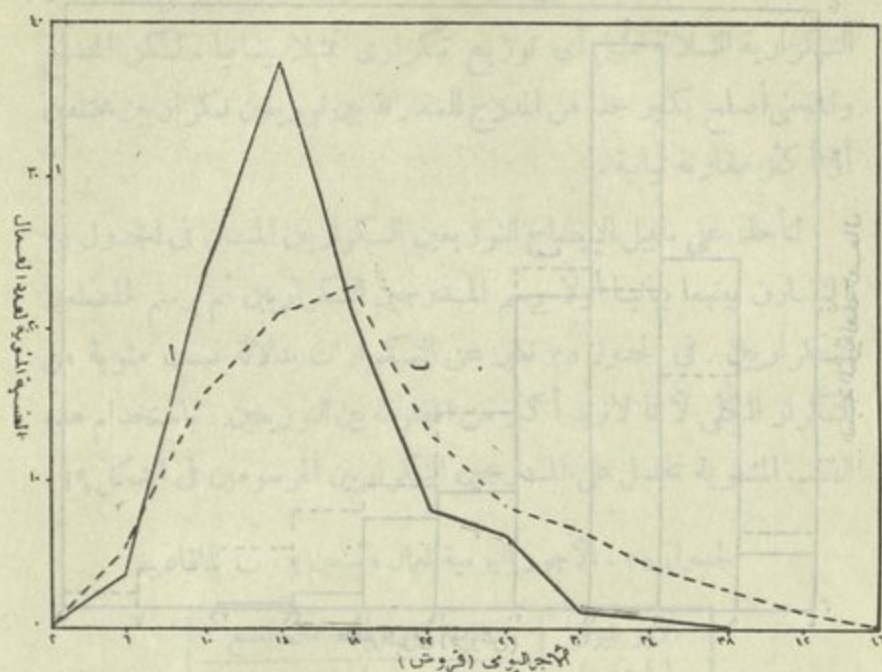
الشكل ١٩ . الأجور اليومية لعمال مصنعين أ ب بالقاهرة



بسبب هذه الانطباقات تداخل مستطيلات المدرجين فى بعضها . فإذا حاولنا تتبع المستطيلات وجدنا صعوبة كبيرة لأن العين لا تستطيع تتبع المستطيلات المتداخلة بسهولة . وأحيانا تنطبق بعض الأضلاع الأفقية أيضا فتزداد الصعوبة .

للحصول على أحسن النتائج الممكنة باستخدام المدرج التكرارى رسم المدرجين فى شكلين منفصلين ونضعهما جنبا إلى جنب . أما رسم المدرجين فى شكل واحد ووضع أحدهما فوق الآخر كما فى الشكل ١٩ فلا ينفع للمقارنة . فى الشكل ٢٠ رسمنا المضلعين التكراريين ووضعنا أحدهما فوق الآخر . هذان المضلعان يمكننا أن نرى الفروق بين التوزيعين بسهولة تامة . فالأضلاع المختلفة لا تميل فى هذه الحالة إلى الانطباق كما فى الحالة السابقة بل تميل إلى التقاطع وهذا يجعل تتبعها سهلا لأن العين يمكنها أن تتبع الخطوط المائلة بسهولة .

الشكل ٢٠. الأجور اليومية لعمال مصنعين أ و ب بالقاهرة



إذن الطريقة المثلى للمقارنة بين توزيعين تكراريين مقارنة بيانية هي رسم المصنعين أو المنحنيين التكراريين في شكل واحد ووضع أحدهما فوق الآخر كما في الشكل ٢٠ عقب التعبير عن التكرارات المختلفة كنسب من التكرار الكلى .

في المثال السابق كان المتغيران (الأجر اليومى فى المصنع أ والأجر اليومى فى المصنع ب) مقيسين بوحدة واحدة وكانت الفئات واحدة فى الحالتين . إذا اختلفت الوجدتان فإن هذا الاختلاف قد يثير بعض الصعاب . فإن كانت الوجدتان رغم اختلافهما تقبل كلتاهما التحويل إلى الأخرى باستخدام علاقة بسيطة معروفة بينهما فإن الصعوبة التى تثار فى هذه الحالة تكون بسيطة وتزول متى حولت إحدى الوجدتين إلى الأخرى . فمثلا قد يكون الأجر اليومى فى أحد المصنعين قروشاً والأجر اليومى فى المصنع الآخر شللات . هذه الحالات إذن لا تختلف كثيراً عن الحالة السابقة البسيطة .

أما إذا اختلفت الوجدتان اختلافا حقيقيا بأن كانتا من نوعين مختلفين كالقرش في إحدى الحالتين والسنيمتر أو الرطل أو السنة في الحالة الثانية فإن الصعوبة التي تثار في هذه الحالة تكون جدية . في مثل هذه الحالات لابد من اختيار وحدات القياس على المحورين اختيارا مناسباً وبالآخر وحدتي القياس على المحور الأفقي حتى يمكن تدريج هذا المحور على الجانبين الأدنى والأعلى بالسكيفية التي تظهر العلاقة بين المتغيرين أو التوزيعين . فشلا قد نضطر في بعض هذه الحالات إلى مد المحور الأفقي حتى الصفر في كلا الشكليين . وواضح أيضا أن اختلاف الفئات في التوزيعين يثير صعابا من نوع آخر لا تقل عن الصعاب التي يثيرها اختلاف الوجدتين .

٤٨ . المنحنى المتجمع . المنحنى المتجمع هو رابع الأشكال التكرارية المستخدمة لتمثيل التوزيعات التكرارية بيانيا لكونه أقل استخداما من الأشكال الثلاثة التي سلف ذكرها . والمنحنى المتجمع على نوعين : المنحنى المتجمع الصاعد والمنحنى المتجمع الهابط . لتعريف هذين المنحنيين سنعرف أولا التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع الهابط .

التكرار المتجمع الصاعد المناظر لآلية فئة في التوزيع هو مجموع التكرارات البسيطة من الأول إلى تكرار تلك الفئة . فشلا التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفئة الأولى هو التكرار البسيط لهذه الفئة والتكرار المتجمع الصاعد المناظر للفئة الأخيرة هو التكرار الكلى . بالمثل التكرار المتجمع الهابط المناظر لآلية فئة هو مجموع التكرارات البسيطة من الأخير إلى تكرار تلك الفئة . فشلا التكرار المتجمع الهابط المناظر للفئة الأخيرة هو التكرار البسيط لها والتكرار المتجمع الهابط المناظر للفئة الأولى هو التكرار الكلى^١ .

المنحنى المتجمع الصاعد هو المنحنى المسار بالنقط المكونة من الحدود

١ إذا اعتبرنا التكرار الكلى كأنه ١٠٠ في المسألة تتحول التكرارات المتجمعة إلى نسب مئوية من التكرار الكلى .

العليا للفئات كإحداثيات أفقية والتكرارات المتجمعة الصاعدة المناظرة كإحداثيات رأسية . بالمثل المنحنى المتجمع الهابط هو المنحنى المار بالنقط المكونة من الحدود الدنيا للفئات كإحداثيات أفقية والتكرارات المتجمعة الهابطة المناظرة كإحداثيات رأسية .^١

الجدول ٢٦ يعطى فى النصف الأيمن منه التكرارات المتجمعة الصاعدة وفى النصف الأيسر التكرارات المتجمعة الهابطة للتوزيع التكرارى المناظر للجدول ١٣ . وهكذا يعطى العمود الثانى من الجدول نتائج جمع التكرارات البسيطة بالترتيب من الأول إلى الأخير . فمثلا التكرار المتجمع الصاعد الأول

الجدول ٢٦ . نسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩

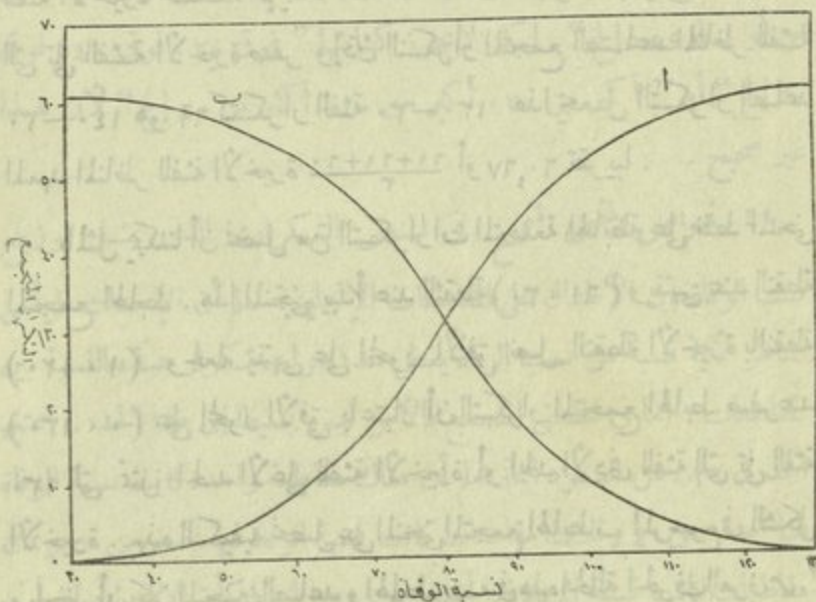
نسبة الوفاة	عدد المقاطعات	نسبة الوفاة	عدد المقاطعات
٣٠ — ٤٠	١	٣٠ — ١٣٠	٦١
٣٠ — ٥٠	٣	٤٠ — ١٣٠	٦٠
٣٠ — ٦٠	٨	٥٠ — ١٣٠	٥٨
٣٠ — ٧٠	١٨	٦٠ — ١٣٠	٥٣
٣٠ — ٨٠	٣١	٧٠ — ١٣٠	٤٣
٣٠ — ٩٠	٤٣	٨٠ — ١٣٠	٣٠
٣٠ — ١٠٠	٥٢	٩٠ — ١٣٠	١٨
٣٠ — ١١٠	٥٧	١٠٠ — ١٣٠	٩
٣٠ — ١٢٠	٦٠	١١٠ — ١٣٠	٤
٣٠ — ١٣٠	٦١	١٢٠ — ١٣٠	١

هو ١ وهذا هو أول أرقام العمود الثانى . أيضا ١+٢ يساوى ٣ وهذا هو الرقم الثانى . ثم ٣+٥ يساوى ٨ ، ٨+١٠ يساوى ١٨ الخ . أيضا آخر أرقام العمود الثانى هو ٦١ أى التكرار الكلى . بالمثل مع العمود الرابع .

١ يجوز أيضا تمثيل التكرارات المتجمعة مثل التكرارات البسيطة برسوم بيانية باستخدام المستطيلات الرأسية . اسكن العرف جرى على تمثيل التكرارات المتجمعة بخطوط بيانية فقط .

باستخدام هذه التكرارات المتجمعة الصاعدة والهابطة نحصل على المنحنيين المتجمعين الصاعد والهابط المبينين فى الشكل ٢١. لرسم هذين المنحنيين قسنا نسبة الوفاة على المحور الأفقى وعدد المقاطعات على المحور الرأسى ونباحظ أن وحدة القياس الرأسية تختار فى هذه الحالة بحيث يمكن قياس التكرار الكلى على المحور الرأسى وليس أكبر التكرارات البسيطة حسب كما فى الأشكال التكرارية السابقة. نعتبر المنحنى المتجمع الصاعد أولا. بالرجوع إلى تعريف هذا المنحنى نجد أن النقطة الأولى هى النقطة

الشكل ٢١. المنحنيان المتجمعان لنسب الوفاة بين الأطفال فى ٦١ مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩



(١، ٤٠) أى النقطة الواقعة فوق ٤٠ على ارتفاع وحدة رأسية واحدة فوق المحور الأفقى. أيضا النقطة الثانية هى (٣، ٥٠) والنقطة الثالثة هى (٨، ٦٠) وهلم جرا. والنقطة الأخيرة هى (٦١، ١٣٠). بعد ذلك نصل النقط بالترتيب إما بخطوط مستقيمة أو بمنحنى ممد كما فى الشكل. ولكى نجعل المنحنى يبدأ على المحور الأفقى نصل النقطة الأولى (١، ٤٠) بالنقطة (٠، ٣٠) على المحور

الأفقى باعتبار أن التكرار المتجمع الصاعد يساوى صفرا عند ٣٠ وهى القيمة التى تمثل الحد الأدنى للفئة الأولى أو الحد الأعلى للفئة التى تسبق الفئة الأولى . بهذه الكيفية نحصل على المنحنى المتجمع الصاعد المرسوم فى الشكل .

هذا المنحنى ممد بطريقة اليد المطلقة لأن التمهيد بهذه الطريقة سهل فى هذه الحالة ١. ويجوز أن يمد المنحنى بطريقة الوسط المتحرك فيكون التكرار الصاعد الممد المناظر للفئة الأولى $\frac{2+1}{3}$ أو ١ والتكرار الصاعد الممد المناظر للفئة الثانية $\frac{8+3+1}{3}$ أو ٤ والتكرار الصاعد الممد المناظر للفئة الثالثة $\frac{18+8+3}{3}$ أو ٩, ٦٧ تقريباً وهلم جرا . لكن التكرار الصاعد الممد المناظر للفئة الأخيرة مختلف . لإيجاد هذا نلاحظ أن التكرار البسيط المناظر للفئة التى تلى الفئة الأخيرة صفر وإذن التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفئة ٣٠-١٤٠ هو ٦١ كتكرار الفئة ٣٠-١٣٠ . هذا يجعل التكرار الصاعد الممد المناظر للفئة الأخيرة $\frac{61+61+61}{3}$ أو ٦٠, ٦٧ تقريباً .

بالمثل يمكننا أن نحصل من التكرارات المتجمعة الهابطة على نقط المنحنى المتجمع الهابط . هذا المنحنى يبدأ عند النقطة (٦١ ، ٣٠) وينتهى عند النقطة (١٢٠ ، ١٠) . ولجعله ينتهى على المحور الأفقى نصل النقطة الأخيرة بالنقطة (١٣٠ ، ٠) على المحور الأفقى باعتبار أن التكرار المتجمع الهابط صفر عند ١٣٠ التى تمثل الحد الأعلى للفئة الأخيرة أو الحد الأدنى للفئة التى تلى الفئة الأخيرة . بهذه الكيفية نحصل على المنحنى المتجمع الهابط المرسوم فى الشكل . ولاحظ أن كلا المنحنيين الصاعد والهابط يشبه فى هذه الحالة الحرف العربى م. هذا راجع إلى وجود نقطة انقلاب على كل منهما بالقرب من نقطة التقاطع .

١ تميل المنحنيات المتجمعة إلى اتخاذ أشكال فى غاية التمهيد والانتظام . وسبب ذلك هو أن التكرارات المتجمعة صاعدة كانت أو هابطة هى فى الحقيقة تكرارات ممهدة وإنما بطريقة غير طريقة الوسط المتحرك .

٢ هذا لا يحدث إلا إذا كان المنحنى التكرارى يشبه الجرس . انظر على سبيل المثال المنحنى المتجمع المرسوم فى الشكل ٣٢ .

ملحوظة . فى العمود الأول من الجدول ٢٦ كتبنا الفئات فى الصيغة "٣٠-٤٠، ٣٠-٥٠، ٢٠-٦٠ إلخ" . هذه الصيغة يقصد بها فى الحقيقة الصيغة "٣٠ ودون ٤٠، ٣٠ ودون ٥٠، ٣٠ ودون ٦٠ إلخ" . ويجوز أيضا كتابة هذه الفئات المتداخلة فى إحدى الصيغتين "دون ٤٠، دون ٥٠، دون ٦٠ إلخ" أو "أصغر من ٤٠، أصغر من ٥٠، أصغر من ٦٠ إلخ" . وفى العمود الثالث من نفس الجدول كتبنا الفئات فى الصيغة "٣٠-١٣٠، ٤٠-١٣٠، ٥٠-١٣٠ إلخ" وهذه يقصد بها الصيغة "٣٠ ودون ١٣٠، ٤٠ ودون ١٣٠، ٥٠ ودون ١٣٠ إلخ" . ويجوز أيضا كتابة هذه الفئات "٣٠ وفوق، ٤٠ وفوق، ٥٠ وفوق إلخ" أو "أكبر من أو يساوى ٣٠، أكبر من أو يساوى ٤٠، أكبر من أو يساوى ٥٠ إلخ" . لكن لا يجوز كتابتها "فوق ٣٠، فوق ٤٠، فوق ٥٠ إلخ" أو "أكبر من ٣٠، أكبر من ٤٠، أكبر من ٥٠ إلخ" لأن هذا غير صحيح .

٤٩ . **فواصل المنحنى المتجمع** . فى المنحنى التكرارى الذى يمثل توزيع نسب الوفاة بين الأطفال على المقاطعات الإنجليزية نعلم أن الإحداثى الرأسى المناظر لأية نسبة من نسب الوفاة يعطى عدد مرات تكرار هذه النسبة بين المقاطعات . أما فى المنحنى المتجمع فالأمر ليس بسيطاً إلى هذا الحد . اعتبر الجدول ٢٦ . من العمود الثانى نعلم أن هناك مقاطعة واحدة كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من ٤٠ وثلاث مقاطعات كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من ٥٠ وثمان مقاطعات كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من ٦٠ إلخ . فلكأن الإحداثى الرأسى المناظر لأية نسبة من نسب الوفاة فى المنحنى المتجمع يساعد يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من النسبة المذكورة . بالمثل الإحداثى الرأسى المناظر لأية نسبة من نسب الوفاة فى المنحنى المتجمع الهابط يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أكبر من أو تساوى النسبة المذكورة أو بعبارة أخرى عدد المقاطعات التى لم تكن نسبة الوفاة فيها أصغر

من النسبة المذكورة . كل هذا ينتج بصفة عامة من تعريف المنحنيين . أيضا الفرق بين الإحداثين الرأسين المناظرين لأى نسبتي في المنحنى المتجمع الصاعد يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من كبرى هاتين النسبتين وأكبر من أو تساوى صغراهما . فمثلا عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من ١٠٠ وأكبر من أو تساوى ٥٠ هو ٥٢ - ٣ أو ٤٩ أى حوالى ٨٠ فى المائة . بالمثل مع المنحنى المتجمع الهابط .

بالنظر إلى الشكل ٢١ نرى المنحنيين المتجمعين يتقاطعان فى نقطة واحدة عند رسمهما فى شكل واحد . لتكن p نسبة الوفاة المناظرة للإحداث الأفقى لنقطة التقاطع . هذه النقطة ولتكن c تقع على المنحنى المتجمع الصاعد . إذن إحداثها الرأسى يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من p . والنقطة c تقع أيضا على المنحنى المتجمع الهابط . إذن إحداثها الرأسى يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أكبر من أو تساوى p . بوضع الشئتين معا ينتج أن عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من p يساوى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أكبر من أو تساوى p لأن كلا العددين يساوى إحداهما الرأسى . إذن نسبة الوفاة p تقسم المقاطعات إلى قسمين متساويين فى العدد .

خذ الآن أية نسبة من نسب الوفاة . الإحداث الرأسى المناظر لهذه النسبة فى المنحنى المتجمع الصاعد يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أصغر من تلك النسبة . أيضا الإحداث الرأسى المناظر لنفس النسبة فى المنحنى المتجمع الهابط يعطى عدد المقاطعات التى كانت نسبة الوفاة فيها أكبر من أو تساوى النسبة المذكورة . لكن مجموع هذين العددين يعطى العدد الكلى للمقاطع أى ٦١ . إذن أى خط مستقيم يوازى المحور الرأسى يقطع المنحنيين المتجمعين فى نقطتين بمجموع إحداثيهما الرأسين يساوى التكرار الكلى . أيضا الإحداث الرأسى لنقطة التقاطع c يساوى نصف التكرار الكلى .

هذه النتيجة الجديدة تمثل إحدى الخواص الرئيسية للمنحنيات المتجمعة. وسنواصل الآن دراسة هذه المنحنيات حتى نستخلص أهم خواصها. اعتبر مرة أخرى النقطة ع (ب، پ) الموجودة أمام منتصف المحور الرأسى. واضح أن وضع المنحنى المتجمع عند هذه النقطة بالنسبة إلى المحور الأفقى يتوقف على المكان الذى تشغله التكرارات الكبيرة فى التوزيع: هل هى موجودة فى وسط التوزيع أم هى أقرب إلى أحد طرفى التوزيع منها إلى الطرف الآخر؟ إذا مر المنحنى بالنقطة ع فوق نقطة على يمين النقطة التى تنصف المحور الأفقى أى إذا كان ب أكبر من نصف المدى فواضح أن التكرارات الكبيرة فى التوزيع تكون أقرب إلى طرفه الأعلى منها إلى طرفه الأدنى. فى المنحنى المرسوم فى الشكل ٢١ نرى النقطة ع تكاد تكون رأسيا فوق النقطة ٨٠ التى تنصف المحور الأفقى. إذن فى هذه الحالة تقع التكرارات الكبيرة فى الوسط وهذا صحيح فعلا لأن أكبر تكرارين (١٣، ١٢) يقعان فى الفئتين الخامسة والسادسة أى وسط التوزيع. لكن النقطة ع تقع منحرفة إلى يسار النقطة ٨٠ بمسافة صغيرة لأن أكبر التكرارات وهو ١٣ أقرب قليلا إلى الطرف الأدنى للتوزيع منه إلى الطرف الأعلى. بمثل هذه الأفكار نستبعد المنحنى المتجمع ونستعين به على دراسة التوزيع التكرارى.

واضح أن المنحنى المتجمع الصاعد لا يمكن أن يهبط فى أى جزء من مجراه لأن الهبوط معناه تكرار سالب والتكرارات السالبة لا مكان لها ولا معنى فى التوزيعات التكرارية المألوفة. أيضا صعود المنحنى المتجمع يكون سريعا فى كل جزء من التوزيع التكرارى محتو على تكرارات كبيرة وبطيئا فى الأجزاء المحتوية على تكرارات صغيرة. بالمثل مع المنحنى المتجمع الهابط. فمثلا إذا تساوت كل التكرارات يصعد المنحنى المتجمع أو يهبط بسرعة لا تتغير ويكون المنحنى المتجمع الصاعد خطا مستقيما مائلا على المحور

الأفقى وكذلك المنحنى المتجمع الهابط ١. وكلما قربت التكرارات من التساوى قرب شكل المنحنى المتجمع من الاستقامة .

والمنحنى المتجمع بنوعيه يمكن أيضا استخدامه لتمثيل التوزيعات التكرارية ذات الفئات غير المتساوية لأن الاختلاف الوحيد فى هذه الحالة هو أن النقط المسكونة من الحدود الدنيا أو العليا للفئات والتكرارات المتجمعة الهابطة أو الصاعدة لا تسكون على أبعاد أفقية متساوية . وهذا الاختلاف لا يثير أية صعوبة من أى نوع . هذا يجعل المنحنى المتجمع يمتاز على المضلع التكرارى والمنحنى التكرارى لأن هذين الشكلين لا يستخدمان فى العادة لتمثيل التوزيعات التكرارية ذات الفئات غير المتساوية .

٥٠ . المقارنة البيانية بين التوزيعات التكرارية باستخدام المنحنى المتجمع .

رأينا فى البند ٤٧ كيف نستخدم المضلع أو المنحنى التكرارى لمقارنة توزيعين تكراريين أو أكثر مقارنة بيانية . وسنرى الآن كيف نستخدم المنحنى المتجمع لنفس الغرض . لنأخذ نفس المثال السابق ولنستخدم المنحنى المتجمع الصاعد .

من النسب المئوية المعطاة فى الجدول ٢٥ نحتسب بسهولة النسب المئوية المتجمعة المبينة فى الجدول ٢٧ وباستخدام هذه النسب المئوية نحصل على المنحنيين المتجمعين الصاعدين المرسومين فى الشكل ٢٢ . واضح من الشكل أن المنحنيين يتقاطعان فى نقطة غير نقطة الأصل . لكن تلك النقطة لا تبعد كثيرا عن نقطة الأصل وواضح أنها تناظر نقطة التقاطع المشابهة المشتركة بين المضلعين التكراريين (الشكل ٢٠) ٢.

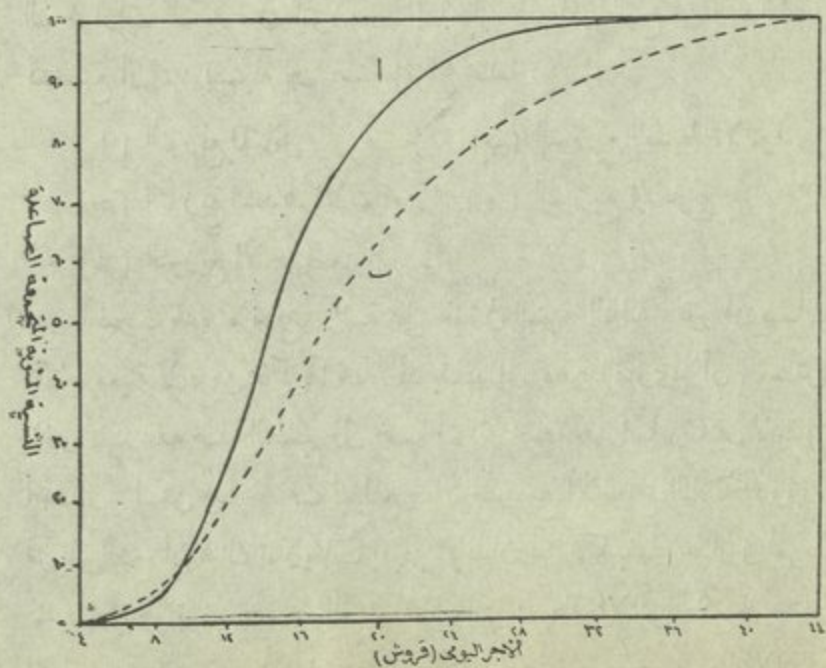
١ . تلك هى الحالة الخاصة التى أشرنا إليها فى البند ٤٢ . فى هذه الحالة ينطبق المنحنى التكرارى على المضلع التكرارى ويتركب كلاهما من خط مستقيم يوازى المحور الأفقى .

٢ . فى هذا المثال كان التوزيعان التكراريان مؤسسين على تصنيفين متشابهين لتغير واحد لأن الوحدة واحدة فى الحالتين وأيضاً الفئات . انظر الملاحظات المذكورة فى آخر البند ٤٧ .

الجدول ٢٧ . الأجور اليومية لعمال مصنعين ١ ، ب بالقاهرة

النسبة المئوية المتجمعة لعدد عمال المصنع		الأجر اليومى (قروش)
ب	١	
٥,٢	٣,٧	٨ — ٤
٢٠,٨	٢٧,٠	١٢ — ٤
٤٢,٢	٦٤,٤	١٦ — ٤
٦٤,٨	٨٥,٠	٢٠ — ٤
٧٧,٨	٩٢,٦	٢٤ — ٤
٨٥,٨	٩٨,٦	٢٨ — ٤
٩٢,٢	٩٩,٦	٣٢ — ٤
٩٦,٢	١٠٠,٠	٣٦ — ٤
٩٩,٠		٤٠ — ٤
١٠٠,٠		٤٤ — ٤

الشكل ٢٢ . المنحنيان المتجمعان الصاعدان للأجور اليومية لعمال مصنعين ١ ، ب بالقاهرة



٥١ . الأنواع المختلفة للتوزيع التكرارى . إذا اخترنا عددا كبيرا من التوزيعات التكرارية نجد أنوعا كثيرة . هذه الأنواع تختلف باختلاف المكان الذى تشغله التكرارات الكبيرة فى التوزيع وعدد هذه الأماكن وتختلف أيضا باختلاف المدى الذى تتغير فيه الصفة المميزة للتوزيع . فمثلا بينما نجد توزيعات تكراراتها الكبيرة واقعة فى الوسط نجد توزيعات أخرى تكراراتها الكبيرة واقعة بالقرب من أحد الطرفين . وبينما نجد توزيعات ليس لها إلا تكرار واحد أكبر من كل ما عداه نجد توزيعات أخرى لها تكراران أو أكثر واقعة فى أماكن متباعدة وجميعها أكبر من كل التكرارات المجاورة لها . أيضا هناك توزيعات يمتد المدى فيها إلى ما لا نهاية وتوزيعات ينتهى المدى فيها فجأة عند قيمة معينة . هذه الاختلافات تجعلنا نتساءل : ما هى الأسس التى يمكننا أن نبني عليها تقسيم التوزيعات التكرارية إلى أنواع ؟ لا شك أن أهم الأسس المطلوبة هو أساس له صلة بالمكان الذى تشغله التكرارات الكبيرة فى التوزيع . إذا نظرنا إلى الموضوع من هذه الناحية نستطيع أن نميز بسهولة بين خمسة أنواع مختلفة :

(١) التوزيع المتماثل (ب) التوزيع البسيط الالتواء

(ح) التوزيع الشديد الالتواء (د) التوزيع الأعرج

(هـ) التوزيع الأجوف .

سنبحث هذه الأنواع الخمسة على حدة فى البنود التالية . غير أن هناك نقطة معينة لابد من ذكرها هنا . قد يتبادر إلى ذهن القارىء أن الأساس الذى بنينا عليه هذا التقسيم إلى خمسة أنواع مختلفة هو أساس متين لا يقبل الجدل . لكن هذا خلاف الواقع وبالأخص مع الأنواع الثلاثة الأولى . فن الواضح أن هناك توزيعات يعجز الإنسان عن تسكييفها ويختار فى أمرها — . أيعتبرها توزيعات متماثلة أم توزيعات بسيطة الالتواء ؟ وقد يختار الإنسان فى أمر توزيعات أخرى ما بين اعتبارها توزيعات بسيطة الالتواء

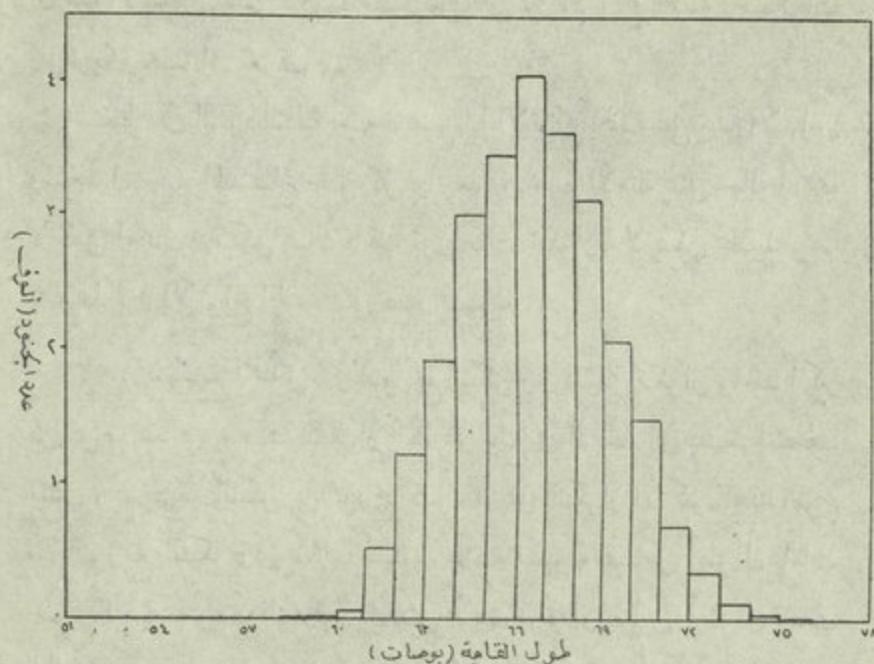
وتوزيعات شديدة الالتواء . رغم هذا العيب الواضح فى أساسنا المختار نرى أن هذا الأساس سليم لأن الاختلافات التى تميز الأنواع الخمسة اختلافات جوهرية ويجب أن تعرف .

سنعطى فى البنود التالية أمثلة نوضح بها الأنواع الخمسة على هذا الأساس . وسنحاول جهد المستطاع جعل كل واحد من هذه الأمثلة يمثل حالة واضحة لا تقبل الجدل . لكن هناك كما قلنا توزيعات تكرارية لا يمكن تحديد نوعها بالضبط بين الأنواع الخمسة بمثل هذه السهولة .

٥٢ . التوزيع المتماثل . فى التوزيع التكرارى المتماثل تكرار واحد أكبر من كل ما عداه . وهذا التكرار الأكبر يقع فى الوسط أى عند منتصف المدى . ثم يصغر التكرار بالتدرج كلما بعد عن التكرار الأكبر . هذا النوع من التوزيع التكرارى يمكن الحصول عليه بسهولة بقياس أطوال قامات جنود الرديف وقت التحاقهم بالجيش لأول مرة أو بقياس أطوال قامات الطلبة المستجدين وقت التحاقهم بمدرسة أو كلية كبيرة . أما أمثلة هذا النوع فكثيرة . فمثلا فى التوزيع التكرارى المناظر للجدول ١٥ التكرار الأكبر هو ٤٠٥٤ . وهذا وحده يعادل ما يقرب من سدس التكرار الكلى . أيضا هذا التكرار يقع عند ٦٦ — بوصة فهو ليس بعيدا عن منتصف المدى الذى يقع عند ٦٤,٥ بوصة . ثم يصغر التكرار بالتدرج كلما بعد عن التكرار الأكبر بمعدل يكاد يكون واحدا على الجانبين . هذا التوزيع متماثل ولا شك والشكل ٢٣ يبين المدرج التكرارى له .

يسمى المنحنى التكرارى للتوزيع المتماثل منحنى التوزيع المتماثل أو المنحنى التكرارى المتماثل وواضح أنه كالجرس فى شكله . والتوزيع التكرارى المتماثل ذو أهمية نظرية كبيرة . فقد وجد بالتجربة أن الأخطاء الناشئة من حصر أو قياس أو تقدير أكثر الظواهر الطبيعية المعروفة تكون توزيعا تكراريا متماثلا . فمثلا هب أن فلسكيا يشاهد نجما معينا . إذا بذل هذا الفلكى كل ما فى

الشكل ٢٣ . أطوال قامات جنود الرديف فى جيش الولايات المتحدة



وسعه للحصول على نتائج مضبوطة وقام بعمل جميع التصحيحات الممكنة فإنه يجد رغم هذا أن النتائج التى يحصل عليها من تجاربه لا تكون كلها متفقة بل تكون عرضة لأخطاء صغيرة لا يمكن تفادها باتخاذ الاحتياطات المذكورة . لكنه يجد أيضا أن هذه الأخطاء توزع نفسها بحيث أن عدد الأخطاء الموجبة يساوى عدد الأخطاء السالبة وعدد الأخطاء الكبيرة يكون أصغر من عدد الأخطاء الصغيرة أى كلما كان الخطأ كبيرا كان عدد مرات ظهوره صغيرا وبالعكس . هذان الشرطان يجعلان الأخطاء توزع نفسها توزيعا تكراريا متماثلا حول الحالة الخالية من الخطأ . هذا يعطى إطلاق اسم منحنى الخطأ المتماثل على منحنى التوزيع المتماثل .

والتوزيع التكرارى المتماثل يظهر كذلك ظهورا طبيعيا فى مسائل نظرية الاحتمالات . فمثلا نفرض أننا قدفنا عشر قطع متماثلة من ذوات المليم مائة

مرة فى الهواء وأحصينا عدد الرؤوس فى كل مرة وحفظنا بيانا بالنتيجة فى كل مرة . إذا عدنا إلى هذه النتائج بعد الانتهاء من القذفة الأخيرة وأعدنا جدولاً يبين عدد مرات الحصول على أى عدد من الرؤوس من ٠ إلى ١٠ . نحصل على جدول كالآتى : -

الجدول ٢٨ . التوزيع التكرارى لمائة قذفة لعشر قطع

عدد الرؤوس	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٠	١	٤	١٢	٢١	٢٤	٢١	١٢	٤	١	٠

اعتبر قذفة واحدة معينة . بما أن احتمال ظهور الرأس واحتمال عدم ظهوره من أية قطعة متساويان وكلاهما يساوى $\frac{1}{2}$ إذن احتمال عدم ظهور أى رأس واحتمال ظهور الرؤوس العشر فى القذفة المعنية المذكورة متساويان وكلاهما يساوى $(\frac{1}{2})^{10}$. أيضاً احتمال ظهور رأس واحد واحتمال ظهور تسعة رؤوس يساويان $(\frac{1}{2})^9 (\frac{1}{2})^1$ واحتمال ظهور رأسين واحتمال ظهور ثمانية رؤوس يساويان $(\frac{1}{2})^8 (\frac{1}{2})^2$ وهلم جرا . هذه الاحتمالات تساوى حدود مفسوك ذى الحدين

$$(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$$

إذن فى مائة قذفة يكون عدد مرات عدم ظهور أى رأس وأعداد مرات ظهور رأس واحد أو رأسين أو ثلاثة رؤوس إلخ مساوية للحدود الأحد عشر فى مفسوك ذى الحدين

$$100 (\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^{10}$$

أكبر هذه الحدود هو الحد الأوسط والحد يصغر بالتدرج كلما بعد عن الحد الأوسط وكل حدين متساوي البعد عن الحد الأوسط متساويان . إذن

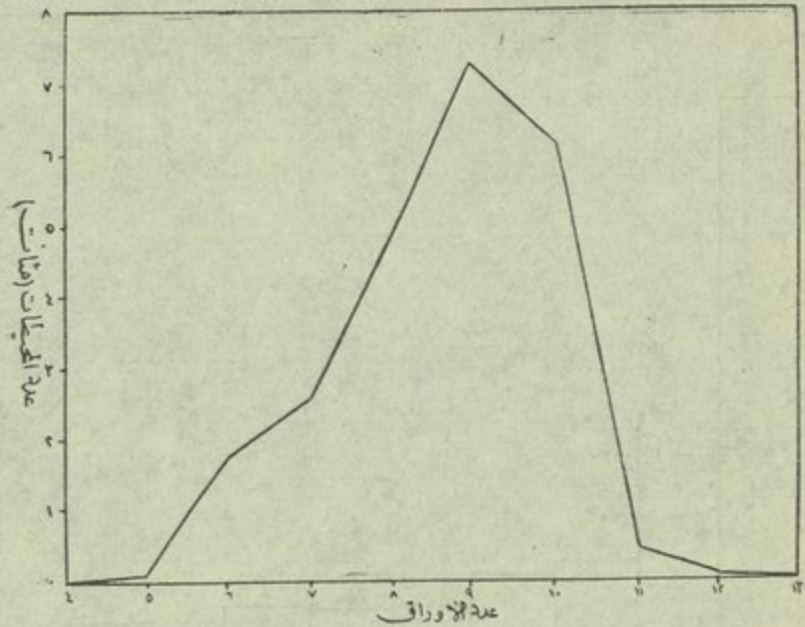
باستخدام القيم المقربة لهذه الحدود نحصل على التوزيع التكرارى المتماثل المعطى فى الجدول ٢٨ . هذا يعطى إطلاق اسم منحنى الاحتمالات المتماثل على منحنى التوزيع المتماثل .

٥٣ . التوزيع البسيط الالتواء والتوزيع الشديد الالتواء . التوزيع التكرارى المتماثل كثير الظهور فى العلوم البحتة والطبيعية مثل الرياضة والطبيعة وعلم الأحياء وعلم الوراثة ولكنه قليل الظهور فى العلوم الاجتماعية مثل علم الاقتصاد حيث ينسحب من الميدان ليفصح للتوزيع التكرارى غير المتماثل . فى هذا التوزيع الذى يشمل النوعين البسيط الالتواء والشديد تكرار واحد أكبر من كل ما عداه لكن هذا التكرار لا يقع فى الوسط كما فى التوزيع التكرارى المتماثل بل يقع بالقرب من أحد الطرفين . ثم يصغر التكرار بالتدرج كلما بعد عن التكرار الأكبر . يقال للتوزيع فى هذه الحالة إنه مائل أو ملتوى . فإن كان انحراف التكرار الأكبر عن الوسط بسيطا قيل للتوزيع إنه بسيط الالتواء وإن كان الانحراف شديدا قيل للتوزيع إنه شديد الالتواء . والنوعان كثيرا الظهور فى الحياة ويمكن الحصول عليهما بسهولة بقياس أوزان جنود الرديف وقت التحاقهم بالجيش لأول مرة أو بقياس أوزان الطلبة المستجدين وقت التحاقهم بمعهد كبير .

أمثلة التوزيع التكرارى البسيط الالتواء كثيرة . الجدول ١٨ يعطى التوزيع التكرارى لعدد الأوراق فى المحيط الزهرى الواحد لنبات نخشوش الحوت . أكبر تكرارات هذا التوزيع هو ٧٣٣ والتكرار يصغر كلما بعد عن هذا التكرار الأكبر . لكن التكرار الأكبر لا يقع فى هذه الحالة فى الوسط لأنه أقرب قليلا إلى الطرف الأعلى . هذا يجعل التوزيع ملتويا التواء بسيطا نحو الطرف الأعلى . أى أنه توزيع بسيط الالتواء .

الشكل ٢٤ يبين المصطلح التكرارى لهذا التوزيع . ومن السهل إعطاء مثال لتوزيع بسيط الالتواء نحو الطرف الأدنى .

الشكل ٢٤ . عدد الأوراق في محيط نخشوش الحوت

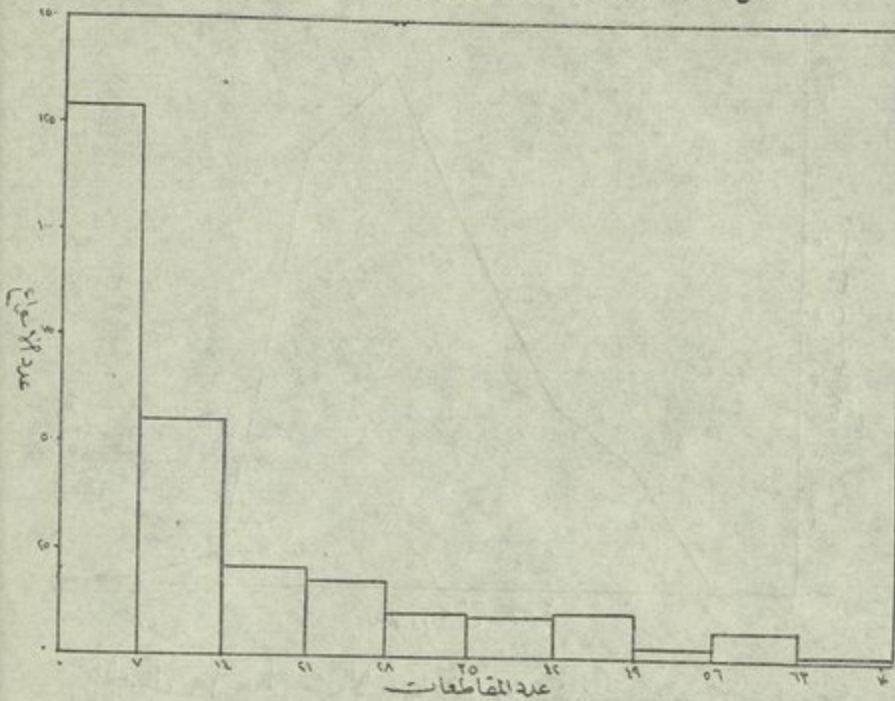


الجدول ١٩ يعطى مثالا جيدا لتوزيع تكراري شديد الالتواء نحو الطرف الأدنى كما يتضح من الجدول ٢٢ والشكل ١٥ يبين المدرج التكراري لهذا التوزيع . لكن أمثلة التوزيع الشديد الالتواء نحو الطرف الأعلى نادرة .

٥٤ . التوزيع الأعرج . في التوزيع التكراري الأعرج تكرار واحد أكبر من كل ما عداه وهذا التكرار يقع فعلا عند أحد الطرفين ثم يصغر التكرار بالتدرج كلما بعد عن التكرار الأكبر . من أمثلة هذا النوع التوزيع التكراري المناظر للجدول ٢٠ . التكرار الأكبر في هذا التوزيع هو ١٢٩ وهذا التكرار وحده يعادل ما يقرب من نصف التكرار الكلي . أيضا هذا التكرار يقع عند الطرف الأدنى للتوزيع . ثم يصغر التكرار بالتدرج كلما بعد عن هذا الطرف إذا تجاوزنا عن الزادتين الطفيفتين عند - ٤٩ ، - ٦٣ .

الشكل ٢٥ يمثل المدرج التكراري لهذا التوزيع وواضح أن المنظر العام للشكل يشبه الحرف العربي ر .

الشكل ٢٥ . عدد مقاطعات إنجلترا وويلز التى يفشاها ٢٦٦ نوعا من النباتات



ومن أمثلة هذا النوع أيضا التوزيع التكرارى للمصانع المصرية التى لها رأس مال على فئات رأس المال (الجدول ٢١) . هذا واضح من الجدول ٢٣ والشكل ١٦ يعطى المدرج التكرارى لهذا التوزيع . وقد وجد أيضا أن عدد البتلات فى بعض الزهور يعطى توزيعات تكرارية عرجاء .

بخصوص هذه التوزيعات التكرارية العرجاء نلاحظ نقطة مهمة . هناك توزيعات تبدو لأول وهلة كأنها عرجاء فإذا استخدمنا فئات أصغر صارت توزيعات تكرارية شديدة الالتواء . فمثلا فى التوزيع التكرارى المناظر للجدول ٢١ إذا قسمنا رأس المال إلى فئات قدر كل منها جنيه واحد كما فى الجدول ٢٣ يظهر التوزيع كأنه أعرج . لكن إذا قسمنا رأس المال إلى فئات أصغر قدر كل منها ريال واحد مثلا فليس بعيدا أن يصير التوزيع عندئذ شديد الالتواء ذات تكرار أكبر واقع عند ٨٠ — قرشا مثلا . إذن ليس

ضروريا أن يكون كل توزيع فيه عند أحد الطرفين تكرار واحد أكبر من كل ماعده وفيه يصغر التكرار بالتدرج كلما بعد عن التكرار الأكبر توزيعا أعرج لأن هذا معناه أن التوزيع يبقى على حاله مهما صغر طول الفئة وواضح أن هذا لا يمكن أن يكون صحيحا إلا إذا وقع التكرار الأكبر فعلا عند أحد الطرفين . فإذا لم يقع هذا التكرار فعلا عند أحد الطرفين فإنه يظهر عند تصغير طول الفئة قريبا من الطرف الذى كان عنده وعلى جانبيه تكرارات أصغر منه وهذه تزداد صغرا كلما بعدت عنه . ومع ذلك فالصعوبة المذكورة لا يمكن أن تنشأ مع أى توزيع تكرارى لمتغير منفصل إذا كان طول الفئة يساوى وحدة القياس .

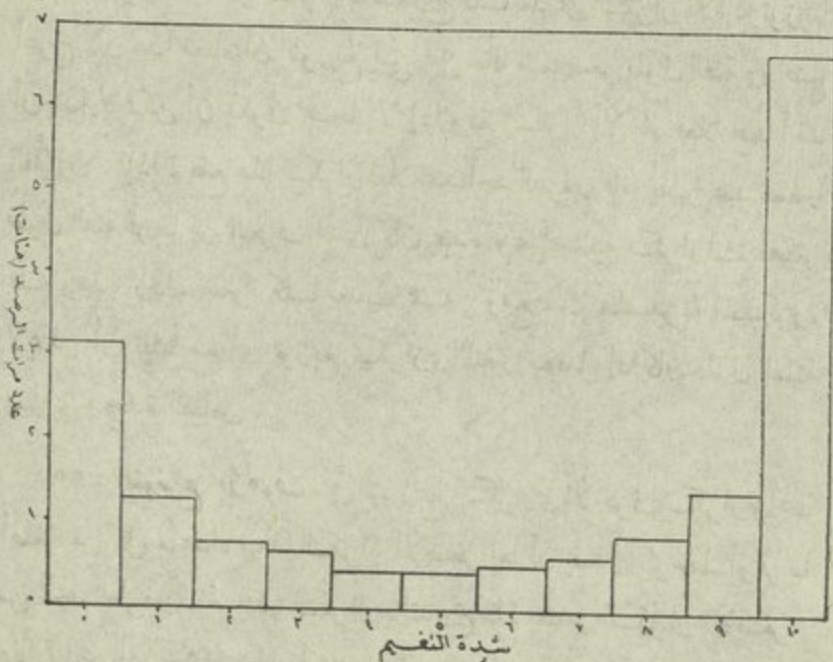
٥٥ . **التوزيع الأهراف .** فى التوزيع التكرارى الأجوف تكرار واحد أصغر من كل ماعده وهذا التكرار الأصغر إما أن يقع فى الوسط أو قريبا من أحد الطرفين . ثم يكبر التكرار بالتدرج كلما بعد عن التكرار الأصغر . هذا النوع نادر وشاذ جدا وأمثله قليلة . يوضح يول^١ هذا التوزيع بالتغير فى شدة التغير فيعطى التوزيع التكرارى لعدد من الأيام حسب شدة التغير فى قرية جرينتش . هذا التوزيع مبين فى الجدول ١٦ ومنه نرى أن سماء جرينتش فى شهر يوليو تكون عادة إما ملائى بالسحب امتلاء يكاد يكون تاما وإما صافية صفاء تاما . أما وجود مساحات معقولة من السماء مغطاة بالسحب فنادر نسبيا .^٢

الشكل ٣٦ يمثل المدرج التكرارى لهذا التوزيع وواضح أن المنظر العام للشكل يشبه الحرف العربى ل .

1 G. Udny Yule, Introduction to the theory of statistics, 103-104.

٢ . قارن بيانات يول بالبيانات المصرية المدونة فى دفاتر الرصدخانه الحدبوبة عن كمية السحاب المنتشرة فى سماء القاهرة . انظر أمين سامى باشا ، تقويم النيل ، المقدمة (القاهرة ، المطبعة الأميرية ، ١٩١٦) ، ١١٢ - ١١٤ . انظر أيضا السؤال ٢ من مجموعة الأسئلة ٤ الموجودة فى آخر هذا الفصل .

الشكل ٢٦ . شدة النغم فى جرينتش خلال يوليو للسنين ١٨٩٠ - ١٩٠٤
(عدا ١٩٠١)



واضح أن الحالة الفاصلة بين التوزيع الأجوف وبين التوزيع ذى التكرار الأكبر هو التوزيع المستطيل ذو التكرارات المتساوية لأن المنحنى التكرارى لهذا الأخير خط مستقيم يوازى المحور الأفقى . هذا يجعل التوزيع المستطيل مهما بنوع خاص لأنه يفصل بين التوزيعات الجوفاء وبين التوزيعات ذات التكرارات الكبرى .

٥٦ . التوزيع العديم الأنماط . فى هذا البند ندرس الأنواع المختلفة للتوزيع التكرارى على أساس عدد الأماكن المشغولة بتكرارات كبيرة فى التوزيع . إذا نظرنا إلى الموضوع من هذه الناحية نجد نوعين مختلفين : التوزيع الوحيد النمط والتوزيع العديد الأنماط .
فى التوزيع التكرارى الوحيد النمط تكرار واحد أكبر أو أصغر من كل ماعداه . وهذا النوع يشمل الأنواع الخمسة الرئيسية التى درسناها فى البنود

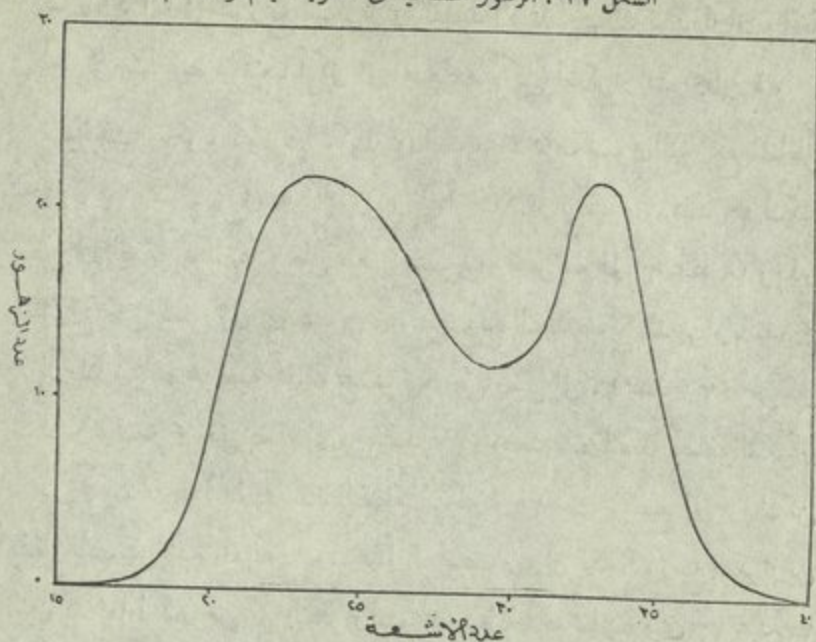
٥٢-٥٥ . أما فى التوزيع التكرارى العديد الأنماط فهناك تكرارات واقعة فى أماكن متباعدة وجميعها أكبر أو أصغر من كل التكرارات المجاورة .

لإثبات وجود التوزيع التكرارى العديد الأنماط نسوق التوزيع المناظر للجدول ١٧ كمثال . فى هذا التوزيع يبدأ التكرار بالقيمة ١ عند ١٦ لكنه يهبط إلى الصفر عند ١٧ ويظل صفرا عند ١٨ ثم يرتفع إلى ٢ عند ١٩ ويكبر بالتدرج حتى يصل إلى ٢٣ عند ٢٢ . وبعد هذه النقطة يصغر التكرار بالتدرج إذا أهملنا زيادة عرضية طفيفة عند ٢٥ حتى يصل إلى ١٠ عند ٣٠ . ثم يكبر التكرار بالتدرج حتى يصل إلى ٢٩ عند ٣٣ . وبعد هذه النقطة يصغر التكرار بالتدرج ولا يزيد أبدا إلا عند النقطة الأخيرة ٣٩ حيث يرتفع إلى ٢ . لكن هذه زيادة عرضية طفيفة ١ . من هذا الوصف نرى أن لهذا التوزيع تكرارين اثنين كلاهما أكبر من كل التكرارات المجاورة له أحدهما يساوى ٢٣ عند ٢٢ والآخر وهو أكبر التكرارين وأهمهما يساوى ٢٩ عند ٣٣ . وبين هذين التكرارين تكرار يساوى ١٠ عند ٣٠ وهذا أصغر من كل التكرارات المجاورة له . لكن وجود هذا التكرار نتيجة حتمية لوجود التكرارين السابقين ويوصف التوزيع التكرارى فى هذه الحالة بأنه ثنائى النمط . الشكل ٢٧ يبين المنحنى التكرارى لهذا التوزيع مرسوما بطريقة الوسط المتحرك .

ومن أمثلة هذا النوع أيضا التوزيع التكرارى للوفيات فى مدة معينة على فئات العمر عند الوفاة . لهذا التوزيع عادة تكرار أكبر قريب من الطرف الأدنى . ثم يصغر التكرار بسرعة حتى يبلغ العمر ١٠ - ١٥ وبعد ذلك يكبر حتى يصل إلى قيمة كبرى عند العمر ٢٠ - ٢٥ . وبعد ذلك يصغر مرة ثانية حتى يبلغ العمر ٣٠ - ٣٥ ثم يكبر حتى يصل إلى أكبر قيمة له عند العمر ٧٠ - ٧٥ . ثم يصغر التكرار بعد ذلك بالتدرج إلى الصفر

١ لا تؤخذ التغيرات العرضية الطفيفة فى قيمة التكرار قرينة على تعدد النمط لأن كثيرا من التوزيعات التكرارية المعروف أنها وجيدة النمط فيها مثل هذه التغيرات .

الشكل ٢٧ . الزهور الشعاعية فى الكريسانثيم لوكانثيم



عند الطرف الأعلى . واضح أن هذا التوزيع يمكن اعتباره مكونا من ثلاثة توزيعات تكرارية مختلفة : توزيع أعرج لوفيات الأطفال وتوزيع متائل ذو تكرار أكبر عند العمر ٢٠ - ٢٥ لوفيات الشبان المغامرين ثم توزيع بسيط الالتواء ذو تكرار أكبر عند العمر ٧٠ - ٧٥ لوفيات الشيوخ .
هذه التوزيعات التكرارية العديدة الأنماط لها أشكال كثيرة مختلفة .
لكن لا يوجد لها إلى الآن أى تقسيم معروف يحصرها فى أنواع متفق عليها من الجميع بل إن كل توزيع عديد الأنماط يعتبر نوعا مستقلا بذاته ويدرس على حدة .

٥٧ . نجانس التوزيعات التكرارية . هناك شبه اتفاق بين الإحصائيين على أن تعدد النمط فى أى توزيع تكرارى يدل على أن التوزيع مكون من خلط توزيعات تكرارية مختلفة لكل منها نمط واحد خاص به - لكن الدليل ليس قاطعا . إذا تكون أى توزيع تكرارى من خلط توزيعات تكرارية

مختلفة لسكل منها نمط واحد خاص به فإنه يسمى توزيعا تكراريا غير متجانس وإلا فهو متجانس . وتركيب دراسة التوزيع التكرارى العديد الأنماط من هذه الناحية من اختبار البيانات الأصلية بقصد التأكد مما إذا كانت مكونة من عناصر مختلفة أو لا ثم تصنيف البيانات بعد ذلك إلى مجموعات صغرى أكثر تجانسا إن اتضح أنها فعلا خليط من عناصر مختلفة .

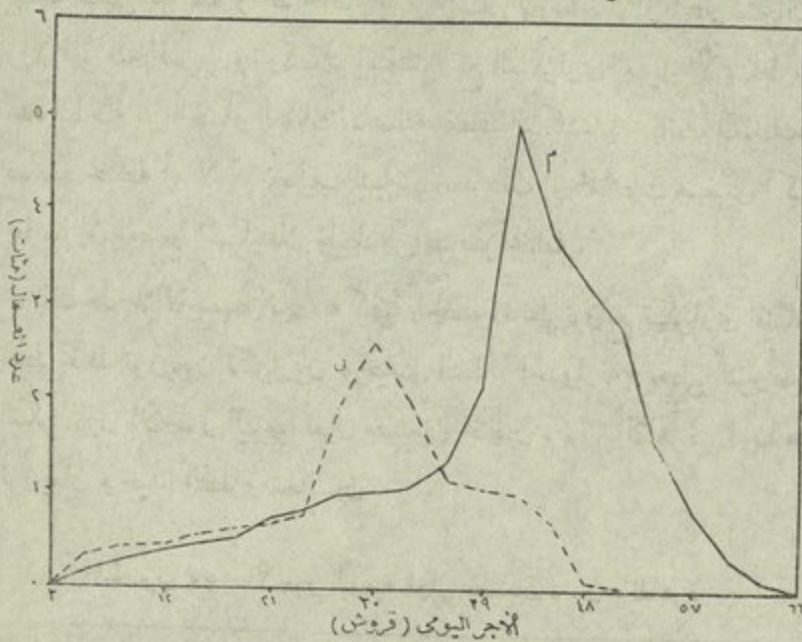
لنأخذ مثالا بسيطا نبين به كيفية الحصول على توزيع تكرارى ثنائى النمط بخلط توزيعين تكراريين وحيدى النمط . الجدول ٢٩ يعطى التوزيعين التكراريين للأجور اليومية لعمال مصنعين مختلفين م ، ن بالقاهرة . لدينا هنا توزيعان وحيدا النمط ومتجانسان .

الجدول ٢٩ . الأجور اليومية لعمال مصنعين م ، ن بالقاهرة

عدد عمال المصنع		الأجر اليومى (قروش)	عدد عمال المصنع		الأجر اليومى (قروش)
ن	م		ن	م	
١١٢	١٣٣	— ٣٦	٣٧	٢٠	— ٦
١٠٧	٢١٥	— ٣٩	٤٤	٣٤	— ٩
١٠٠	٤٩٠	— ٤٢	٤٥	٤٠	— ١٢
٧٠	٣٧٩	— ٤٥	٦٠	٤٧	— ١٥
١٠	٣٢٨	— ٤٨	٦٣	٥٢	— ١٨
	٢٨٠	— ٥١	٦٩	٧٦	— ٢١
	١٥٦	— ٥٤	٧٨	٨٣	— ٢٤
	٨١	— ٥٧	١٩٢	٩٩	— ٢٧
	٣٤	— ٦٠	٢٦٢	١٠٠	— ٣٠
	٩	— ٦٣	٢٠٣	١١٠	— ٣٣
١٤٥٢	٢٧٦٦				

الشكل ٢٨ يعطى المضلعين التكراريين لتوزيع الأجور اليومية لعمال المصنع م وتوزيع الأجور اليومية لعمال المصنع ن . وقد أخذنا الإحداثيات الأفقية لرؤوس المضلعين عند الحدود الدنيا لفئات الأجر بدلا من أخذها عند المراكز لأن فى ذلك تسهلا للعمل .

الشكل ٢٨ . الأجور اليومية لعمال مصنعين م ، ن بالقاهرة



نفرض الآن أن عمال المصنعين م ، ن يعملون في مصنع احد اسمه ه .
لايجاد التوزيع التكرارى للأجور اليومية لعمال هذا المصنع نجمع التكرارات المتناظرة في التوزيعين الأصليين . هذا يعطى التوزيع التكرارى المبين في الجدول ٣٠ . واضح أن لهذا التوزيع تكرارين اثنين كلاهما أكبر من كل التكرارات المجاورة له أحدهما وهو ٣٦٢ يقع عند ٣٠ - قرشا والآخر وهو ٥٩٠ يقع عند ٤٢ - قرشا . لدينا إذن توزيع تكرارى ثنائى النمط والشكل ٢٩ يعطى المضلع التكرارى لهذا التوزيع^١.

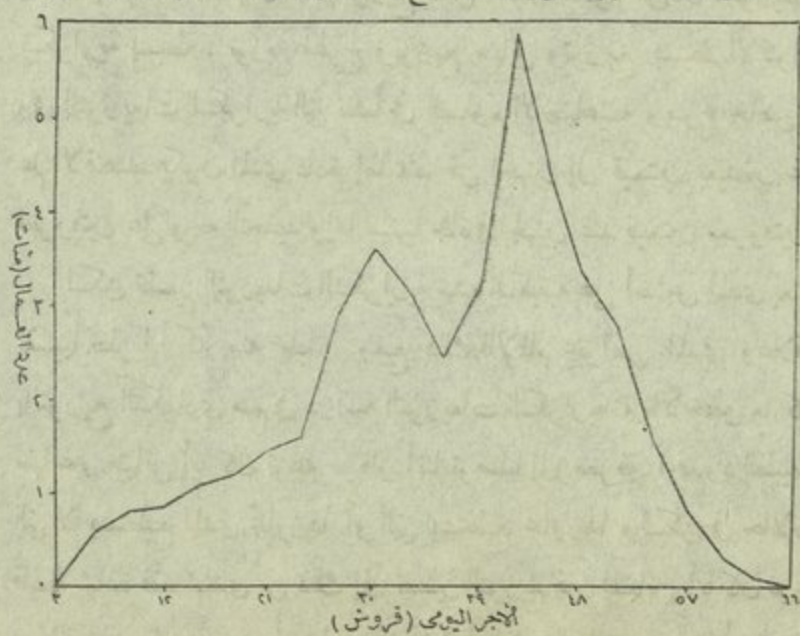
في هذا المثال جمعنا توزيعين تكرارين وحيدى النمط فكانت النتيجة توزيعا تكراريا ثنائى النمط . لسكن هذا لا يحدث في كل حالة ومن السهل فعلا اختراع مثال يكون فيه مجموع توزيعين تكرارين وحيدى النمط توزيعا ثالثا وحيد النمط مثلهما . فمثلا في التوزيعين التكرارين للأجور اليومية

١ الإحداثيات الأفقية لرؤوس المضلع تناظر الحدود الدنيا للنقاط .

الجدول ٣٠ . الأجور اليومية لعمال المصنع ه المكون من مصنعين م ، ن بالقاهرة

الأجر اليومى (قروش)	عدد العمال	الأجر اليومى (قروش)	عدد العمال
٦	٥٧	٣٦	٢٤٥
٩	٧٨	٣٩	٣٢٢
١٢	٨٥	٤٢	٥٩٠
١٥	١٠٧	٤٥	٤٤٩
١٨	١١٥	٤٨	٣٣٨
٢١	١٤٥	٥١	٢٠
٢٤	١٦١	٥٤	١٥٦
٢٧	٢٩١	٥٧	٨١
٣٠	٣٦٢	٦٠	٣٤
٣٣	٣١٣	٦٣	٩
			٤٢١٨

الشكل ٢٩ . الأجور اليومية لعمال المصنع ه المكون من مصنعين م ، ن بالقاهرة



المناظرة للجدول ٢٥ إذا أخذنا عدد عمال المصنع ١ يساوى ١٠٠٠ وعدد عمال المصنع ب يساوى ٥٠٠ وجمعنا فإن التوزيع التكرارى الناتج للأجور اليومية لعمال المصنع ح المكون من المصنعين ١، ب لا يكون ثنائى النمط بل يكون وحيد النمط كالتوزيعين الأصليين .

٥٨ . المرى وعلاقته بالتوزيع التكرارى . إذا نظرنا إلى التوزيع التكرارى من ناحية المدى الذى فيه تتغير الصفة المميزة للتوزيع نجد ثلاثة أنواع مختلفة : توزيع يمتد فيه المدى إلى ما لانهاية من الجهتين وتوزيع يمتد فيه المدى إلى ما لانهاية من جهة واحدة وينتهى فجأة عند قيمة معينة فى الجهة الثانية وتوزيع ينتهى فيه المدى فجأة فى الجهتين .

فمثلا فى التوزيع التكرارى المعروف للوفيات على فئات العمر عند الوفاة ينتهى العمر بالصفر عند الطرف الأدنى للتوزيع وينتهى أيضا فى الجهة الثانية ولكن عند عمر غير معروف على وجه التحديد كما فى حالة الطرف الأدنى . وقد رأينا (البند ٥٦) أن هذا التوزيع يمكن اعتباره مكونا من ثلاثة توزيعات تكرارية بسيطة : توزيع أعرج وتوزيع متماثل وتوزيع بسيط الالتواء . وفى التوزيعات التكرارية التى تنشأ فى العلوم الاجتماعية وبنوع خاص فى علم الاقتصاد يكون المدى عادة إما ممتدا من الجهتين إلى قيمتين بعيدتين غير معروفتين على وجه التحديد وإما منتهيا فجأة فى الجهتين عند قيمتين معروفتين . لكن تقسيم التوزيعات التكرارية بهذه الكيفية على أساس المدى يعتبر تقسيما نظريا أكثر منه عمليا . ومع ذلك فالإلمام بخواص المدى وعلاقته بالتوزيع التكرارى مهم فى دراسة التوزيعات التكرارية وبالأخص ما كان منها غير متماثل أيا كان نوعه . فلو أننا توصلنا إلى معرفة الحدود الطبيعية التى لا يستطيع المدى تجاوزها أو التى يستطيع تجاوزها ولكن فى حالات قليلة شاذة فقد نهتدى من ذلك إلى تفسير التوزيع غير المتماثل أيا كان نوعه بدلالة توزيعات أخرى أبسط منه . فمثلا فى المثال السابق بمعرفتنا أن الوفاة

لا يمكن أن تحدث قبل العمر صفر كما أنها إن أبطأت فإنها لن تبطل إلى ما لانهاية أمكننا اعتبار التوزيع مكونا من ثلاثة توزيعات أخرى أبسط منه بكثير . على هذا النحو يمكننا أيضا أن نعتبر أى توزيع أعرج كأنه توزيع متماثل مبتور عند نقطة قريبة من نقطة التكرار الأكبر أو كأنه ذيل لتوزيع متماثل . وبفسف السكيفية يمكننا أن نعتبر توزيعات أخرى كثيرة أشد تعقيدا من التوزيع الأعرج البسيط كأنها مقاطع للتوزيع المتماثل أو لنوع آخر من الأنواع الأخرى البسيطة التى سلف ذكرها .

٥٩ . التوزيع التكرارى المزدوج . فى هذا البند والبدين التالين ندرس بعض حالات التوزيع التكرارى المركب . هذا التوزيع التكرارى هو بالتعريف المعطى فى البند ٣٤ تصنيف لأشياء بمجموعة كبرى حسب صفات مميزة تتغير مقاديرها من صنف إلى آخر . أما عدد هذه الصفات فيجوز أن يكون أى عدد صحيح أكبر من ١ . إذا كان عدد الصفات المميزة اثنين فإن التوزيع التكرارى المركب يسمى فى هذه الحالة التوزيع التكرارى المزدوج وتلك هى الحالة الوحيدة للتوزيع التكرارى المركب التى ستدرس فى هذا الكتاب .

سنبدأ دراسة التوزيع التكرارى المزدوج بإعطاء مثال بسيط نوضح به كيفية عمل هذا التوزيع فى حالة معينة بسيطة . الجدول ٣١ يعطى درجات متناظرة فى (١) الرياضة و (ب) اللغات الحديثة ويراد توزيع هذه الدرجات المتزاوكة فى حالة الرياضة بين ٩٧ ، ٥٠ وفى حالة اللغات الحديثة بين ٩٤ ، ٥٠ . توزيعا تكراريا مزدوجا باستخدام الفئات ٥٠ — ٥٩ ، ٥٩ — ٦٠ ، ٦٠ — ٦٩ .

لعمل التوزيع المطلوب طريقتان مختلفتان . الجدول ٣٢ يبين الطريقة الأولى . فى السطر الأول من الجدول المذكور نجد الفئات مكتوبة بالترتيب من اليمين إلى اليسار لدرجات الرياضة وفى العمود الأول نجد الفئات مكتوبة بالترتيب من أعلى إلى أدنى لدرجات اللغات الحديثة . وفى كل خلية نجد الإشارات المعتادة التى تمثل نتائج توزيع الدرجات المعطاة على الخلايا المختلفة .

الجدول ٣١. درجات متناظرة في (١) الرياضة، (ب) اللغات الحديثة

ب	ا	ب	ا	ب	ا	ب	ا
٧٨	٦٩	٧٧	٧١	٩١	٩٤	٥٨	٥٠
٩٤	٩٧	٥٩	٧٢	٨٤	٧٩	٨٨	٧٨
٨٦	٧٣	٨٧	٩٢	٨٣	٨٦	٩٠	٩٦
٧٢	٦٦	٨٩	٨١	٨٠	٧٥	٨٥	٨٨
٥٠	٩٦	٧٦	٨٤	٩٢	٨٣	٩٣	٨٥
		٧٥	٧٤	٨١	٨٢	٥٧	٨٠

فمثلا درجتا الطالب الأول هما بالترتيب ٥٨، ٥٠ وكلتا هاتين الدرجتين تقع في الفئة ٥٠-٥٩. لذلك نضع إشارة واحدة في الخلية الواقعة تحت الفئة ٥٠-٥٩ وأمام الفئة ٥٠-٥٩. أيضا درجتا الطالب الثاني هما بالترتيب ٧٨، ٧٨. أما ٧٨ فتقع في الفئة ٧٠-٧٩ من فئات ١ وأما ٨٨ فتقع في الفئة ٨٠-٨٩ من فئات ب. لذلك نضع إشارة واحدة في الخلية الواقعة تحت ٧٠-٧٩ وأمام ٨٠-٨٩. أيضا درجتا الطالب الثالث هما بالترتيب ٩٠، ٩٦ وكلتا هاتين الدرجتين تقع في الفئة ٩٠-٩٩. لذلك نضع إشارة واحدة في الخلية الواقعة تحت ٩٠-٩٩ وأمام ٩٩-٩٠ وهلم جرا حتى نفرغ من

الجدول ٣٢. درجات متناظرة في (١) الرياضة، (ب) اللغات الحديثة

درجة الرياضة

٩٩-٩٠	٨٩-٨٠	٧٩-٧٠	٦٩-٦٠	٥٩-٥٠	
/	/	/		/	٥٩-٥٠
					٦٩-٦٠
	/	//	//		٧٩-٧٠
/	///	///			٨٩-٨٠
///	//				٩٩-٩٠

درجات اللغات الحديثة

جميع الدرجات . بهذه السكيفية نحصل على الجدول ٣٢ ونلاحظ عدم وجود إشارات أمام الفئة ٦٠-٦٩ لعدم وجود درجات في اللغات الحديثة واقعة في هذه الفئة . لكن لا بد من وجود هذا السطر في الجدول رغما من ذلك حتى لا يكون المدى الرأسى ناقصا . بعد ذلك نعد الإشارات ونكتب النتيجة بالأرقام في كل خلية . هذا يعطينا الجدول ٣٣ . هذا الجدول يحتوى أيضا على سطر إضافى في آخره لرصد مجموع الأرقام المكتوبة في الأعمدة وعلى عمود إضافى في أقصى اليسار لرصد مجموع الأرقام المكتوبة في السطور . مجموع الأعداد المكتوبة في السطر أو العمود الإضافى هو ٢٣ أى عدد الطلبة . هذا المجموع مكتوب في الخلية الحادثة من تلاقى السطر والعمود المذكورين .

الجدول ٣٣ . درجات متناظرة في (١) الرياضة ، (ب) اللغات الحديثة

درجة الرياضة

	٩٩-٩٠	٨٩-٨٠	٧٩-٧٠	٦٩-٦٠	٥٩-٥٠	
٤	١	١	١		١	٥٩-٥٠
٠						٦٩-٦٠
٥		١	٢	٢		٧٩-٧٠
٩	١	٤	٤			٨٩-٨٠
٥	٣	٢				٩٩-٩٠
٢٣	٥	٨	٧	٢	١	

اللغات الحديثة

في المثال الحالى لدينا ٢٣ طالبا لا غير وهذا عدد صغير فلا بأس من استخدام هذه الطريقة . لكن الطريقة لا تستخدم إذا كان العدد كبيرا إذ لو أخطأ الإنسان عند استخدامها أو ضل الخلية فلا معدى عن إعادة العملية من جديد . زد على ذلك أن الوسيلة الوحيدة للتأكد من صحة الجدول

١ إذا خلت خلية من الإشارات فإن العادة جرت على ترك مكان الخلية أبيض في الجدول .
أى أننا لا نكتب الأصفر على خلاف النبع في الجداول التكرارية البسيطة .

الناتج باستخدام هذه الطريقة هي أيضا إعادة عمله من جديد .

في الطريقة الثانية لعمل التوزيع التكرارى المزدوج نبدأ بكتابة درجتى كل طالب على بطاقة مستقلة . ثم نرتب هذه البطاقات أولا حسب فئات درجة الرياضة وبعد ذلك نعيد ترتيب بطاقات كل فئة حسب فئات درجة اللغات الحديثة . ثم نراجع بطاقات كل مجموعة للتأكد من وجود كل بطاقة في المجموعة التى تنتمى إليها فعلا . وأخيرا نعد بطاقات كل مجموعة ونكتب النتائج في الخلايا المناسبة . هذه الطريقة الثانية لعمل التوزيع التكرارى المزدوج تناظر طريقة عمل التوزيع التكرارى البسيط باستخدام القيم المرتبة للبيانات (الجدول ١٢) ولا يعيبها إلا الوقت الطويل الذى تحتاجه لكتابة البطاقات . لكن الوقت اللازم لعمل التوزيع التكرارى المركب بهذه الطريقة أقصر على العموم من الوقت اللازم لعمله بطريقة الإشارات وبالأخص إذا كان عدد الصفات المميزة للتوزيع أكبر من اثنين . وفي أغلب الحالات يمكن جمع البيانات على بطاقات وبذلك نتحاشى كتابة البطاقات من جديد .

في كلتا الحالتين نحصل على التوزيع التكرارى المطلوب ويسمى الجدول الناتج جدولا تكراريا مزدوجا . أما العدد المكتوب في الجدول في أية خلية فيسمى التكرار المناظر لتلك الخلية وبمجموع التكرارات في هذه الحالة هو ٢٣ أى عدد الطلبة . هذا المجموع يسمى التكرار الكلى للتوزيع^١ . والتكرار الكلى في أى جدول تكرارى مزدوج لا يصح أن يكون أصغر من ٣٠ بأى حال . أما في المثال الحالى فإننا اخترنا تكرارا كليا يساوى ٢٣ لمجرد الإيضاح فقط .

كل سطر وكل عمود في الجدول ٣٣ يعطى توزيعا تكراريا بسيطا

١ إذا اعتبرنا التكرار الكلى كأنه ١٠٠ في المائة تنحول التكرارات إلى نسب مئوية من التكرار الكلى ويصبح مجموعها ١٠٠ . هذا التحويل يفيد بنوع خاص في المقارنة بين توزيعين تكراريين مختلفين .

للدراجات الخاصة بالسطر أو العمود . فمثلا السطر الأخير يعطى التوزيع التكرارى لكل درجات الرياضة والعمود الأخير يعطى التوزيع التكرارى لكل درجات اللغات الحديثة والسطر السابق للاخير يعطى التوزيع التكرارى لدرجات الرياضة لجميع من حصلوا فى اللغات الحديثة على درجة واقعة فى الفئة ٩٠-٩٩ وعدد هؤلاء خمسة إلخ .

٦٠ . صنع الجداول التكرارية المزدوجة . فى المثال السابق أخذنا طول الفئة اللازمة لتوزيع درجات الرياضة يساوى ١٠ وطول الفئة اللازمة لتوزيع درجات اللغات الحديثة يساوى ١٠ فكان عدد الفئات اللازمة فى كلتا الحالتين خمسا . وقد راعينا عند اختيار هذين الطولين القواعد العامة لاختيار طول الفئة (البند ٣٥) لأن هذه القواعد تسرى على نوعى التوزيع التكرارى البسيط والمركب . أما عدد الفئات فى الجدول التكرارى المزدوج فيتحدد بقواعد عامة تختلف قليلا عن القواعد المناظرة لها لعدد الفئات فى الجدول التكرارى البسيط لأن القواعد العامة المذكورة فى البند ٣٥ لعدد الفئات فى الجدول التكرارى البسيط تتطلب عددا من الفئات أكبر فى العادة مما يتناسب مع طبيعة الجدول التكرارى المزدوج . والقاعدة العامة لعدد الفئات فى الجدول التكرارى المزدوج هى ألا يكون عدد الفئات أصغر من ٨ ولا أكبر من ١٢ لكل متغير على حدة . غير أن بعض المؤلفين يرى ألا يكون عدد الفئات أصغر من ١٠ ولا أكبر من ٢٠ لكل متغير على حدة . ونذكر أن هذه كانت إحدى القواعد العامة لعدد الفئات فى الجدول التكرارى البسيط .

هذا فيما يتعلق بطول الفئة وعدد الفئات فى الجدول التكرارى المزدوج . وفيما يتعلق بحدود الفئات نراعى عند اختيار هذه الحدود الاعتبارات العامة المذكورة فى البند ٣٦ لأن هذه الاعتبارات تسرى أيضا على التوزيع التكرارى المركب . وأما فيما يتعلق بكيفية التعبير عن حدود الفئات فى الجدول التكرارى المزدوج فالصيغ المستخدمة هى بعينها الصيغ المذكورة فى البند ٣٦ . فمثلا إذا

استخدمنا الصيغة (ب) لتوزيع بيانات كيانات الجدول ٣١ توزيعا تكراريا مزدوجا باستخدام الفئات ٥٠-٦٠، ٦٠-٧٠، ٧٠-٨٠، ٨٠-٩٠، ٩٠-١٠٠ واتفقنا على توزيع الدرجات ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠ بالتساوى على الفئات المجاورة فإن الطالب (٩٦، ٩٠) يمثل فى الجدول التكرارى المزدوج بتكرار يساوى ٦ فى الخلية الأخيرة من السطر ٨٠-٩٠ وتكرار يساوى ٦ فى الخلية الأخيرة من السطر ٩٠-١٠٠. والطالب (٨٠، ٥٧) يمثل فى السطر الأول بتكرار يساوى ٦ فى كل من الخليتين الثالثة والرابعة إلخ. وعلى فرض أن هناك طالبا (٦٠، ٩٠) تمثل هذا الطالب بتكرار يساوى ٦ فى كل من الخلايا الأربع المكونة من تقاطع العمودين الأول والثانى مع السطرين الرابع والخامس.

كما تقدم نرى أن صنع الجدول التكرارى المزدوج لا يختلف كثيرا عن صنع الجدول التكرارى البسيط. لكن التصنيف المزدوج فى الجدول التكرارى المزدوج يجعل صنع هذا الجدول أصعب بالطبع من صنع الجدول التكرارى البسيط.

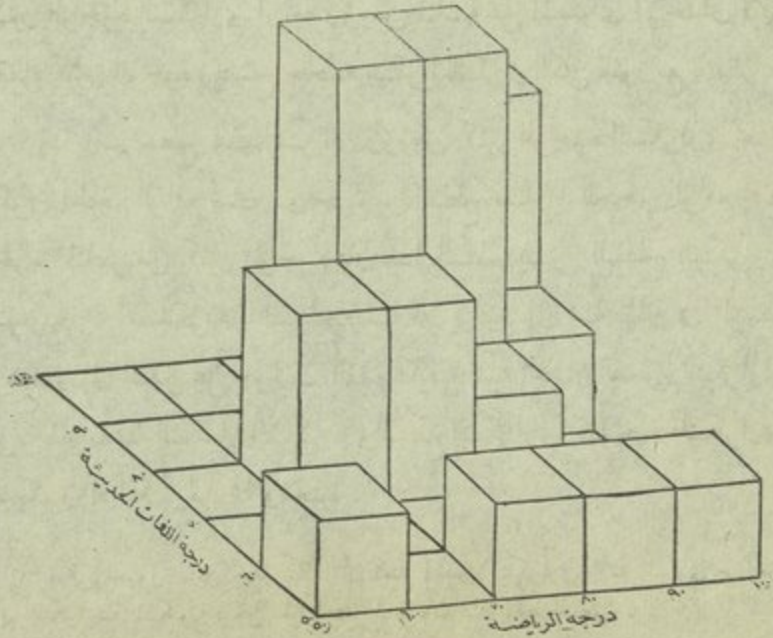
٦١. القبول البياني للتوزيع التكرارى المزدوج. التوزيع التكرارى المزدوج كالتوزيع التكرارى البسيط يمكن تمثيله بيانيا برسم أشكال تكرارية فى الفراغ تناظر المدرج التكرارى والمضلع التكرارى والمنحنى التكرارى. أوالشكل الفراغى الذى يناظر المدرج التكرارى يسمى أيضا المدرج التكرارى ويسمى الشكلان الآخران بالترتيب كثير الوجوه التكرارى والسطح التكرارى.

لرسم أى واحد من هذه الأشكال الفراغية نستخدم ثلاثة خطوط مستقيمة متعامدة فيما بينها اثنان منها أفقيان وهذان يمثلان محور س ومحور ص العاديين والخط الثالث رأسى وهذا يسمى محور ع. وبعد اختيار وحدات القياس الثلاثة نقيس إحدى الصفتين المميزتين للتوزيع على محور س

والصفة المميزة الثانية على محور ص ونقيس التكرار المتغير على محور ع فيتم بذلك استخدام المحاور الثلاثة . ثم نرسم من النقط التى تمثل حدود الفئات على محور س خطوطا مستقيمة توازى محور ص ومن النقط التى تمثل حدود الفئات على محور ص خطوطا مستقيمة توازى محور س فينقسم المستوى الإحداثى الأفقى بذلك إلى مستطيلات تمثل خلايا التوزيع التكرارى المزدوج .

لرسم المدرج التكرارى نمثل كل خلية بمنشور نرسمه على الخلية كقاعدة بحيث يتناسب حجم المنشور مع تكرار الخلية . فإن كانت كل الخلايا متساوية فإن ارتفاع المنشور الذى يمثل أية خلية يتناسب مع تكرار الخلية . وتراعى عند رسم هذه المنشورات قواعد الرسم فى الفراغ فلا يبين منها إلا الأجزاء التى تراها العين . الشكل ٣٠ يمثل المسقط الرأسمى للمدرج التكرارى للتوزيع المناظر للجدول ٣٣ . والمنظر العام للمدرج يشبه مدينة مبنية على أساس وحدة معمارية واحدة وهى المنشور .

الشكل ٣٠ . درجات متناظرة فى (١) الرياضة ، (ب) اللغات الحديثة



فى هذا الشكل لا يظهر المنشور الذى يمثل الخلية (١) ٨٠-٨٩،
(ب) ٩٠-٩٩ لأنه محجوب خلف منشور آخر أعلى منه. إذن الشكل يحتوى
على أحد عشر منشورا فقط بعضها ظاهر كله وبعضها ظاهر ظهورا جزئيا .
أيضا التكرار الكلى للتوزيع يمثل هندسيا بالحجم الواقع تحت المدرج
التكرارى بالضبط كما فى التوزيع التكرارى البسيط .

لرسم كثير الوجوه التكرارى الذى يمثل التوزيع التكرارى المزدوج
نقيم عند مركز كل خلية عمودا يساوى تكرار الخلية مقسوما على مساحتها
ثم نصل طرف كل عمود بالأطراف الأربعة المجاورة أى أطراف الأعمدة
المقامة عند مراكز الخلايا الأربع المجاورة التى تشارك تلك الخلية قيمة
أحد المتغيرين .^١ بهذه السكيفة نحصل على شكل كثير الوجوه أحرفه هى
الخطوط المستقيمة الواصلة بين أطراف الأعمدة المتجاورة وهذا هو كثير
الوجوه التكرارى . إذا تساوت كل الخلايا فإن طول العمود المقام عند
مركز أية خلية يتناسب مع تكرار الخلية وفى هذه الحالة إذا أضفنا إلى
كثير الوجوه التكرارى أربعة رؤوس مناسبة على المستوى الإحداثى الأفقى
يقفل كثير الوجوه ويصبح حجمه مساويا للتكرار الكلى للتوزيع .

إذا رسم سطح ممد يمر بين رؤوس كثير الوجوه التكرارى بحيث
يكون الحجم الواقع تحت أى جزء من السطح مساويا للحجم الواقع تحت
الجزء المناظر من كثير الوجوه فإن هذا السطح يسمى السطح التكرارى
للتوزيع . أما شكل هذا السطح فيشبه تلابر ترفع إلى قمة عالية فى الوسط
وينحدر إلى أسفل على جوانب القمة بكيفية تشبه انحدار المنحنى التكرارى
على جانبي نقطة التكرار الأكبر . والسطح التكرارى كالمحنى التكرارى
قد يكون له أكثر من قمة واحدة .

١ انكى تتصور الشكل جيدا يمكننا أن نعتبر الجدول التكرارى كأنه المستوى س م من
وأن التكرارات المسكونة داخل الخلايا تمثل ارتفاعات عند النقاط المناظرة .

أمثلة عامة

٦٢ . مثال ١ . أعدت غرفة الملاحة البريطانية الجدول الآتى ليبين الحمولة البريطانية المسحوبة من الخدمة يوم ١ يوليو ١٩٣٢ :

الجدول ٣٤ . الحمولة البريطانية المسحوبة من الخدمة يوم ١ يوليو ١٩٣٢

أقسام الحمولة	عدد السفن	الحمولة الكلية
١٠٠ و دون ٥٠٠	٥٦	١٧٩٠٠
٥٠٠ " ١٠٠٠	٥٢	٤١١٠٠
١٠٠٠ " ٢٠٠٠	٩٩	١٤٧٤٠٠
٢٠٠٠ " ٤٠٠٠	١٥١	٤٨٥٤٠٠
٤٠٠٠ " ٦٠٠٠	٢٧٩	١٣٨٣٨٠٠
٦٠٠٠ " ٨٠٠٠	١١٣	٧٧٥٣٠٠
٨٠٠٠ " ١٠٠٠٠	٤٧	٤١٣٥٠٠
١٠٠٠٠ " ١٥٠٠٠	١٤	١٧٣٠٠٠
١٥٠٠٠ " ٢٠٠٠٠	٧	١١٨٢٠٠
	٨١٨	٣٥٥٥٦٠٠

مثل بمدرج تكرارى توزيع عدد السفن على الحمولة وأضف إلى نفس الرسم منحنيًا يبين الحمولة الكلية للسفن الأصغر من أى حجم معطى .

يعطى هذا الجدول توزيعين تكراريين مختلفين : توزيع عدد السفن على أقسام الحمولة وتوزيع الحمولة الكلية على أقسام الحمولة . لرسم المدرج التكرارى المطلوب نستخدم التوزيع الأول ولرسم المنحنى المطلوب نستخدم التوزيع الثانى .

لدينا فى عمود الأقسام قسم طوله ٤٠٠ طن فقسم طوله ٥٠٠ طن فقسم طوله ١٠٠٠ طن فأربعة أقسام طول كل منها ٢٠٠٠ طن فقسمان طول كل منهما ٥٠٠٠ طن . ولرسم المدرج التكرارى المطلوب لابد من توحيد هذه

الاطوال واحتساب توزيع عدد السفن على أقسام متساوية من الحمولة .
الجدول ٣٥ يعطى العدد المقدر للسفن فى أقسام طول كل منها ٢٠٠٠ طن .

الجدول ٣٥ . الحمولة البريطانية المسحوبة من الخدمة يوم ١ يوليو ١٩٣٢

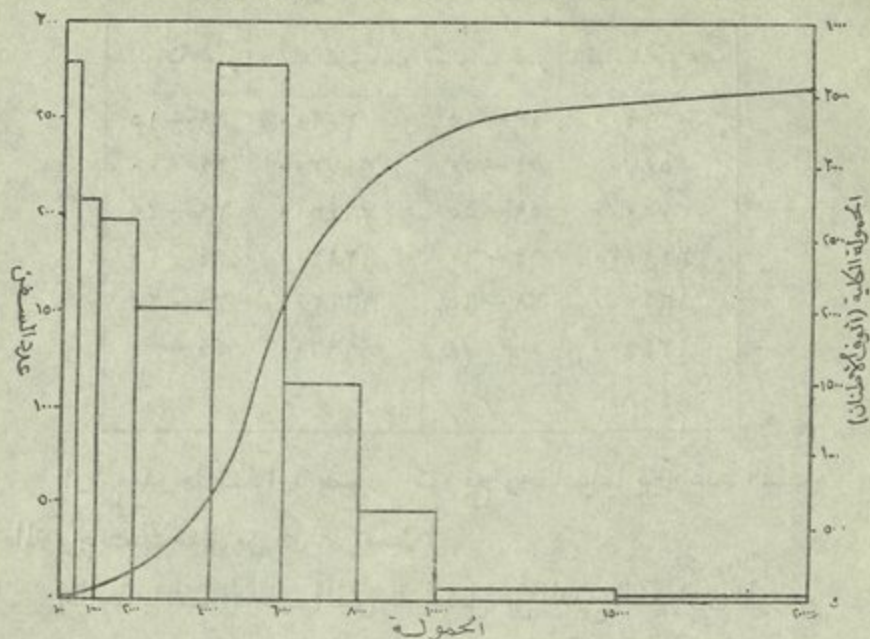
أقسام الحمولة	عدد السفن	العدد المقدر للسفن فى كل ٢٠٠٠ طن
١٠٠ ودون ٥٠٠	٥٦	٢٨٠
٥٠٠ " ١٠٠٠	٥٢	٢٠٨
١٠٠٠ " ٢٠٠٠	٩٩	١٩٨
٢٠٠٠ " ٤٠٠٠	١٥١	١٥١
٤٠٠٠ " ٦٠٠٠	٢٧٩	٢٧٩
٦٠٠٠ " ٨٠٠٠	١١٣	١١٣
٨٠٠٠ " ١٠٠٠٠	٤٧	٤٧
١٠٠٠٠ " ١٥٠٠٠	١٤	٦
١٥٠٠٠ " ٢٠٠٠٠	٧	٣
	٨١٨	

أكبر التكرارات الجديدة يقع عند الطرف الأدنى للتوزيع وهناك تكرار آخر يكاد يساوى هذا أمام القسم ٤٠٠٠ ودون ٦٠٠٠ طن . باستخدام هذه التكرارات نحصل بسهولة على المدرج التكرارى المبين فى الشكل ٣١ .

المنحنى المطلوب هو المنحنى المتجمع الصاعد لتوزيع الحمولة الكلية على أقسام الحمولة . الجدول ٣٦ يعطى التكرارات المتجمعة الصاعدة لهذا التوزيع . لكن لرسم المنحنى المطلوب لابد من تدرج المحور الرأسمى تدريجاً جديداً . هذا التدرج مبين فى الرسم على اليمين . وقد أضفنا المنحنى إلى الرسم فأصبح هو والمدرج داخل إطار واحد .

هذا الرسم المكون من المدرج والمنحنى المضاف إليه يمثل البيانات الأصلية تماماً لأن المدرج يمثل توزيع عدد السفن على الحمولة والمنحنى يمثل توزيع الحمولة الكلية على الحمولة .

الشكل ٣١ . الحملة البريطانية المسحوبة من الخدمة يوم ١ يوليو ١٩٣٢



الجدول ٣٦ . الحملة البريطانية المسحوبة من الخدمة يوم ١ يوليو ١٩٣٢

الحمولة الكلية	أقسام الحملة
١٧٩٠٠	١٠٠ ودون ٥٠٠
٥٩٠٠٠	١٠٠ " ١٠٠٠
٢٠٦٤٠٠	١٠٠ " ٢٠٠٠
٦٩١٨٠٠	١٠٠ " ٤٠٠٠
٢٠٧٥٦٠٠	١٠٠ " ٦٠٠٠
٢٨٥٠٩٠٠	١٠٠ " ٨٠٠٠
٣٢٦٤٤٠٠	١٠٠ " ١٠٠٠٠
٣٤٣٧٤٠٠	١٠٠ " ١٥٠٠٠
٣٥٥٥٦٠٠	١٠٠ " ٢٠٠٠٠

٦٣ . مثال ٢ . يبين الجدول الآتى توزيع أعمار النساء المتزوجات كما

تبين من بحث عمل فى بريطانيا العظمى فى ١٩٣١ : —

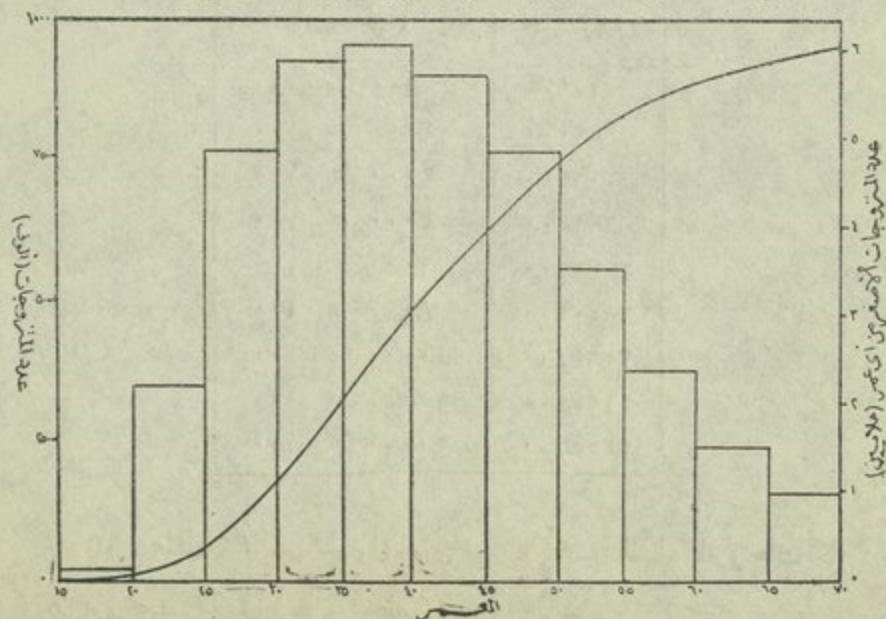
الجدول ٣٧ . أعمار النساء المتزوجات في بريطانيا العظمى في ١٩٢١

سنوات العمر	النساء المتزوجات	سنوات العمر	النساء المتزوجات
١٩-١٥	٢٠١٠٠	٤٩-٤٥	٧٦١٤٠٠
٢٤-٢٠	٣٤٧٣٠٠	٥٤-٥٠	٥٥٨٧٠٠
٢٩-٢٥	٧٦٤٥٠٠	٥٩-٥٥	٣٧٥٠٠٠
٣٤-٣٠	٩٢١٢٠٠	٦٤-٦٠	٢٤١٤٠٠
٣٩-٣٥	٩٦٠٣٠٠	٦٩-٦٥	١٦١٧٠٠
٤٤-٤٠	٨٩٩٦٠٠	٧٠ وفوق	١٢٩٦٠٠
			٦١٤٠٨٠٠

ارسم مدرجا تكراريا يصور التوزيع وخطا يبين عدد النساء المتزوجات الأصغر من أى عمر معطى .

إذا حذفنا الفئة الأخيرة المفتوحة نحصل على المدرج التكرارى المرسوم فى الشكل ٣٢ .

الشكل ٣٢ . أعمار النساء المتزوجات دون السبعين في بريطانيا العظمى في ١٩٢١



الخط البياني المطلوب هو المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع . الجدول ٣٨ يعطى التكرارات المتجمعة الصاعدة للتوزيع وباستخدام التدرج المبين على يمين الرسم نحصل على الخط البياني المطلوب . ونلاحظ أن نقطة انقلاب هذا الخط تقع داخل أعلى المستطيلات .

الجدول ٣٨ . أعمار النساء المتزوجات دون السبعين في بريطانيا العظمى في ١٩٢١

سنوات العمر	النساء المتزوجات	سنوات العمر	النساء المتزوجات
أصغر من ٢٠	٢٠١٠٠	أصغر من ٥٠	٤٦٧٤٤٠٠
٢٥ "	٣٦٧٤٠٠	٥٥ "	٥٢٣٣١٠٠
٣٠ "	١١٣١٩٠٠	٦٠ "	٥٦٠٨١٠٠
٣٥ "	٢٠٥٣١٠٠	٦٥ "	٥٨٤٩٥٠٠
٤٠ "	٣٠١٣٤٠٠	٧٠ "	٦٠١١٢٠٠
٤٥ "	٣٩١٣٠٠٠		

٦٤ . مثال ٣ . ارسم المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع التكرارى المناظر

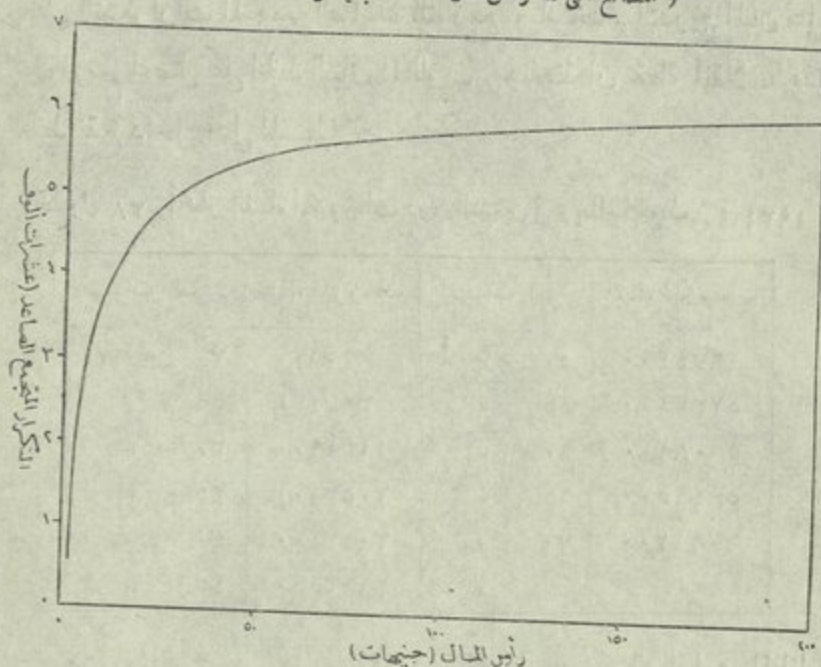
للجدول ٢١ .

الجدول ٣٩ يعطى التكرارات المتجمعة الصاعدة للتوزيع المذكور عند حذف الفئة الأخيرة المفتوحة والشكل ٣٣ يعطى المنحنى المطلوب .

الجدول ٣٩ . عدد المصانع المصرية التى لها رأس مال فى ١٩٣٧

رأس المال	عدد المصانع
أقل من جنيه	٥٨٣٤
٥٠ "	٥٥١٨٩
١٠٠ "	٥٨٢٧٨
٢٠٠ "	٦١١٩٣
٥٠٠ "	٦٤٩٤١
١٠٠٠ "	٦٦٣٦٣
٢٠٠٠ "	٦٦٩٥٥

الشكل ٣٣ . عدد المصانع المصرية التى لها رأس مال فى ١٩٣٧
(المصانع التى لها رأس مال ٢٠٠ جنيه وأكثر محذوفة)



أهم ما يلاحظ عن هذا المنحنى هو خلوه من نقطة الانقلاب وانعدام الشبه
بينه وبين الحرف س . هذا لأن التوزيع الأصيل أعرج . وقد حذفنا من
الشكل المصانع التى لها رأس مال أكبر من أو يساوى ٢٠٠ جنيه لأن هذه
تحتاج إلى ورقة كبيرة الحجم ولأن المجرى العام للمنحنى بعد ٢٠٠ جنيه واضح
من الشكل المرسوم .

أسئلة ٤

١ . يعطى الجدول الآتى منسوبات عدد البواخر التى مرت بقناة السويس
فى ٧١ سنة من ١٨٧٠ إلى ١٩٤٠ بترتيب السنين . رتب هذه المنسوبات ترتيباً
تصاعدياً ثم وزعها توزيعاً تكرارياً أولاً باستخدام فئة طولها ٥ وحدات
ثم باستخدام فئة طولها ٧ وحدات وأخيراً باستخدام فئة طولها ١٠ وحدات .

الجدول ٤٠ . عدد البواخر التى مرت بقناة السويس من ١٨٧٠ إلى ١٩٤٠ بترتيب السنين

$(100 = 1913)$

٤٨,٥٨	١٠٦,٨٩	٩٧,٩٩	٦١,٢٢	١٠٥,٣٠	٧٩,٧١	٧٠,٣٦	٨٤,٤٩	٦٥,٩٦	٣٣,٤٠	٩,٧٦
	١١١,٦٥	١٠٨,٩٠	٧٦,٤٠	١٠٠,٠٠	٧٧,٨٩	٧٢,٤٤	٧١,٤٨	٧٢,٧٩	٣١,٩٩	١٥,٣٦
	١١٥,١٠	١٢٠,٠٤	٧٨,٦١	٨٥,٢٨	٨٤,٥٤	٦٩,١١	٦٧,١٠	٦٢,٢٦	٢٩,٦٦	٢١,٧٣
	١١١,٩٧	١٢٤,٦٤	٥٨,٥٨	٦١,٢٠	٧٤,٨٥	٧٤,٢٩	٦٧,٣٢	٦٣,٠٠	٤٠,٦٩	٢٣,٥٦
	١٢٨,٤٨	١١٤,١٢	٩١,١٨	٤٦,٦٤	٨٣,١٧	٧٤,٤٧	٦٨,٩٧	٦٩,٠٩	٥٤,٧٧	٢٥,٣٩
	١٢٠,٣٩	١٠٥,٧٦	١٠٠,٨٤	٢٤,٣٢	٨٩,٤٦	٧٥,٥٤	٦٨,٤٧	٦٨,٧٩	٦٤,٢٣	٣٠,٠١
	١٠١,٦٩	٩٩,١٨	١٠٥,١٨	٢٤,٩٢	٩٧,٥٧	٨٥,٠٩	٥٩,٩٧	٦٨,٠٧	٦٦,٤٢	٢٩,٢٦

٢ . فى الجدول الآتى بيانات عن كميات السحاب التى انتشرت فى سماء القاهرة خلال ١٨٦٨ - ١٨٧٧ باعتبار أن النصف الظاهر من الكرة السماوية يساوى ١٠ . لخص هذه البيانات فى جدول تكرارى وارسم المدرج المناظر .

الجدول ٤١ . كمية السحاب المنتشرة فى سماء القاهرة خلال ١٨٦٨ - ١٨٧٧

الشهر	١٨٦٨	١٨٦٩	١٨٧٠	١٨٧١	١٨٧٢	١٨٧٣	١٨٧٤	١٨٧٥	١٨٧٦	١٨٧٧
يناير	٠,٥	٣,٥	٤,٥	٤,٥	٣,٥	١,٨	٤,٩	٣,٥	٣,٥	٣,٥
فبراير	٣,٠	٢,٦	٢,١	٤,٠	٢,٨	٣,٨	٣,٣	٥,٠	٣,٠	٤,٤
مارس	١,٦	٠,٦	٤,٨	٤,٣	٣,٠	٣,٠	٣,٧	٤,٠	٣,٠	٣,٠
أبريل	١,٨	١,٥	٢,٥	٢,٢	١,٠	١,٤	١,٨	٣,٠	٣,٠	١,٠
مايو	٢,٦	١,٣	٠,٩	٠,٦	١,٠	١,٧	١,٨	١,٠	٣,٠	١,٠
يونيو	١,٦	٠,٣	٠,٣	٠,٣	٠,٤	٠,٣	٠,٠	١,٠	١,٠	٠,٨
يوليو	٠,٩	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٧	١,٠	١,٠	٠,٨
أغسطس	٠,٧	٠,٤	٠,٨	١,٠	٠,٧	٠,٧	٠,٥	١,٠	١,٠	٠,٧
سبتمبر	١,٢	١,٣	١,٤	١,٠	١,٦	١,٠	١,٠	٢,٠	٢,٠	١,٠
أكتوبر	٢,٨	١,٢	١,١	١,٧	١,٠	١,٧	١,٠	٢,٠	٢,٠	٣,٥
نوفمبر	٣,٠	٣,٠	٢,٦	١,٥	١,٦	٢,٣	٣,٠	٣,٠	٤,٠	٤,٨
ديسمبر	٣,٥	٣,٠	٣,٧	٣,٣	٢,٥	٢,٢	٤,٠	٤,٠	٢,٠	٥,٥

١ النشرة الفنية رقم ١ لمصلحة عموم الإحصاء والتعداد ، أرقام قياسية تبين حالات الرخاء والأزمات بالقطر المصرى (١٩٣٤) ص ١٣ ج ١٢ . أيضا حسم (١٩٤٢ - ٤٣) ف ٩ ص ٣٥٦ ج ٥ .

٢ أمين سامى باشا ، تقويم النيل ، المقدمة (القاهرة ، المطبعة الأميرية ، ١٩١٦) ، ١١٣ .

٣ . وضع علاقة المدرج التكرارى بالتوزيع التكرارى لمتغير متصل .
كان لدى تاجر للقماش ٤٢٠٠ متر من الصوف فباعها على مرار بأسعار
مختلفة طبقا للتوزيع التكرارى الآتى . ارسم المدرج التكرارى للتوزيع .

السعر (قروش)	- ١٠٠	- ١٥٠	- ٢٠٠	- ٢٥٠	- ٣٠٠	- ٣٥٠	- ٤٠٠	- ٤٥٠
عدد الأمتار	١٠	٥٠٥	١١٢٤	١٣٣٦	٨١٥	٢٩٥	٨٠	٣٥

٤ . يبين الجدول الآتى عدد المحاجر والمناجم فى إنجلترا سنة ١٩٣٥
موزعة حسب عدد العمال المشغلين بها . احسب عدد المحاجر والمناجم فى
فئات جديدة طولها مائة عامل ومثل التوزيع التكرارى بيانيا .

عدد العمال	٤٩-٢٥	٩٩-٥٠	١٩٩-١٠٠	٢٩٩-٢٠٠	٣٩٩-٣٠٠	٤٩٩-٤٠٠	٥٩٩-٥٠٠
عدد المحاجر والمناجم	٦١٧	٣١٩	٢١٩	١٠٨	١١٧	١٠٠	١٩١

٥ . مثل بيانات الجدول الآتى عن توزيع مراتب الإناث بيانيا كمدرج
تكرارى .

عدد الإناث	المرتبة			
	ب	ش	ب	ش
١١	٦	١٨	—	٢٥
٢٤	٢٦	—	١١	٣٠
٣٤	٣١	—	١١	٣٦
٨٧	٣٧	—	١١	٤٦
١٣٧	٤٧	—	١١	٥٦
٩١	٥٧	—	١١	٦٧
١٦	٦٨	—	١١	٨٤
٤٠٠				

٦ . بين التوزيع التكرارى الآتى عدد الرؤوس الساقطة عند قذف ست قطع من النقود ١٢٨ مرة . اذكر رأيك فى كيفية تمثيل هذا التوزيع بيانيا وارسم الشكل الذى يقع اختيارك عليه .

عدد الرؤوس	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	٢	١٠	٢٨	٤٤	٣٠	١٣	١
	١٢٨						

٧ . من التوزيع التكرارى الآتى (الأجور الأسبوعية لجماعة من العمال بالشلنات) أوجد عدد العمال فى فئات طول كل منها ١٠ ش . واستخدم ذلك لرسم المدرج التكرارى للتوزيع .

الأجر	٢٠ - ٢٥	٢٥ - ٣٥	٣٥ - ٥٥	٥٥ - ٩٥
عدد العمال	٢٠	٣٠	١٨	٤

ارسم كذلك المنحنى التكرارى .

٨ . ارسم المدرج والمنحنى التكرارى للتوزيع الآتى الذى يبين عدد الوفيات من مرض التيفود موزعة حسب العمر عند الوفاة .

العمر	عدد المتوفين	العمر	عدد المتوفين
٠ -	٢٧٠	٣٠ -	٣٨١
٥ -	٤٢٥	٣٥ -	٥٩١
١٠ -	٦١٦	٤٥ -	٤٥٦
١٥ -	٩٣٩	٥٥ -	٢٧٥
٢٠ -	٨٨١	٦٥ -	١٤١
٢٥ -	٥٧٩	٧٥ وفوق	٤٥

٩ . ارسم المنحنى التكرارى للتوزيع الآتى : -

القيمة	التكرار	القيمة	التكرار	القيمة	التكرار
١٥	٠	٢٤	٥,٥	٢٣	٨,٥
١٦	٣	٢٥	١١	٣٤	٧
١٧	٨	٢٦	١٩	٣٥	٥,٥
١٨	١٠,٥	٢٧	٢٧	٣٦	٤
١٩	١١	٢٨	٢٨	٣٧	٣,٥
٢٠	٩	٢٩	٢٧,٥	٣٨	٢,٥
٢١	٦	٣٠	٢٤	٣٩	٢
٢٢	٤	٣١	١٧,٥	٤٠	١,٥
٢٣	٤	٣٢	١٢,٥		

١٠. يبين الجدول الآتى عدد من مات من الذكور فى إنجلترا فى المدة ١٩٣٠ - ١٩٣٢ موزعين حسب العمر عند الوفاة .

العمر	عدد المتوفين	العمر	عدد المتوفين
٠	٩٧٢٩٠	٥٥	٥٦٦٣٩
٥	١١٥٣٢	٦٠	٦٨١٠٣
١٠	٧٣٠٥	٦٥	٨٠٦٩٠
١٥	١٣٠٦٢	٧٠	٨٤٠٤١
٢٠	١٤٧٤١	٧٥	٧٢١٨٠
٢٥	١٥١٥٦	٨٠	٤٥٠٩٤
٣٠	١٥٦٧٣	٨٥	١٩٩١٣
٣٥	١٨٣٤٥	٩٠	٥١٤٥
٤٠	٢٣٧٧٨	٩٥	٧٦٧
٤٥	٣٣١٥٨	١٠٠ وفوق	٤٨
٥٠	٤٣٨١٢		

مثل هذا التوزيع بمنحن تكرارى .

١١. مثل التوزيع الآتى بمنحن تكرارى .

القيمة	التكرار	القيمة	التكرار
٠	—	١٤	١
٢	—	١٦	١,٥
٤	—	١٨	٢
٦	—	٢٠	٢,٥
٨	—	٢١	٣
١٠	—	٢٢	٣,٥
١٢	—	٢٣	٤

١٢ . تمثل الأرقام الآتية توزيعا تكراريا لمتغير منفصل والمطلوب تمثيل هذا التوزيع بمنحن تكرارى .

القيمة	٠	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٦٥٠	٧٠٠	٧٥٠	٨٠٠
التكرار	٢	٦	١٢	٢٠,٥	٣٢	٤٧,٥	٥٧	٥٦,٥	٤٧	١١	١

١٣ . يبين التوزيع الآتى حالات الطلاق التى فصل فيها فى مدينة شيكاغو سنة ١٩٤٤ موزعة حسب طول الحياة الزوجية التى سبقته بالسنين .

عدد حالات الطلاق	طول الحياة الزوجية
٣١٦٤	أقصر من ٥
١٥١٥	— ٥
٧٤٣	— ١٠
٣٤٨	— ١٥
١٩١	— ٢٠
٧٠	— ٢٥
٢٥	— ٣٠
١٥	— ٣٥
٤	— ٤٠

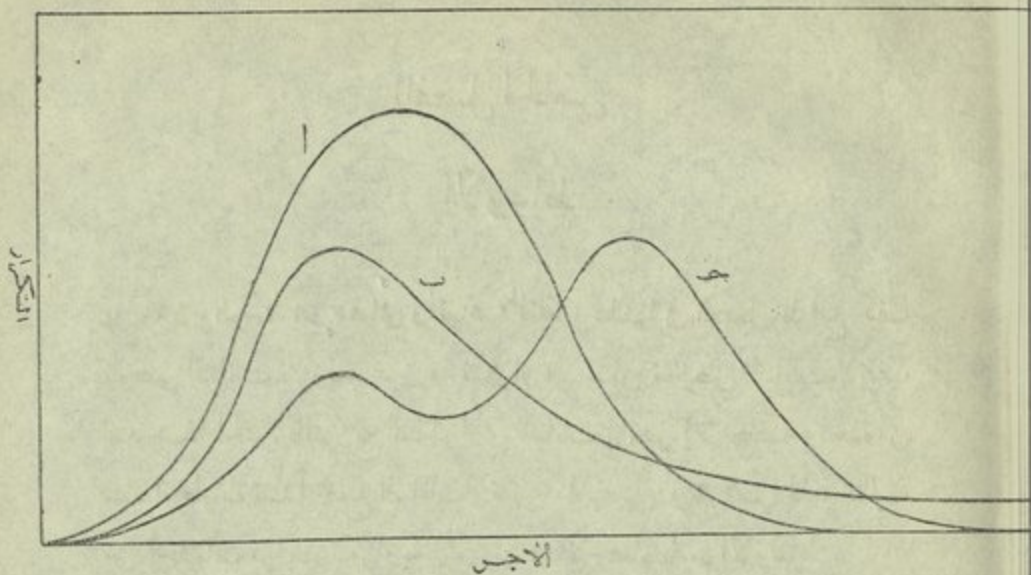
ارسم منحنيا تكراريا يمثل هذا التوزيع .
 ١٤ . أجر المقارنة بين التوزيعين التكرارين الآتين برسم المنحنى المتجمع
 الهابط فى الحالتين .

عدد عمال المصنع		الأجر عن القطعة (قروش)
الثانى	الأول	
٢٠	٢	— ١,٥
٧٠	١١	— ٢,٥
٩٥	٦٠	— ٣,٥
٧٠	٤٥	— ٤,٥
٥٥	٣٧	— ٥,٥
٤٠	١٨	— ٦,٥
٢٥	١٢	— ٧,٥
١٥	١٠	— ٨,٥
١٠	٥	— ٩,٥
٤٠٠	٢٠٠	

هل تستطيع إجراء المقارنة برسم المدرج التكرارى فى الحالتين ولماذا ؟
 ١٥ . اذكر بعض الخواص المهمة للمنحنى التكرارى المتماثل وبعض
 الظواهر التى تعرفها بما يمكن تمثيلها بمثله .

المنحنيات التكرارية المرسومة على الصفحة التالية تمثل التوزيع التكرارى
 للأجور فى ثلاث صناعات مختلفة . صف هذه المنحنيات وصفا دقيقا وقارن بها
 بين الأجور فى الصناعات الثلاث .

١٦ . الجدول ٤٢ يعطى درجات متناظرة فى (١) الرى ، (ب) الرسم .
 باستخدام الفئات ٢٠ — ٢٩ ، ٧٠ ، ١٠٠٠ ، ٧٩ للرى والفئات ٤٠ — ٥٩ ،
 ١٤٠ ، ١٥٩ للرسم اصنع جدولا تكراريا مزدوجا وارسم المدرج
 التكرارى المناظر .



الجدول ٤٢ . درجات متناظرة في (أ) الرى ، (ب) الرسم

أ	ب	أ	ب	أ	ب	أ	ب	أ	ب	أ	ب
٤٧	١١٩	٤٢	١٣١	٤٥	٩٣	٤٥	٦٠	٥٠	٦٩	٥١	٨٠
٥٩	٧٨	٥٤	١٢٣	٥٦	١٣٥	٥٠	٧٦	٤٥	٨٠	٥٧	١١٣
٥٦	١٣٥	٤٣	١١٣	٥٤	١٢٥	٥٦	٩٠	٤٥	٨٣	٤٤	١١٤
٤٩	١٠١	٥٧	١٣٠	٥٠	٩٢	٥٥	١٣٥	٦٠	١١٣	٥٥	١٢٣
٥٨	١٠٢	٤٦	١١٠	٦١	١١٤	٤٧	٩٥	٤٩	١١٥	٥٥	١٠٠
٣١	١١٢	٦٩	١٢٥	٦١	١٠٨	٥٠	١٢٥	٧٧	١٥٦	٥١	١١٣
٤٦	١١٦	٦٠	٩٥	٥٩	٩٥	٥٠	٩٧	٣٥	١٠٢	٤٧	١٢٤
٥٣	٨١	٥٠	١١٧	٥٢	٩٢	٧٣	١٣٢	٤٧	٩١	٥٢	١٠٦
٥١	٩٨	٤٣	٨٣	٤٠	٤٥	٥٩	١١٨	٤٨	١٠٣	٦٢	٩٩
٤٦	١٠٤	٤٤	١٠٦	٦٤	٦٢	٥٥	١٠٧	٤٧	١٠٠	٢٨	٨٥
٤١	١٠٥	٥٦	١٣٠	٦٤	١١٤	٤٩	١١٥	٤٣	٨٠	٥٦	١٠٦
٥٥	١٢٤	٦٦	١٣٨	٥١	١٠١	٤٦	١٠٧	٤٠	٧٦		
٤٢	٨٠	٥٤	١١٠	٥٣	٧٥	٥٧	١٢٣	٥١	١١٤		

الفصل الخامس

الأوساط

٦٥. الوسط الإحصائي وأنواعه المختلفة . علمنا في الفصل الرابع كيف نلخص البيانات بتوزيعها توزيعاً تكرارياً . لكن تلخيص البيانات لا يقف عند هذا الحد . فالتوزيع التكراري للبيانات إن هو إلا حلقة واحدة من سلسلة طويلة تبدأ بجمع البيانات وتنتهي بتلخيصها . وتتركب الحلقة التالية من احتساب ثوابت تكرارية اشتهرت في الإحصاء باسم الأوساط .

الوسط كلمة عامة يقصد بها في الإحصاء أى عدد يقع بين أصغر الحدود التي تتركب البيانات منها وأكبر هذه الحدود ويلخص أو يمثل هذه الحدود من أصغرها إلى أكبرها . إذا مثلت حدود البيانات بهذه الكيفية أمكننا أن نقول إنها انكششت حتى أصبحت حداً واحداً يلخصها ويصف أهم خواصها . والأوساط وسيلة من أنجع الوسائل المعروفة لتلخيص البيانات الإحصائية أو تمثيلها . فهي إذن جديرة بأن تدرس بكل عناية وقد خصها الإحصائيون في مختلف العصور بقسط غير يسير من وقتهم وعنايتهم فدرسوها دراسة واسعة وعرفوا كيف يستخدمونها . أما دراسة الأوساط فتتركب من تعريف أوساط مختلفة ذات فائدة والبحث عن أحسن الطرائق لإيجادها ثم احتسابها وتقنين الحالات التي تقتضى تفضيل أحدها أو بعضها على البعض الآخر . وتلك هي الموضوعات التي سنشغل بها في هذا الفصل .

أما أنواع الوسط الإحصائي فليس يوجد حد لما يمكن تصويره منها . فالوسط الإحصائي حسب التعريف هو في الحقيقة أى عدد يقع بين أصغر الحدود وأكبرها وما على الإحصائي إلا أن يصبر ويصابر ليخرج أى عدد

...، ك، هي تكرارات التوزيع وأن س، س، س، ...، س، هي مراكز الفئات. لإيجاد الوسط الحسابي للأعداد حسب التعريف لا بد من إيجاد مجموعها أولا. ولإيجاد هذا المجموع لا بد من استخدام فرض مثل الفرض المركزي (البند ٣٨) لأن الأعداد نفسها غير معروفة الآن. في الفئة الأولى ك، عددا لا تعرف قيمة أي واحد منها على وجه التحديد. إذا استخدمنا الفرض المركزي فإننا نمثل جميع هذه الأعداد بمركز الفئة أي س. أي أننا نفرض أن س، هو الوسط الحسابي لتلك الأعداد أو أن مجموعها هو ك، س. بالمثل إذا استخدمنا الفرض المركزي يكون مجموع الأعداد المنتمية إلى الفئة الثانية ك، س، ومجموع الأعداد المنتمية إلى الفئة الثالثة ك، س، إلخ. أي أن مجموع الأعداد كلها يكون ك، س، + ك، س، + ... + ك، س، أو مج ك، س. للحصول على الوسط الحسابي المطلوب نقسم هذا المجموع على عدد الأعداد وهذا العدد هو التكرار الكلي ك، + ك، + ... + ك، أو مج ك. إذن في هذه الحالة

$$\bar{S} = \frac{\text{مج ك س}}{\text{مج ك}} \quad (٣)$$

هذا هو القانون العام للوسط الحسابي. وهذا القانون يمكن استخدامه سواء كانت الفئات متساوية أو غير متساوية وسواء كانت التكرارات أعدادا مطلقة أو نسبا مئوية. والقانون يمكن تفسيره هندسيا بأن الخط الرأسي المرسوم عند الوسط الحسابي على المحور الأفقي يمر بمركز ثقل المساحة الواقعة تحت المدرج التكراري للتوزيع (بفرض أن الكثافة ثابتة).

لاحتساب الوسط الحسابي من توزيع تكراري لا بد من عمل فرض مثل الفرض المركزي. (٣) يعطى الوسط الحسابي للتوزيع التكراري على أساس الفرض المركزي وواضح أن احتمال تحقق هذا الفرض في كل فئة في التوزيع صغير في العادة. لكن هذا الفرض هو أبسط فرض يمكن من

نوعه . زد على ذلك أنه إذا كان التكرار السكلى كبيرا والفئات قصيرة يكون الخطأ الناتج من عدم تحقق الفرض في كل فئة صغيرا إلا في حالات خاصة معروفة . فمثلا إذا كان التوزيع شديد الالتواء أو أعرج فقد لا يكون الخطأ الناتج من استخدام الفرض المركزي عند احتساب الوسط الحسابي صغيرا وفي هذه الحالة تكون النتيجة اختلافا كبيرا بين الوسط الحسابي المحسوب من التوزيع التكرارى وبين الوسط الحسابي المحسوب من سلسلة الأعداد الأصلية البسيطة أى بجمع السلسلة حدا حدا .

٦٧ . مثال . يصف الجدول ٤٣ التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار بعض السلع في سنة ١٩٣٣ على أساس سنة ١٩٢٠ .

الجدول ٤٣ . منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠

عدد السلع	المنسوب	عدد السلع	المنسوب
٣٧	— ١٣٥	٣	— ٥٥
٢٩	— ١٤٥	١١	— ٦٥
١٨	— ١٥٥	٢٦	— ٧٥
١٢	— ١٦٥	٣٩	— ٨٥
٨	— ١٧٥	٥٣	— ٩٥
٥	— ١٨٥	٦٨	— ١٠٥
١	— ١٩٥	٥٧	— ١١٥
		٤٦	— ١٢٥
٤١٣			

احسب الوسط الحسابي للمنسوبات .

الجدول ٤٤ يبين طريقة لاحتساب الوسط الحسابي المطلوب باستخدام القانون (٣) . هذه الطريقة واضحة جدا ولا عيب فيها إلا طول عمليات الضرب اللازمة عند استخدامها لإيجاد المجموع Σx ولذلك تسمى الطريقة المطولة .

الجدول ٤٤ . احتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى : الطريقة المطولة
(منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

عدد السلع فى مركز الفئة ك س	مركز الفئة س	عدد السلع ك	المنسوب
١٨٠	٦٠	٣	— ٥٥
٧٧٠	٧٠	١١	— ٦٥
٢٠٨٠	٨٠	٢٦	— ٧٥
٣٥١٠	٩٠	٣٩	— ٨٥
٥٣٠٠	١٠٠	٥٣	— ٩٥
٧٤٨٠	١١٠	٦٨	— ١٠٥
٦٨٤٠	١٢٠	٥٧	— ١١٥
٥٩٨٠	١٣٠	٤٦	— ١٢٥
٥١٨٠	١٤٠	٣٧	— ١٣٥
٤٣٥٠	١٥٠	٢٩	— ١٤٥
٢٨٨٠	١٦٠	١٨	— ١٥٥
٢٠٤٠	١٧٠	١٢	— ١٦٥
١٤٤٠	١٨٠	٨	— ١٧٥
٩٥٠	١٩٠	٥	— ١٨٥
٢٠٠	٢٠٠	١	— ١٩٥
٤٩١٨٠		٤١٣	

$$\bar{س} = \frac{٤٩١٨٠}{٤١٣} = ١١٩,٠٨ \text{ وحدة } ١.$$

٦٨ . الطريقة المختصرة لاحتساب الوسط الحسابي . إذا كان أى عدد

وكان س = ١ + ش فإن

$$\bar{س} = ١ + \bar{ش}$$

حيث ن هو عدد السينات . بقسمة الطرفين على ن ينتج أن

$$\bar{س} = ١ + \frac{١}{ن} \bar{ش}$$

أو باستخدام (٢)

$$\bar{س} = ١ + \frac{١}{ن} \bar{ش}$$

الآن اكتب

١ تؤخذ قيم الأوساط فى العادة إلى رقبين عشرين .

$$(٤) \quad ج = \frac{1}{2} م ج ش .$$

هذا يعطى

$$(٥) \quad س = ١ + ج .$$

هذا القانون الجديد (٥) مأخوذاً مع (٤) يعطينا طريقة جديدة لاحتساب الوسط الحسابى اسمها الطريقة المختصرة . فى هذه الطريقة يسمى العدد الاختيارى ١ نقطة الأصل الاختيارية .

لاحتساب الوسط الحسابى من توزيع تكرارى ذى فئات متساوية باستخدام الطريقة المختصرة نجرى العمليات الآتية بالترتيب : —

- ١ . نأخذ نقطة أصل اختيارية عند مركز إحدى الفئات ذات التكرارات الكبرى ونسميها ١ فيكون مركز أية فئة أخرى إما أصغر من (-) أو أكبر من (+) نقطة الأصل الاختيارية بمضاعف صحيح لطول الفئة . هذا الفرق نسميه انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية ونكتبه ش .
- ٢ . نضرب تكرار كل فئة فى انحراف مركزها عن نقطة الأصل الاختيارية .

٣ . نجمع حواصل الضرب التى نحصل عليها بهذه الكيفية .

٤ . نقسم هذا المجموع على التكرار الكلى .

٥ . نضرب خارج القسمة فى طول الفئة ونسمى العدد الناتج ج .

٦ . نضيف ج إلى نقطة الأصل الاختيارية ١ فيكون الناتج الوسط الحسابى

المطابوب س . أى $س = ١ + ج$.

الجدول ٤٥ يبين كيفية إجراء هذه العمليات فى حالة البيانات المعطاة فى

الجدول ٤٣ .

١ هذا العدد ج الذى يظهر فى الطريقة المختصرة لاحتساب الوسط الحسابى يظهر أيضاً عند احتساب كثير من الثوابت التكرارية الأخرى ، أما قيمته فهى دائماً س — أى الفرق بين الوسط الحسابى وبين نقطة الأصل الاختيارية .

الجدول ٤٥ . احتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى : الطريقة المختصرة
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

المنسوب	عدد السلع ك	انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية (فئات) ش	عدد السلع في الانحراف ك ش
— ٥٥	٣	٦ —	١٨ —
— ٦٥	١١	٥ —	٥٥ —
— ٧٥	٢٦	٤ —	١٠٤ —
— ٨٥	٣٩	٣ —	١١٧ —
— ٩٥	٥٣	٢ —	١٠٦ —
— ١٠٥	٦٨	١ —	٦٨ —
— ١١٥	٥٧	٠	٠
— ١٣٥	٤٦	١	٤٦
— ١٣٥	٣٧	٢	٧٤
— ١٤٥	٢٩	٣	٨٧
— ١٥٥	١٨	٤	٧٢
— ١٦٥	١٢	٥	٦٠
— ١٧٥	٨	٦	٤٨
— ١٨٥	٥	٧	٣٥
— ١٩٥	١	٨	٨
٤١٣	٣٨ —		

$$١٢٠ = ١$$

$$ج = \frac{٣٨}{٤١٣} = ٠,٠٩٢ \text{ فئة}$$

$$= ٠,٩٢ \text{ وحدة لأن الفئة تساوى } ١٠ \text{ وحدات}$$

$$س = ١٢٠ - ٠,٩٢ = ١١٩,٠٨ \text{ وحدة}$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها بالطريقة المطولة .

هذه الطريقة لا تستخدم إلا أعدادا صحيحة صغيرة عند إجراء عمليات الضرب وهذا هو سر نجاحها . وتنشأ هذه الأعداد الصغيرة أولا من استبدال مراكز الفئات المستخدمة فى الطريقة المطولة بانحرافات وثانيا من استبدال الوحدة الأصلية بطول الفئة عند احتساب مجموع الانحرافات .

٦٩. احتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى فئات غير متساوية .
تستخدم القوانين السابقة لاحتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى
سواء كانت الفئات متساوية أو غير متساوية . غير أن تنفيذ أولى العمليات
المذكورة فى البند السابق لا يكون سهلا فى حالة الفئات غير المتساوية .
فمثلا إذا احتوى التوزيع التكرارى على فئات مفتوحة فإن تنفيذ تلك العملية
لا يمكن أن يتم إلا إذا عمل تقدير لمركز كل فئة مفتوحة فى التوزيع .

الجدول ٤٦ يبين احتساب الوسط الحسابي للمسافات بين الانعكاسات
فى الشكل الحزوني لشجرة القطن (الجدول ١٩) باستخدام الطريقة المطولة .

الجدول ٤٦ . احتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى : الطريقة المطولة
(المسافة بين الانعكاسات الحزونية فى شجر القطن)

عدد المسافات فى مركز الفئة ك س	مركز الفئة س	عدد المسافات ك	المسافة (١٠ - ٢ مم)
٨,٧٥	١,٢٥	٧	— ٠
١٦٨	٣,٥	٤٨	— ٢,٥
٥٥٠	٥,٥	١٠٠	— ٤,٥
٧٩٥	٧,٥	١٠٦	— ٦,٥
٧٩٨	٩,٥	٨٤	— ٨,٥
٨٢٨	١١,٥	٧٢	— ١٠,٥
١٩٧٢	١٤,٥	١٣٦	— ١٢,٥
١٧٣٩	١٨,٥	٩٤	— ١٦,٥
١٧٥٥	٢٢,٥	٧٨	— ٢٠,٥
١٨٢٨,٥	٢٦,٥	٦٩	— ٢٤,٥
١٦١٦,٥	٣٠,٥	٥٣	— ٢٨,٥
١٥٥٢,٥	٣٤,٥	٤٥	— ٣٢,٥
١٣٨٦	٣٨,٥	٣٦	— ٣٦,٥
٣١٣٩,٥	٤٥,٥	٦٩	— ٤٠,٥
٢٢٢٠	٥٥,٥	٤٠	— ٥٠,٥
٢٠٣٠,٥	٦٥,٥	٣١	— ٦٠,٥
١٥٨٥,٥	٧٥,٥	٢١	— ٧٠,٥
١٤٥٣,٥	٨٥,٥	١٧	— ٨٠,٥
١٠٥٠,٥	٩٥,٥	١١	— ٩٠,٥
٢٦٤٧٦,٧٥		١١١٧	

$$\text{من} = \frac{26476,75}{1117} = 23,703 \text{ وحدة}$$

أو ٢٣,٧٠٣ مم .

ويمكننا أيضا في هذه الحالة احتساب الوسط الحسابي باستخدام الطريقة المختصرة كما يأتي .

الجدول ٤٧ . احتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى : الطريقة المختصرة
(المسافة بين الانعكاسات الحزونية في شعر القطن)

عدد المسافات في الانحراف ك ش	انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية (وحدات) ش	عدد المسافات ك	المسافة (قيم مركبة) س
٥٩٥ —	٨٥ —	٧	١,٢٥
٣٦٤٨ —	٧٦ —	٤٨	٣,٥
٦٨٠٠ —	٦٨ —	١٠٠	٥,٥
٦٣٦٠ —	٦٠ —	١٠٦	٧,٥
٤٣٦٨ —	٥٢ —	٨٤	٩,٥
٣١٦٨ —	٤٤ —	٧٢	١١,٥
٤٣٥٢ —	٣٢ —	١٣٦	١٤,٥
١٥٠٤ —	١٦ —	٩٤	١٨,٥
.	.	٧٨	٢٢,٥
١١٠٤	١٦	٦٩	٢٦,٥
١٦٩٦	٣٢	٥٣	٣٠,٥
٢١٦٠	٤٨	٤٥	٣٤,٥
٢٣٠٤	٦٤	٣٦	٣٨,٥
٦٣٤٨	٩٢	٦٩	٤٥,٥
٥٢٨٠	١٣٢	٤٠	٥٥,٥
٥٣٣٢	١٧٢	٣١	٦٥,٥
٤٤٥٢	٢١٢	٢١	٧٥,٥
٤٢٨٤	٢٥٢	١٧	٨٥,٥
٣٢١٢	٢٩٢	١١	٩٥,٥
٥٣٧٧		١١١٧	

$$= 22,5 \text{ وحدة أصلية}$$

$$\text{ج} = \frac{5377}{1117} = 4,814 \text{ وحدة جديدة}$$

$$= 1,203 \text{ وحدة أصلية لأن الوحدة الجديدة تساوى ربع الوحدة الأصلية}$$

$\bar{s} = 22,5 + 1,203 = 23,703$ وحدة أصلية
وهي نفس النتيجة السابقة .

في هذه الطريقة استخدمنا وحدة جديدة تساوى ربع الوحدة الأصلية وهي 10^{-2} مم حتى تكون كل الانحرافات أعدادا صحيحة . لكن الطريقة المختصرة لا تمتاز في هذا المثال بالذات عن الطريقة المطولة بأى شئ .

٧٠ . خاصية منه $\bar{m}$ للوسط الحسابي . في هذا البند تثبت خاصيتين مهمتين للوسط الحسابي .

بضرب طرفي (٢) في $\bar{n}$ نحصل على $\bar{n} \bar{s} = \sum s$. لكن $\bar{n} \bar{s}$ يمكن أن يكتب $\bar{n} \bar{s}$ لأن $\bar{s}$ عدد ثابت وعدد السينات يساوى $\bar{n}$. إذن لدينا $\bar{n} \bar{s} = \sum s$ أو $\sum s - \bar{n} \bar{s} = 0$. هذا يمكن أن يكتب $\sum (s - \bar{s}) = 0$. أو إذا وضعنا $s - \bar{s} = \bar{sh}$ $\sum \bar{sh} = 0$. (٦)

هذه المعادلة ترينا أن مجموع انحرافات الأعداد عن وسطها الحسابي يساوى صفرا وهذه علاقة رئيسية بين الأعداد الأصلية ووسطها الحسابي . وبالعكس هذه العلاقة تخصص الوسط الحسابي وتعرفه إذ لو كان $\sum \bar{sh} = 0$. فإن $\sum s = \sum \bar{s} = \bar{n} \bar{s}$ وهذه هي المعادلة (٢) .

نفرض الآن أن a أى عدد ولنكتب $s = \bar{s} + a = \bar{s} + \bar{sh}$. لدينا (٧)
 $\sum s = \sum (\bar{s} + \bar{sh}) = \bar{n} \bar{s} + \sum \bar{sh}$
حيث $\bar{s} = \bar{s} + 0$. بالتربيع نحصل على

$$\sum s^2 = \sum (\bar{s} + \bar{sh})^2 = \sum \bar{s}^2 + 2 \sum \bar{s} \bar{sh} + \sum \bar{sh}^2$$

بالجمع فوق جميع الانحرافات ينتج أن

$$\sum s^2 = \sum \bar{s}^2 + 2 \sum \bar{s} \bar{sh} + \sum \bar{sh}^2 = \sum \bar{s}^2 + 2 \bar{s} \sum \bar{sh} + \sum \bar{sh}^2$$

باستخدام المعادلة (٤) . لدينا إذن

$$\sum s^2 = \sum \bar{s}^2 + \sum \bar{sh}^2 \quad (٨)$$

بما أن الحد الثاني في الطرف الأيسر سالب إذن ينتج من هذه المعادلة أن مجموع مربعات انحرافات أى عدد من الأعداد عن وسطها الحسابي أصغر من مجموع مربعات انحرافاتنا عن أى عدد آخر .

المعادلتان (٦) و (٨) تعبران عن أهم خاصيتين للوسط الحسابي : مجموع انحرافات أى عدد من الأعداد عن وسطها الحسابي صفر وبمجموع مربعات هذه الانحرافات أصغر من مجموع مربعات انحرافات الأعداد عن أى عدد آخر غير وسطها الحسابي .

١٠٧١. الوسط الهندسي . ليس الوسط الهندسي كالوسط الحسابي في شهرته ولكنه وسط كثير الاستخدام في الإحصاء وله عدة تطبيقات مهمة . لذلك يجب أن نعرفه ونعرف كيف نحصل عليه .

الوسط الهندسي لأى عدد وليكن n من الأعداد الموجبة هو الجذر النوني الموجب لحاصل ضرب الأعداد . والوسط الهندسي لأى عدد من الأعداد أحدها أو بعضها صفر هو الصفر . فمثلا الوسط الهندسي للأعداد ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ هو

$$\sqrt[5]{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \sqrt[5]{720}$$

أو ٣٫٧٣ . من التعريف ينتج أن الوسط الهندسي للأعداد الموجبة $s_1, s_2, \dots, s_n$ سن وليكن d هو

$$(9) \quad d = (s_1 s_2 \dots s_n)^{\frac{1}{n}} = (\text{مض } s)^{\frac{1}{n}}$$

حيث مض s اختصار لحاصل الضرب $s_1 s_2 \dots s_n$ سن وحيث تؤخذ القيمة الموجبة للجذر في كل حالة .

من هذه المعادلة يحسب الوسط الهندسي لأية سلسلة بسيطة من الأعداد بسهولة إما باستخدام جداول اللوغاريتمات أو بالمساطر الحاسبة . بأخذ اللوغاريتمات في (٩) علما بأن جميع الأعداد موجبة وكذلك الجذر نحصل على

$$\frac{\text{لغ.}_1 \text{س.}_1 + \text{لغ.}_2 \text{س.}_2 + \dots + \text{لغ.}_n \text{س.}_n}{n} = \text{لغ.}_1 \text{د.}_1 \quad (10)$$

$$= \frac{1}{3} \text{ مج لغز مس.}$$

أى أن الوسط الهندسى هو اتلغارتم الوسط الحسابى للغارتمات الأعداد الأصلية .
 لاحتساب الوسط الهندسى من توزيع تكررارى نفرض أن K_1 ، K_2 ، ... ، K_m هي تكرارات التوزيع وأن s_1 ، s_2 ، ... ، s_m هي مراكز الفئات ونفرض أن كل هذه المراكز أعداد موجبة . لإيجاد الوسط الهندسى للأعداد حسب التعريف لابد من إيجاد حاصل ضربها أولاً . ولإيجاد حاصل ضرب الأعداد لابد من استخدام الفرض المركزى لأن الأعداد نفسها غير معروفة الآن إلا على وجه التقريب . فى الفئة الأولى K_1 عددا لا تعرف فيها على وجه التحديد . إذا استخدمنا الفرض المركزى فإننا نمثل جميع هذه الأعداد بمركز الفئة أى s_1 . أى أننا نفرض أن s_1 هو الوسط الهندسى لتلك الأعداد أو أن حاصل ضربها هو $s_1^{K_1}$. بالمثل حاصل ضرب الأعداد المنتمية إلى الفئة الثانية يكون $s_2^{K_2}$ وحاصل ضرب الأعداد المنتمية إلى الفئة الثالثة يكون $s_3^{K_3}$ إلخ . أى أن حاصل ضرب الأعداد كلها يكون $s_1^{K_1} s_2^{K_2} s_3^{K_3} \dots s_m^{K_m}$. للحصول على الوسط الهندسى المطلوب نرفع حاصل الضرب إلى أس يساوى مقلوب عدد الأعداد أى التكرار الكلى $K_1 + K_2 + K_3 + \dots + K_m$ ونأخذ القيمة الموجبة للنتيجة . إذن فى هذه الحالة

$$(11) \quad (m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_r^{k_r}) (1^{k_1} + 2^{k_1} + \dots + r^{k_1} + \dots + 1^{k_r} + 2^{k_r} + \dots + r^{k_r}) = d$$

$$= (\text{مض س ك}) \frac{1}{\text{مع ك}}$$

مع أخذ القيمة الموجبة للجذر . هذا هو القانون العام للوسط الهندسي .
والقانون يمكن استخدامه سواء كانت الفئات متساوية أو غير متساوية وسواء
كانت التكرارات أعدادا مطلقة أو نسبا مئوية .

من المعادلة (١١) بحسب الوسط الهندسي بسهولة باستخدام اللغزات
وفي هذه الحالة تأخذ المعادلة الصيغة الآتية :

$$(١٢) \text{لغ. د} = \frac{\text{ك. لغ. ١. س} + \text{ك. لغ. ٢. س} + \dots + \text{ك. لغ. ١٠. س}}{\text{ك} + \dots + \text{ك} + \text{ك}} \\ = \frac{\text{مج ك لغ. ١. س}}{\text{مج ك}}$$

الجدول ٤٨ يبين طريقة استخدام المعادلة (١٢) لاحتساب الوسط الهندسي من توزيع تكرارى .

الجدول ٤٨ . احتساب الوسط الهندسي من توزيع تكرارى
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

عدد السلع في اللغزات ك لغ. ١. س	لغزات المركز لغ. ١. س	عدد السلع ك	المنسوب (قيم مركزية) س
٥,٣٣٤٤٥	١,٧٧٨١٥	٣	٦٠
٢٠,٣٩٦١٠	١,٨٤٥١٠	١١	٧٠
٤٩,٤٨٠٣٤	١,٩٠٣٠٩	٢٦	٨٠
٧٦,٢١٥٣٦	١,٩٥٤٢٤	٣٩	٩٠
١٠٦,٠٠٠٠٠	٢,٠٠٠٠٠	٥٣	١٠٠
١٣٨,٨١٤٥٢	٢,٠٤١٣٩	٦٨	١١٠
١١٨,٥١٣٢٦	٢,٠٧٩١٨	٥٧	١٢٠
٩٧,٢٤١٢٤	٢,١١٣٩٤	٤٦	١٣٠
٧٩,٤٠٦٨١	٢,١٤٦١٣	٣٧	١٤٠
٦٣,١٠٦٦١	٢,١٧٦٠٩	٢٩	١٥٠
٣٩,٦٧٤١٦	٢,٢٠٤١٢	١٨	١٦٠
٢٦,٧٦٥٤٠	٢,٢٣٠٤٥	١٢	١٧٠
١٨,٠٤٢١٦	٢,٢٥٥٢٧	٨	١٨٠
١١,٣٩٣٧٥	٢,٢٧٨٧٥	٥	١٩٠
٢,٣٠١٠٣	٢,٣٠١٠٣	١	٢٠٠
٨٥٢,٥٨٥١٩		٤١٣	

$$\text{لغ. د} = \frac{٨٥٢,٥٨٥١٩}{٤١٣} = ٢,٠٦٤٣٧$$

$$د = ١١٥,٩٨ \text{ وحدة.}$$

٧٢. بمصممة التطبيقات الهندسية الوسط الهندسي . هب أن شخصا يملك سهما وأن هذا السهم ارتفع في خمس سنين متتالية ٤ في المائة، ٣ في المائة، ٣، ٣ في المائة، ٥ في المائة، ٤ في المائة بما كان عليه في أول كل سنة . ماذا كان متوسط الارتفاع السنوي ؟
لا بأس في هذه الحالة من فرض أن قيمة السهم في أول المدة كانت ١ فتكون قيمته في آخر المدة

$$١,٠٤ \times ١,٠٣ \times ١,٠٣٥ \times ١,٠٥ \times ١,٠٤٥$$

هذا العدد مكون من حاصل ضرب خمسة أعداد كلها موجبة . نفرض الآن أن r هو متوسط الارتفاع السنوي المطلوب فتكون قيمة السهم في آخر المدة $(١ + r)^٥$ حسب قاعدة الفائدة المركبة . بالمقارنة نحصل على

$$(١ + r)^٥ = ١,٠٤ \times ١,٠٣ \times ١,٠٣٥ \times ١,٠٥ \times ١,٠٤٥$$

أو $١ + r = \sqrt[٥]{(١,٠٤ \times ١,٠٣ \times ١,٠٣٥ \times ١,٠٥ \times ١,٠٤٥)}$
وهذا هو الوسط الهندسي للأعداد الخمسة الموجبة الموجودة داخل (. . .) .
إذن المعدل المطلوب هو الذي يجعل جملة وحدة رأس المال بعد سنة واحدة تعادل الوسط الهندسي للجمال الخمس الناتجة من تطبيق المعدلات المعطاة .
العلاقة السابقة تعطى

$$١ + r = ١,٠٣٩٩٧٦$$

$$r = ٠,٠٣٩٩٧٦ \text{ أو}$$

إذن متوسط الارتفاع السنوي كان ٣,٩٩٧٦ في المائة .

هذا المثال يوضح فائدة الوسط الهندسي في تمثيل معدلات الفائدة والمعدلات والنسب الموجبة على وجه العموم . لكن الوسط الهندسي يعطى أهمية خاصة للأعداد الصغيرة جدا وهذا عيب واضح له ، لذلك يجب أن يقتصر استخدام هذا الوسط لتمثيل النسب على الحالات التي لا تختلف فيها

النسب عن بعضها كثيرا كما في المثال السابق . وفي هذه الحالات يكون الوسط الهندسي أليق الأوساط جميعها .

مثالنا الثاني يظهر فائدة جديدة مهمة للوسط الهندسي . الجدول ٢ يعطى عدد سكان مصر في تعدادات ١٨٩٧ - ١٩٢٧ ويراد عمل تقدير لعدد السكان في ١٩٣٧ .

إذا شَبَّهنا عدد السكان في تعداد ١٨٩٧ بالقيمة الأصلية لسهم وأعداد السكان في التعدادات الثلاثة التالية بقيم السهم في أوائل سنى هذه التعدادات وإذا فرضنا أن عدد السكان يزيد في متوالية هندسية يصير المثال الحال لافرق بينه وبين المثال السابق بمعنى أنه إذا كان r متوسط الزيادة في عدد السكان كل عشر سنين يكون $1 + r$ الوسط الهندسي للنسب الثلاث الموجبة الناتجة من قسمة عدد السكان في أى تعداد من التعدادات الأربعة المعطاة على عدد السكان في التعداد السابق مباشرة . حاصل ضرب هذه النسب الثلاث يساوى النسبة بين عدد السكان في تعداد ١٩٢٧ وعدد السكان في تعداد ١٨٩٧ . هذه النسبة إذن تساوى $(1 + r)^3$. لدينا

$$٧,١٥٢٨٣٤٤ = ١٤٢١٧٨٦٤ \text{ لـ } ١$$

$$٦,٩٨٧٤٢١٦ = ٩٧١٤٥٢٥ \text{ لـ } ١$$

$$٠,١٦٥٤١٢٨ = (1 + r) \text{ لـ } ٣$$

إذن

$$٠,٠٥٥١٣٧٦ = (1 + r) \text{ لـ } ١$$

عدد السكان في ١٩٣٧ هو $١٤٢١٧٨٦٤ (1 + r)$. بجمع اللوغاريتمين الأول والآخر في قائمة اللوغاريتمات السابقة نجد أن لغارتم هذا العدد هو $٠,٧٢٠٧٧٢٠$. لكن هذا هو لغارتم العدد ١٦١٤٢٥٤٤ . هذا إذن يعطينا التقدير المطلوب لعدد السكان في ١٩٣٧ . ويلاحظ أنه أكبر من العدد الرسمي ١٥٩٣٢٦٩٤ الذى يمثل عدد سكان مصر في تعداد ١٩٣٧ .

هذا المثال كالمثال السابق يوضح لياقة الوسط الهندسي لتمثيل النسب

الموجبة . وللوسط الهندسي تطبيقات أخرى مهمة في نظرية الأرقام القياسية سنعرفها في المكان المناسب .

٧٣ . نظرية . الوسط الهندسي لأي عدد من الأعداد الموجبة لا يمكن أن يكون أكبر من الوسط الحسابي .

سنعطى هذه النظرية المهمة برهانين مختلفين أولهما استنتاجي والبرهان الثاني هو البرهان المباشر المعروف ^١.

البرهان الأول : نفرض أن النظرية صحيحة في الحالة التي فيها يكون عدد الأعداد n أي نفرض أن

$$(13) \quad \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} \leq (s_1 s_2 \dots s_n)^{\frac{1}{n}}$$

وعلىنا استنتاج أنها صحيحة في الحالة التي فيها يكون عدد الأعداد $n+1$. لدينا

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + 1 = (s_1 + s_2 + \dots + s_n + 1) + 1$$

$$\leq n (s_1 s_2 \dots s_n)^{\frac{1}{n}} + 1$$

باستخدام (١٣) . أي

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n + 1 \leq n (s_1 s_2 \dots s_n)^{\frac{1}{n}} + 1$$

حيث d هو الوسط الهندسي للأعداد $s_1, s_2, \dots, s_n, 1$. اكتب

$$0 = (s_1 s_2 \dots s_n + 1)^{\frac{1}{n+1}} - (s_1 s_2 \dots s_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$s_1, s_2, \dots, s_n, 1 \text{ ويكون}$$

$$(0 < d) \quad \frac{1 + d}{d} = s_1 + s_2$$

إذن

¹ A. Cauchy, Analyse algébrique, Note 2; Oeuvres complètes, Serie 2, Bd. 3, 375—377 (Paris, Gauthier—Villars, 1897).

$$(١٤) \quad ١ + \frac{١ + \dots + ١}{\text{دن}} + \text{دن} \leq ١ + \text{سن} + \dots + \text{سم} + \text{س}$$

نفرض أولا أن $\text{دن} < \text{ه}$ فيكون

$$\text{دن} < \text{دن} - ١ + \text{دن} - ٢ + \dots + \text{ه}$$

$$= (\text{دن} - ١ + \text{دن} - ٢ + \dots + \text{ه} - ١ + \text{ه})$$

لأن كل حد في الطرف الأيسر أصغر من دن وهناك ن من تلك الحدود.

بضرب الطرفين في العدد الموجب $\text{ه} - \text{د}$ ينتج أن

$$\text{دن}(\text{ه} - \text{د}) < (\text{دن} - ١ + \text{دن} - ٢ + \dots + \text{ه} - ١ + \text{ه})(\text{ه} - \text{د})$$

$$= (\text{دن} - \text{ه})(\text{ه} - \text{د})$$

بالنقل نحصل على

$$\text{دن} + ١ + \text{ه} < (١ + \text{ن})\text{دن}$$

أو

$$(١٥) \quad \text{دن} + \frac{١ + \dots + ١}{\text{دن}} < (١ + \text{ن})\text{دن}$$

بمقارنة (١٤) و (١٥) ينتج أن

$$\text{س} + \text{سم} + \dots + \text{سن} + ١ < (١ + \text{ن})\text{ه}$$

$$\frac{\text{س} + \text{سم} + \dots + \text{سن} + ١}{١ + \text{ن}} < \text{ه} \quad (\text{س} + \text{سم} + \dots + \text{سن} + ١) < \text{ه}(١ + \text{ن})$$

نفرض ثانيا أن $\text{دن} > \text{ه}$ فيكون

$$\text{دن} > (\text{دن} - ١ + \text{دن} - ٢ + \dots + \text{ه} - ١ + \text{ه})$$

لسبب يشبه السبب المذكور في الحالة الأولى. بضرب طرفي هذه المتباينة في

العدد السالب $\text{ه} - \text{د}$ ينتج أن

$$\text{دن}(\text{ه} - \text{د}) < (\text{دن} - \text{ه})(\text{ه} - \text{د})$$

وبالنقل والقسمة على دن نحصل بالمثل على

$$ن د + \frac{ه ن}{دن} < (ن + ١) ٠٥$$

بمقارنة هذا مع (١٤) نحصل مرة ثانية على

$$س١ + س٢ + \dots + س٢ + س٢ + ١ < (ن + ١) ٠٥$$

$$\frac{١}{١+ن} (س١ + س٢ + \dots + س٢ + س٢ + ١) < \frac{١+س٢ + \dots + س٢ + س٢ + ١}{١+ن}$$

نفرض أخيرا أن $د = ه$ فيكون

$$ن د + \frac{ه ن}{دن} = (ن + ١) ٠٥$$

وتحول (١٤) إلى

$$س١ + س٢ + \dots + س٢ + س٢ + ١ \leq (ن + ١) ٠٥$$

أو

$$\frac{١}{١+ن} (س١ + س٢ + \dots + س٢ + س٢ + ١) \leq \frac{١+س٢ + \dots + س٢ + س٢ + ١}{١+ن}$$

كما سبق. إذن في كل حالة ممكنة لو كانت النظرية صحيحة لأي عدد مثل ن من الأعداد الموجبة فإنها تكون صحيحة للعدد التالي ن + ١. لكن النظرية صحيحة في الحالة التي فيها يكون عدد الأعداد اثنين لأن

$$س١ س٢ = \left\{ \frac{١}{٢} (س١ + س٢) \right\}^٢ - \left\{ \frac{١}{٢} (س١ - س٢) \right\}^٢ \geq \left\{ \frac{١}{٢} (س١ + س٢) \right\}^٢$$

أي

$$\frac{١}{٢} (س١ س٢) \leq \left\{ \frac{١}{٢} (س١ + س٢) \right\}^٢$$

إذن هي صحيحة بوجه عام.

البرهان الثاني : لدينا لآى عدد s_1, s_2

$$\left\{ \frac{1}{4} (s_2 - s_1) \right\} - \left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1) \right\} = s_1 s_2$$

$$\left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1) \right\} \geq \quad (16)$$

إذن

$$s_1 s_2 s_3 s_4 = s_1 s_2 s_3 s_4$$

$$\left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1) \right\} \left\{ \frac{1}{4} (s_4 + s_3) \right\} \geq$$

باستخدام $\frac{1}{4} (s_2 + s_1), \frac{1}{4} (s_4 + s_3)$ بدلا من s_1, s_2 في (16)

وتطبيق المتباينة مرة ثانية نحصل على

$$\left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1) \right\} \left\{ \frac{1}{4} (s_4 + s_3) \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1 + s_4 + s_3) \right\} \geq$$

إذن لدينا

$$s_1 s_2 s_3 s_4 \geq \left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1 + s_4 + s_3) \right\}$$

بالمثل

$$s_1 s_2 \dots s_n = s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 \geq$$

$$\left\{ \frac{1}{4} (s_2 + s_1 + s_4 + s_3) \right\} \left\{ \frac{1}{4} (s_6 + s_5 + s_8 + s_7) \right\}$$

وبتطبيق المتباينة الأساسية (16) ينتج أن

$$s_1 s_2 \dots s_n \geq \left\{ \frac{1}{8} (s_2 + \dots + s_8 + s_1) \right\}$$

بنفس الكيفية نحصل على

$$\left\{ \frac{1}{2} s_r \right\} \geq \frac{1}{2} s_r \quad (17)$$

هذا صحيح لآى عدد صحيح موجب m . الآن اختار m بحيث أن $2 < n$.

هذا ممكن دائما وبتطبيق (17) مع

$$s_r = \overline{s} \quad (r = 1, 2, \dots, n+1, 2, \dots, 2)$$

نحصل على

$$\left\{ \frac{\left(\text{مض سر}_{\substack{\uparrow \\ 1=2}} \right) + (n - 2) \text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}}}{2} \right\} \geq \text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}} - \text{مض سر}_{\substack{\uparrow \\ 1=2}}^{\substack{\uparrow \\ 2}}$$

لكن بما أن $\text{مض سر}_{\substack{\uparrow \\ 1=2}}^{\substack{\uparrow \\ 2}} = n - \text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}}$ إذن الطرف الأيسر يختصر إلى $\text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}}$ وهذا يعطى

$$\text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}} \geq \text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}} - \text{مض سر}_{\substack{\uparrow \\ 1=2}}^{\substack{\uparrow \\ 2}}$$

$$\text{مض سر}_{\substack{\uparrow \\ 1=2}}^{\substack{\uparrow \\ 2}} \geq \text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}}$$

$$\text{أو} \quad \text{س}_{\substack{\uparrow \\ 2}} \geq \left(\text{مض سر}_{\substack{\uparrow \\ 1=2}}^{\substack{\uparrow \\ 2}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

٧٤. الوسط التوافقي . الوسط التوافقي أقل شهرة من الوسطين الحسابي والهندسي وأقل منهما استخداماً لأنه أبعد منهما في الفكرة وأصعب منهما في الاحساب . لكنه رغم ذلك وسط مهم وله عدة تطبيقات مفيدة .

الوسط التوافقي لاى عدد من الأعداد التى لايساوى أيها الصفر هو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوباتها إذا لم يكن هذا الوسط الحسابي صفراً . فمثلاً الوسط التوافقي للأعداد ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ هو

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{7}{6}} = \frac{6}{7}$$

أو ٠،٤٥٣ . من التعريف ينتج أن الوسط التوافقي وليكن ق للأعداد س_١، س_٢، ...، س_٣ التى لايساوى أيها الصفر هو

$$(18) \quad ق = \frac{ن}{\frac{1}{س_1} + \dots + \frac{1}{س_p} + \frac{1}{س_1}} = \frac{ن}{مجم \frac{1}{س}}$$

من هذه المعادلة يحسب الوسط التوافقي بسهولة باستخدام جدول المقلوبات .
أيضا لدينا

$$(19) \quad \frac{ن}{ق} = مجم \frac{1}{س}$$

هاتان المعادلتان تعرفان الوسط التوافقي إلا إذا كان مجم (١/س) صفرا .
لاحتساب الوسط التوافقي من توزيع تكرارى نفرض أن ك_١ ، ك_٢ ، ...
هى التكرارات وأن س_١ ، س_٢ ، ... ، س_م هى القيم المركزية
المنظرة ونفرض أن هذه المراكز لا يوجد بينها واحد يساوى الصفر . بتطبيق
التعريف ينتج أن الوسط التوافقي المطلوب هو مقلوب الوسط الحسابي للتوزيع
التكرارى ذى التكرارات ك_١ ، ك_٢ ، ... ، ك_م وذى المراكز ١/س_١ ،
١/س_٢ ، ... ، ١/س_م . هذا الوسط الحسابي يساوى حسب (٣)

$$\frac{مجم \frac{ك}{س}}{مجم ك}$$

بأخذ المقلوب ينتج أن الوسط التوافقي المطلوب هو

$$(20) \quad ق = \frac{مجم ك}{مجم \frac{ك}{س}}$$

وهذا هو القانون العام للوسط التوافقي فى هذه الحالة . أيضا

$$(21) \quad \frac{ق}{مجم ك} = \frac{ك}{مجم \frac{ك}{س}}$$

الجدول ٤٩ يبين طريقة استخدام المعادلة (٢٠) لاحتساب الوسط التوافقي
من توزيع تكرارى .

الجدول ٤٩ . احتساب الوسط التوافقي من توزيع تكرارى
(مذبذبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

عدد السلع في المقلوب ك س	مقلوب المركز ١ س	عدد السلع ك	النسب (قيم مركزية) س
٠,٠٥٠٠١	٠,٠١٦٦٧	٣	٦٠
٠,١٥٧١٩	٠,٠١٤٢٩	١١	٧٠
٠,٣٢٥٠٠	٠,٠١٢٥٠	٢٦	٨٠
٠,٤٣٣٢٩	٠,٠١١١١	٣٩	٩٠
٠,٥٣٠٠٠	٠,٠١٠٠٠	٥٣	١٠٠
٠,٦١٨١٢	٠,٠٠٩٠٩	٦٨	١١٠
٠,٤٧٤٨١	٠,٠٠٨٣٣	٥٧	١٢٠
٠,٣٥٣٧٤	٠,٠٠٧٦٩	٤٦	١٣٠
٠,٢٦٤١٨	٠,٠٠٧١٤	٣٧	١٤٠
٠,١٩٣٤٣	٠,٠٠٦٦٧	٢٩	١٥٠
٠,١١٢٥٠	٠,٠٠٦٢٥	١٨	١٦٠
٠,٠٧٠٥٦	٠,٠٠٥٨٨	١٢	١٧٠
٠,٠٤٤٤٨	٠,٠٠٥٥٦	٨	١٨٠
٠,٠٢٦٣٠	٠,٠٠٥٢٦	٥	١٩٠
٠,٠٠٥٠٠	٠,٠٠٥٠٠	١	٢٠٠
٣,٦٥٨٦١		٤١٣	

$$ق = \frac{١٣}{٣,٦٥٨٦١} = ١١٢,٨٨ \text{ وحدة .}$$

٧٥ . بمصممة التطبيقات الملاءمة للوسط التوافقي . اشترى أحد الصبية السريحة
عددا من ثمار المانجو على ثلاث صفقات الاولى بحساب ٤ ريال والثانية
بحساب ٥ ريال والثالثة بحساب ٢٠ ريال . احسب متوسط سعر المانجو
بالريال .

الوسط التوافقي لسعر المانجو بالريال هو

$$\frac{٢٩}{٣} = \frac{٢٠ + ٥ + ٤}{٣}$$

أو ٩٦ لأن أسعار المانجو في الصفقات الثلاث هي $\frac{١}{٣}$ ريال ، $\frac{١}{٥}$ ريال ، $\frac{١}{٢٠}$ من
الريال للثمرة الواحدة بالترتيب والوسط التوافقي لهذه الأسعار هو

$$\frac{٣}{٢٩} = \frac{٣}{٢٠ + ٥ + ٤}$$

من الريال أو $\frac{29}{3}$ ثمرة بريال . أما الوسط الحسابي للأسعار فهو بالطبع

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{3}$$

ريال للثمرة الواحدة أو ٦ بريال .

هذا المثال يوضح فائدة الوسط التوافقي في إيجاد السعر المتوسط لعدة أسعار . لنأخذ مثالا ثانيا يوضح فائدة الوسط التوافقي في إيجاد السرعة المتوسطة لعدة سرع .

هب أن أحد راكبي الدراجات قطع ميلا بسرعة ٢٠ ميلا في الساعة ثم ميلا آخر بسرعة ١٠ أميال في الساعة . ماذا كانت سرعته المتوسطة ؟

السرعة المتوسطة هي بالطبع خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن أي

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}}$$

أو $\frac{13}{3}$ ميلا في الساعة وهذا هو الوسط التوافقي للعددين ١٠ ، ٢٠ .

والوسط التوافقي مفيد أيضا لإيجاد الزمن المتوسط لعدة أزمنة . لكن أهم تطبيقات هذا الوسط تظهر في نظرية الأرقام القياسية^١ .

٧٦ . الوسط التربيقي أو جذر متوسط المربعات . يأتي الوسط التربيقي

في الترتيب بعد الوسط الحسابي مباشرة في الأهمية لأنه يلعب دورا رئيسيا في نظرية التشتت الإحصائي كما سنرى في الفصل التالي .

الوسط التربيقي لأي عدد من الأعداد هو الجذر التربيقي الموجب لمجموع مربعات الأعداد مقسوما على عددها . أي هو الجذر التربيقي الموجب للوسط الحسابي لمربعات الأعداد وهذا هو سر تسميته جذر متوسط المربعات . فمثلا الوسط التربيقي للأعداد ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ هو الجذر التربيقي الموجب

١ الوسط التوافقي لأي عدد من الأعداد الموجبة لا يمكن أن يكون أكبر من الوسط هندسي . هذه النظرية مفيدة في التطبيقات واستنتاجها سهل من نظرية البند ٧٣ .

$$\frac{1}{4}18 = \frac{1}{4}\left(\frac{40}{4}\right) = \frac{1}{4}(36+20+16+9+4)$$

أو ٢٤,٤ . من التعريف ينتج أن الوسط التريبي للأعداد $s_1, s_2, \dots, s_n$ وليكن y هو

$$(22) \quad y = \left(\frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{n} \sum s_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

مع أخذ القيمة الموجبة للجذر التريبي . من هذه المعادلة يحسب الوسط التريبي بسهولة باستخدام جدول المربعات .

لاحتساب الوسط التريبي من توزيع تكرارى نفرض كالعادة أن $K, K^2, \dots, K^m$ هي التكرارات وأن $s_1, s_2, \dots, s_m$ هي المراكز . باستخدام الفرض المركزى يمكننا أن نمثل جميع أعداد الفئة الأولى بمركز هذه الفئة أى يمكننا أن نفرض أن s_1 هو الوسط التريبي لجميع أعداد تلك الفئة . هذا يجعل مجموع مربعات هذه الأعداد يساوى $K_1 s_1^2$ وبالمثل مع باقى الفئات . إذن ينتج أن مجموع مربعات الأعداد هو $\sum K_i s_i^2$. أيضا عدد الأعداد هو التكرار الكلى $\sum K_i$. إذن الوسط التريبي فى هذه الحالة هو

$$(23) \quad y = \left(\frac{\sum K_i s_i^2}{\sum K_i} \right)^{\frac{1}{2}}$$

مع أخذ القيمة الموجبة للجذر التريبي . هذا هو القانون العام للوسط التريبي ولاحظ أن هذا الوسط يعطى أهمية خاصة للمراكز الكبيرة لأنه يتوقف على مربعات المراكز .

١ إذا كتبنا

$$y = \left(\frac{\sum K_i s_i^l}{\sum K_i} \right)^{\frac{1}{l}} \quad (l > 1)$$

مع أخذ القيمة الموجبة للجذر فى كل حالة فواضح أن y يمثل وسطا آخر من نفس النوع كجذر متوسط المراتب . ولكن أعم منه قليلا . هذا الوسط العام يستخدم فعلا فى بعض التطبيقات ومن السهل إثبات أن $y \leq \bar{x}$.

الجدول ٥٠. يبين طريقة استخدام هذا القانون لاحتساب الوسط التريبي من توزيع تكرارى .

الجدول ٥٠. احتساب الوسط التريبي من توزيع تكرارى
(منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

عدد السلع فى مربع المركز ك س ^٢	مربع المركز س ^٢	عدد السلع ك	المنسوب (قيم مركبة) س
١٠٨٠٠	٣٦٠٠	٣	٦٠
٥٣٩٠٠	٤٩٠٠	١١	٧٠
١٦٦٤٠٠	٦٤٠٠	٢٦	٨٠
٣١٠٩٠٠	٨١٠٠	٣٩	٩٠
٥٣٠٠٠٠	١٠٠٠٠	٥٣	١٠٠
٨٢٢٨٠٠	١٢١٠٠	٦٨	١١٠
٨٢٠٨٠٠	١٤٤٠٠	٥٧	١٢٠
٧٧٧٤٠٠	١٦٩٠٠	٤٦	١٣٠
٧٢٥٢٠٠	١٩٦٠٠	٣٧	١٤٠
٦٥٢٥٠٠	٢٢٥٠٠	٢٩	١٥٠
٤٦٠٨٠٠	٢٥٦٠٠	١٨	١٦٠
٣٤٦٨٠٠	٢٨٩٠٠	١٢	١٧٠
٢٥٩٢٠٠	٣٢٤٠٠	٨	١٨٠
١٨٠٥٠٠	٣٦١٠٠	٥	١٩٠
٤٠٠٠٠	٤٠٠٠٠	١	٢٠٠
٦١٦٣٠٠٠		٤١٣	

$$ي^٢ = \frac{٦١٦٣٠٠٠}{٤١٣} = ١٤٩٢٢,٥١٨٢$$

$$ي = ١٢٢,١٦ \text{ وحدة .}$$

٧٧. نظرية. الوسط التريبي لآى عدد من الأعداد لا يمكن أن يكون أصغر من الوسط الحسابى .

واضح أن النظرية صحيحة إذا كان الوسط الحسابى عددا مبالا أو صفرا لأن الوسط التريبي لا يمكن حسب التعريف أن يكون أصغر من الصفر .
يمكننا إذن أن نفرض أن الوسط الحسابى موجب . بكتابة $س = س + ش$

يكون

$$س^2 = (س + ش)^2 = س^2 + ٢سش + ش^2,$$

$$مجس^2 = ن^2 + ٢سش + مجش^2.$$

بما أن $مجش = ٠$ حسب (٦) إذن لدينا

$$مجس^2 = ن^2 + ٢سش$$

أو بقسمة الطرفين على ن

$$ي^2 = س^2 + \frac{١}{٥}مجش^2.$$

الآن اكتب^١

$$ع^2 = \frac{١}{٥}مجش^2 \quad (٢٤)$$

هذا يعطى

$$ي^2 = س^2 + ع^2 \quad (٢٥)$$

بما أن $ع^2$ لا يمكن أن يكون سالبا إذن لدينا $ي^2 \leq س^2$ وبما أن $س < ٠$ بالفرض إذن $ي \leq س$ وهذه هي النتيجة المطلوبة.

في المثال السابق كان $ي = ١٢٢,١٦$ وحدة، $س = ١١٩,٠٨$ وحدة وواضح أن $ي < س$.

٧٨. الوسيط. كل واحد من الأوساط الأربعة السابقة معرف تعريفًا متينًا بقانون رياضي ولذلك تسمى تلك الأوساط أوساطا قانونية. لكن الأوساط الإحصائية ليست كلها من هذا القبيل. هناك في الواقع أوساط من نوع مختلف لا تعرف بقوانين رياضية وإنما تعرف بدلالة تراتيب أو أنظمة معينة للأعداد وهذه تسمى أوساطا وضعية. أشهر هذه الأوساط الوضعية وأبسطها اثنان — الوسيط والنمط. وأبسط هذين الاثنین هو الوسيط ولنبدأ دراستنا للأوساط الوضعية بالوسيط.

١ هذا العدد $ع^2$ رئيسى فى الإحصاء لأنه يمثل مربع الانحراف المعياري للبيانات عن وسطها الحسابى (الفصل السادس).

إذا أعطينا سلسلة من الأعداد مرتبة حسب القيمة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا فالوسيط هو العضو الأوسط للسلسلة إذا كان عدد الأعداد فرديا أو هو الوسط الحسابي للعضوين الأوسطين إذا كان عدد الأعداد زوجيا. فمثلا العدد الوسيط للأعداد ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ هو ٤ والعدد الوسيط للأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ هو $\frac{٣+٤}{٢}$ أو ٣,٥. من التعريف يتبع أن العدد الوسيط للأعداد س_١، س_٢، ...، س_ن المرتبة حسب القيمة إما تصاعديا أو تنازليا هو ب_٢ حيث

$$(٢٦) \quad \left. \begin{array}{l} \text{س}_{\frac{١+ن}{٢}} \text{ (ن فردى)} \\ \frac{\text{س}_{\frac{ن}{٢}} + \text{س}_{\frac{ن}{٢}+١}}{٢} \text{ (ن زوجى)} \end{array} \right\} = \text{ب}_{٢}$$

هذه المعادلة تمكننا من احتساب الوسيط لأية سلسلة بسيطة من الأعداد. لاحتساب الوسيط من توزيع تكرارى نعرف الوسيط بأنه تلك النقطة على محور المتغير التى تقسم التوزيع إلى جزئين متساويين. إذا افترضنا صحة الفرض المركزى فإن هذا التعريف والتعريف السابق للوسيط يتفقان. فمثلا تحت هذا الفرض تكون حدود التوزيع كلها مرتبة حسب قيمها وينتج من التعريف الثانى أن عدد الحدود الأصغر من الوسيط يساوى عدد الحدود الأكبر منه وواضح أن هذا هو التعريف الأول للوسيط. لكن التعريف الثانى أبسط من الأول فى التطبيق فى حالة التوزيع التكرارى.

لاحتساب الوسيط من توزيع تكرارى نطبق التعريف الثانى فيكون الوسيط تلك النقطة على محور المتغير التى تقسم التوزيع إلى جزئين فى كل منهما $\frac{ن}{٢}$ حسدا حيث ن هو التكرار الكلى أو هو النقطة على محور المتغير التى

١ إذا كان عدد الأعداد زوجيا يجوز أيضا تعريف الوسيط بأنه الوسط الهندسى للعضوين الأوسطين (إذا كان هذان موجبين) أو بأنه أية قيمة أخرى بين هذين العضوين.

يصل التكرار المتجمع الصاعد عندها إلى القيمة $\frac{1}{p}$. ليكن k تكرار الفئة التي فيها يقع الوسيط ، الحد الأدنى لهذه الفئة ، f طول هذه الفئة . وليكن k مجموع التكرارات من التكرار الأول k إلى تكرار الفئة التي تسبق فئة الوسيط مباشرة أي $k \geq \frac{1}{p} > k + 1$. هي قيمة التكرار المتجمع الصاعد عند النقطة a . فإن كان $k = \frac{1}{p}$ فإن الوسيط يقع عند النقطة a ويكون $b = a$. أما إن كان $k > \frac{1}{p}$ فإن الوسيط يقع داخل الفئة ذات الحد الأدنى a ولا بد من البحث عنه داخل هذه الفئة . للوصول إلى الوسيط لا بد من قطع مسافة داخل هذه الفئة ابتداء من النقطة a إلى النقطة التي يصل التكرار المتجمع الصاعد عندها إلى القيمة $\frac{1}{p}$. في الفئة المذكورة k حدا موزعة بانتظام داخلها حسب قيمها إذا افترضنا صحة الفرض المركزي . ولكي يرتفع التكرار المتجمع الصاعد من k عند a إلى $\frac{1}{p}$ عند النقطة المطلوبة لا بد أن يزداد بمقدار $\frac{1}{p} - k$. وبما أن الحدود المذكورة موزعة بانتظام داخل فئة الوسيط إذن لا بد أن نأخذ $(\frac{1}{p} - k)$ من طول هذه الفئة . أي أن المسافة التي يجب أن نقطعها داخل الفئة ابتداء من النقطة a حتى نصل بالتكرار المتجمع الصاعد إلى القيمة $\frac{1}{p}$ هي $(\frac{1}{p} - k) \cdot \frac{1}{p}$. بإضافة هذا الطول إلى a ينتج أن الوسيط هو

$$b = a + (\frac{1}{p} - k) \cdot \frac{1}{p} \quad (27)$$

إذا كان L عدد الحدود الواجب أخذها من حدود فئة الوسيط حتى يرتفع التكرار المتجمع الصاعد من k عند الحد الأدنى للفئة إلى $\frac{1}{p}$ عند الوسيط فواضح من الشكل ١٢ أن $L = \frac{1 + \frac{1}{p}}{p} - k$ أو $\frac{1}{p} - k$ حسب كون n فرديا أو زوجيا . (٢٧) يصير

$$b = a + \left\{ \begin{array}{l} L \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p} \right) \quad (n \text{ فردى}) \\ L \cdot \frac{1}{p} \quad (n \text{ زوجى}) \end{array} \right. \quad (28)$$

هذا هو القانون العام لاحتساب الوسيط من توزيع تكرارى وواضح أنه

يمكن الحصول عليه باستخدام التكرار المتجمع الهابط بدلا من استخدام التكرار المتجمع الصاعد .

إذا كان المتغير منفصلا والفئة لاتساوى وحدة القياس فإن الفرض المركزى لا يكون مناسباً للأسباب المذكورة فى هامش الصفحة ٨٨ . لكن استخدام الفرض المعطى فى ذلك الهامش لاحتساب الوسيط من توزيع تكررارى فى الحالة المذكورة يجعل العملية فى غاية الصعوبة . لذلك يفرض المتغير متصلا ويستخدم الفرض المركزى لاحتساب الوسيط من توزيع تكررارى فى كل حالة . وقد وجد أنه إذا احتسب الوسيط فى الحالة المذكورة باستخدام الفرض المركزى ثم قربت النتيجة إلى أقرب قيمة ممكنة للمتغير فإن الوسيط الناتج لا يختلف عن الوسيط الذى يحصل عليه باستخدام الفرض الآخر المشار إليه^١.

مثال . أوجد المنسوب الوسيط لأسعار السلع المبينة فى الجدول ٤٣ .
لدينا فى هذه الحالة $n = ٤١٣$ ، $\frac{n}{2} = ٢٠٦,٥$. إذن المنسوب الوسيط هو تلك النقطة على محور المنسوب التى تقسم التوزيع إلى جزئين فى كل منهما ٢٠٦,٥ سلعة أو هو النقطة التى تمثل منسوب السلعة السابعة بعد المائتين .
بجمع التكرارات ابتداء من التكرار الأول نجد أن الفئات الست الأولى أى الفئات ٥٥ - ١١٥ تحتوى فيما بينها على ٢٠٠ سلعة وأن الفئات السبع الأولى تحتوى فيما بينها على ٢٥٧ سلعة . إذن للوصول إلى النقطة الواقعة على محور المنسوب التى تمثل السلعة السابعة بعد المائتين لابد من أخذ سبع سلع من السبع وخمسين سلعة المنتمية إلى الفئة السابعة . وللحصول على هذه السلع السبع لابد من أخذ $\frac{٦٠}{٧}$ من طول الفئة السابعة . أى $\frac{٦٠}{٧} \times ١٠$ أو $\frac{٦٠٠}{٧}$ وحدة .
بإضافة هذا إلى المنسوب ١١٥ الذى يمثل مبدأ الفئة السابعة ينتج أن المنسوب الوسيط المطلوب هو

١ إذا كان المتغير منفصلا يحسن عادة أخذ الوسيط إلى أقرب قيمة ممكنة للمتغير .

$$ب = 115 + \frac{70}{27} = 116 \frac{1}{3} = 116,14 \text{ وحدة.}$$

هذه النتيجة يمكن أيضا الحصول عليها بأخذ $115 = ل$ ، $٧ = ف$ ، $١٠ = ك$ ، ٥٧ في السطر الأعلى من (٢٨). أما النتيجة فمعناها هو بالطبع أن عدد السلع التي كان منسوب سعرها في ١٩٣٣ تحت ١١٦,١٤ يساوى عدد السلع التي كان منسوب سعرها فوق ١١٦,١٤. والنتيجة مبينة بالطبع على الفرض المركزى. فإن لم يتحقق هذا الفرض فإن القيمة ١١٦,١٤ لا يمكن أن تعتبر أكثر من تقريب لقيمة المنسوب الوسيط.

٧٩. الطريقة البيانية لإيجاد الوسيط من توزيع تكرارى . باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط يمكننا إيجاد الوسيط من توزيع تكرارى بطريقة بيانية . لإيجاد الوسيط بهذه الطريقة نرسم خطا مستقيما أفقيا عند النقطة $\frac{n}{2}$ على المحور الرأسى حيث n هو التكرار الكلى للتوزيع ومن نقطة تقاطع هذا الخط مع المنحنى المتجمع نرسم خطا مستقيما رأسيا . هذا الخط الرأسى يقطع المحور الأفقى عند الوسيط .

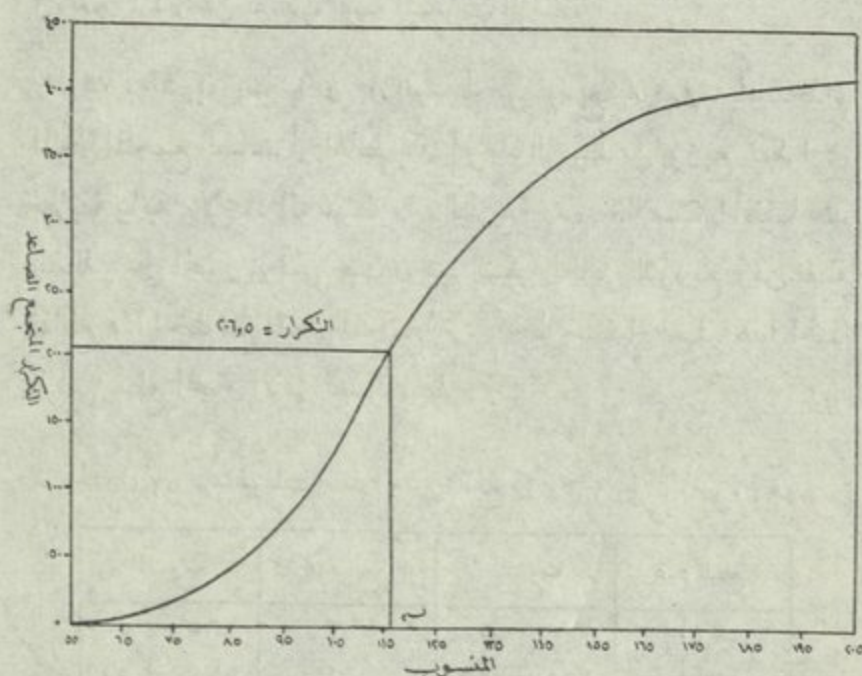
الجدول ٥٢ . منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠

عدد السلع	المنسوب	عدد السلع	المنسوب
٣٤٠	١٤٥ — ٥٥	٣	٦٥ — ٥٥
٣٦٩	١٥٥ — ٥٥	١٤	٧٥ — ٥٥
٣٨٧	١٦٥ — ٥٥	٤٠	٨٥ — ٥٥
٣٩٩	١٧٥ — ٥٥	٧٩	٩٥ — ٥٥
٤٠٧	١٨٥ — ٥٥	١٣٢	١٠٥ — ٥٥
٤١٢	١٩٥ — ٥٥	٢٠٠	١١٥ — ٥٥
٤١٣	٢٠٥ — ٥٥	٢٥٧	١٢٥ — ٥٥
		٣٠٣	١٣٥ — ٥٥

١. يمكن فى الحق رسم المنحنى حتى يصل أمام النقطة $\frac{n}{2}$ على المحور الرأسى .

لنبحث بهذه الطريقة عن المنسوب الوسيط لأسعار السلع المبينة في الجدول ٤٣ . الجدول ٥٢ يعطى التكرارات المتجمعة الصاعدة لتوزيع المنسوبات . باستخدام هذه التكرارات يرسم المنحنى المتجمع الصاعد كما في الشكل ٣٤ ومنه يوجد الوسيط كما هو مبين في الشكل .

الشكل ٣٤ . إيجاد الوسيط من توزيع تكرارى : الطريقة البيانية
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)



٨٠ . نظرية . مجموع الانحرافات المطلقة لأى عدد من الأعداد عن وسيطها أصغر من مجموع انحرافات المطلق عن أى عدد آخر .
هذه النظرية تعطى أهم خواص الوسيط . ومعناها هو أن الوسيط يمثل الأعداد المعطاة خيراً من أى عدد آخر إذا قيس حسن التمثيل بمجموع الانحرافات المطلقة . لإثبات النظرية نفرض أن الأعداد المعطاة مرتبة ترتيباً تصاعدياً هي $s_1, s_2, \dots, s_n$ ونكتب

$$د(س) = \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right|_{\substack{\text{ن} \\ \text{ر}}} = \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right|_{\substack{\text{ن} \\ \text{ر}}} - \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right|_{\substack{\text{ن} \\ \text{ر}}} |$$

لنمثل بمجموع الانحرافات المطلقة لهذه الأعداد عن أى عدد س. ثم نعتبر الحالتين ن فردى، ن زوجى منفصلتين.

أولا نفرض أن $ن = ٢م - ١$. بتطبيق السطر الأعلى من (٢٦) ينتج أن الوسيط هو ب = س. الآن خذ أى عدد س فى الفترة $س \geq ١$ $س \leq ١ + س$ ، وليكن $س - س = ج$ ثم قارن بين قيمتى د(س)، د(س+١). واضح أن

$$\left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| + ج \quad (ر = ١, ٢, \dots, م)$$

على حين أن

$$\left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| = \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| - ج \quad (ر = ١ + م + ٢, \dots, ن).$$

بالجمع من $ر = ١$ إلى $ر = ن$ ينتج أن

$$\begin{aligned} د(س) &= د(س) + م - ج - (ن - م) - ج \\ &= د(س) + (م - ٢) - ج = د(س) + ج، \\ د(س) &= د(س) - ج \end{aligned}$$

وهذا صحيح لكل س فى $س \geq ١ + س$. الآن افرض أن س يتحرك صوب اليمين إلى الفترة التالية $س \geq ١ + س$ وأن $س - س = ١ + س = ج$ ثم قارن بين قيمتى د(س)، د(س+١). لدينا كما تقدم

$$\begin{aligned} \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| &= \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| + ١ - ج \quad (ر = ١, ٢, \dots, ١ + م) \\ \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| - \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| &= \left| \begin{smallmatrix} \text{س} \\ \text{س} \end{smallmatrix} \right| - ١ + ج \quad (ر = ٢ + م + ٣, \dots, ن) \end{aligned}$$

بالجمع من $ر = ١$ إلى $ر = ن$ ينتج أن

$$\begin{aligned} د(س) &= د(س) + (١ + م) - ج - (١ - م - ن) - ج \\ &= د(س) + (١ + م - ٢) - ج = د(س) + ١ - ج \end{aligned}$$

$$د(س) - د(س + ١) = ٣ج$$

وهذا صحيح لكل $س$ في $س \geq ١$ ، $س \geq س + ١$ ، $س \geq س + ٢$. بهذه الكيفية يزيد المجموع $د(س)$ كلما تحرك $س$ صوب اليمين إلى الفترات المتتالية وهذه الزيادات تساوى بالترتيب $ج$ ، $٣ج$ ، $٥ج$ وهكذا ترتفع الزيادة كل مرة بمقدار $٢ج$ حتى تبلغ القيمة $(ن - ٢)ج$ في الفترة الأخيرة $س = ١$ ، $س \geq س$. وب نفس الكيفية أو بالتماثل ينتج أن $د(س)$ يزيد زيادات مناظرة كلما تحرك $س$ صوب اليسار إلى الفترات المتتالية . إذن $د(س)$ يكون أصغر ما يمكن عند $س = س = ب$. هذا يثبت النظرية في الحالة الفردية .

نفرض الآن أن $ن = ٢م$ ولنأخذ أى عدد $س$ في الفترة الوسطى

$$\begin{aligned} س \geq س \geq س + ١ \text{ وليكن } س - س = ج . \text{ في هذه الحالة} \\ |س - س| = |س - س + ج| = (س - س + ١) + ج = (س - س + ١) + ج \\ |س - س| = |س - س - ج| = (س - س - ١) - ج = (س - س - ١) - ج \end{aligned}$$

بالجمع ينتج أن

$$\begin{aligned} د(س) = د(س + ١) + ج - د(س - ١) = د(س) + (س - س) + ج - د(س - ١) \\ = د(س) \end{aligned}$$

وهذا صحيح لجميع $س$ في $س \geq ١$ ، $س \geq س + ١$ ، إذن $د(س)$ ثابت في الفترة الوسطى وهذا الثابت يساوى $د(س)$. أيضا إذا تحرك $س$ خارج الفترة الوسطى صوب اليمين أو صوب اليسار إلى الفترات المجاورة فبنفس الكيفية المتقدمة يمكننا أن نرى أن $د(س)$ يزداد في الفترات المتتالية بالمقادير $٢ج$ ، $٤ج$ ، $٦ج$ ، $٨ج$ ، $١٠ج$ ، $١٢ج$ ، $١٤ج$ ، $١٦ج$ ، $١٨ج$ ، $٢٠ج$ ، $٢٢ج$ ، $٢٤ج$ ، $٢٦ج$ ، $٢٨ج$ ، $٣٠ج$ ، $٣٢ج$ ، $٣٤ج$ ، $٣٦ج$ ، $٣٨ج$ ، $٤٠ج$ ، $٤٢ج$ ، $٤٤ج$ ، $٤٦ج$ ، $٤٨ج$ ، $٥٠ج$ ، $٥٢ج$ ، $٥٤ج$ ، $٥٦ج$ ، $٥٨ج$ ، $٦٠ج$ ، $٦٢ج$ ، $٦٤ج$ ، $٦٦ج$ ، $٦٨ج$ ، $٧٠ج$ ، $٧٢ج$ ، $٧٤ج$ ، $٧٦ج$ ، $٧٨ج$ ، $٨٠ج$ ، $٨٢ج$ ، $٨٤ج$ ، $٨٦ج$ ، $٨٨ج$ ، $٩٠ج$ ، $٩٢ج$ ، $٩٤ج$ ، $٩٦ج$ ، $٩٨ج$ ، $١٠٠ج$ ، $١٠٢ج$ ، $١٠٤ج$ ، $١٠٦ج$ ، $١٠٨ج$ ، $١١٠ج$ ، $١١٢ج$ ، $١١٤ج$ ، $١١٦ج$ ، $١١٨ج$ ، $١٢٠ج$ ، $١٢٢ج$ ، $١٢٤ج$ ، $١٢٦ج$ ، $١٢٨ج$ ، $١٣٠ج$ ، $١٣٢ج$ ، $١٣٤ج$ ، $١٣٦ج$ ، $١٣٨ج$ ، $١٤٠ج$ ، $١٤٢ج$ ، $١٤٤ج$ ، $١٤٦ج$ ، $١٤٨ج$ ، $١٥٠ج$ ، $١٥٢ج$ ، $١٥٤ج$ ، $١٥٦ج$ ، $١٥٨ج$ ، $١٦٠ج$ ، $١٦٢ج$ ، $١٦٤ج$ ، $١٦٦ج$ ، $١٦٨ج$ ، $١٧٠ج$ ، $١٧٢ج$ ، $١٧٤ج$ ، $١٧٦ج$ ، $١٧٨ج$ ، $١٨٠ج$ ، $١٨٢ج$ ، $١٨٤ج$ ، $١٨٦ج$ ، $١٨٨ج$ ، $١٩٠ج$ ، $١٩٢ج$ ، $١٩٤ج$ ، $١٩٦ج$ ، $١٩٨ج$ ، $٢٠٠ج$ ، $٢٠٢ج$ ، $٢٠٤ج$ ، $٢٠٦ج$ ، $٢٠٨ج$ ، $٢١٠ج$ ، $٢١٢ج$ ، $٢١٤ج$ ، $٢١٦ج$ ، $٢١٨ج$ ، $٢٢٠ج$ ، $٢٢٢ج$ ، $٢٢٤ج$ ، $٢٢٦ج$ ، $٢٢٨ج$ ، $٢٣٠ج$ ، $٢٣٢ج$ ، $٢٣٤ج$ ، $٢٣٦ج$ ، $٢٣٨ج$ ، $٢٤٠ج$ ، $٢٤٢ج$ ، $٢٤٤ج$ ، $٢٤٦ج$ ، $٢٤٨ج$ ، $٢٥٠ج$ ، $٢٥٢ج$ ، $٢٥٤ج$ ، $٢٥٦ج$ ، $٢٥٨ج$ ، $٢٦٠ج$ ، $٢٦٢ج$ ، $٢٦٤ج$ ، $٢٦٦ج$ ، $٢٦٨ج$ ، $٢٧٠ج$ ، $٢٧٢ج$ ، $٢٧٤ج$ ، $٢٧٦ج$ ، $٢٧٨ج$ ، $٢٨٠ج$ ، $٢٨٢ج$ ، $٢٨٤ج$ ، $٢٨٦ج$ ، $٢٨٨ج$ ، $٢٩٠ج$ ، $٢٩٢ج$ ، $٢٩٤ج$ ، $٢٩٦ج$ ، $٢٩٨ج$ ، $٣٠٠ج$ ، $٣٠٢ج$ ، $٣٠٤ج$ ، $٣٠٦ج$ ، $٣٠٨ج$ ، $٣١٠ج$ ، $٣١٢ج$ ، $٣١٤ج$ ، $٣١٦ج$ ، $٣١٨ج$ ، $٣٢٠ج$ ، $٣٢٢ج$ ، $٣٢٤ج$ ، $٣٢٦ج$ ، $٣٢٨ج$ ، $٣٣٠ج$ ، $٣٣٢ج$ ، $٣٣٤ج$ ، $٣٣٦ج$ ، $٣٣٨ج$ ، $٣٤٠ج$ ، $٣٤٢ج$ ، $٣٤٤ج$ ، $٣٤٦ج$ ، $٣٤٨ج$ ، $٣٥٠ج$ ، $٣٥٢ج$ ، $٣٥٤ج$ ، $٣٥٦ج$ ، $٣٥٨ج$ ، $٣٦٠ج$ ، $٣٦٢ج$ ، $٣٦٤ج$ ، $٣٦٦ج$ ، $٣٦٨ج$ ، $٣٧٠ج$ ، $٣٧٢ج$ ، $٣٧٤ج$ ، $٣٧٦ج$ ، $٣٧٨ج$ ، $٣٨٠ج$ ، $٣٨٢ج$ ، $٣٨٤ج$ ، $٣٨٦ج$ ، $٣٨٨ج$ ، $٣٩٠ج$ ، $٣٩٢ج$ ، $٣٩٤ج$ ، $٣٩٦ج$ ، $٣٩٨ج$ ، $٤٠٠ج$ ، $٤٠٢ج$ ، $٤٠٤ج$ ، $٤٠٦ج$ ، $٤٠٨ج$ ، $٤١٠ج$ ، $٤١٢ج$ ، $٤١٤ج$ ، $٤١٦ج$ ، $٤١٨ج$ ، $٤٢٠ج$ ، $٤٢٢ج$ ، $٤٢٤ج$ ، $٤٢٦ج$ ، $٤٢٨ج$ ، $٤٣٠ج$ ، $٤٣٢ج$ ، $٤٣٤ج$ ، $٤٣٦ج$ ، $٤٣٨ج$ ، $٤٤٠ج$ ، $٤٤٢ج$ ، $٤٤٤ج$ ، $٤٤٦ج$ ، $٤٤٨ج$ ، $٤٥٠ج$ ، $٤٥٢ج$ ، $٤٥٤ج$ ، $٤٥٦ج$ ، $٤٥٨ج$ ، $٤٦٠ج$ ، $٤٦٢ج$ ، $٤٦٤ج$ ، $٤٦٦ج$ ، $٤٦٨ج$ ، $٤٧٠ج$ ، $٤٧٢ج$ ، $٤٧٤ج$ ، $٤٧٦ج$ ، $٤٧٨ج$ ، $٤٨٠ج$ ، $٤٨٢ج$ ، $٤٨٤ج$ ، $٤٨٦ج$ ، $٤٨٨ج$ ، $٤٩٠ج$ ، $٤٩٢ج$ ، $٤٩٤ج$ ، $٤٩٦ج$ ، $٤٩٨ج$ ، $٥٠٠ج$ ، $٥٠٢ج$ ، $٥٠٤ج$ ، $٥٠٦ج$ ، $٥٠٨ج$ ، $٥١٠ج$ ، $٥١٢ج$ ، $٥١٤ج$ ، $٥١٦ج$ ، $٥١٨ج$ ، $٥٢٠ج$ ، $٥٢٢ج$ ، $٥٢٤ج$ ، $٥٢٦ج$ ، $٥٢٨ج$ ، $٥٣٠ج$ ، $٥٣٢ج$ ، $٥٣٤ج$ ، $٥٣٦ج$ ، $٥٣٨ج$ ، $٥٤٠ج$ ، $٥٤٢ج$ ، $٥٤٤ج$ ، $٥٤٦ج$ ، $٥٤٨ج$ ، $٥٥٠ج$ ، $٥٥٢ج$ ، $٥٥٤ج$ ، $٥٥٦ج$ ، $٥٥٨ج$ ، $٥٦٠ج$ ، $٥٦٢ج$ ، $٥٦٤ج$ ، $٥٦٦ج$ ، $٥٦٨ج$ ، $٥٧٠ج$ ، $٥٧٢ج$ ، $٥٧٤ج$ ، $٥٧٦ج$ ، $٥٧٨ج$ ، $٥٨٠ج$ ، $٥٨٢ج$ ، $٥٨٤ج$ ، $٥٨٦ج$ ، $٥٨٨ج$ ، $٥٩٠ج$ ، $٥٩٢ج$ ، $٥٩٤ج$ ، $٥٩٦ج$ ، $٥٩٨ج$ ، $٦٠٠ج$ ، $٦٠٢ج$ ، $٦٠٤ج$ ، $٦٠٦ج$ ، $٦٠٨ج$ ، $٦١٠ج$ ، $٦١٢ج$ ، $٦١٤ج$ ، $٦١٦ج$ ، $٦١٨ج$ ، $٦٢٠ج$ ، $٦٢٢ج$ ، $٦٢٤ج$ ، $٦٢٦ج$ ، $٦٢٨ج$ ، $٦٣٠ج$ ، $٦٣٢ج$ ، $٦٣٤ج$ ، $٦٣٦ج$ ، $٦٣٨ج$ ، $٦٤٠ج$ ، $٦٤٢ج$ ، $٦٤٤ج$ ، $٦٤٦ج$ ، $٦٤٨ج$ ، $٦٥٠ج$ ، $٦٥٢ج$ ، $٦٥٤ج$ ، $٦٥٦ج$ ، $٦٥٨ج$ ، $٦٦٠ج$ ، $٦٦٢ج$ ، $٦٦٤ج$ ، $٦٦٦ج$ ، $٦٦٨ج$ ، $٦٧٠ج$ ، $٦٧٢ج$ ، $٦٧٤ج$ ، $٦٧٦ج$ ، $٦٧٨ج$ ، $٦٨٠ج$ ، $٦٨٢ج$ ، $٦٨٤ج$ ، $٦٨٦ج$ ، $٦٨٨ج$ ، $٦٩٠ج$ ، $٦٩٢ج$ ، $٦٩٤ج$ ، $٦٩٦ج$ ، $٦٩٨ج$ ، $٧٠٠ج$ ، $٧٠٢ج$ ، $٧٠٤ج$ ، $٧٠٦ج$ ، $٧٠٨ج$ ، $٧١٠ج$ ، $٧١٢ج$ ، $٧١٤ج$ ، $٧١٦ج$ ، $٧١٨ج$ ، $٧٢٠ج$ ، $٧٢٢ج$ ، $٧٢٤ج$ ، $٧٢٦ج$ ، $٧٢٨ج$ ، $٧٣٠ج$ ، $٧٣٢ج$ ، $٧٣٤ج$ ، $٧٣٦ج$ ، $٧٣٨ج$ ، $٧٤٠ج$ ، $٧٤٢ج$ ، $٧٤٤ج$ ، $٧٤٦ج$ ، $٧٤٨ج$ ، $٧٥٠ج$ ، $٧٥٢ج$ ، $٧٥٤ج$ ، $٧٥٦ج$ ، $٧٥٨ج$ ، $٧٦٠ج$ ، $٧٦٢ج$ ، $٧٦٤ج$ ، $٧٦٦ج$ ، $٧٦٨ج$ ، $٧٧٠ج$ ، $٧٧٢ج$ ، $٧٧٤ج$ ، $٧٧٦ج$ ، $٧٧٨ج$ ، $٧٨٠ج$ ، $٧٨٢ج$ ، $٧٨٤ج$ ، $٧٨٦ج$ ، $٧٨٨ج$ ، $٧٩٠ج$ ، $٧٩٢ج$ ، $٧٩٤ج$ ، $٧٩٦ج$ ، $٧٩٨ج$ ، $٨٠٠ج$ ، $٨٠٢ج$ ، $٨٠٤ج$ ، $٨٠٦ج$ ، $٨٠٨ج$ ، $٨١٠ج$ ، $٨١٢ج$ ، $٨١٤ج$ ، $٨١٦ج$ ، $٨١٨ج$ ، $٨٢٠ج$ ، $٨٢٢ج$ ، $٨٢٤ج$ ، $٨٢٦ج$ ، $٨٢٨ج$ ، $٨٣٠ج$ ، $٨٣٢ج$ ، $٨٣٤ج$ ، $٨٣٦ج$ ، $٨٣٨ج$ ، $٨٤٠ج$ ، $٨٤٢ج$ ، $٨٤٤ج$ ، $٨٤٦ج$ ، $٨٤٨ج$ ، $٨٥٠ج$ ، $٨٥٢ج$ ، $٨٥٤ج$ ، $٨٥٦ج$ ، $٨٥٨ج$ ، $٨٦٠ج$ ، $٨٦٢ج$ ، $٨٦٤ج$ ، $٨٦٦ج$ ، $٨٦٨ج$ ، $٨٧٠ج$ ، $٨٧٢ج$ ، $٨٧٤ج$ ، $٨٧٦ج$ ، $٨٧٨ج$ ، $٨٨٠ج$ ، $٨٨٢ج$ ، $٨٨٤ج$ ، $٨٨٦ج$ ، $٨٨٨ج$ ، $٨٩٠ج$ ، $٨٩٢ج$ ، $٨٩٤ج$ ، $٨٩٦ج$ ، $٨٩٨ج$ ، $٩٠٠ج$ ، $٩٠٢ج$ ، $٩٠٤ج$ ، $٩٠٦ج$ ، $٩٠٨ج$ ، $٩١٠ج$ ، $٩١٢ج$ ، $٩١٤ج$ ، $٩١٦ج$ ، $٩١٨ج$ ، $٩٢٠ج$ ، $٩٢٢ج$ ، $٩٢٤ج$ ، $٩٢٦ج$ ، $٩٢٨ج$ ، $٩٣٠ج$ ، $٩٣٢ج$ ، $٩٣٤ج$ ، $٩٣٦ج$ ، $٩٣٨ج$ ، $٩٤٠ج$ ، $٩٤٢ج$ ، $٩٤٤ج$ ، $٩٤٦ج$ ، $٩٤٨ج$ ، $٩٥٠ج$ ، $٩٥٢ج$ ، $٩٥٤ج$ ، $٩٥٦ج$ ، $٩٥٨ج$ ، $٩٦٠ج$ ، $٩٦٢ج$ ، $٩٦٤ج$ ، $٩٦٦ج$ ، $٩٦٨ج$ ، $٩٧٠ج$ ، $٩٧٢ج$ ، $٩٧٤ج$ ، $٩٧٦ج$ ، $٩٧٨ج$ ، $٩٨٠ج$ ، $٩٨٢ج$ ، $٩٨٤ج$ ، $٩٨٦ج$ ، $٩٨٨ج$ ، $٩٩٠ج$ ، $٩٩٢ج$ ، $٩٩٤ج$ ، $٩٩٦ج$ ، $٩٩٨ج$ ، $١٠٠٠ج$ ، $١٠٠٢ج$ ، $١٠٠٤ج$ ، $١٠٠٦ج$ ، $١٠٠٨ج$ ، $١٠١٠ج$ ، $١٠١٢ج$ ، $١٠١٤ج$ ، $١٠١٦ج$ ، $١٠١٨ج$ ، $١٠٢٠ج$ ، $١٠٢٢ج$ ، $١٠٢٤ج$ ، $١٠٢٦ج$ ، $١٠٢٨ج$ ، $١٠٣٠ج$ ، $١٠٣٢ج$ ، $١٠٣٤ج$ ، $١٠٣٦ج$ ، $١٠٣٨ج$ ، $١٠٤٠ج$ ، $١٠٤٢ج$ ، $١٠٤٤ج$ ، $١٠٤٦ج$ ، $١٠٤٨ج$ ، $١٠٥٠ج$ ، $١٠٥٢ج$ ، $١٠٥٤ج$ ، $١٠٥٦ج$ ، $١٠٥٨ج$ ، $١٠٦٠ج$ ، $١٠٦٢ج$ ، $١٠٦٤ج$ ، $١٠٦٦ج$ ، $١٠٦٨ج$ ، $١٠٧٠ج$ ، $١٠٧٢ج$ ، $١٠٧٤ج$ ، $١٠٧٦ج$ ، $١٠٧٨ج$ ، $١٠٨٠ج$ ، $١٠٨٢ج$ ، $١٠٨٤ج$ ، $١٠٨٦ج$ ، $١٠٨٨ج$ ، $١٠٩٠ج$ ، $١٠٩٢ج$ ، $١٠٩٤ج$ ، $١٠٩٦ج$ ، $١٠٩٨ج$ ، $١١٠٠ج$ ، $١١٠٢ج$ ، $١١٠٤ج$ ، $١١٠٦ج$ ، $١١٠٨ج$ ، $١١١٠ج$ ، $١١١٢ج$ ، $١١١٤ج$ ، $١١١٦ج$ ، $١١١٨ج$ ، $١١٢٠ج$ ، $١١٢٢ج$ ، $١١٢٤ج$ ، $١١٢٦ج$ ، $١١٢٨ج$ ، $١١٣٠ج$ ، $١١٣٢ج$ ، $١١٣٤ج$ ، $١١٣٦ج$ ، $١١٣٨ج$ ، $١١٤٠ج$ ، $١١٤٢ج$ ، $١١٤٤ج$ ، $١١٤٦ج$ ، $١١٤٨ج$ ، $١١٥٠ج$ ، $١١٥٢ج$ ، $١١٥٤ج$ ، $١١٥٦ج$ ، $١١٥٨ج$ ، $١١٦٠ج$ ، $١١٦٢ج$ ، $١١٦٤ج$ ، $١١٦٦ج$ ، $١١٦٨ج$ ، $١١٧٠ج$ ، $١١٧٢ج$ ، $١١٧٤ج$ ، $١١٧٦ج$ ، $١١٧٨ج$ ، $١١٨٠ج$ ، $١١٨٢ج$ ، $١١٨٤ج$ ، $١١٨٦ج$ ، $١١٨٨ج$ ، $١١٩٠ج$ ، $١١٩٢ج$ ، $١١٩٤ج$ ، $١١٩٦ج$ ، $١١٩٨ج$ ، $١٢٠٠ج$ ، $١٢٠٢ج$ ، $١٢٠٤ج$ ، $١٢٠٦ج$ ، $١٢٠٨ج$ ، $١٢١٠ج$ ، $١٢١٢ج$ ، $١٢١٤ج$ ، $١٢١٦ج$ ، $١٢١٨ج$ ، $١٢٢٠ج$ ، $١٢٢٢ج$ ، $١٢٢٤ج$ ، $١٢٢٦ج$ ، $١٢٢٨ج$ ، $١٢٣٠ج$ ، $١٢٣٢ج$ ، $١٢٣٤ج$ ، $١٢٣٦ج$ ، $١٢٣٨ج$ ، $١٢٤٠ج$ ، $١٢٤٢ج$ ، $١٢٤٤ج$ ، $١٢٤٦ج$ ، $١٢٤٨ج$ ، $١٢٥٠ج$ ، $١٢٥٢ج$ ، $١٢٥٤ج$ ، $١٢٥٦ج$ ، $١٢٥٨ج$ ، $١٢٦٠ج$ ، $١٢٦٢ج$ ، $١٢٦٤ج$ ، $١٢٦٦ج$ ، $١٢٦٨ج$ ، $١٢٧٠ج$ ، $١٢٧٢ج$ ، $١٢٧٤ج$ ، $١٢٧٦ج$ ، $١٢٧٨ج$ ، $١٢٨٠ج$ ، $١٢٨٢ج$ ، $١٢٨٤ج$ ، $١٢٨٦ج$ ، $١٢٨٨ج$ ، $١٢٩٠ج$ ، $١٢٩٢ج$ ، $١٢٩٤ج$ ، $١٢٩٦ج$ ، $١٢٩٨ج$ ، $١٣٠٠ج$ ، $١٣٠٢ج$ ، $١٣٠٤ج$ ، $١٣٠٦ج$ ، $١٣٠٨ج$ ، $١٣١٠ج$ ، $١٣١٢ج$ ، $١٣١٤ج$ ، $١٣١٦ج$ ، $١٣١٨ج$ ، $١٣٢٠ج$ ، $١٣٢٢ج$ ، $١٣٢٤ج$ ، $١٣٢٦ج$ ، $١٣٢٨ج$ ، $١٣٣٠ج$ ، $١٣٣٢ج$ ، $١٣٣٤ج$ ، $١٣٣٦ج$ ، $١٣٣٨ج$ ، $١٣٤٠ج$ ، $١٣٤٢ج$ ، $١٣٤٤ج$ ، $١٣٤٦ج$ ، $١٣٤٨ج$ ، $١٣٥٠ج$ ، $١٣٥٢ج$ ، $١٣٥٤ج$ ، $١٣٥٦ج$ ، $١٣٥٨ج$ ، $١٣٦٠ج$ ، $١٣٦٢ج$ ، $١٣٦٤ج$ ، $١٣٦٦ج$ ، $١٣٦٨ج$ ، $١٣٧٠ج$ ، $١٣٧٢ج$ ، $١٣٧٤ج$ ، $١٣٧٦ج$ ، $١٣٧٨ج$ ، $١٣٨٠ج$ ، $١٣٨٢ج$ ، $١٣٨٤ج$ ، $١٣٨٦ج$ ، $١٣٨٨ج$ ، $١٣٩٠ج$ ، $١٣٩٢ج$ ، $١٣٩٤ج$ ، $١٣٩٦ج$ ، $١٣٩٨ج$ ، $١٤٠٠ج$ ، $١٤٠٢ج$ ، $١٤٠٤ج$ ، $١٤٠٦ج$ ، $١٤٠٨ج$ ، $١٤١٠ج$ ، $١٤١٢ج$ ، $١٤١٤ج$ ، $١٤١٦ج$ ، $١٤١٨ج$ ، $١٤٢٠ج$ ، $١٤٢٢ج$ ، $١٤٢٤ج$ ، $١٤٢٦ج$ ، $١٤٢٨ج$ ، $١٤٣٠ج$ ، $١٤٣٢ج$ ، $١٤٣٤ج$ ، $١٤٣٦ج$ ، $١٤٣٨ج$ ، $١٤٤٠ج$ ، $١٤٤٢ج$ ، $١٤٤٤ج$ ، $١٤٤٦ج$ ، $١٤٤٨ج$ ، $١٤٥٠ج$ ، $١٤٥٢ج$ ، $١٤٥٤ج$ ، $١٤٥٦ج$ ، $١٤٥٨ج$ ، $١٤٦٠ج$ ، $١٤٦٢ج$ ، $١٤٦٤ج$ ، $١٤٦٦ج$ ، $١٤٦٨ج$ ، $١٤٧٠ج$ ، $١٤٧٢ج$ ، $١٤٧٤ج$ ، $١٤٧٦ج$ ، $١٤٧٨ج$ ، $١٤٨٠ج$ ، $١٤٨٢ج$ ، $١٤٨٤ج$ ، $١٤٨٦ج$ ، $١٤٨٨ج$ ، $١٤٩٠ج$ ، $١٤٩٢ج$ ، $١٤٩٤ج$ ، $١٤٩٦ج$ ، $١٤٩٨ج$ ، $١٥٠٠ج$ ، $١٥٠٢ج$ ، $١٥٠٤ج$ ، $١٥٠٦ج$ ، $١٥٠٨ج$ ، $١٥١٠ج$ ، $١٥١٢ج$ ، $١٥١٤ج$ ، $١٥١٦ج$ ، $١٥١٨ج$ ، $١٥٢٠ج$ ، $١٥٢٢ج$ ، $١٥٢٤ج$ ، $١٥٢٦ج$ ، $١٥٢٨ج$ ، $١٥٣٠ج$ ، $١٥٣٢ج$ ، $١٥٣٤ج$ ، $١٥٣٦ج$ ، $١٥٣٨ج$ ، $١٥٤٠ج$ ، $١٥٤٢ج$ ، $١٥٤٤ج$ ، $١٥٤٦ج$ ، $١٥٤٨ج$ ، $١٥٥٠ج$ ، $١٥٥٢ج$ ، $١٥٥٤ج$ ، $١٥٥٦ج$ ، $١٥٥٨ج$ ، $١٥٦٠ج$ ، $١٥٦٢ج$ ، ١٥٦

أصغر ما يمكن .

هناك حالات كثيرة ولرسم الشكل المطلوب لا بد من اعتبار هذه الحالات منفردة . لدينا

$$ص = (١ - س) - (٢ - س) - (٧ - س) = ١٠ + س$$

إذا كان $س > ١$ ،

$$ص = (١ - س) - (٢ - س) - (٧ - س) = ٨ + س$$

إذا كان $١ \leq س < ٢$ ،

$$ص = (١ - س) + (٢ - س) - (٧ - س) = ٤ + س$$

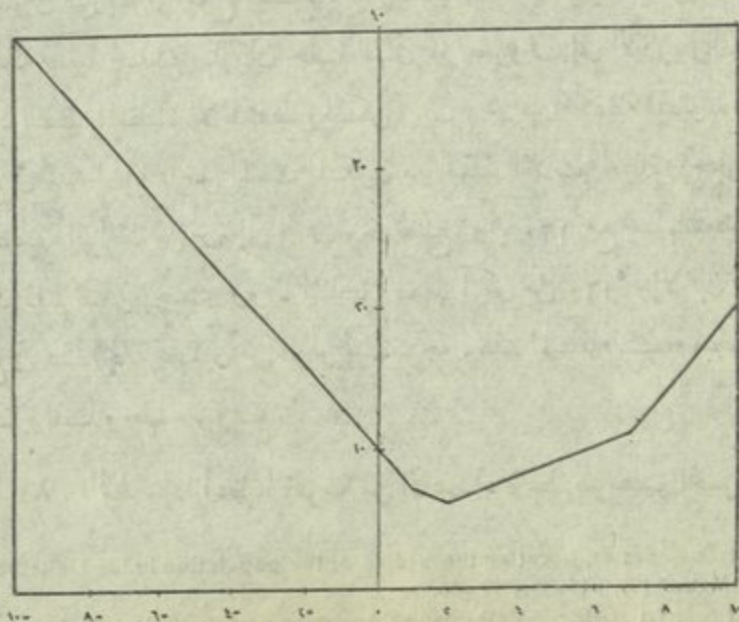
إذا كان $٢ \leq س < ٧$ ،

$$ص = (١ - س) + (٢ - س) + (٧ - س) = ١٠ - س$$

إذا كان $س \leq ٧$.

باستخدام هذه النتائج يمكننا الآن رسم الخط البياني للدالة (الشكل ٣٥) .

الشكل ٣٥ . الخط البياني للدالة $ص = |١ - س| + |٢ - س| + |٧ - س|$



في هذه الحالة $b_p = 2$ هي القيمة الوسيطة للأعداد ١، ٢، ٧ وواضح من الرسم أن ص أى مجموع الانحرافات المطلقة للأعداد المذكورة عن أى عدد س ينقص في المدى $s \geq 2$ ويزيد في المدى $s \leq 2$. إذن ص يكون أصغر ما يمكن عند $s = 2$.

هذه الخاصة للوسيط مهمة في الإحصاء التطبيقى لأنها مفيدة في تحديد المواقع الجغرافية لمراكز الصناعة. فالصناعة التى تقوم عند الوسيط الجغرافى للإقليم الذى تخدمه تكون مقامة فى الموقع الأمثل لها من ناحية التوزيع لأن مجموع أبعاد مراكز التصريف عن المصنع يكون إذ ذاك أصغر ما يمكن. وواضح أنه كلما كان هذا المجموع أصغر كان ذلك أوفر وأجدى. والخاصة المذكورة مفيدة أيضا في تحديد مركز سكان الدولة^١.

وسواء كانت المسألة تحديد الوسيط الجغرافى لإقليم أو المركز الوسيط للسكان فالمسألة العامة التى تنشأ يمكن صياغتها كما يأتى. لدينا نقطة فى مستوى واحد لا تقع أى ثلاث منها على استقامة واحدة ويراد تعيين النقطة س فى المستوى التى يكون مجموع أبعادها عن النقط المعطاة أصغر ما يمكن. هذه المسألة صعبة جدا وربما كان حلها النهائى غير معروف إلى الآن. إذا كان عدد النقط المعطاة ثلاثا فقط ولتكن ١، ٢، ٣ فإن النقطة المطلوبة س تقع فى هذه الحالة داخل المثلث المكون من النقط الثلاث المعطاة والخطوط المستقيمة الواصلة من س إلى ١، ٢، ٣، ح تصنع زوايا 120° مع بعضها البعض. هذا إذا لم تكن إحدى زوايا المثلث ١ ٢ ٣ أكبر من 120° وإلا فإن س تقع فى هذه الحالة عند رأس الزاوية المنفرجة. هذه المسألة البسيطة مبحوثة بحثا وافيا وحلها معروف^٢.

٨١. المخط. إذا أعطينا مجموعة من الأعداد فالنقط هو عضو المجموعة

1 D. A. Scales, Locating the median of the population in the United States, Metron (9), 1 (1933), 49-65.

2 Goursat-Hedrick, Mathematical Analysis (Boston, 1904), 130-131.

الذى يتكرر أكثر من أى عضو آخر . إذا كان كل عدد فى المجموعة مكررا نفس العدد من المرات فإن هذا لا يعرف النمط ويبقى النمط غير معرف فى هذه الحالة^١. فمثلا ليس للأعداد ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ نمط لأن كل واحد منها مكرر مرة واحدة . لكن الأعداد ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ لها نمط يساوى ٢ .

لإيجاد النمط من توزيع تكرارى نعرف النمط بأنه تلك النقطة على محور المتغير التى يصل التكرار عندها إلى قيمته الكبرى . معنى هذا هو أنه إذا رسم المنحنى التكرارى الذى يمثل التوزيع فالنمط هو تلك النقطة على المحور الأفقى التى يرتفع الشكل فوقها إلى أقصى ارتفاعاته^٢. فمثلا إذا كانت معادلة المنحنى التكرارى

$$(29) \quad ص = ا - ب(س - ج)^2 \quad (٠ < ب، ٠ < ج)$$

فالنمط يساوى ج لأن هذه هى قيمة س التى تجعل ص أكبر ما يمكن . هذا التعريف يسرى حتى إذا كان للتوزيع التكرارى أكثر من نمط واحد حقيقى ومنه ينتج أنه إذا كانت $ص = د(س)$ معادلة المنحنى التكرارى حيث $د(س)$ دالة يمكن مفاضلتها مرتين فإن النمط يكون حل

$$(30) \quad د'(س) = ٠، د''(س) > ٠$$

إذا كان $د'(س)$ صفرا ، $د''(س)$ أكبر من الصفر تكون لدينا قيمة صفرى ومثل هذه النقطة لا بأس من تسميتها أنتمطا . لكن إيجاد النمط بهذه السكيفية يفرض أننا نعرف معادلة المنحنى التكرارى . إذن لا بد من السعى وراء وسائل تقريبية لإيجاد النمط فى الحالات التى فيها تكون معادلة المنحنى التكرارى غير معروفة .

إذا كانت الفئات قصيرة فواضح أن النمط لن يكون بعيدا جدا عن مركز الفئة ذات التكرار الأكبر . فى هذه الحالة يمكننا وضع النمط مبدئيا عند مركز

١ بالطبع يمكننا اعتبار أى واحد منها نمطا .

٢ إذا كانت التكرارات كلها متساوية فإن هذا لا يعرف النمط .

هذه الفئة التي سنطلق عليها اسم فئة النمط أو الفئة النمطية . فمثلا التكرار الأكبر في توزيع منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ هو ٦٨ وهذا هو تكرار الفئة ١٠٥ - ذات المركز ١١٠ . إذن يمكننا وضع المنسوب النمطي مبدئيا عند ١١٠ .

ليكن K تكرار الفئة التي تسبق فئة النمط ، K' تكرار الفئة التي تلي فئة النمط ، 1 الحد الأدنى لفئة النمط ، F طولها . وليكن P النمط المطلوب . المعادلة الآتية تعطى قيم P الممكنة .

$$P = 1 + \frac{K}{K + K'} \quad (٣١)$$

إذا كان $K = K'$ فإن المعادلة تعطى $P = 1 + \frac{1}{2} F$ أى مركز فئة النمط وهذا هو التقريب السابق للنمط . لإيجاد معنى المعادلة في الحالة العامة نكتبها

$$(K + K') (1 - P) = K' F \quad (٣٢)$$

$$K (1 - P) = K' (1 + F - P) \quad (٣٣)$$

واضح الآن أن المعادلة (٣١) لإعطاء قيم النمط تفرض أن حاصل ضرب تكرار الفئة التي تسبق فئة النمط في البعد بين النمط وبين الحد الأدنى لفئته يساوى حاصل ضرب تكرار الفئة التي تلي فئة النمط في البعد بين النمط وبين الحد الأقصى لفئته . أو إذا استعرنا لغة الاستاتيكا مؤقتا أن النمط يقع عند مركز ثقل كتلتين صغيرتين K ، K' معلقتين عند حدى فئة النمط بالترتيب . تلك طريقة الأستاذ كنج المشهورة لإيجاد النمط من توزيع تكرارى^١ .

1 W. I. King, Elements of statistical method (New York, Macmillan, 1920), 124.
في تعديل بسيط للطريقة لتعاقب الكتلتان K ، K' عند مركزى الفئتين المجاورتين لفئة النمط فيصير (٣١)

$$P = 1 + \frac{K(3 - K) - (K' + K')}{(K + K') F} .$$

وأحيانا تضاف كتلة ثالثة تساوى تكرار فئة النمط وتعاقب عند مركز الفئة النمطية فيكون

$$P = 1 + \frac{K(3 - K) - (K' + K' + K')}{(K + K' + K') F} .$$

حيث K هو تكرار فئة النمط .

هذه الطريقة البسيطة يمكن تعميمها قليلا بأخذ فئتين قبل فئة النمط وفئتين بعدها هكذا :

$$(٣٤) \quad \text{ط} = ١ + \frac{\text{ك} + \text{ك}'}{\text{ك} + \text{ك} + \text{ك}' + \text{ك}'}$$

حيث ك' ، ك يمثلان تكرارى الفئتين السابقتين لفئة النمط ، ك' ، ك يمثلان تكرارى الفئتين التاليتين لفئة النمط . وواضح أن هذه الفكرة البسيطة يمكن تعميمها بأخذ ثلاث فئات قبل فئة النمط وثلاث فئات بعدها إلخ . لكن هذه القوانين العامة لا تستخدم كثيرا . وعلى أى حال لا يجوز استخدامها مع أى توزيع تكرارى عديد الأنماط .

هناك قانون آخر للنمط يختلف عن هذه القوانين فى الفكرة وضعه كارل بيرسن . فى هذا القانون يستخدم بيرسن تكرار فئة النمط ويقارنه بتكرارى الفئتين السابقة والتالية . والقانون هو

$$(٣٥) \quad \text{ط} = ١ + \frac{\text{ك} - \text{ك}'}{\text{ك} - \text{ك} - \text{ك}' + \text{ك}'}$$

حيث ك هو تكرار فئة النمط وباقى الرموز على ماهى عليه . إذا كان ك' = ك فإن (٣٥) يعطى ط = ١ + ١/٢ ف أى مركز فئة النمط وهذا هو الوضع المبدئى للنمط . لإيجاد معنى المعادلة فى الحالة العامة نكتبها فى الصيغة

$$(٣٦) \quad (\text{ك} - \text{ك}' - \text{ك}'' + \text{ك}'') = (\text{ط} - ١) (\text{ك} - \text{ك}') \quad \text{ف} ,$$

$$(٣٧) \quad (\text{ك} - \text{ك}') (\text{ط} - ١) = (\text{ك} - \text{ك}') (١ + \text{ف} - \text{ط}) .$$

إذن معنى قانون بيرسن هو أن حاصل ضرب الفرق بين تكرار فئة النمط وتكرار الفئة التالية فى البعد بين النمط وبين الحد الأدنى لفئته يساوى حاصل ضرب الفرق بين تكرار فئة النمط وتكرار الفئة السابقة فى البعد بين النمط وبين الحد الأقصى لفئته . أو أن النمط يقع عند مركز ثقل كتلتين صغيرتين ك - ك' ، ك - ك' معلقتين عند الحدين الأدنى والأقصى لفئة النمط بالترتيب .

القانونان (٣١) و (٣٥) مبنيان على فرضين مختلفين ولذا يعطيان قيمتين مختلفتين للنمط إلا إذا كان

$$\frac{ك - ك}{ك} = \frac{ك + ك}{ك} \\ \text{أو} \quad (ك - ك) (ك - ك) = (ك + ك) (ك + ك)$$

إذن ما لم يكن $ك = ك$ أو $ك = ك + ك$ تكون قيمتا النمط الناتجتان من تطبيق (٣١) و (٣٥) مختلفتين. وقد رأينا أنه إذا كان $ك = ك$ فإن النمط يقع عند مركز فته.

مثال . أوجد المنسوب النمطي لأسعار السلع المبينة في الجدول ٤٣ .
لدينا في هذه الحالة $ك = ٦٨$ ، $ك = ٥٣$ ، $ك = ٥٧$ أيضا $١ = ١٠٥$ ،
ف $١٠ =$ بالتعويض في (٣١) نحصل على

$$ط = ١٠ \times \frac{٥٧}{٥٧ + ٥٣} + ١٠٥ = ١١٠,١٨ \text{ وحدة .}$$

أيضا بالتعويض في (٣٥) نحصل على

$$ط = ١٠ \times \frac{٥٣ - ٦٨}{٥٧ - ٥٣ - ١٣٦} + ١٠٥ = ١١٠,٧٧ \text{ وحدة .}$$

إذا عوضنا القيم السابقة مع $ك = ٣٩$ ، $ك = ٤٦$ في (٣٤) نحصل على

$$ط = ١٠ \times \frac{٤٦ + ٥٧}{٤٦ + ٥٧ + ٥٣ + ٣٩} + ١٠٥ = ١١٠,٢٨ \text{ وحدة .}$$

هذه القيمة أقرب إلى القيمة الأولى $١١٠,١٨$ منها إلى القيمة الثانية $١١٠,٧٧$.

٨٢ . إيجاد النمط بطريقة الفئات المتغيرة . يبين الجدول ٥٣ منسوبات الإنتاج الزراعي في مصر ممثلا في أهم الحبوب من ١٩١٤ إلى ١٩٣٢ على أساس ١٩١٣ . ويراد إيجاد الفئة النمطية ثم احتساب النمط داخلها باستخدام قانون .

الجدول ٥٣ . منسوبات الإنتاج الزراعى فى مصر من ١٩١٤ إلى ١٩٣٢

(١٩١٣ = ١٠٠)^١

عدد المنسوبات	المنسوب	عدد المنسوبات	المنسوب
٢٠	— ٩٠	٢	— ٥٥
٢٦	— ٩٥	١	— ٦٠
٢٢	— ١٠٠	٣	— ٦٥
٢٤	— ١٠٥	١٠	— ٧٠
١٩	— ١١٠	٢٦	— ٧٥
٧	— ١١٥	٣٧	— ٨٠
٢	— ١٢٠	٢٩	— ٨٥
٢٢٨			

بفحص العمود الثانى من الجدول نرى على الأقل ثلاثة تكرارات أكبر من كل التكرارات المجاورة لها وهذه الثلاثة تقع عند ٨٠ ، ٩٥ ، ١٠٥ . هذا يجعل الفئة النمطية غير واضحة تماماً إلا إذا كان توزيع المنسوبات فى هذه المسألة ثلاثى النمط . لاستجلاء الموقف نستخدم طريقة اسمها طريقة الفئات المتغيرة الغرض منها تحديد الفئة أو الفئات النمطية فى أية حالة من هذا القبيل .

تتوقف الطريقة على تغيير طول الفئة . هذا الطول يساوى ٥ وحدات فى المسألة الحالية فإذا غيرناه إلى ١٠ وحدات ثم إلى ١٥ وحدة نحصل على التوزيعات التكرارية المبينة فى الجدول ٥٤ . ولكى نستخدم جميع الحدود الممكنة للفئات فى هذه التوزيعات أزحنا الحد الأدنى للفئة ذات الطول ١٠ خمس وحدات إلى أعلى وأزحنا كذلك الحد الأدنى للفئة ذات الطول ١٥ خمس ثم عشر وحدات إلى أعلى .

١ انظر النشرة الفنية رقم ١ مصلحة عموم الإحصاء والتعداد، أرقام قياسية تبين حالات الرخاء والأزمات بالفطر المصرى (١٩٣٤) ، ج ٥ ص ٥ .

الجدول ٥٤ . إيجاد فئة النمط من توزيع تكرارى : طريقة الفئات المتغيرة
(منسوبات الإنتاج الزراعى فى مصر من ١٩١٤ إلى ١٩٣٢ على أساس ١٩١٣)

عدد المنسوبات					المنسوب
٣٩	١٤	٦	٤	٣	٥٥ —
				١	٦٠ —
				٣	٦٥ —
				١٠	٧٠ —
٨٦	٩٢	٧٣	٣٦	٢٦	٧٥ —
				٣٧	٨٠ —
				٢٩	٨٥ —
				٢٠	٩٠ —
٧٢	٦٨	٧٥	٤٦	٢٦	٩٥ —
				٢٢	١٠٠ —
				٢٤	١٠٥ —
				١٩	١١٠ —
٢٨	٥٠	٦٠	٤٦	٩	١١٥ —
				٢	١٢٠ —

من هذا الجدول نحصل على النتائج الآتية : —

الفئة	عدد مرات ظهور الفئة أمام التكرار الأكبر
٨٠ — ٧٥	٢
٨٥ — ٨٠	٤
٩٠ — ٨٥	٤
٩٥ — ٩٠	٢

واضح أن هناك فئتين نمطيتين أى الفئة ٨٠ — ٨٥ والفئة ٨٥ — ٩٠ . إذن
هناك نمطان مختلفان ط_١ ، ط_٢ . بتطبيق (٣١) نجد أن

$$\frac{29}{11} + 80 = 5 \times \frac{29}{29+26} + 80 = ط_1$$

$$، 82,64 = 82 \frac{7}{11} =$$

$$\frac{107}{57} + 85 = 5 \times \frac{107}{107+37} + 85 = ط_2$$

$$. 86,75 = 86 \frac{3}{4} =$$

لكن إذا طبقنا (٣٥) نجد

$$\frac{0.0}{1.1} + 80 = 0 \times \frac{26 - 27}{29 - 26 - 74} + 80 = 1 ط$$

$$، 82.89 = 82 \frac{17}{19} وحدة$$

$$40 - 80 = 0 \times \frac{37 - 29}{20 - 27 - 58} + 80 = 2 ط$$

$$= 45 وحدة$$

وواضح أن النتيجة الأخيرة لا يمكن أن تكون صحيحة . إذن النمط الثاني ط_٢ لا يمكن الاعتماد عليه .

٨٣ . الطريقة البيانية لإيجاد النمط من توزيع تكرارى : لإيجاد النمط من توزيع تكرارى طريقتهان بيانيتان مختلفتان . فإما أن نستخدم المنحنى التكرارى وإما أن نستخدم أحد المنحنيين المتجمعين .

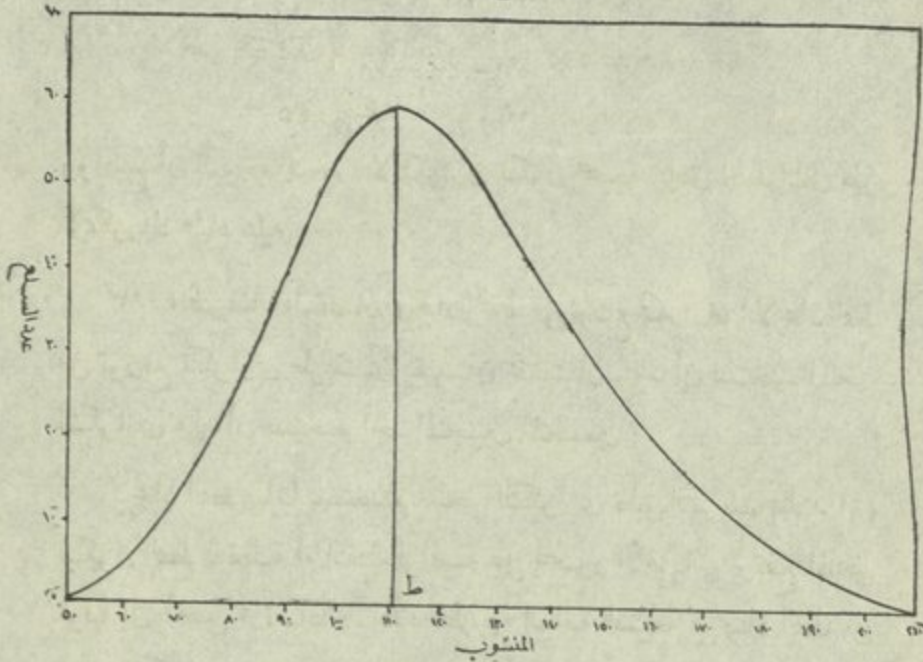
لإيجاد النمط بيانيا باستخدام المنحنى التكرارى نطبق التعريف (البند ٨١) فيكون النمط النقطة أو النقط الواقعة على المحور الأفقى التى يرتفع المنحنى فوقها إلى أقصى ارتفاعاته . هذه الطريقة البيانية البسيطة لإيجاد النمط من توزيع تكرارى قد تسدو عديمة الفائدة لأن المنحنى التكرارى لا يمكن رسمه بالضبط . لكنها فى الحق تعطى فى حالات كثيرة نتائج لا تقل جودة عن النتائج المعطاة بأية طريقة أخرى ١ .

الشكل ٣٦ يعطى المنحنى التكرارى لتوزيع منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ . هذا الشكل يضع المنسوب النمطى للسلع عند نقطة بين ١١٠ ، ١١١ وقرينة جدا من ١١٠ وهذه النتيجة لا تختلف عن النتائج السابقة .

لإيجاد النمط بيانيا باستخدام المنحنى المتجمع نطبق التعريف . من التعريف يسهل إثبات أن النمط هو النقطة أو النقط الواقعة على المحور الأفقى تحت نقط

١ أكثر الحالات الأخرى حالات فيها يكون المنحنى التكرارى مفرطاً أكثر من العادة عند النمط أو غير منتظم . لكن هذه حالات نادرة كثيراً من العرائق الأخرى لإيجاد النمط إذا التيس علينا تحديد الفئة النمطية .

الشكل ٣٦ . إيجاد النمط من توزيع تكرارى : الطريقة البيانية الأولى
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

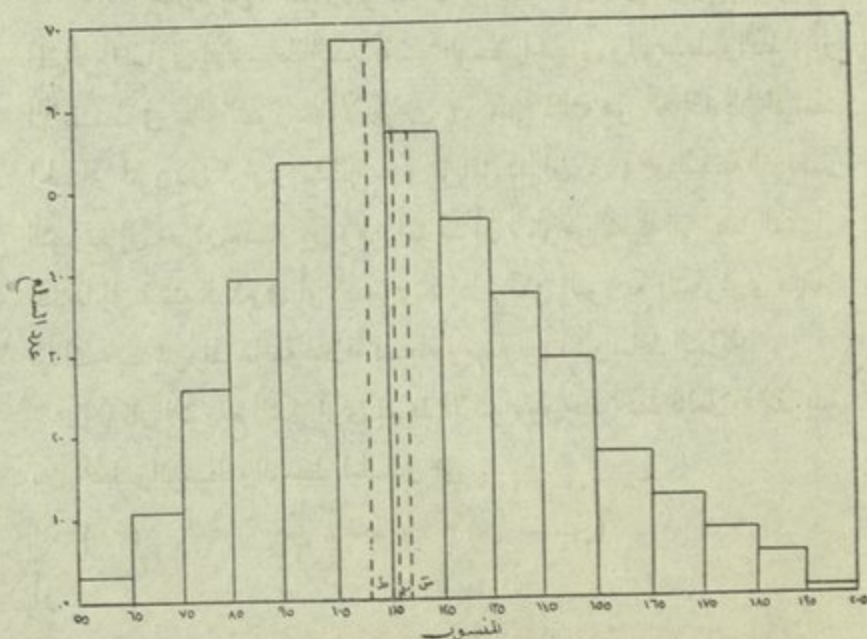


انقلاب المنحنى المتجمع بشرط أن يكون الانقلاب من حالة التفرع إلى أعلى إلى حالة التحدب إلى أعلى . هذه النقطة يمكن الحصول عليها عمليا باستخدام حافة مستقيمة توضع بحيث تمس المنحنى ثم تحرك الحافة ببطء مع حفظها دائما ماسة للمنحنى . إذا بدأنا هذه العملية قريبا من أحد طرفي المنحنى وشرعنا نحرك الحافة بالكيفية المذكورة نجد أن جزء المنحنى القريب من الحافة يقع كله في جانب واحد منها لسكننا نصل بعد قليل إلى نقطة نجد المنحنى عندها يعبر الحافة ويقع على جانبيها وعند هذه النقطة تأخذ الحركة الزاوية للحافة في الانعكاس . هذه النقطة نقطة انقلاب . وبالاستمرار في العملية نحصل على جميع نقاط الانقلاب بهذه السكيفية والأنماط المطلوبة تناظر نقط الانقلاب التي عندها تنعكس الحركة الزاوية للحافة من حركة موجبة إلى حركة سالبة . هذه الطريقة الثانية لإيجاد النمط ليست دقيقة بكل أسف لأن تعيين نقطة

الانقلاب بالضبط صعب وبالأخص إذا كان صعود المنحنى أو هبوطه بالغاً حد السرعة بجوارها . لسكنها طريقة تقريبية لأبسطها ولا بد في هذه المرحلة من الاستعداد لقبول كل طريقة تقريبية لإيجاد النمط من توزيع تكرارى . فالنمط لا يمكن إيجاده بالضبط إلا إذا عرفت معادلة المنحنى التكرارى وإيجاد هذه الآن غير ممكن . هذا هو السبب الذى يجعل كل هذه الطرائق لإيجاد النمط من توزيع تكرارى مهمة مع أنها كلها طرائق تقريبية .

٨٤ . تمثيل الأوساط على الأشكال التكرارية . إذا رسمنا شكلاً يمثل توزيعاً تكرارياً فلتتمثل أى وسط للتوزيع على الشكل نعين النقطة التى تمثل الوسط على المحور الأفقى ثم نرسم عندها خطاً مستقيماً رأسياً . هذا الخط المستقيم يمثل الوسط المذكور على الشكل التكرارى .

الشكل ٣٧ . منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٠ على أساس ١٩٢٠



فى الشكل ٣٧ نرى المدرج التكرارى لتوزيع منسوبات أسعار بعض

السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ ونرى أيضا الوسط الحسابي والوسيط والنمط (١١٠,٢٦) ممثلة بخطوط رأسية . هذه الخطوط الرأسية لا تنطبق إلا إذا كان التوزيع متماثلا . في الشكل المرسوم يقع الوسيط بين الوسط الحسابي والنمط ويقسم المسافة بينهما من الداخل بنسبة تكاد تساوى ١ : ٢ . أيضا الخط الذي يمثل الوسيط يقسم المساحة الواقعة تحت المدرج إلى جزئين متساويين . لكن هذا صحيح لكل توزيع تكرارى بتعريف الوسيط . والخط الذى يمثل النمط يقع دائما داخل المستطيل الأكبر لأن هذا هو المستطيل الذى يمثل فئة النمط . لكن الخط المذكور لا يقسم المستطيل النمطى فى هذه الحالة إلى جزئين متساويين لأنه منحرف قليلا نحو اليمين . هذا راجع إلى أن المستطيل الذى يلي المستطيل النمطى أكبر قليلا من المستطيل الذى يسبق المستطيل النمطى ولذا يجذب النمط نحوه .

٨٥ . المعروف بين النمط والوسيط والوسط الحسابي . فى التوزيع التكرارى المتماثل تتساوى الأوساط الثلاثة — الوسط الحسابي والوسيط والنمط (أو الأنتمط فى حالة التوزيع الأجوف) . معنى ذلك هو أنه إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع تكرارى متماثل ١٠٠ فمن المؤكد أن ١٠٠ هى النقطة التى تقسم التوزيع إلى جزئين متساويين ومن المؤكد أن ١٠٠ هى النقطة التى يصل التكرار عندها إلى قيمته الكبرى أو الصغرى . إذا لم يكن التوزيع التكرارى متماثلا فهناك تحت شروط خاصة علاقة بسيطة ومهمة بين الأوساط الثلاثة .

إذا كان التوزيع التكرارى بسيط الاتواء ووحيد النمط فالعلاقة التقريبية بين النمط والوسيط والوسط الحسابي هى

$$\bar{س} - ط = ٣(\bar{س} - \bar{پ}) \quad (٣٨)$$

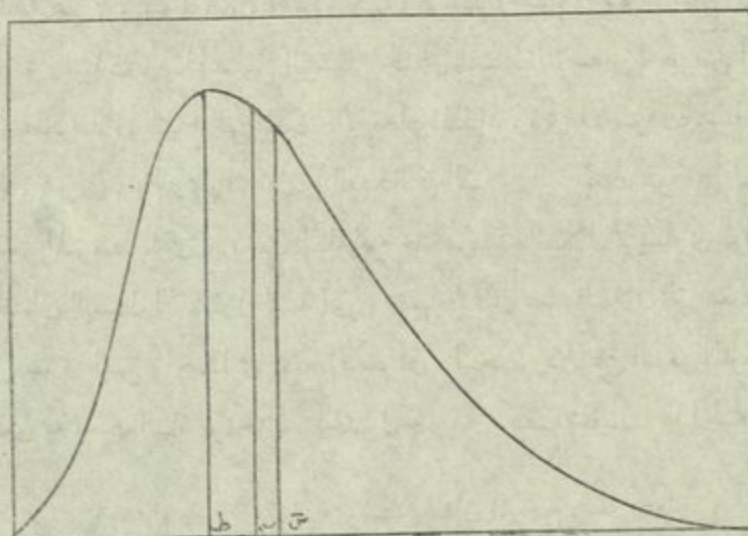
أو

$$ط = ٣\bar{پ} - ٢\bar{س} \quad (٣٩)$$

هذه العلاقة صحيحة ما دام الاتواء بسيطا سواء كان الاتواء نحو اليمين كما فى

الشكل أ ونحو اليسار وقد فسرهما دودسن سنة ١٩١٧ تفسيراً رياضياً^١.
والعلاقة يمكن التعبير عنها هندسياً بأن الوسيط يقسم المسافة بين الوسط الحسابي
والنمط في هذا الترتيب من الداخل بالنسبة ١ : ٣ . وقد رأينا في البند الأخير
أن هذا صحيح في حالة معينة .

الشكل ٣٨ . العلاقة بين النمط والوسيط والوسط الحسابي



في الشكل ٣٨ لدينا منحن تكراري وثلاثة خطوط رأسية تمثل الوسط
الحسابي والوسيط والنمط والشكل في مجموعه يمثل العلاقة بين الأوساط الثلاثة .
إذا علم أي اثنين من الأوساط الثلاثة فإن العلاقة تعطي الوسط الثالث .

فمثلاً بأخذ $\bar{m} = ١١٩,٠٨$ ، $p = ١١٦,١٤$ في (٣٩) نحصل على

$$p = ٢٤٨,٤٢ - ٢٣٨,١٦ = ١١٠,٢٦$$

هذه القيمة لا تختلف كثيراً عن القيم السابق إيجادها في البند ٨١ باستخدام
القوانين . لكن إيجاد النمط باستخدام العلاقة يحتاج إلى معرفة الوسط الحسابي

¹ A.T. Doodson, Relation of mode, median and mean in frequency curves, Biometrika, 11(1917), 425.

والوسيط وهذا يجعل العلاقة قليلة الاستخدام كطريقة لإيجاد النقط من توزيع تكرارى . ومع ذلك فالعلاقة بين الأوساط الثلاثة مهمة لأنه يمكن استخدامها لتحقيق قيم هذه الأوساط عند إيجادها بطرائق أخرى كما يمكن استخدامها للتأكد مما إذا كان التوزيع التكرارى بسيط الالتواء أم لا .

٨٦ . الأوساط المرجحة . هب أن سعر سلة التفاح بالجنيه في خمسة أسواق مختلفة هو ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ بالترتيب . الوسط الحسابي لهذه الأسعار كما هو جنيهاً . هذا يسمى الوسط الحسابي البسيط للأسعار . نفرض الآن أن عدد سلال التفاح التي بيعت بالأسعار المذكورة في الأسواق الخمسة كان ٢٢، ١٩، ١٤، ٣، ٤ بالترتيب . العدد الكلى للسلال التي بيعت هو ٦٢ . لكن السعر المتوسط الذى به بيعت السلة الواحدة من هذه السلال لا يساوى الوسط الحسابي البسيط للأسعار الخمسة أى ٤ جنيهاً لأن عدد السلال التي بيعت في كل سوق ليس واحداً في جميع الأسواق . لنبحث إذن عن السعر المتوسط الذى به بيعت السلة الواحدة . الجدول ٥٥ بين كيف يحتسب هذا السعر .

الجدول ٥٥ . احتساب الوسط الحسابي المرجح لخمس أسعار

السعر	عدد السلال	السعر في عدد السلال
٢	٢٢	٤٤
٣	١٩	٥٧
٤	١٤	٥٦
٥	٣	١٥
٦	٤	٢٤
	٦٢	١٩٦

السعر المتوسط = $\frac{196}{62} = 3,161$ جنيهاً .

هذا يسمى الوسط الحسابي المرجح للأسعار . أما الأعداد ٢٢، ١٩،

١٤، ٣، ٤ التي تضرب في الأسعار فتسمى الأوزان ويقال للسعر ٢ إنه مرجح بالوزن ٢٢ وللسعر ٣ إنه مرجح بالوزن ١٣ إلخ. هذا الوسط الحسابي المرجح للأسعار يختلف كل الاختلاف عن وسطها الحسابي البسيط والوسط المرجح أصغر في هذه الحالة من الوسط البسيط.

القانون (٣) يعطى الوسط الحسابي المرجح للأعداد $s_1, s_2, s_3, \dots$ عندما تكون الأوزان $k_1, k_2, k_3, \dots$ بالترتيب. والطريقة المعطاة لاحتساب الوسط الحسابي المرجح هي نفس الطريقة المطولة لاحتساب الوسط الحسابي من توزيع تكرارى. والوسط الحسابي المرجح يمكن أيضا أن يحتسب باستخدام الطريقة المختصرة.

الجدول ٥٦ يبين كيفية احتساب الوسط الهندسي المرجح لنفس الأسعار الخمسة.

الجدول ٥٦. احتساب الوسط الهندسي المرجح لخمس أسعار

السعر	عدد السلال	لغاتم السعر	عدد السلال في اللغاتم
٢	٢٢	٠,٣٠١٠٣	٦,٦٢٢٦٦
٣	١٩	٠,٤٧٧١٢	٩,٠٦٥٢٨
٤	١٤	٠,٦٠٢٠٦	٨,٤٢٨٨٤
٥	٣	٠,٦٩٨٩٧	٢,٠٩٦٩١
٦	٤	٠,٧٧٨١٥	٣,١١٢٦٠
	٦٢		٢٩,٣٢٦٢٩

$$٠,٢٩٧٢ = ٠,٤٧٣٠٠ = \frac{٢٩,٣٢٦٢٩}{٦٢}$$

إذن الوسط الهندسي المرجح للأسعار الخمسة هو ٢,٩٧٢ جنيها وهذا أصغر من وسطها الهندسي البسيط الذي يساوى ٣,٧٢٨ جنيها.

القانون (١١) يعطى الوسط الهندسي المرجح للأعداد $s_1, s_2, s_3, \dots$ عندما تكون الأوزان $k_1, k_2, k_3, \dots$ بالترتيب.

الجدول ٥٧ يبين كيفية احتساب الوسط التوافقي المرجح للأسعار .

الجدول ٥٧ . احتساب الوسط التوافقي المرجح لخمس أسعار

عدد السلال في المقلوب	مقلوب السعر	عدد السلال	السعر
١١,٠٠٠٠٠	$\frac{1}{11}$	٢٢	٢
٦,٣٣٣٣٣	$\frac{1}{6}$	١٩	٣
٣,٥٠٠٠٠	$\frac{1}{3}$	١٤	٤
٠,٦٠٠٠٠	$\frac{1}{6}$	٣	٥
٠,٦٦٦٦٧	$\frac{1}{6}$	٤	٦
٢٢,١٠٠٠٠		٦٢	

الوسط التوافقي المرجح $= \frac{62}{22,1} = 2,805$ جنيهها .

أيضا الوسط التوافقي البسيط للأسعار هو ٣,٤٤٨ جنيهها وهذا أكبر من وسطها التوافقي المرجح .

القانون (٢٠) يعطى الوسط التوافقي المرجح للأعداد $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ عندما تكون الأوزان $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$.

مما قدما يتضح أن فكرة الوسط المرجح ليست جديدة وأن أى وسط محسوب من توزيع تكرارى يمكن اعتباره وسطا مرجحا للأعداد المكونة من مراكز فئات التوزيع والأوزان هي التكرارات المناظرة . فمثلا القانون (٢٣) يعطى الوسط التريبيعى المرجح للأعداد $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$ عندما تكون الأوزان $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$. وطريقة احتساب هذا الوسط هي بعينها طريقة احتساب الوسط التريبيعى من توزيع تكرارى .

كل هذه الأوساط المرجحة تتساوى مع الأوساط البسيطة المناظرة إذا تساوت الأوزان . لكن الشرط ليس ضروريا .

٨٧ . بعض التطبيقات المهمة للأوساط المرجحة . للوسط المرجح كما عرفناه

في البند الأخير تطبيقات كثيرة يظهر فيها كأداة إحصائية مفيدة . ومن أشهر

هذه التطبيقات استخدامه في احتساب معدلات الزواج والطلاق والمواليد والوفاة ومقارنة هذه المعدلات في أوقات وأما كن مختلفة . في هذا البند نوضح الطريقة العامة بالكلام عن معدل الوفاة .

يحسب معدل الوفاة لمجموعة معينة من الناس (مدينة أو مركز أو أمة إلخ) في الألف من السكان . فمثلا إذا بلغت الوفيات في سنة ما ١٩٠٠ وكان عدد السكان في منتصف السنة ١٠٠٠٠٠ يكون معدل الوفاة ١٩ . لكن أعمار المتوفين ليست كلها متساوية بالطبع إذ يقع عدد معين منهم وليكن ٣٠٠ دون الخامسة في حالة الأطفال ويقع ٤٠ في الفئة ٥ ودون ١٥ إلخ . كذلك قد يقع من العدد الكلي للسكان ١٠٠٠٠ دون الخامسة ثم ٢٠٠٠٠ في الفئة ٥ ودون ١٥ إلخ . في هذه الحالة نجد أن معدلات الوفاة في الفئات المختلفة هي ٣٠ للفئة دون ٥ ، ٢٠ للفئة ٥ ودون ١٥ إلخ .

هب إذن أننا نعرف معدل الوفاة في كل فئة من فئات العمر في مدينة ما ونريد استخدام هذه المعدلات لإيجاد معدل وفاة عام يمثل المدينة كلها . واضح أن المعدل المطلوب لا يمكن إيجاده بأخذ أى وسط بسيط لمعدلات الوفاة في الفئات المختلفة لأن عدد السكان ليس واحدا في كل فئة . لإيجاد المعدل المطلوب نأخذ وسطا مرجحا للمعدلات المعطاة فنرجح كل واحد منها بوزن يساوى أو يتناسب مع عدد سكان الفئة المناظرة . هذه هي الطريقة الوحيدة في هذه الحالة لاستخلاص المعدل العام المطلوب من المعدلات المعطاة . أما الوسط المستخدم فيجوز أن يكون حساسيا أو هندسيا أو أى نوع آخر . ويحسن في هذه الحالة أن يكون الوسط الهندسى المرجح لأننا رأينا أن الوسط الهندسى أليق بالأوساط جميعها لتمثيل النسب الموجبة .

إذا قارنا الآن معدلات الوفاة في المدينة المذكورة بمعدلات الوفاة في فئات العمر المناظرة في مدينة أخرى فقد نجد أن هذه المعدلات تكاد تتساوى في المدينتين على حين أن معدل الوفاة العام في إحدهما أعلى منه في الأخرى .

أو بالعكس قد نجد أن معدل الوفاة العامين متساويان على حين أن معدلات الوفاة في فئات العمر المختلفة مختلفة اختلافاً بينا . هذا التناقض الواضح يحدث لأن توزيع السكان على فئات العمر المختلفة في إحدى المدينتين قد يختلف كل الاختلاف عنه في الأخرى بمعنى أن نسبة الأطفال أو الشيوخ من العدد الكلي للسكان قد تكون في إحدى المدينتين أصغر (أو أكبر) منها في المدينة الثانية . هذا الاختلاف في التوزيع يجعل معدل الوفاة العام يبدو أكبر من حقيقته لأن معدلات الوفاة في فئات العمر البالغة حد الصغر أو السكبر تضرب في أوزان أثقل في إحدى الحالتين منها في الأخرى .

لهذا السبب جرت العادة في الدوائر الحكومية على إدخال تعديلات فيما تنشره من تقارير وإحصائيات الغرض منها تصحيح معدلات الوفاة الأولية السابق ذكرها . ويحصل على معدلات الوفاة المصححة بضرب معدل الوفاة في كل فئة للعمر في وزن لا يساوي عدد الناس في تلك الفئة في المدينة وإنما يساوي عددهم في تلك الفئة للعمر في الدولة مأخوذة في مجموعها وذلك لأن نسبة العدد الأول إلى التعداد الكلي للمدينة قد تختلف لأسباب عدة عن النسبة المناظرة في مدينة أخرى . باستخدام معدلات الوفاة المصححة على هذا النحو يظهر معدل الوفاة العام في مدينتين متحدين في معدلات الوفاة في فئات العمر المختلفة واحداً في الحالتين وهكذا يمكن إجراء مقارنة صحيحة بين مدينة وبين مدينة ثانية .

هذا المثال البسيط يشير إلى ناحية مهمة من نواحي الترجيح وبيان فائدة الأوساط المرجحة في تمثيل النسب . وسوف نرى فيما بعد الدور الرئيسي الذي تلعبه تلك الأوساط في نظرية الأرقام القياسية وسوف نرى أيضاً كيف يكون الترجيح في حالات خاصة مهمة . أما هنا فيمكن أن نلاحظ فائدة الأوساط المرجحة في تمثيل النسب بوجه عام إذا كانت المقامات الأصلية للنسب أعداداً غير متساوية .

٨٨ . الشروط الواجب توافرها في الوسط الجيد . في هذا البند ندرس الشروط التي يجب أن تتوافر في الوسط الإحصائي الجيد ونفقد مزايها وعيوب كل واحد من الأوساط الستة السابقة في ضوء هذه الشروط .

هناك شروط معينة إن توافرت كلها في وسط واحد كان هذا الوسط جيدا . لكن هذه الشروط تختلف في الأهمية باختلاف الظروف حتى إن بعضها قد يصير عديم الأهمية في حالات خاصة . يشترط في الوسط الجيد بوجه عام^١

١ . أن يكون معرفا تعريفا متينا يمكننا من احتساب قيمته في أية حالة معينة دون أن يتطرق إلى الذهن أدنى شك فيما تساويه تلك القيمة .

٢ . أن يكون بسيطا وخاليا من التعقيد بحيث يفهم المقصود به بمجرد الاطلاع على تعريفه .

٣ . أن يكون سهل الاحتساب ولا يحتاج احتسابه إلى وقت طويل .^٢

٤ . أن يكون في متناول العمليات الجبرية . فلا يكفي أن يكون معرفا تعريفا متينا يمكننا من احتساب قيمته لأن احتساب قيمة الوسط إن هو إلا خطوة واحدة من سلسلة الخطوات الضرورية لتلخيص البيانات وقد تدعو الظروف إلى استخدام الوسط في خطوة أخرى فيستحيل ذلك ما لم تكن للوسط صيغة جبرية معروفة .

٥ . أن يكون مستقرا . فلا يكون شديد الحساسية لأخطاء صغيرة في البيانات أو لأي تغيير بسيط في البيانات أو في طريقة احتسابه .

باستخدام هذه الشروط العامة نستطيع الحكم على الأوساط الستة السابقة .

1 G. U. Yule, Introduction to the theory of statistics, 107—108; also A.L. Bowley, Elements of statistics, 108—109.

٢ عند تقدير الوقت اللازم لاحتساب الأوساط نميز استخدام الوسائل الحاسبة المعروفة كجداول القارنات والمربعات والمقلوبات والجذور التربيعية إلخ والماطر والآلات الحاسبة لأن هذه الوسائل تستحضر عادة للأعمال الإحصائية المنظمة .

فإلى أى حد تتوافر هذه الشروط فى كل واحد من تلك الأوساط ؟
 فيما يختص بمتانة التعريف يمكننا أن نقول إن الأوساط القانونية الأربعة
 تمتاز بشكل واضح على الوسيط والنمط . فالنمط لا يحقق شرط متانة التعريف
 إلا إذا عرف عن طريق معادلة المنحنى التكرارى وهذا التعريف كما قدمنا
 غير مناسب فى أية دراسة أولية للنمط . هذا الرأى فى الوسيط والنمط يكون
 صحيحا بنوع خاص إذا كان المتغير منفصلا .

وفما يختص بالبساطة والخلو من التعقيد يمكننا أن نقول إن أحسن
 الأوساط تحقيقا لهذا الشرط هى الوسط الحسابى والوسيط والنمط . فالوسط
 الحسابى يكاد يكون معروفا ومفهوما للجميع . والوسيط يمكن تفهيمه لمن
 لا يفهمه بلغة سهلة بسيطة . وأما النمط فهو الوسط المقصود عادة عندما يفكر
 الإنسان فى القيمة الشائعة التى تظهر أكثر من أية قيمة أخرى . هذه الأوساط
 الثلاثة تمتاز على الأوساط الثلاثة الباقية بالبساطة والخلو من التعقيد .

وفما يختص بسهولة الاحتساب نرى أن أسهل الأوساط الستة احتسابا
 اثنان وهذان الاثنان هما الوسط الحسابى والوسيط . ويليهما فى ذلك النمط
 إذا كانت الفئة النمطية تامة الواضوح . أما الأوساط الثلاثة الباقية فاحتسابها
 سهل ولكنه يحتاج إلى وقت أطول حتى مع استخدام الوسائل الحاسبة .

وفما يختص بالشرط الرابع واضح أن الأوساط القانونية تقع فى متناول
 العمليات الجبرية لأن لكل واحد منها صيغة جبرية معروفة . أما الوسطان
 الوضعيان فلا يحققان هذا الشرط أى لا يمكن أبدا إدخال أيهما فى عملية
 جبرية تستدعى استخدامه فيها .

وأخيرا فيما يختص بشرط الاستقرار يمكننا أن نقول إن الوسط الحسابى
 هو أكثر الأوساط الستة استقرارا ويليه فى ذلك الوسيط . لكن الوسط
 الحسابى هو أول الأوساط الستة هذه المرة فقد أمكن باستخدام نظرية الأخطاء
 إثبات أن هذا الوسط لا يتأثر كثيرا بأى أخطاء صغيرة فى البيانات ولا بأى

تعديل بسيط يدخل على البيانات الأصلية ولا بأى تغيير معقول فى الفروض المستخدمة لاحتسابه . هذه الصفات تنطبق بنوع خاص على الوسط الحسابى لتوزيع تكررارى متماثل ووحيد النمط .

نخرج من هذا البحث بنتيجة واحدة واضحة وهى أن الوسط الحسابى هو الوحيد بين الأوساط الستة الذى فيه تتوافر كل الشروط الخمسة المذكورة . إذن يمكننا أن نقول مع يول إن الوسط الحسابى هو الوسط الوحيد الذى يمكن استخدامه فى دراسة البيانات الإحصائية إلا إذا وجدت أسباب تبرر أو تحتم استخدام وسط آخر خلافاً^١ .

الشروط الخمسة المذكورة هى أبسط شروط من نوعها . ولانفسى ضرورة ملائمة الوسط للغرض المطلوب منه إذ لا فائدة من استخدام وسط غير ملائم لظروف المسألة . إذن يجب علينا فى كل مسألة أن نضع نصب أعيننا الغاية التى نريدها من استخدام الوسط ثم نختبر الأوساط الستة الواحدلو الآخر ونختير منها ما نراه ملائماً .

١٠٨٩ - استخراج الأوساط لتلخيص البيانات . باستخدام أى وسط لتلخيص البيانات نقصد استخدامه ليحل محل الحدود المختلفة للبيانات فى عملية رياضية الغرض منها الحصول على نتيجة إحصائية معينة . فبدلاً من استخدام كل حد فى البيانات للحصول على النتيجة المطلوبة نستبدل هذه الحدود بعدد واحد هو الوسط ونستخدم الوسط للحصول على نفس النتيجة . هذا هو ما نقصده باستخدام الوسط لتلخيص البيانات . وواضح أن استخدام الوسط على هذا النحو يحدث تبسيطاً كبيراً فى العمل .

هناك أربع حالات مهمة لاستخدام الأوساط لتلخيص البيانات وسنتكلم الآن عن هذه الحالات الأربع تباعاً .

أولاً يستخدم الوسط لتلخيص البيانات عندما يراد الحصول على مجموع

1 G. U. Yule, Introduction to the theory of statistics, 123.

الحدود التي تتركب البيانات منها . وواضح أن الوسط الذي يستخدم في هذه الحالة هو الوسط الحسابي لأن مجموع أى عدد من الأعداد يساوى عدد هذه الأعداد مضروباً في وسطها الحسابي . لناخذ بعض الأمثلة البسيطة . هب أن القسم الفني في مصلحة السكك الحديدية مكلف بدراسة حركة القطارات في ساعة معينة وأن السرعة المنتظمة لكل قطار أثناء هذه الساعة معروفة . ويراد معرفة السرعة المنتظمة التي لو سار بها كل قطار تكون المسافة الكلية المقطوعة مساوية لمجموع المسافات المقطوعة فعلاً بالسرع المختلفة . واضح أن السرعة المطلوبة هي الوسط الحسابي للسرع المختلفة لقطارات المصلحة . هذا الوسط يحل هنا محل السرع المختلفة في العملية الحسابية اللازمة للحصول على عدد عام يمثل مجموع المسافات المقطوعة فعلاً بالسرع المختلفة . أيضاً في أى مشروع خيرى لجمع الاكتتابات قد يهم أصحاب المشروع معرفة الاكتتاب الواحد الذي لو ساهم به كل مكتب يكون المبلغ الكلى المجموع بهذه السكيفية مساوياً لمجموع المبالغ المجموعة فعلاً . واضح أن الاكتتاب المطلوب هو الاكتتاب الذي لو ضرب في عدد المكتتبين يكون الناتج مساوياً لمجموع الاكتتابات المختلفة أى الوسط الحسابي لهذه الاكتتابات . ولهذا الحالة أمثلة أخرى كثيرة كلها معروفة ومفهومة .

ثانياً يستخدم الوسط لتلخيص البيانات عند ما يراد الحصول على حاصل ضرب الحدود التي تتركب البيانات منها . إذا كانت كل الحدود موجبة فواضح أن الوسط المطلوب في هذه الحالة هو الوسط الهندسى لأن حاصل ضرب أى عدد من الأعداد الموجبة يساوى وسطها الهندسى مرفوعاً لاس يساوى عددها . فمثلاً قد تودع إحدى شركات التأمين على الحياة مالها الاحتياطي في مصرف ثلاثين سنة لتشميره بالفائدة المركبة فلا يبقى معدل الفائدة ثابتاً طول هذه المدة بل يتغير . والشركة تريد معرفة المعدل الواحد الذي لو ثمرت به مالها طول المدة تكون الجلة الناتجة في آخر المدة مساوية للجلة الناتجة فعلاً

من تسمير هذا المال بالمعدلات المختلفة . أى أنها تريد معرفة المعدل الواحد الذى لو ثمرت به جنيها واحدا ثلاثين سنة تكون الجملة الناتجة فى آخر المدة مساوية للجملة الناتجة من تطبيق المعدلات الفعلية المختلفة . هذه المسألة تشبه أولى مسألتى البند ٧٢ وواضح أن المعدل المطلوب هو المعدل الذى يجعل جملة الجنيه فى آخر المدة تساوى الوسط الهندسى لجملة بالمعدلات المختلفة .

ثالثا يستخدم الوسط لتلخيص البيانات عندما يراد الحصول على مجموع مقlobات الحدود التى تتركب البيانات منها . إذا لم يكن أحد الحدود صفرا فواضح أن الوسط الذى يستخدم فى هذه الحالة هو الوسط التوافقى لأن مجموع مقlobات أى عدد من الأعداد التى لا يساوى أحدها الصفر هو عدد هذه الأعداد مضروبا فى مقlob وسطها التوافقى . فمثلا هب أن القسم الفنى فى مصلحة السكك الحديدية يعرف الزمن الذى يستغرقه كل واحد من القطارات العاملة فى أحد الخطوط لقطع هذا الخط ذهابا وجيئة ^١ . ويراد معرفة الزمن الذى لو استغرقه كل قطار لقطع الخط يكون عدد مرات قطع الخط فى مدة معينة واحدا فى الحالتين . واضح أن عدد مرات قطع أى قطار للخط فى المدة المعينة يساوى خارج قسمة هذه المدة على الزمن الذى يستغرقه القطار فى قطع الخط مرة واحدة . وينتج أن الزمن المطلوب هو الوسط التوافقى للأزمنة المختلفة التى يستغرقها كل قطار على حدة . لتأخذ حالة عددية حتى نفهم المسألة بالضبط . نفرض أن عدد القطارات التى تعمل فى الخط المذكور ثلاثة — ١ ، ٢ ، ٣ . ١ قطار سريع يقطع الخط فى ٦ ساعات ، ٢ فى ٧ ساعات . أما ٣ فقطار بطىء يقطع الخط فى ٨ ساعات . ماهو الزمن الذى لو استغرقه كل قطار لقطع الخط يكون عدد مرات قطع الخط فى أسبوع واحد فى الحالتين ؟ ليس الجواب بالطبع الوسط الحسابى للأزمنة المعطاة أى ٧ ساعات . إذ لو كان هذا هو الجواب لكان عدد مرات قطع أى قطار من الثلاثة للخط

١ فيها يلى تعدد دائما بقطع الخط قطعه ذهابا وجيئة .

في الأسبوع ٢٤ وعدد مرات قطع القطارات الثلاثة فيما بينها للخط في الأسبوع ثلاثة أمثال ذلك أو ٧٢ مرة . لكنه واضح أن عدد مرات قطع الخط في الأسبوع هو ٢٨ وعدد مرات ب هو ٢٤ وعدد مرات ح هو ٢١ وبمجموع هذه الأعداد الثلاثة لا يساوي ٧٢ بل ٧٣ . لكي نحصل على الجواب الصحيح للمسألة لابد أن نجعل كل قطار يقطع الخط $\frac{72}{3}$ أو $\frac{1}{3}$ مرة في الأسبوع حتى يكون العدد الكلي لمرات قطع الخط في الأسبوع كما كان أي ٧٣ . إذن الزمن المطلوب هو $6\frac{2}{3}$ ساعة أي الوسط التوافقي للأزمنة المعطاة ٨،٧،٦ .

رابعا يستخدم الوسط لتلخيص البيانات عندما يراد الحصول على مجموع مربعات الحدود التي تتركب البيانات منها . وواضح أن الوسط الذي يستخدم في هذه الحالة هو الوسط التريبي لأن مجموع مربعات أي عدد من الأعداد يساوي عدد هذه الأعداد مضروبا في مربع وسطها التريبي . لكن هذه الحالة لا تحتاج الآن إلى أي تعليق .

٩٠-١- **تخدام الأوساط لتمثيل البيانات** . باستخدام أي وسط لتمثيل البيانات نقصد استخدامه لوصف القيم المختلفة لحدود البيانات أو استخدامه للتعبير عن القيمة النموذجية للبيانات . هذا هو الغرض الثاني من استخدام الأوساط في الإحصاء وهذا الغرض يهمنا في دراستنا الحالية أكثر من الغرض الآخر الذي تكلمنا عنه في البند الأخير .

لنبدأ دراستنا للحالات التي فيها تستخدم الأوساط لتمثيل البيانات بمثالين بسيطين . هب أن عالما يقيس في معمله درجة حرارة جسم ساخن عدة مرات تحت ظروف ثابتة فيحصل على نتائج مختلفة . هذه النتائج المختلفة لها وسط وهذا الوسط يمثل النتائج المختلفة أي يمثل درجة حرارة الجسم . أيضا متوسط أطوال قامات جنود إحدى فرق الجيش يعبر عن القيمة النموذجية لأطوال قامات الجنود .

أبلغ الأوساط الستة تعبيرا عن القيمة النموذجية للبيانات هو النقط لأن

النمط هو في الحق القيمة النموذجية للبيانات لأنه أكثر القيم ظهورا . إذن النمط هو الوسط الوحيد الذي يجب استخدامه للتعبير عن القيمة النموذجية للبيانات . لكن النمط كما قدمنا لا يتوافر فيه كل الشروط المطلوبة من الوسط الجيد . إذن لابد من تنفيذ الحالات التي فيها تستخدم الأوساط لتمثيل البيانات حتى نرى أي الأوساط غير النمط يمكن استخدامها لهذا الغرض .

إذا كان التوزيع التكراري للبيانات بسيط الاتواء فإن النمط والوسيط والوسط الحسابي تكاد تكون كلها متساوية . إذن في هذه الحالة يمكننا استخدام أي واحد من هذه الثلاثة للتعبير عن القيمة النموذجية للبيانات . لكننا رأينا أن للوسط الحسابي مزايا تجعله أفضل من النمط ومن الوسيط أيضا . إذن في الحالات التي فيها يكون التوزيع التكراري بسيط الاتواء يمكننا استخدام الوسط الحسابي لقياس القيمة النموذجية .

إذا لم يكن التوزيع التكراري للبيانات متماثلا أو بسيط الاتواء تكون الأوساط الثلاثة المذكورة كلها مختلفة . لكن الوسيط يبقى أقرب إلى النمط من الوسط الحسابي كما في الشكلين ٣٧ ، ٣٨ . أيضا كلما زاد التوزيع التواء زاد الوسط الحسابي بعدا عن النمط حتى إذا صار التوزيع متطرفا في التواءه نجد أن الوسط الحسابي أصبح بعيدا كل البعد عن النمط . وواضح أن الوسط الحسابي لا يعبر في هذه الحالة عن القيمة النموذجية للبيانات . فإن تحتم استخدام وسط آخر غير النمط للتعبير عن هذه القيمة فالوسيط خير بكثير من الوسط الحسابي للقياس بهذا الدور وقد يكون الوسيط ما زال قريبا من النمط فيكون قيمة نموذجية جيدة . لكن التوزيعات التكرارية غير المتماثلة أيا كان نوعها تستلزم على العموم اختبار الأوساط واحدا واحدا لاختيار أصلحها للتعبير عن القيمة النموذجية للبيانات . فإن وقع الاختيار على النمط وأوساط أخرى نأخذ النمط لأن النمط هو القيمة النموذجية .

هناك حالات يقع الاختيار فيها على الوسط الهندسي للتعبير عن القيمة

النموزجية للبيانات في التوزيعات التكرارية غير المتماثلة . تلك هي الحالات التي فيها تكون تكرارات القيم الصغيرة صغيرة وتكرارات القيم الكبيرة كبيرة والقيم صغيرها وكبيرها كلها موجبة . واضح أن استخدام الوسط الهندسي في هذه الحالات لقياس القيمة النموزجية يكون أفضل من استخدام الوسط الحسابي لأن الوسط الهندسي أصغر من الوسط الحسابي فإن كانت القيم نسبا وليست أعدادا مطلقة يكون استخدام الوسط الهندسي لهذا الغرض أفضل بكثير من استخدام الوسط الحسابي . هذا هو الحال مثلا مع التوزيع التكراري لمنسوبات أسعار مجموعة السلع المدروسة في هذا الفصل لأن المتغير في هذا التوزيع هو منسوب السعر وليس السعر نفسه . والوسط الهندسي يعطى في هذه الحالة الخاصة القيمة النموزجية للمنسوب أحسن من أى وسط آخر .

هناك أيضا حالات لا يمكن فيها استخدام أى واحد من الأوساط القانونية لقياس القيمة النموزجية . تلك هي الحالات التي فيها تكون لبعض حدود البيانات قيم متطرفة أى قيم صغيرة جدا أو كبيرة جدا إذا قورنت بباقي القيم . هذه الحالات تشبه الحالات الشديدة الالتواء ولا بد فيها من اختيار أحد الوسطين الوضعيين لأن الأوساط القانونية الأربعة تعطى أهمية خاصة للقيم المتطرفة وتقع إلى حد كبير تحت سيطرة هذه القيم وقد يبلغ تأثيرها بهذه القيم حدا يصير معه غير صالحة لتمثيل البيانات تمثيلا مقبولا . فمثلا وجود رجل له دخل سنوى يقدر بمليون جنيه ووسط رجال لا يقدر الدخل السنوى لأغنى واحد فيهم بأكثر من عشرة جنيهات يؤثر في قيمة أى وسط قانونى لدخل الجماعة ويجعله غير صالح للتعبير عن الدخل النموزجى للجماعة . أما الوسيط والنظ فلا يتأثران على هذا النحو بالقيم المتطرفة لأنهما وسطان وضعيان ولذا يجب استخدامهما للتعبير عن القيمة النموزجية في هذه الحالات . هذا بالطبع إذا لم يكن الغرض من استخدام الوسط إحلال القيم المتطرفة محل الاعتبار وإلا كانت الأوساط القانونية الأوساط الوحيدة التي يمكن استخدامها . وفي

هذه الحالة يلحظ أن الوسط الهندسي بخلاف الوسطين الحسابي والتريعي يصغر أثر القيم المتطرفة الكبيرة ويكبر أثر القيم المتطرفة الصغيرة . أى أن الوسط الهندسي يعطى أهمية خاصة للقيم الصغيرة جدا على حين أن الوسطين الحسابي والتريعي يعطيان أهمية خاصة للقيم الكبيرة جدا .

هناك حالات أخرى غير هذه يكون استخدام الوسط الوضعى فيها أفضل من استخدام الوسط القانونى . نقصد بذلك الحالات التى فيها تكون معلوماتنا عن قيم بعض حدود البيانات ناقصة . مثال ذلك إذا احتوى التوزيع التكرارى للبيانات على فئات مفتوحة تكون معلوماتنا عن أحد طرفى التوزيع أو عن كليهما ناقصة . واضح فى هذه الحالة أننا لا نعرف قيم الحدود المتطرفة وهذا يعجزنا عن احتساب الأوساط القانونية إلا إذا فرضنا قيما تقريبية للحدود المتطرفة . ومثال ذلك أيضا إذا كانت القيم المعطاة مكونة من أرقام سلسلة تمثل تراتيب الحدود حسب قيمها ولا تمثل هذه القيم نفسها . كل هذه الظروف لا تؤثر فى الوسيط لأن الوسيط لا يتوقف إلا على عدد الحدود وقيم الحدود الوسطى ولا شأن له بقيم الحدود المتطرفة ^١ . ومثل الوسيط فى ذلك مثل النمط . هذه الحالات المختلفة التى فصلناها تمثل أهم الحالات التى فيها يمكن أن يقال عن استخدام أى واحد من الأوساط الستة المعروفة إنه أفضل من استخدام وسط آخر . وهناك بالطبع حالات أخرى غير هذه لا يمكن حصرها تحتها . فى هذه الحالات الأخرى نستخدم الوسط الحسابى باعتبار أنه الوسط الوحيد الذى جمع بين مزايا الوسط النظرى ومنافع الوسط التطبيقي .

لاشك أن البحث فى كيفية اختيار الوسط الملائم فى كل حالة هو أمر على جانب عظيم من الأهمية . فالأوساط كثيرة الاستخدام فى الإحصاء لأنها وسيلة من أنجع الوسائل المعروفة لتلخيص البيانات الإحصائية وتمثيلها ومن

١ هذه العبارة ليست صحيحة بلا تحفظ . فمثلا إذا كان التوزيع مفتوحا يشترط لإمكان احتساب الوسيط ألا تحتوى الفئة المفتوحة على أكثر من نصف التكرار الكلى .

السهل استخدام الأوساط في غير موضعها . فقد يستخدم الوسط للتعبير عن القيمة النموذجية للبيانات بينما هو في الحق لا يمثل البيانات ولكن يلخصها . هذه الغلطة من السهل كشفها بالرجوع إلى البيانات الأصلية أو إلى التوزيع التكرارى الذى منه احتسب الوسط للتأكد من صدق تمثيل الوسط للبيانات . ولا ننسى أن الوسط ليس كل شئ . وأنه وسيلة وليس غاية حتى إذا كان يمثل القيمة النموذجية للبيانات تمثيلا صادقا . فالوسط لا يعطى صورة كاملة للقيم المختلفة لحدود البيانات ولا بد من الرجوع إلى البيانات الأصلية لمعرفة هذه . زد على ذلك أن الوسط أيا كان لا يصف البيانات وصفا كاملا وهناك في الواقع حقائق أخرى لا يمكن إظهارها إلا باتخاذ خطوات إحصائية جديدة .

أمثلة عامة

٩١ . مثال ١ . دفع رجل المبالغ المكتوبة في الجدول لحسابه الشخصى في البنك أثناء السنة ١٩٤٤ . فماذا كان أكبر مجموع دفع أثناء أى شهر واحد وماذا كان متوسط المبالغ الشهرية التى دفعت ؟

الشهر	المبلغ	الشهر	المبلغ
يناير	٥٢,٥٠٠ جنيها	يوليو	١٦,٩٧١ جنيها
"	٣٧,٢٤٢	"	٩٥,٩٦٧
"	١٢,٢٤٦	"	٥٢,٥٠٠
"	٠,٣٥٠	"	٠,٣٥٠
فبراير	٩٤,٣٧٥	أغسطس	٧٧,١٧٩
مارس	٥٧,٢٠٤	سبتمبر	٢٢,١٠٠
مايو	٨٨,١٥٨	"	٥٧,٢٠٤
يونيو	١٥,٥٠٠	أكتوبر	٩١,٩٠٠
"	٥٧,٢٠٤	"	٥٣,٠٠٠
		ديسمبر	٥٧,٢٠٤

بجمع المبالغ الجزئية المدفوعة في يناير ويونيو ويوليو وسبتمبر وأكتوبر
تحصل على المبالغ الشهرية الآتية .

الشهر	المبلغ	الشهر	المبلغ
يناير	١٠٢,٣٣٨ جنيها	يوليو	١٦٥,٧٨٨ جنيها
فبراير	٩٤,٣٧٥	أغسطس	٧٧,١٧٩
مارس	٥٧,٢٠٤	سبتمبر	٧٩,٣٠٤
أبريل	٠,٠٠٠	أكتوبر	١٤٤,٩٠٠
مايو	٨٨,١٥٨	نوفمبر	٠,٠٠٠
يونيو	٧٢,٧٠٤	ديسمبر	٥٧,٢٠٤
			٩٣٩,١٥٤ جنيها

بفحص العمود الثاني من هذا الجدول نجد أن أكبر مجموع دفع أثناء أى شهر
واحد هو المجموع المدفوع أثناء شهر يوليو وقدره ١٦٥,٧٨٨ جنيها . أيضا
مجموع مادفع أثناء السنة هو ٩٣٩,١٥٤ جنيها . إذن متوسط المبالغ الشهرية
المدفوعة هو

$$= \frac{٩٣٩,١٥٤}{١٢} = ٧٨,٢٦٣ \text{ جنيها .}$$

٩٢ . مثال ٢ . تمثل القيم الآتية أوزان رهط كرة القدم في إحدى
الجامعات بالأرطال ويراد إيجاد الوسط الحسابي لأوزان الرهط

- (أ) باستخدام الأوزان المعطاة والطريقة المطولة ،
- (ب) باستخدام الأوزان المعطاة والطريقة المختصرة ،
- (ج) باستخدام توزيع تكرارى للأوزان مؤلف من سبع فئات طول
كل منها عشرة أرطال والطريقة المطولة ،
- (د) كما في (ج) مع استخدام الطريقة المختصرة ،
- (هـ) باستخدام توزيع تكرارى مؤلف من أربع عشرة فئة طولها خمسة
أرطال والطريقة المختصرة :

٢٠١	١٩٩	١٩٦	١٨٥	١٦٢	١٦٩	١٧٣	١٩٣	١٩٢	١٦٢	١٦٥
١٦٠	١٦٠	١٨٣	١٧٢	١٤٠	١٨٤	١٨٤	١٦٧	١٦٤	١٤٠	١٧١
١٩٠	١٦٤	١٥٥	٢٠٧	١٩٠	٢٠٤	١٧٦	١٨٥	١٦٢	١٦٣	١٩٢
١٧٣	١٧٨	١٨٠	١٨٩	٢٠٥	١٨٠	١٨٦	١٥٥	١٥٠	١٧٩	١٨١
	١٨٠	١٦٥	١٦٦	١٦٠	١٥٨	١٥٠	١٧٩	١٥١	١٩٤	١٧١

(١) الجدول الآتي يبين كيفية الحصول على مجموع الأوزان المعطاة .

١٩٩٧	٢٠١	١٩٩	١٩٦	١٨٥	١٦٢	١٦٩	١٧٣	١٩٣	١٩٢	١٦٢	١٦٥
١٨٢٥	١٦٠	١٦٠	١٨٣	١٧٢	١٤٠	١٨٤	١٨٤	١٦٧	١٦٤	١٤٠	١٧١
١٩٨٨	١٩٠	١٦٤	١٥٥	٢٠٧	١٩٠	٢٠٤	١٧٦	١٨٥	١٦٢	١٦٣	١٩٢
١٩٥٦	١٧٣	١٧٨	١٨٠	١٨٩	٢٠٥	١٨٠	١٨٦	١٥٥	١٥٠	١٧٩	١٨١
١٦٧٤		١٨٠	١٦٥	١٦٦	١٦٠	١٥٨	١٥٠	١٧٩	١٥١	١٩٤	١٧١
٩٤٤٠	٧٢٤	٨٨١	٨٧٩	٩١٩	٨٥٧	٨٩٥	٨٦٩	٨٧٩	٨١٩	٨٣٨	٨٨٠

بما أن مجموع أوزان الرهط يساوى ٩٤٤٠ رطلاً وعدد أفراد الرهط هو ٥٤ إذن الوسط الحسابي للأوزان هو

$$\bar{x} = \frac{9440}{54} = 174,81 = 174,81 \text{ رطلاً}.$$

(ب) لإيجاد الوسط الحسابي باستخدام الأوزان المعطاة والطريقة المختصرة نختار نقطة أصل ونحسب انحراف كل واحد من الأوزان المعطاة عن نقطة الأصل المختارة . الجدول الآتي يعطى انحرافات الأوزان عن نقطة الأصل الاختيارية $a = 175$ رطلاً ومجموع هذه الانحرافات .

٧٢	٢٦	٢٤	٢١	١٠	١٣-	٦-	٢-	١٨	١٧	١٣-	١٠-
١٠٠-	١٥-	١٥-	٨	٣-	٣٥-	٩	٩	٨-	١١-	٣٥-	٤-
٦٣	١٥	١١-	٢٠-	٣٢	١٥	٢٩	١	١٠	١٣-	١٢-	١٧
٣١	٢-	٣	٥	١٤	٣٠	٥	١١	٢٠-	٢٥-	٤	٦
٧٦-		٥	١٠-	٩-	١٥-	١٧-	٢٥-	٤	٢٤-	١٩	٤-
١٠-	٢٤	٦	٤	٤٤	١٨-	٢٠	٦-	٤	٥٦-	٣٧-	٥

$$١ = ١٧٥ \text{ رطلا}$$

$$\bar{ج} = \frac{١٠}{٢٧} = \frac{١٠}{٢٧} \text{ رطلا}$$

$$\bar{س} = ١٧٥ - \frac{١٠}{٢٧} = ١٧٤ \frac{٢٦}{٢٧} = ١٧٤,٨١ \text{ رطلا}$$

كافي (١) .

(ج) الجدول الآتي يعطى التوزيع التكرارى للأوزان على سبع فئات طولها عشرة أرتال ويبين طريقة احتساب الوسط الحسابى للأوزان بتطبيق الطريقة المطولة على هذا التوزيع .

الوزن	عدد الرجال ك	مركز الفئة س	عدد الرجال في مركز الفئة ك س
١٤٠ —	٢	١٤٥	٢٩٠
١٥٠ —	٦	١٥٥	٩٣٠
١٦٠ —	١٤	١٦٥	٢٣١٠
١٧٠ —	٩	١٧٥	١٥٧٥
١٨٠ —	١١	١٨٥	٢٠٣٥
١٩٠ —	٨	١٩٥	١٥٦٠
٢٠٠ —	٤	٢٠٥	٨٢٠
	٥٤		٩٥٢٠

$$\bar{س} = \frac{١٠٢٠}{٢٧} = ١٧٦ \frac{٨}{٢٧} = ١٧٦,٣٠ \text{ رطلا}$$

ويلحظ الاختلاف بين هذا الوسط والوسط المضبوط الموجد في (١)، (ب) .

(د) الجدول الآتي يبين طريقة احتساب الوسط بتطبيق الطريقة المختصرة

على نفس التوزيع التكرارى كافي (ج) ومنه ينتج أن

$$١ = ١٧٥ \text{ رطلا}$$

$$\bar{ج} = \frac{٧}{٢٧} \text{ فئة} = \frac{٧}{٢٧} \text{ رطلا لأن الفئة عشرة أرتال}$$

$$\bar{س} = ١٧٥ + \frac{٧}{٢٧} = ١٧٦ \frac{٨}{٢٧} = ١٧٦,٣٠ \text{ رطلا}$$

كافي (ج) :

الوزن	عدد الرجال ك	انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية (فئات) ش	عدد الرجال في الانحراف ك ش
١٤٠ —	٢	٣ —	٦ —
١٥٠ —	٦	٢ —	١٢ —
١٦٠ —	١٤	١ —	١٤ —
١٧٠ —	٩	٠	٠
١٨٠ —	١١	١	١١
١٩٠ —	٨	٢	١٦
٢٠٠ —	٤	٣	١٢
	٥٤		٧

(٥) الجدول الآتي يعطى توزيع الأوزان على ١٤ فئة طولها ٥ أرطال ويبين احتساب الوسط الحسابي بتطبيق الطريقة المختصرة على نفس التوزيع .

الوزن	عدد الرجال ك	انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية (فئات) ش	عدد الرجال في الانحراف ك ش
١٤٠ —	٢	٧ —	١٤ —
١٤٥ —	٠	٦ —	٠
١٥٠ —	٣	٥ —	١٥ —
١٥٥ —	٣	٤ —	١٢ —
١٦٠ —	٩	٣ —	٢٧ —
١٦٥ —	٥	٢ —	١٠ —
١٧٠ —	٥	١ —	٥ —
١٧٥ —	٤	٠	٠
١٨٠ —	٧	١	٧
١٨٥ —	٤	٢	٨
١٩٠ —	٦	٣	١٨
١٩٥ —	٢	٤	٨
٢٠٠ —	٢	٥	١٠
٢٠٥ —	٢	٦	١٢
	٥٤		٢٠ —

$$1 = 177,5 \text{ رطلا}$$

$$\text{ج} = \frac{2}{3} \text{ فئة} = \frac{1}{3} \text{ رطلا لأن الفئة خمسة أرتال}$$

$$\text{س} = \frac{2}{3} \text{ فئة} = 175,65 \text{ رطلا}$$

وهذه نتيجة تختلف عن كل النتائج السابقة .

٩٣. مثال ٣ . في السنين ١٩٣٦ ، ١٩٣٧ ، ١٩٣٨ ، ١٩٣٩ كان العدد المتوسط لألوف المودعين في صناديق توفير البريد ٤٢٥ (ألوف) وقد كان عدد المودعين في السنة ١٩٤١ أعلى منه في ١٩٤٠ بمقدار ٢,٢ في المائة على حين كان متوسط السنين الست ١٩٣٦ إلى ١٩٤١ ٤٣٤ . أوجد عدد ألوف المودعين في كل من السنتين ١٩٤٠ ، ١٩٤١ .

بما أن مجموع أى عدد من الأعداد يساوى عدد الأعداد مضروباً في وسطها الحسابي إذن عدد ألوف المودعين في السنين الأربع ١٩٣٦ إلى ١٩٣٩ هو 4×425 أو ١٧٠٠ . بالمثل عدد ألوف المودعين في السنين الست ١٩٣٦ إلى ١٩٤١ هو 6×434 أو ٢٦٠٤ . بالطرح ينتج أن عدد ألوف المودعين في السنتين ١٩٤٠ ، ١٩٤١ هو $2604 - 1700 = 904$. لإيجاد عدد ألوف المودعين في كل من هاتين السنتين نقسم العدد ٩٠٤ بين السنتين بالنسبة ١ : ١,٠٢٢ . بالترتيب . إذن عدد ألوف المودعين في السنة ١٩٤٠ هو

$$447 = 1 - 2,022 \times 904$$

وعددهم في السنة ١٩٤١ هو

$$457 = 447 - 904$$

٩٤. مثال ٤ . يبين الجدول الآتي النسب المئوية لمقدار التغير الذي طرأ على الإيراد الشهري لألف شخص بين أول الحرب الأخيرة وآخرها . كيف تقيس القيمة النموذجية للتغير في الإيراد ؟ احسب هذه القيمة باستخدام الوسطا لذى تختاره .

عدد الأشخاص	النسبة المئوية للتغير في الإيراد
٤٢٠	٥ - ٠
٢٣٣	١٠ - ٥
١٧٢	١٥ - ١٠
١٠١	٢٠ - ١٥
٤٤	٤٠ - ٢٠
٢٣	٦٠ - ٤٠
٧	١٠٠ - ٦٠

بما أن المتغير في هذا التوزيع التكراري هو النسبة المئوية للتغير في الإيراد وليس التغير نفسه وبما أن الوسط الهندسي هو أليق الأوساط جميعها لتمثيل النسب (الموجبة) إذن استخدام الوسط الهندسي في هذه الحالة لقياس القيمة النموذجية للمتغير خير من استخدام الوسط الحسابي بل ومن أى وسط آخر .

عدد الأشخاص	إفارتهم المركز	عدد الأشخاص	النسبة المئوية (قيم مركزية)
ك. لغ. ١٠ س	لغ. ١٠ س	ك	س
١٦٧,١٣٤٨٠	٠,٣٩٧٩٤	٤٢٠	٢,٥
٢٠٣,٨٨٨٩٨	٠,٨٧٥٠٦	٢٣٣	٧,٥
١٨٨,٦٦٨٥٢	١,٠٩٦٩١	١٧٢	١٢,٥
١٢٥,٥٤٧٠٤	١,٢٤٣٠٤	١٠١	١٧,٥
٦٤,٩٩٣٢٨	١,٤٧٧١٢	٤٤	٣٠,٠
٣٩,٠٧٦٣١	١,٦٩٨٩٧	٢٣	٥٠,٠
١٣,٢٢١٦٣	١,٩٠٣٠٩	٧	٨٠,٠
٨٠٢,٦٣٠٥٦		١٠٠٠	

$$\text{لغ. ١٠} = \frac{٨٠٢,٦٣٠٥٦}{١٠٠٠} = ٠,٨٠٢٦٣$$

$$= ٨٠,٢٦٣ \text{ في المائة}$$

وهذا هو متوسط مائراً على إيرادات المجموعة من تغير .

٩٥ . مثال ٥ . قطع قطار ٢٠ كيلومترا بسرعة ٤٠ كيلومترا في الساعة ثم
١٠ كيلومترات بسرعة ٣٠ كيلومترا في الساعة ثم ٦٠ كيلومترا بسرعة ٥٠
كيلومترا في الساعة . ماذا كانت سرعته المتوسطة ؟

السرعة المتوسطة تساوى خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن . أى

$$\frac{2700}{61} = \frac{90}{30} = \frac{60 + 10 + 20}{60 + 30 + 50}$$

أو ٤٤,٢٦ كيلومترا في الساعة .

بالمقارنة مع (٢٠) نرى أن هذا هو الوسط التوافقي للتوزيع التكرارى
المسكون من ثلاث فئات مراكزها السرعة المعطاة ٤٠ ، ٣٠ ، ٥٠ والتكرارات
المنظرة هي المسافات المقطوعة ٢٠ ، ١٠ ، ٦٠ بالترتيب . أى الوسط التوافقي
للسرعة المعطاة مرجحة بالمسافات المقطوعة بالترتيب .

٩٦ . مثال ٦ . يعطى الجدول ١١ معدلات الوفاة بين الأطفال في ٦١
مقاطعة إنجليزية سنة ١٩٣٩ . أوجد المعدل الوسيط للوفاة .
أوجد أيضا المعدل النمطي للوفاة .

هناك ٦١ معدلا . بما أن هذا العدد فردى إذن المعدل الوسيط هو المعدل
الأوسط في الترتيب التصاعدي أو الترتيب التنازلى للمعدلات حسب قيمها .
الجدول ١٢ يعطى الترتيب التصاعدي للمعدلات حسب قيمها والمعدل الأوسط
هو المعدل الحادى والثلاثين لأن هذا يقع بين ٣٠ معدلا تحته ، ٣٠ معدلا
فوقه . بعد ٣٠ معدلا ابتداء من أول الجدول ١٢ أو آخره نجد أن المعدل
الحادى والثلاثين هو ٧٩ . هذا يعطينا المعدل الوسيط المطلوب .

لإيجاد المعدل النمطي للوفاة نبحت بين المعدلات المعطاة عن المعدل الذى
يتكرر أكثر من أى معدل آخر . باستخدام الجدول ١٢ مرة ثانية نجد أن
المعدل ٧١ يتكرر أربع مرات على حين أن أى معدل آخر لم يتكرر أكثر من
مرتين . إذن المعدل النمطي المطلوب هو ٧١ .

٩٧. مثال ٧. في التعداد المصرى لسنة ١٩٣٧ كان التوزيع التكرارى للمصانع الموجودة وقتئذ حسب فئات رأس المال كما فى الجدول ٢١. أوجد متوسط رؤوس أموال المصانع فى تلك السنة.

الجدول المذكور مفتوح من أعلى. إذن لا يمكننا احتساب أى وسط قانونى لرؤوس الأموال إلا إذا فرضنا قىما تقريبية لرؤوس أموال المصانع الكبيرة. وبما أن هذا غير ميسور إذن نحسب رأس المال الوسيط.

لدينا $67769 = \frac{1}{2} \times 33884,5$. إذن رأس المال الوسيط هو تلك النقطة على محور رأس المال التى تقسم التوزيع إلى جزئين فى كل منهما $33884,5$ مصنعا أو هو رأس مال المصنع رقم ٣٣٨٨٥. فى الفئة الأولى ٥٨٣٤ مصنعا وفى الفئة الثانية وحدها ٤٩٣٥٥ مصنعا وهذا العدد وحده أكبر من نصف عدد المصانع كلها. إذن رأس المال الوسيط يقع فى الفئة الثانية وللحصول عليه لابد أن نأخذ من مصانع هذه الفئة

$$28051 = 5834 - 33885$$

مصنعا. هذه الفئة تبدأ عند ١ وطولها هو ٤٩. إذن رأس المال الوسيط هو

$$28,849 = 49 \times \frac{28051}{49355} + 1$$

جنيها مصريا.

٩٨. مثال ٨. فى امتحان فى الحساب كانت النسب المتسوية (ص، ع) للبنين والبنات بالترتيب الحاصلين والحاصلات على س فى المائة أو أكثر من النهاية العظمى للدرجات كما فى الجدول الآتى لبعض قيم س.

$$س = 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60 \quad 70 \quad 80 \quad 90 \quad 100$$

$$ص = 94 \quad 83 \quad 70 \quad 56 \quad 43 \quad 31 \quad 20 \quad 10 \quad 3$$

$$ع = 89 \quad 74 \quad 58 \quad 43 \quad 30 \quad 19 \quad 11 \quad 5 \quad 1$$

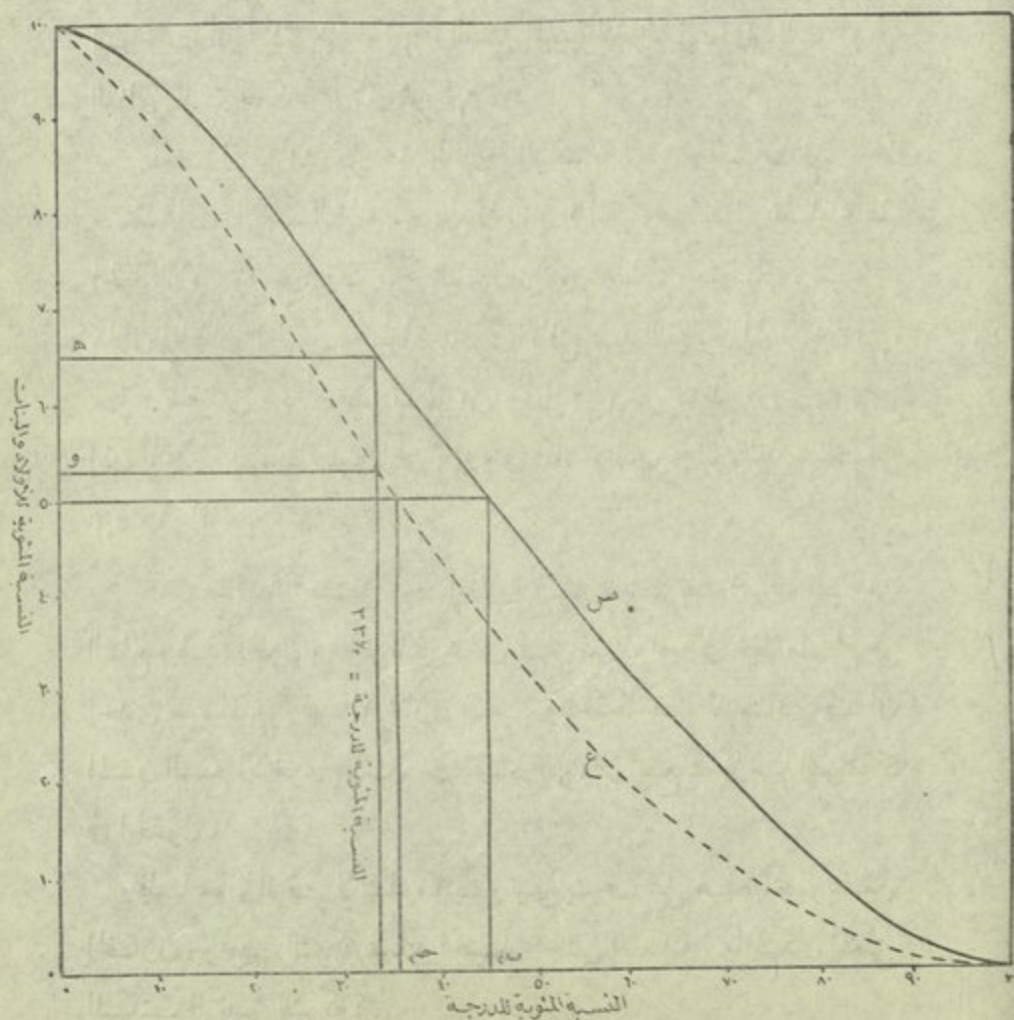
ارسم خطى ص، ع البيانيين فى نفس الشكل وبنفس المحورين آخذا محور س

أفقياً ووحدة قياس تساوى ١ بوصة لكل ٢٠ .

كم فى المائة (١) من البنين ، (٢) من البنات حصلوا أو حصلن على ثلث
النهاية العظمى للدرجات أو أكثر؟ وماذا كانت الدرجة الوسيطة
(١) للبنين ، (٢) للبنات ؟

الشكل ٣٩ يعطى الخططين البيانيين المطلوبين .

الشكل ٣٩ . خطا ص ، ع البيانيين



للحصول من الشكل على النسبة المثوية للبنين الذين حصلوا على ثلث النهاية العظمى للدرجات أو أكثر والنسبة المثوية للبنات اللاقي حصلن على ثلث النهاية العظمى للدرجات أو أكثر نرسم خطا مستقيما رأسيا عند النقطة $\frac{1}{3} ٣٣$ على محور س ومن نقطتي تقاطع هذا الخط الرأسى مع خطى ص، ع البيانيين نرسم خطين مستقيمين أفقيين. هذان الخطان الأفقيان يقطعان المحور الرأسى عند النقطتين المطلوبتين ه، ٦. بالقياس نجد أن ه تناظر ص = $٦٥,٣$ ، ٦ تناظر ع = $٥٣,٠$. إذن النسبة المثوية للحاصلين على ثلث النهاية العظمى للدرجات أو أكثر هي $٦٥,٣$ والنسبة المثوية للحاصلات على ثلث النهاية العظمى للدرجات أو أكثر هي $٥٣,٠$.

للحصول من الشكل على الدرجة الوسيطة للبنين والبنات نرسم خطا مستقيما أفقيا عند النقطة ٥٠ على المحور الرأسى ومن نقطتي تقاطع هذا الخط الأفقى مع خطى ص، ع البيانيين نرسم خطين مستقيمين رأسيين. هذان الخطان الرأسيان يقطعان المحور الأفقى عند النقطتين المطلوبتين ب، ح. بالقياس نجد أن ب تناظر س = $٤٤,٦$ ، ح تناظر س = $٣٥,٣$. إذن الدرجة الوسيطة للبنين هي $٤٤,٦$ في المائة والدرجة الوسيطة للبنات هي $٣٥,٣$ في المائة.

٩٩. مثال ٩. يشغل أحد المخازن الكبيرة بتصرف مجموعة معينة من السلع ولهذا المخزن ٩٦ مخزنا فرعيا في ثمانى مدن واقعة فى خط ما. م هي إحدى هذه المدن وفيها ٩ مخازن فرعية وبأخذها نقطة للإسناد وجد أن المدن السبع الأخرى ١، ب، ح، د، ه، ٦، س تقع بمخازنها الفرعية كما فى الجدول.

فلما حان الوقت لإنشاء مكتب رئيسى يشرف على هذه المجموعة من المخازن ووجهت الشركة بمسألة اختيار أحسن الأمكنة. ما المكان المنطقى للمكتب الرئيسى للشركة؟

المدينة	عدد المخازن الفرعية	البعد عن م (كم)
أ	١٠	٦٠ —
ب	١٢	٢٣ —
ح	٥	١٥ —
م	٩	٠
و	٦	٢٥
هـ	١٥	٦٥
٦	٢٠	٨٥
ز	١٩	١٠٢

المكان المطلوب هو مكان على الخط بمجموع أبعاده عن المخازن الفرعية أصغر ما يمكن أى المركز الوسيط للمخازن الفرعية . إذن لابد من البحث عن تلك النقطة على الخط التى تقسم المخازن الفرعية إلى قسمين فى كل منهما ٤٨ مخزنا فرعيا . هذه المخازن موزعة على الخط عند نقط معينة أ ، ب ، ح ، م ، و ، هـ ، ٦ ، ز بالترتيب وليست موزعة على طول الخط . إذن ليس ضروريا فى هذه المسألة أن نعرف المسافات بين المدن ويكفى أن نعرف ترتيب هذه المدن على الخط وعدد المخازن الفرعية فى كل مدينة .

باستخدام العمود الثانى نجد أن المدينتين الأخيرتين تحتويان معا على ٣٩ مخزنا فرعيا وهذا أقل من العدد المطلوب ٤٨ بتسعة . أيضا هـ تحتوى وحدها على ١٥ مخزنا فرعيا . إذن للوصول إلى السكان الواقع على الخط الذى عنده يصل عدد المخازن الفرعية إلى ٤٨ لابد من دخول قلب المدينة هـ . هذه المدينة هى إذن المركز الوسيط للمخازن الفرعية وهى المكان المنطقى المطلوب .

١٠٠ . مثال ١٠ . أ ب ح و هـ ٦ مسدس محدب و و نقطة داخله بحيث أن مجموع أبعاده عن النقط الزاوية أصغر ما يمكن . والزوايا التى تقبلها أ ب ، ب ح ، ح و ، و هـ ، هـ ٦ عند و هى بالترتيب أ ، ب ، ل ، م . أثبت أن جتا $\frac{1}{3}$ جتا $\frac{1}{3}$ ب جتا $\frac{1}{3}$ (أ + ب) = جتا $\frac{1}{3}$ ل جتا $\frac{1}{3}$ م جتا $\frac{1}{3}$ (ل + م) .

نفرض أن (س، ص) (ر = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦) هي إحداثيات النقط الزاوية وأن س، ص هما إحداثيا هـ . بمجموع أبعاد هـ عن النقط الزاوية هو

$$\text{مح} \{ (س - س_ر) + (ص - ص_ر) \}^2 = \frac{1}{2} (س، ص)$$

مثلا . لكي يكون هذا أصغر ما يمكن يجب أن يحقق س، ص المعادلتين

$$د'_س = ٠، د'_ص = ٠ \text{ أى}$$

$$\text{مح} (س - س_ر) + (ص - ص_ر) = \frac{1}{2} (س، ص) = ٠،$$

$$\text{مح} (ص - ص_ر) + (س - س_ر) = \frac{1}{2} (س، ص) = ٠$$

إذن مجموع جيوب تمام الزوايا التي تصنعها هـ ب، هـ ح، هـ د، هـ هـ مع أى اتجاه مرسوم فى المستوى يساوى صفرا وكذلك مجموع الجيوب . بأخذ الزوايا المصنوعة مع الاتجاه هـ نحصل على

$$١ + \text{جتا } ١ + \text{جتا } (١ + ب) + \text{جتا } (١ + ب + ج)$$

$$+ \text{جتا } ن + \text{جتا } (ن + م) = ٠$$

حيث ج، ن هما الزاويتان المقبولتان عند هـ بالضلعين ح د، د ا بالترتيب . أيضا بأخذ الزوايا المصنوعة مع الاتجاه هـ نحصل على

$$١ + \text{جتا } ل + \text{جتا } (ل + م) + \text{جتا } (ل + م + ن)$$

$$+ \text{جتا } ج + \text{جتا } (ج + ب) = ٠$$

بمقارنة المعادلتين وملاحظة أن جتا (١ + ب + ج) = جتا (ل + م + ن) نحصل على

$$\text{جتا } ١ + \text{جتا } (١ + ب) + \text{جتا } ن + \text{جتا } (ن + م)$$

$$= \text{جتا } ل + \text{جتا } (ل + م) + \text{جتا } ج + \text{جتا } (ج + ب)$$

بالمثل إذا اعتبرنا الاتجاهين ب، هـ هـ فالإتجاهين هـ ح، هـ د نحصل على

$$\text{جتا } ب + \text{جتا } (ب + ج) + \text{جتا } ١ + \text{جتا } (١ + ن)$$

$$= \text{جتا } م + \text{جتا } (م + ن) + \text{جتا } ل + \text{جتا } (ل + ج)،$$

$$\begin{aligned}
 & \text{جنا ج} + \text{جنا (ج + ل)} + \text{جنا ب} + \text{جنا (ب + ا)} \\
 & = \text{جنا ن} + \text{جنا (ن + ا)} + \text{جنا م} + \text{جنا (م + ل)} . \\
 & \text{بجمع المعادلات الثلاث الأخيرة وقسمة النتيجة على ٢ نحصل على} \\
 & \text{جنا ا} + \text{جنا ب} + \text{جنا (ا + ب)} = \text{جنا ل} + \text{جنا م} + \text{جنا (ل + م)} . \\
 & \text{بإضافة ١ إلى كل من الطرفين يمكننا كتابة هذا} \\
 & (١ + \text{جنا ا} + \text{جنا ب} + \text{جنا ا جنا ب}) - \text{جا ا جاب} \\
 & = (١ + \text{جنا ل} + \text{جنا م} + \text{جنا ل جنا م}) - \text{جال جام} ، \\
 & (١ + \text{جنا ا}) (١ + \text{جنا ب}) - \text{جا ا جاب} \\
 & = (١ + \text{جنا ل}) (١ + \text{جنا م}) - \text{جال جام} .
 \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}
 & ٤ \text{ جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ا جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب} - ٤ \text{ جا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ا جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب} \\
 & = ٤ \text{ جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ل جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م} - ٤ \text{ جا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ل جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م} ، \\
 & ٤ \text{ جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ا جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب (جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ا جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب} - \text{جا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ا جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب})} \\
 & = ٤ \text{ جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ل جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م (جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ل جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م} - \text{جا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ل جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م})} ، \\
 & \text{جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ا جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ب جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ (ا + ب)} = \text{جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ ل جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ م جنا}^٢ \frac{١}{٢} \text{ (ل + م)} . \\
 & \text{هذه هي العلاقة المطلوبة وواضح أنه يمكن كتابة علاقيتين أخريين مثلها .}
 \end{aligned}$$

١٠١. مثال ١١. ص_١، ص_٢ هما الإحداثان الرأسيان لمنحني خطي متماثلين
 ص = ا ه - س^٢، ص = ب ه - (س - ج)^٢ (ا، ب، ج موجبة).
 أثبت أن المعادلة التي تعين س حتى يكون ص_١ - ص_٢ أكبر أو أصغر ما يمكن
 ليس لها إلا جذران حقيقيان وعين موضع الجذرين وأوجد أيهما يعطى
 القيمة الكبرى وأيها يعطى الصغرى .

$$\text{اكتب ص} = \text{ص}_١ - \text{ص}_٢ \text{ فيكون}$$

$$\text{ص} = \text{ا ه} - \text{س}^٢ - \text{ب ه} + (\text{س} - \text{ج})^٢ = \text{د (س)}$$

مثلا . بالمفاضلة بالنسبة إلى س نحصل على

د' (س) = $٢ - ١ س - ٢ س + ٢ ب (س - ج) - ٢ (س - ج)$.
 بوضع هذا يساوى الصفر نرى أن المعادلة التى تعين س حتى يكون ص أكبر
 أو أصغر ما يمكن هى

$$٢ - ١ س - ٢ س + ٢ ب (س - ج) - ٢ (س - ج) = ٠$$

$$\frac{١ س}{س - ج} = ٢ ب - ٢ س - ٢ ج$$

إذا رسمنا الخطين البيانيين للمعادلتين

$$\frac{١ س}{س - ج} = ص ، ٢ ب - ٢ س - ٢ ج = ص$$

نجد أن الخطين يتقاطعان فى نقطتين حقيقيتين مادامت ا ، ب ، ج أعدادا
 موجبة . أيضا إحدى هاتين النقطتين تقع إلى يسار محور ص وتقع الأخرى
 إلى يمين الخط $س = ج$. إذن للمعادلة د' (س) = ٠ جذران حقيقيان
 أحدهما سالب والآخر موجب وأكبر من ج وليس للمعادلة جذر حقيقى
 غير هذين .

بالمفاضلة مرة ثانية بالنسبة إلى س نحصل على

$$د'' (س) = ٢ - ١ س - ٢ س + ٢ ب (س - ج) - ٢ (س - ج) = ٠$$

$٢ - ١ س - ٢ س + ٢ ب (س - ج) - ٢ (س - ج) = ٠$.
 فإذا عوضنا فى هذه المعادلة عن $٢ - ١ س - ٢ س$ بدلالة $٢ ب (س - ج) - ٢ (س - ج)$ من المعادلة
 السابقة د' (س) = ٠ . نجد أن

$$د'' (س) = ٢ - ١ س - ٢ س + ٢ ب (س - ج) - ٢ (س - ج) = ٠$$

$$٢ - ١ س - ٢ س + \frac{١ س}{س - ج} = ٠$$

$$٢ = ١ ج \left(٢ + \frac{١}{س - ج} \right) - ١ س - ٢ س$$

بما أن a ، c موجبان إذن ينتج من هذه المعادلة أن إشارة d'' (س) عند الجذرين الحقيقيين للمعادلة $d'(s) = 0$ تكون كإشارة المقدار المكتوب داخل (...). لكن هذا المقدار سالب لجميع $s > 0$ وموجب لجميع $s < 0$. لدينا إذن أن $d''(s)$ يكون أصغر من الصفر عند الجذر الحقيقي السالب وأكبر من الصفر عند الجذر الحقيقي الموجب للمعادلة $d'(s) = 0$. وينتج أن الجذر السالب يعطى ص قيمته السكبرى والجذر الموجب يعطى ص قيمته الصغرى.

١٠٢. مثال ١٢. إذا كان

$$ص = a \left(1 + \frac{s}{b} \right)^c e^{-\frac{s}{b}} \quad (s < 0) \quad (ب)$$

المنحنى التكرارى لتوزيع غير متماثل حيث a ، b ، c ثوابت موجبة فأوجد قيمة النمط.

اكتب

$$د(s) = a \left(1 + \frac{s}{b} \right)^c e^{-\frac{s}{b}} \quad (s < 0) \quad (ب)$$

وفاضل بالنسبة إلى s . هذا يعطى

$$د'(s) = a \cdot c \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right)^{c-1} e^{-\frac{s}{b}} \cdot \left(-\frac{1}{b} \right) \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) =$$

$$- \frac{a \cdot c}{b} \left(1 + \frac{s}{b} \right)^c e^{-\frac{s}{b}} \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) =$$

$$= - \frac{a \cdot c}{b} \left(1 + \frac{s}{b} \right)^{c-1} e^{-\frac{s}{b}} \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) =$$

$$= - \frac{a \cdot c}{b} \left(1 + \frac{s}{b} \right)^{c-1} e^{-\frac{s}{b}} \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) \cdot \left(1 + \frac{s}{b} \right) =$$

للمعادلة د' (س) = جذر واحد في س < - ب وهذا الجذر هو س = .
بالمفاضلة مرة ثانية بالنسبة إلى س نحصل على

$$د'' (س) = - \frac{1}{ب} \frac{اج}{ب} - \left(\frac{س}{ب} + 1 \right) \frac{ج}{ب} - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب} - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب}$$

$$- \frac{اج}{ب} \frac{س}{ب} (ج - ب - 1) \left(\frac{س}{ب} + 1 \right) - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب} - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب}$$

$$+ \frac{اج}{ب} \frac{س}{ب} \left(\frac{س}{ب} + 1 \right) - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب} - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب}$$

$$= - \frac{اج}{ب} \left(\frac{س}{ب} - 1 \right) \left(\frac{س}{ب} + 1 \right) - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب} - \frac{1}{ب} \frac{ج}{ب}$$

بعد قليل من الاختصار وهذا صحيح لكل س < - ب . بوضع س = .
نجد أن د' (س) = - \frac{اج}{ب} > . إذن للإحداث الرأسى ص قيمة كبرى
عند س = . والنمط المطلوب هو الصفر .

مدى هذا التوزيع هو س < - ب وهذا المدى يمتد إلى ما لا نهاية من
جهة اليمين وينتهى بنقطة عند س = - ب من جهة اليسار .

١٠٣ . سؤال ١٣ . تقلب سعر أردب القمح أثناء المدة ١٩٢٨ - ١٩٣٧ بما
فى ذلك هاتين السنتين كما يأتى : -

المتوسط أثناء السنتين ١٩٢٨ - ١٩٢٩ ١,٥٢٠ جنينها مصرى

المتوسط أثناء السنين ١٩٣٠ - ١٩٣٢ ١,٢٢٧

المتوسط أثناء السنين ١٩٣٣ - ١٩٣٦ ١,٢٩٩

المتوسط أثناء السنة ١٩٣٧ ١,٢٦٥

أوجد السعر المتوسط أثناء المدة كلها .

ثم إذا علمت أن السعر المتوسط خلال الإحدى عشرة سنة ١٩٢٨ - ١٩٣٨
كان ١,٣٣٠ جنينها مصرى فأوجد السعر المتوسط أثناء السنة ١٩٣٨ .

ليس السعر المتوسط المطلوب أثناء المدة ١٩٢٨ - ١٩٣٧ الوسط الحسابي البسيط للأسعار المتوسطة أثناء السنين ١٩٢٨ - ١٩٢٩ ، ١٩٣٠ - ١٩٣٢ ، ١٩٣٣ - ١٩٣٦ ، ١٩٣٧ لأن هذه المدد ليست متساوية ولكنه الوسط الحسابي المرجح لتلك الأسعار . فالسعر المتوسط أثناء السنتين ١٩٢٨ - ١٩٢٩ يرجح بوزن يساوى ٢ لأنه يمثل سعرين - السعر المتوسط أثناء السنة ١٩٢٨ والسعر المتوسط أثناء السنة ١٩٢٩ . أيضا السعر المتوسط أثناء السنين ١٩٣٠ - ١٩٣٢ يرجح بوزن يساوى ٣ لأنه يمثل ثلاثة أسعار والسعر المتوسط أثناء السنين ١٩٣٣ - ١٩٣٦ يرجح بوزن يساوى ٤ والسعر المتوسط أثناء السنة ١٩٣٧ يرجح بوزن يساوى ١ . الجدول الآتى يبين كيفية احتساب السعر المتوسط المطلوب .

السعر المتوسط	عدد الأسعار	السعر فى عدد الأسعار
١,٥٢٠	٢	٣,٠٤٠
١,٢٢٧	٣	٣,٦٨١
١,٢٩٩	٤	٥,١٩٦
١,٢٦٥	١	١,٢٦٥
	١٠	١٣,١٨٢

$$\text{السعر المتوسط} = \frac{١٣,١٨٢}{١٠} = ١,٣١٨٢$$

أو ١,٣١٨ جنيها مصريا .

السعر المتوسط خلال الإحدى عشرة سنة ١٩٢٨ - ١٩٣٨ هو الوسط الحسابي المرجح للسعر المتوسط أثناء المدة ١٩٢٨ - ١٩٣٧ (وزن ١٠) والسعر المتوسط أثناء السنة ١٩٣٨ (وزن ١) . إذن السعر المتوسط أثناء السنة ١٩٣٨ هو

$$١,٤٤٨ = ١٣,١٨٢ - ١٤,٦٣٠ = ١,٣١٨٢ \times ١٠ - ١,٣٣٠ \times ١١$$

جنيها مصريا .

أسئلة

- ١ . أنفق رجل على ملبسه في سلسلة من العنين المبالغ المبينة في الجدول الآتي . أوجد متوسط ما أنفقه سنويا إلى أقرب مليم .

السنة	المبلغ	السنة	المبلغ
١٩٣٥	٣٣,٢٦٠ جنيها مصريا	١٩٤١	٣١,٢٨٧ جنيها مصريا
١٩٣٦	٣١,٧٧٩	١٩٤٢	١٣,٧٨٣
١٩٣٧	٣٠,٧٤٠	١٩٤٣	٣٤,٥٩٢
١٩٣٨	٢٦,٣٩٦	١٩٤٤	٢٤,٨٠٤
١٩٣٩	٢١,١٢٥	١٩٤٥	٢٢,٨٧١
١٩٤٠	٢٤,٣٧٧		

- ٢ . يبين الجدول الآتي توزيع ٢٢١ منشأة صناعية حسب النسبة بين أصولها الجارية وخصومها في تاريخ معين . أوجد الوسط الحسابي لهذه النسبة .

النسبة	عدد المنشآت	النسبة	عدد المنشآت
٠ — ١,٩٩	١١	١٤ — ١٥,٩٩	٨
٢ — ٣,٩٩	٥٣	١٦ — ١٧,٩٩	١٠
٤ — ٥,٩٩	٤٧	١٨ — ١٩,٩٩	١
٦ — ٧,٩٩	٣٧	٢٠ — ٢١,٩٩	٢
٨ — ٩,٩٩	٢١	٢٢ — ٢٣,٩٩	١
١٠ — ١١,٩٩	١٦	٢٤ — ٢٥,٩٩	٠
١٢ — ١٣,٩٩	١٣	٢٦ — ٢٧,٩٩	١

- ٣ . يعطى الجدول الآتي المعدلات الشائعة للوفاة من مرض السيل في فترات العمر المختلفة . أوجد متوسط العمر عند الوفاة من هذا المرض
- (أ) بالطريقة المطولة ،
- (ب) بالطريقة المختصرة (نقطة الأصل = ٥٠) .

العمر (سنتين)	١٥ -	٢٥ -	٣٥ -	٤٥ -	٥٥ -	٦٥ -	٧٥ -
معدل الوفاة (./..)	٣٤٣	٣٨٠	٥٣٠	٥٤٧	٤٦٤	٢٧١	١١٤

٤ . يبين الجدول الآتي أطوال رؤوس ٤٦٢ مريضاً بأحدٍ مستشفيات الأمراض العقلية بالمليметр . استخدم الطريقة المختصرة لإيجاد متوسط أطوال رؤوس هذه المجموعة .

طول الرأس	عدد المرضى	طول الرأس	عدد المرضى
١٧٢ -	٣	١٩٦ -	٨٨
١٧٦ -	٩	٢٠٠ -	٣٠
١٨٠ -	٢٩	٢٠٤ -	٦
١٨٤ -	٧٦	٢٠٨ -	٤
١٨٨ -	١٠٤	٢١٢ -	٢
١٩٢ -	١١٠	٢١٦ -	١

٥ . يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري لعدد الطلبة الذين استخدموا بوفيه كلية التجارة بالجيزة يوميا خلال العام الدراسي ١٩٤٥ - ٤٦ . احسب متوسط عدد الطلبة الذين يستخدمون البوفيه يوميا .

عدد الطلبة	عدد الأيام	عدد الطلبة	عدد الأيام
٠ - ٥	١	٥٠ - ٦٠	٤١
٥ - ١٠	٣	٦٠ - ٧٠	٤٠
١٠ - ١٥	٢	٧٠ - ٨٠	٣٠
١٥ - ٢٠	٦	٨٠ - ٩٠	٢٠
٢٠ - ٢٥	٨	٩٠ - ١٠٠	١٣
٢٥ - ٣٠	١٠	١٠٠ - ١٢٠	٢٣
٣٠ - ٤٠	٢٥	١٢٠ - ١٤٠	٧
٤٠ - ٥٠	٣٦	١٤٠ - ١٦٠	٢

- ٦ . في سنة ١٩٢٠ كان سعر السلعة ١ قرشين وسعر السلعة ب عشرة قروش . وفي ١٩٣٠ ارتفع سعر ١ إلى ضعف ما كان في ١٩٢٠ ولكن سعر ب انخفض إلى نصف سعرها في ١٩٢٠ . وفي ١٩٤٠ انخفض سعر ١ إلى نصف سعرها الأصلي في ١٩٢٠ وارتفع سعر ب إلى ضعف ما كان في ١٩٢٠ .
- اثبت أن استخدام الوسط الهندسي لوصف مستوى الأسعار في السنتين ١٩٣٠ ، ١٩٤٠ أصلح من استخدام الوسط الحسابي .
- ٧ . يبين الجدول الآتي معدلات الطلاق لكل ألف زيجة في مدينة ما أثناء المدة ١٩٢٠ - ١٩٤٠ . احسب الوسط الهندسي لمعدلات الطلاق .

السنة	١٩٢٠	١٩٢٥	١٩٣٠	١٩٣٥	١٩٤٠
معدل الطلاق	٨٤	١٠٨	١٣١	١٥٠	١٧٠

- ٨ . استخدم البيانات الآتية عن تغير نفقات معيشة العمال والطبقة الوسطى في إنجلترا لإيجاد متوسط الزيادة المثوية في أسعار حاجيات كلتا الطبقتين في أول فبراير ١٩٣٨ مراعيًا أن تستخدم وسطًا مناسبًا :

الباب	توزيع نفقة المعيشة في المائة في يوليو ١٩١٤		الزيادة المثوية في الأسعار في أول فبراير ١٩٣٨	
	العمال	الطبقة الوسطى	العمال	الطبقة الوسطى
الطعام	٦٠	٣٦	٥٩	٦٤
الإيجار وعوائد المباني	١٦	١٥	٥١	٨٥
الملبس	١٢	٩	١١٥	١١٥
التدفئة والإضاءة	٨	٤,٥	٧٠	٧٠
المصروفات الأخرى	٤	٣٥,٥	٨٠	٨٥
	١٠٠	١٠٠		

- ٩ . قطع قطار عشرة أميال بسرعة ٣٥ ميلا في الساعة ثم عشرة أميال

أخرى بسرعة ٤٠ ميلا في الساعة فعشرة أميال ثالثة بسرعة ٥٠ ميلا في الساعة وأخيرا قطع عشرة أميال بسرعة ٥٠ ميلا في الساعة . احسب متوسط سرعة القطار في الساعة

(أ) باستخدام الوسط الحسابي البسيط ،

(ب) باستخدام الوسط الحسابي المرجح على أن تتناسب الأوزان عكسيا مع السرعة ،

(ج) باستخدام الوسط التوافقي ،

ثم قارن النتائج الثلاث .

١٠ . قطعت سيارة نقل ٢٠ كيلومترا بسرعة ٤٠ كيلومترا في الساعة ثم

١٠ كيلومترات بسرعة ٣٠ كيلومترا في الساعة ثم ٣٠ كيلومترا بسرعة ٦٠

كيلومترا في الساعة . احسب متوسط سرعة السيارة بالكيلومتر في الساعة .

١١ . كانت أسعار البيض في مائة محل كالاتي : —

عدد المحلات	سعر البيض (بالشان)
٥٠	١٢
٣٠	١٤
٢٠	١٠

ماذا كان متوسط سعر البيض في تلك المحلات ؟

١٢ . إذا كان

$$y = \left(\frac{1}{3} \right)^x \text{ مـ جـ لـ دـ}$$

حيث س، س، س، س، ... هي ن عددا موجبا فاثبت أن ي (ل) < ي (١) إذا كان ل < ١ .

اثبت أن ي (١) ، ي (٢) ، ي (٣) ، ... تكون سلسلة متزايدة .

١٣ . قطعت إحدى طائرات شركة T.W.A الأمريكية المسافة بين القاهرة .

ونيو يورك في الأزمنة الآتية : —

دقائق	ساعات	أيام	دقائق	ساعات	أيام
٥٠	٢٣	١	٤	٣	٢
٣٩	١	٢	٤٥	٥	٢
٥٧	٢٢	١	١٣	٢٠	١
١	٠	٢	٥٩	٢	٢
٢٣	٠	٢			

أوجد الزمن المتوسط الذى استغرقته الطائرة فى هذه الرحلات .
 ١٤ . فيما يلى بيان الأجور الأسبوعية التى تقاضاها ثمانية عمال فى أحد مصانع لندن سنة ١٩٣٩ :

بنس	شلتات	جنيهات	بنس	شلتات	جنيهات
١١	٠	٣	٥	٠	٤
١٠	٢	٤	٦	١٥	٤
٠	١٩	٥	٩	٩	٣
١	١٨	٣	١١	٠	٥

احسب باستخدام الوحدة المعطاة الأجر المتوسط لهذه المجموعة .
 ١٥ . بين الجدول الآتى التوزيع التكرارى لأعمار المسافرين على متن إحدى السفن .

العمر (سنين)	٠	-١٠	-٢٠	-٣٠	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠
عدد المسافرين	١٨	٢	٥	١٠	٢٣	١٨	٩	٥	١	١

أوجد حسابيا وبيانيا العمر الوسيط لهذه المجموعة .
 ١٦ . بين الجدول الآتى توزيع الأراضى الزراعية فى مصر سنة ١٩٤٣ على الملاك المصريين . أوجد مقدار ما يملكه كل فرد فى المتوسط .

عدد الملاك المصريين (ألف)	المساحة (أفدنة)
١٧٧١	١ - ٠
٥٩٢	٥ - ١
٨١	١٠ - ٥
٣٩	٢٠ - ١٠
١٠	٣٠ - ٢٠
٨	٥٠ - ٣٠
٩	أكثر من ٥٠
٢٥١٠	

١٧. أوجد باستخدام الطريقة البيانية قيمة الوسيط من الجدول الآتي
الذي يبين عدد المطلقات في جميع أنحاء المملكة المصرية سنة ١٩٤٣.

عدد المطلقات (مئات)	العمر (سنين)
٨١	أقل من ٢٠
٢١٠	٢٠ - ٢٤
٢٠٢	٢٥ - ٢٩
٢٠٧	٣٠ - ٣٩
٧٥	٤٠ - ٤٩
٢١	٥٠ - ٥٩
٥	٦٠ وفوق
٨٠١	

١٨. يبين الجدول الآتي توزيع ٢٣٦ مدينة إنجليزية حسب النسبة المئوية
لعدد العمال العاطلين بها إلى عدد مابها من عمال عاطلين وغير عاطلين. ارسم
المنحنى المتجمع الصاعد ومنه قدر قيمة متوسط نسبة العاطلة.
قارن هذا التقدير بالنتيجة التي تحصل عليها بالحساب.

عدد المدن	نسبة المطالة	عدد المدن	نسبة المطالة
٣٨	— ١٠	١٧	أقل من ٢
٢١	— ١٥	٤٠	— ٢
١٦	— ٢٠	٣٧	— ٤
١٣	— ٣٠	٢٦	— ٦
٨	٤٠ وفوق	٢٠	— ٨

١٩. ١٠ ح و شكل رباعي محدب و ه نقطة داخلية وبمجموع أبعاد ه عن النقط الزاوية أصغر ما يمكن . اثبت أن ه هي نقطة تقاطع القطرين ا ح ، ب ، و .

إذا وقعت و داخل المثلث المسكون من النقط ١ ، ب ، ح فاثبت أن النقطة المطلوبة ه تقع عند و .

٢٠ . يعطى الجدول الآتى نتيجة امتحان الإحصاء لطلبة السنة الثالثة بكلية التجارة بالجيزة فى دور سبتمبر ١٩٤٦ .

المرتبة الحرفية	عدد الطلبة	النسبة المئوية
ضعيف جدا	٢٠	١٤,٤
ضعيف	٦٢	٤٤,٦
مقبول	٤٤	٣١,٦
جيد	١٠	٧,٢
جيد جدا	٣	٢,٢
	١٣٩	١٠٠,٠

ماذا كان متوسط المراتب الحرفية لأولئك الطلبة ؟

٢١ . يبين الجدول الآتى النسب المئوية لمن يتقاضون معاش الشيخوخة فى مختلف الأقسام الإدارية للولايات المتحدة الأمريكية سنة ١٩٣٠ . قدر أكثر النسب شيوعا .

عدد الأقسام	النسبة المئوية	عدد الأقسام	النسبة المئوية
٩	٠,٧٠ — ٠,٧٩	١٩	٠,٠٩ — ٠,٠٠
٢	٠,٨٩ — ٠,٨٠	٤٣	٠,١٩ — ٠,١٠
٢	٠,٩٩ — ٠,٩٠	٣٢	٠,٢٩ — ٠,٢٠
٠	١,٠٩ — ١,٠٠	٢٧	٠,٣٩ — ٠,٣٠
٠	١,١٩ — ١,١٠	١٧	٠,٤٩ — ٠,٤٠
١	١,٢٩ — ١,٢٠	٢١	٠,٥٩ — ٠,٥٠
		١٤	٠,٦٩ — ٠,٦٠
١٨٧			

وضح إجابتك بالرسم .

٢٢. قارن بين قيمتي الأجر النمطي عند حسابه بطريقة كنج وبالطريقة
البيانبة من التوزيع الآتي :-

عدد العمال	الأجر الأسبوعي (دولارات)	عدد العمال	الأجر الأسبوعي (دولارات)
٣٠	— ٢٧,٥	١	— ٢٢,٥
١٧	— ٢٨	٤	— ٢٣
١٧	— ٢٨,٥	٣	— ٢٣,٥
٧	— ٢٩	١١	— ٢٤
٦	— ٢٩,٥	١٠	— ٢٤,٥
٥	— ٣٠	١٢	— ٢٥
٤	— ٣٠,٥	١٥	— ٢٥,٥
١	— ٣١	٢٢	— ٢٦
٠	— ٣١,٥	٢٠	— ٢٦,٥
١	— ٣٢	٢٤	— ٢٧

٢٣. احسب باستخدام طريقة كنج قيمة النمط من التوزيع التكراري
الآتي الذي يبين عدد المتوفين من مرض معين موزعين حسب أعمارهم عند
الوفاة بالسنين .

عدد المتوفين	العمر	عدد المتوفين	العمر
١٢٨	— ٤١	٣٠	— ١
١٣٥	— ٤٦	٤١	— ٦
٨٧	— ٥١	٦٠	— ١١
٨٥	— ٥٦	٦٨	— ١٦
٦١	— ٦١	٧٣	— ٢١
٤٨	— ٦٦	٩١	— ٢٦
٣٩	— ٧١	١٠٥	— ٣١
٢٠	— ٧٦	١١٦	— ٣٦

٢٤ . احسب من البيانات الآتية العمر النمطي لأعمدة التليفون المصنوعة من الخشب^١.

عدد الأعمدة المستبدلة	العمر (سنين)	عدد الأعمدة المستبدلة	العمر (سنين)
١٤٢٣٧	— ١٢	١١٥٠	— ٠
١٣٧٧٩	— ١٣	٤٢٢١	— ١
٩٧٦٤	— ١٤	١٠٦٩٢	— ٢
٨٥٣٤	— ١٥	١٣٩٦٦	— ٣
٧٦٥٩	— ١٦	١٦٦٣٣	— ٤
٦٩١٨	— ١٧	١٨٢١١	— ٥
٤٥٩١	— ١٨	١٩٠١١	— ٦
١٧٩٨	— ١٩	١٩٢٦٠	— ٧
٨١٥	— ٢٠	٢٠٩٠٩	— ٨
٣١٣	— ٢١	١٩٨٧٩	— ٩
١٠٢	— ٢٢	٢٠٧٦٤	— ١٠
٤٧	— ٢٣	١٥٤٥٤	— ١١
٢٤٨٧٠٧			

قارن بين النتائج التي تحصل عليها باستخدام جميع الطرائق التي تعرفها ووضح إجابتك برسم شكل مناسب .

1 Robley Winfrey and Edwin B. Kurtz, Life characteristics of physical property, Iowa Engineering Experiment Station, Bulletin 103, 57.

٢٥. إذا كان المنحنى التكرارى لتوزيع غير متماثل هو

$$ص = \frac{س^2}{(س + ب)^2} (س - ب)$$

فأوجد قيمة النمط حيث أ، ب ثابتان موجبان، م، ن ثابتان يحققان الشرط

$$٠ < م < ١$$

٢٦. اشرح معنى الوسط المرجح.

احسب معدل المواليد لمجموعة المدن المبينة بعد.

المدينة	عدد السكان	معدل المواليد (في الألف)
هل	٣٢٠٠٠٠	١٨,٦
پورتسمث	٢٦٠٠٠٠	١٦,٠
صنڊرلاند	١٨٠٠٠٠	١٩,٤
برايتن	١٥٠٠٠٠	١٣,٨
سوانسى	١٦٠٠٠٠	١٥,٤

٢٧. يبين الجدول الآتى مساحة الأرض التى زرعت قطناً فى مصر خلال

الفترة ١٩٢٩—١٩٤٢ بالفدان ومتوسط غلة الفدان بالقنطار.

السنة	المساحة	متوسط غلة الفدان	السنة	المساحة	متوسط غلة الفدان
١٩٢٩	١٨٤١٤٧٨	٤,٦	١٩٣٦	١٧١٥٨٠٥	٥,٣
١٩٣٠	٢٠٨٢٤٢٠	٤,٠	١٩٣٧	١٩١٨١٥١	٥,٦
١٩٣١	١٦٨٢٩٣٨	٣,٨	١٩٣٨	١٧٨٣٩١١	٤,٧
١٩٣٢	١٠٩٣٧٠١	٤,٦	١٩٣٩	١٦٢٤٨١٧	٥,٣
١٩٣٣	١٨٠٤٢٠٩	٤,٨	١٩٤٠	١٦٨٤٨٦٩	٥,٤
١٩٣٤	١٧٣١٢٥٨	٤,٤	١٩٤١	١٦٤٣٦٢٩	٥,١
١٩٣٥	١٦٦٩٠٠٥	٥,١	١٩٤٢	٧٠٥٨٩٠	٥,٩

احسب متوسط غلة الفدان خلال الفترة المعطاة.

الفصل السادس

التشتت

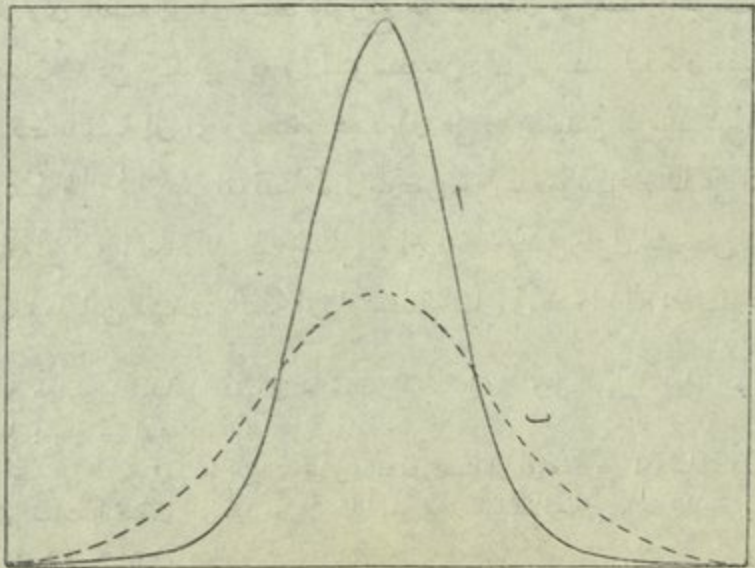
١٠٤ . التشتت والفرص مع دراسة . لعله لم يعد خافيا بعد ماورد في الفصل الخامس عن الأوساط وكيفية استخدامها لتلخيص البيانات والتعبير عن قيمتها النموذجية أن تلخيص الوسط للبيانات أو تمثيله لها ذلك التلخيص أو التمثيل البالغ حد الإيجاز والبلاغة يسلب البيانات جزءا كبيرا من معالمها الأصلية ولا يبقى من تلك المعالم إلا القيمة النموذجية . فالوسط الحسابي لا يعطينا أصغر الحدود التي تتركب البيانات منها ولا أكبر هذه الحدود ولا أى حد آخر بل كل ما يعطيه هو قيمة تقع بين أصغر الحدود وأكبرها بحيث يكون مجموع انحرافات الحدود عن هذه القيمة صفرا . والوسط يعطينا قيمة تقسم الحدود إلى جزئين متساويين خمسين في المائة تحتها وخمسين في المائة فوقها ولكنه لا يعطينا الحدود الأصغر منه ولا الحدود الأكبر منه . والنمط يعطينا أكثر القيم ظهورا لكن هذه القيمة قد تكون قيمة أصغر الحدود أو قيمة أكبر الحدود وقد تكون أية قيمة أخرى . وقس على ذلك مع باقى الأوساط . لذلك نرانا فى حاجة ماسة إلى تعزيز الوسط بثوابت إحصائية أخرى الغرض منها إعطاء معلومات إضافية عن البيانات الأصلية لا يستطيع الوسط وحده إعطاءها . هذه الثوابت الإحصائية الجديدة هى مقاييس التشتت ومعاملاته .

لنأخذ مثلا بسيطا نوضح به معنى التشتت . اعتبر الأعداد الثلاثة ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ . الوسط الحسابي لهذه الأعداد هو ١٠٠ . اعتبر الآن الأعداد الثلاثة ١ ، ١٠٠ ، ١٩٩ . الوسط الحسابي لهذه الأعداد هو أيضا ١٠٠ . رغم هذا الاتحاد فى الوسط نرى أن مجموعتى الأعداد مختلفتان اختلافا تاما فى قرب الأعداد أو بعدها عن بعضها وعن الوسط . فالأعداد فى الحالة الأولى

تكاد لاتنحرف عن وسطها الحسابي لأنها قريبة جدا منه . أما في الحالة الثانية فالأعداد متباعدة جدا . لذلك نقول إن المجموعتين مختلفتان في التشتت .

لنأخذ مثالا ثانيا بسيطا . هب أن جنديا يطلق النار على هدف مكون من دائرة صغيرة سوداء حولها حلقات لها نفس المركز وأنصاف أقطار مختلفة . إذا أطلق الجندي على الهدف مرات كثيرة فإن الطلقات تنتشر فوق الهدف لكن أكثرها يقع في الدائرة الصغيرة السوداء . أما الباقي فكثير منه يقع في الحلقة الأولى والباقي وهو عدد قليل جدا يقع في الحلقات الخارجية . فإذا شطرنّا الهدف إلى نصفين بخط رأسي عند المركز يصير ممكنا عمل توزيع تكراري لعدد الطلقات الواقعة في كل نصف على حدة . أيضا هذا التوزيع يكون متماثلا ولو ظاهريا على الأقل إذا لم يكن للجندي تحيز لأحد النصفين دون الآخر . هب الآن أن هناك جنديين ١ ، ب يطلقان النار على الهدف وأن أحد هذين وليكن ١ يجيد إطلاق النار والآخر لا يجيده . إذا قارنا كيفية انتشار طلقات الجنديين على الهدف نجد أن ب يحصل على طلقات أقل عددا

الشكل ٤٠ . توزيعان تكراريان متحدان في الوسط ومختلفان في التشتت



بالقرب من المركز وعلى طلاقات أكثر في الحلقات الخارجية . فإذا رسمنا المنحنيين التكراريين في شكل واحد (الشكل ٤٠) نجد منحنى الجندي الأول أطول وأنحف من منحنى الثاني ب ونقطتي انقلاب المنحنى الأول لاتقعان رأسيا فوق نقطتي انقلاب المنحنى الثاني . هذا رغم أن الوسط واحد في الحالتين أيا كان نوع هذا الوسط . لذلك نقول إن التوزيعين التكراريين متحدان في الوسط ومختلفان في التشتت .

هذا الاختلاف في التشتت بين مجموعتين من الأعداد متحدين في الوسط أو بين توزيعين تكراريين متحدين في الوسط لا يمكن وصفه بمجرد إعطاء قيمة الوسط في المجموعتين أو التوزيعين بل لابد من تعزيز الوسط بمقياس أو معامل للتشتت . هذا المقياس أو المعامل لا يكون صفرا إلا إذا تساوت جميع الأعداد أو الحدود بحيث كان لا تشتت بينها . وإذا كان المقياس أو المعامل صغيرا كان ذلك دليلا على أن الأعداد متقاربة والتشتت صغير وإذا كان كبيرا كان ذلك دليلا على أن الأعداد متباعدة والتشتت كبير .

١٠٥ . **مفاهيم التشتت** . مقياس التشتت أو التعبير في أي توزيع تكراري بالنسبة إلى أي وسط للتوزيع هو عدد يدل على مقدار انحراف أو اختلاف كل حد للتوزيع في المتوسط عن ذلك الوسط . فكأن مقياس التشتت بالنسبة إلى أي وسط هو عدد يدل على دقة تلخيص الوسط للبيانات أو تمثيله لها . فمثلا هب أننا قسنا طول شخص معين عدة مرات فحصلنا على نتائج مختلفة ثم قررنا اتخاذ الوسط الحسابي للنتائج المختلفة لتمثيل طول الشخص . إذا حسبنا مقياس التشتت بالنسبة إلى الوسط الحسابي في هذه الحالة نحصل على

١ هذا تعريف مقياس التشتت في حالة التوزيع التكراري . ومن السهل استنباط التعريف لسلسلة بسيطة من الأعداد .

أيضا من السهل استنباط تعريف مقياس التشتت بالنسبة إلى أي عدد غير الأوساط . لكن قياس التشتت بالنسبة إلى أي عدد غير الأوساط يعد عملا منافيا للتقاليد التي توضع الإحصائيون عليها في هذا الصدد .

عدد يدل على متوسط الانحرافات أو الفروق بين النتائج المختلفة وبين وسطها الحسابي وهذا العدد يصور تشتت أو تغير تلك النتائج حول وسطها الحسابي . هناك مقاييس كثيرة للتشتت أشهرها ستة . هذه الستة هي المدى ، الانحراف المتوسط ، الانحراف المعياري ، الانحراف الربيعي ، الانحراف العشيري والانحراف المئيني . ولنر الآن كيف يعرف كل واحد من هذه المقاييس الستة بالترتيب وكيف يختسب .

١٠٦ . المدى . ليس المدى جديدا علينا فقد أشرنا إليه عرضا عند الكلام عن التوزيع التكراري وقتنا لسكننا لم نعرف المدى تعريفا صريحا . المدى هو الفرق بين أصغر الأعداد أو الحدود وبين أكبرها . فمثلا في بيانات الجدول ١١ أصغر المعدلات يساوي ٣٠ وأكبرها يساوي ١٢١ والمدى هو ١٢١ - ٣٠ أو ٩١ وحدة . أي أن معدل الوفاة بين الأطفال الإنجليز سنة ١٩٣٩ يقع في المدى ٣٠ + ٩١ أو في المدى ١٢١ - ٩١ . وفي بيانات الجدول ٤٣ تقع المنسوبات بين الحد الأدنى لأول فئة في التوزيع وبين الحد الأعلى لآخر فئة . أي أن المدى هو ٢٠٥ - ٥٥ أو ١٥٠ وحدة والمنسوبات تقع في مدى طوله ١٥٠ وحدة . هذان المثلان البسيطان يوضحان كيفية استخدام المدى لقياس التشتت .

المدى هو أعم المقاييس الستة المذكورة للتشتت . هذا المقياس يعطينا بكل بساطة المسافة التي يقطعها المتغير على المحور الأفقي بين أصغر الأعداد أو الحدود وبين أكبرها . وهذا المقياس يستخدم عندما يكون عدد الأعداد أو التكرار الكلي صغيرا . أو عندما تكون الأعداد أو الحدود نفسها مشتتة إلى درجة لا تبرر احتساب مقياس آخر أدق منه . أو عندما يراد عمل مقارنة أولية سريعة بين مجموعتين من الأعداد أو بين توزيعين تكرارين . وفيما عدا ذلك ليس يوجد ما يبرر استخدام المدى مقياسا للتشتت اللهم إلا إذا كنا

نسعى وراء مقياس سهل احتسابه . فالمدى يتعين تماما بطرفيه الأدنى والأعلى وإذن لا يصور بتاتا حال التوزيع على محور المتغير ما بين الطرفين وهذا بالطبع هو الجزء المهم الذى يحتوى على السواد الأعظم من الحدود . زد على ذلك أنه من المحتمل بطبيعة الحال أن يكون طرفا التوزيع مكونين من حدين غريبين فلا يكون المدى صادقا فى قياسه للتشتت . لأنه إن صح ذلك فإن قيمتى الطرفين تكون كل منهما عرضة لخطأ كبير وهذا الخطأ يعرض المدى نفسه للخطأ ويجعل قيمته الحقيقية غير معروفة إلا على وجه التقريب . أيضا هناك توزيعات تكرارية تمتد فيها المدى إلى ما لانهاية من الجهتين وتوزيعات تمتد فيها المدى إلى ما لانهاية من جهة واحدة وواضح أن المدى لا يصلح لقياس التشتت فى مثل هذه الحالات .

عما تقدم يتضح أن المدى بهذا الشكل البدائى البسيط لا يمكن التفكير فيه كقياس جدى للتشتت ولا بد لقياس التشتت من استخدام أحد المقاييس الخمسة الأخرى . ومع ذلك فقد أمكن تهذيب المدى وجعله مقياسا محترما للتشتت . لسكتنا لا تعرض لهذا الموضوع هنا .

١٠٧ . الانحراف المتوسط . الانحراف المتوسط هو مقياس التشتت الشائع بين الاقتصاديين . وهناك من الأسباب ما يجعله المقياس الطبيعى بل والمنطقى أيضا للتشتت . وستظهر هذه الأسباب بعد قليل .

يتركب قياس التشتت فى الحق من إيجاد وسط يمثل انحرافات الحدود عن الوسط الذى يمثل التوزيع . هذا الوسط الأخير يجوز أن يكون أى وسط من الأوساط الستة المعروفة إلا أن العادة جرت على قصر الوسط فى دراسة التشتت على الوسط الحسابى والوسيط والنقط دون سواها .

لتكن $s_1, s_2, \dots, s_n$ سلسلة الأعداد التى يراد تعريف انحرافها

١ الانحراف المتوسط أسماء أخرى كثيرة كالمتغير المتوسط والخطأ المتوسط والانحراف المطلق والانحراف المطلق المتوسط .

المتوسط وليكن و أى وسط لها . اكتب

ش_١ = س_١ - ، و ش_٢ = س_٢ - ، و ... ، ش_ن = س_ن - و
أو ش = س - و بصفة عامة . هذه الأعداد ش هي انحرافات الأعداد
الأصلية عن وسطها و . وواضح أن بعض هذه الانحرافات سالب وبعضها
موجب أو صفر لأن و وسط يقع بين أصغر الأعداد الأصلية وأكبرها .
فإذا كان و الوسط الحسابي يكون مجموع الانحرافات أى مج ش صفرا . وإذا
كان و الوسيط أو النمط فإن مجموع الانحرافات يكاد يكون صفرا وقد يكون
صفرا . إذن في جميع الحالات نرى أن مجموع الانحرافات أى مج ش لا يصلح
لتعريف الانحراف المتوسط لأنه إما صفر أو عدد صغير . لذلك نأخذ
الانحرافات المطلقة |ش_١| ، |ش_٢| ، |ش_٣| بدلا من الانحرافات نفسها ونستخدم
مجموع هذه الانحرافات المطلقة أى مج |ش| لتعريف الانحراف المتوسط .
الانحراف المتوسط للأعداد س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن بالنسبة إلى أو
عن الوسط و هو الوسط الحسابي البسيط للانحرافات المطلقة . سنكتب ح
ليدل على الانحراف المتوسط فيكون

$$(٤٠) \quad \text{ح} = \frac{1}{n} \text{مج} |ش|$$

هذا الانحراف المتوسط يكتسب أهمية نظرية خاصة عند احتسابه بالنسبة
إلى الوسيط لأن مجموع الانحرافات المطلقة لأى عدد من الأعداد عن وسيطها
أصغر من مجموع انحرافاتها المطلقة عن أى عدد آخر (البند ٨٠) . والانحراف
المتوسط يكون أصغر ما يمكن عندما يحتسب بالنسبة إلى الوسيط .

وسواء كان الوسط المستخدم هو الوسيط أو غيره فاحتساب الانحراف
المتوسط لأى عدد من الأعداد من المعادلة (٤٠) لا يثير أدنى صعوبة . فمثلا
لنحتسب الانحراف المتوسط للأعداد ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، بالنسبة إلى الوسيط .
الوسيط في هذه الحالة هو ٤ والانحرافات عن الوسيط هي ٢ - ٣ ، ٤ - ٤ ،
٤ - ٥ ، ٤ - ٦ ، أى ٢ - ، ٠ ، ٠ ، ٠ ، ٢ - . بأخذ جميع

الإشارات موجبة نرى أن الانحرافات المطلقة عن الوسيط هي ٢، ١، ٠، ١، ٢، ٠. بتطبيق (٤٠) ينتج أن الانحراف المتوسط عن الوسيط هو

$$\bar{x} = \frac{2+1+0+1+2}{5}$$

أو ١.٢.

لتبسيط المعادلة (٤٠) نكتب مج ش لمجموع الانحرافات السالبة، مج ش لمجموع الانحرافات الموجبة والانحرافات التي تساوى صفرا. لدينا

$$\text{مج ش} = \text{مج ش} - \text{مج ش} = \text{مج ش} - (\text{س} - \text{و}) - \text{مج ش} - (\text{س} - \text{و})$$

$$= (\text{مج ش} - \text{ن} \text{و}) - (\text{مج ش} - \text{ن} \text{و})$$

$$= (\text{مج ش} - \text{ن} \text{و}) - (\text{مج ش} - \text{ن} \text{و})$$

حيث ن هو عدد الانحرافات السالبة، ن هو عدد الانحرافات الموجبة. أيضا مج ش هو مجموع السينات الأصغر من و، مج ش مجموع السينات الأكبر من و. إذن

$$(٤١) \quad \bar{x} = \frac{(\text{مج ش} - \text{ن} \text{و}) - (\text{مج ش} - \text{ن} \text{و})}{\text{ن}}$$

هذه الصيغة للانحراف المتوسط صحيحة لكل وسط و. إذا كان و = ب يكون ن = ن بتعريف الوسيط وفي هذه الحالة تأخذ (٤١) الصيغة

$$(٤٢) \quad \bar{x} = \frac{\text{مج ش} - \text{ن} \text{و}}{\text{ن}}$$

أى أن الانحراف المتوسط عن الوسيط يساوى الفرق بين مجموع الأعداد الأكبر من الوسيط ومجموع الأعداد الأصغر من الوسيط مقسوما على عدد الأعداد. فمثلا في المثال السابق الانحراف المتوسط عن الوسيط هو

$$\bar{x} = \frac{(3+2) - (6+0)}{5}$$

أو ١.٢ كما يجب أن يكون.

١ ن + ن يساوى ن - ١ إذا كان ن فرديا ويساوى ن إذا كان ن زوجيا.

لاحتساب الانحراف المتوسط من توزيع تكرارى نفرض أن ك_١ ،
ك_٢ ، ... ، ك_م هي التكرارات وأن س_١ ، س_٢ ، ... ، س_م هي القيم المركزية .
باستخدام الفرض المركزى بالطريقة العادية وتطبيق المعادلة العامة (٤٠)
ينتج أن الانحراف المتوسط فى هذه الحالة هو

$$(٤٣) \quad \frac{\sum K |ش|}{\sum K} = ح$$

حيث ش_١ ، ش_٢ ، ... ، ش_م هي انحرافات مراكز فئات التوزيع عن الوسط
المستخدم و . ذلك هو القانون العام للانحراف المتوسط .

مثال . يصف الجدول ٤٣ توزيع منسوبات أسعار بعض السلع فى سنة
١٩٣٣ على أساس سنة ١٩٢٠ . احسب الانحراف المتوسط عن الوسيط .

الجدول ٥٨ . احتساب الانحراف المتوسط من توزيع تكرارى : الطريقة المطولة
(منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

المنسوب (قيم مركزية) س	عدد السلع ك	الانحراف عن الوسيط (ب = ١١٦,١٤) ش	عدد السلع فى الانحراف المطلق ك ش
٦٠	٣	٥٦,١٤ —	١٦٨,٤٢
٧٠	١١	٤٦,١٤ —	٥٠٧,٥٤
٨٠	٢٦	٣٦,١٤ —	٩٣٩,٦٤
٩٠	٣٩	٢٦,١٤ —	١٠١٩,٤٦
١٠٠	٥٣	١٦,١٤ —	٨٥٥,٤٢
١١٠	٦٨	٦,١٤ —	٤١٧,٥٢
١٢٠	٥٧	٣,٨٦	٢٢٠,٠٢
١٣٠	٤٦	١٣,٨٦	٦٣٧,٥٦
١٤٠	٣٧	٢٣,٨٦	٨٨٢,٨٢
١٥٠	٢٩	٣٣,٨٦	٩٨١,٩٤
١٦٠	١٨	٤٣,٨٦	٧٨٩,٤٨
١٧٠	١٢	٥٣,٨٦	٦٤٦,٣٢
١٨٠	٨	٦٣,٨٦	٥١٠,٨٨
١٩٠	٥	٧٣,٨٦	٣٦٩,٣٠
٢٠٠	١	٨٣,٨٦	٨٣,٨٦
	٤١٣		٩٠٣٠,١٨

الجدول ٥٨ يبين طريقة لاحتساب الانحراف المتوسط المطلوب باستخدام (٤٣). هذه الطريقة واضحة جدا ولا عيب فيها إلا طول عمليات الضرب اللازمة عند استخدامها لإيجاد المجموع $\Sigma K \mid \Sigma$ ولذلك تسمى الطريقة المطولة . لدينا

$$C = \frac{903.18}{413} = 21.86 \text{ وحدة}.$$

معنى ذلك هو أن أى منسوب ينحرف عن المنسوب الوسيط بما يساوى ٢١,٨٦ وحدة فى المتوسط .

١٠٨ . الطريقة المختصرة لاحتساب الانحراف المتوسط عن أى وسط .
إذا كان الوسط الذى يراد احتساب الانحراف المتوسط عنه ، أى عدد وإذا كان $\Sigma = \Sigma + 1 = \Sigma'$ فإن

$$(44) \quad \Sigma = \Sigma' - (1 - \Sigma) = \Sigma' - \Sigma$$

حيث $\Sigma = 1 + \Sigma$. ليسكن Σ مجموع الانحرافات Σ السالبة ، Σ مجموع الانحرافات Σ الموجبة . بالمثل مع Σ ، Σ . إذا اخترنا نقطة الأصل بحيث لا يقع أى Σ بين Σ و Σ ، فإن Σ ، Σ يكونان سالبين معا ويكونان موجبين معا إلا إذا كان أحدهما صفرا وهذا صحيح سواء كان $\Sigma > 1$ أو $\Sigma < 1$. إذن بجمع (٤٤) فوق جميع الانحرافات Σ الموجبة نحصل على

$$(45) \quad \Sigma = \Sigma - \Sigma$$

حيث Σ هو عدد الانحرافات Σ الموجبة إذا كان $\Sigma < 1$ أو عدد الانحرافات Σ الموجبة والتي تساوى صفرا إذا كان $\Sigma > 1$. أيضا بجمع (٤٤) فوق جميع الانحرافات السالبة نحصل على

$$(46) \quad \Sigma = \Sigma - \Sigma$$

حيث Σ هو عدد الانحرافات السالبة والتي تساوى صفرا إذا كان $\Sigma < 1$ أو عدد الانحرافات السالبة إذا كان $\Sigma > 1$. من (٤٥) و (٤٦) ينتج بالطرح أن

$$\Sigma - \Sigma = (\Sigma - \Sigma) - (\Sigma - \Sigma)$$

أو

$$(٤٧) \quad |ش| = |مج| ش' - (ن_٢ - ن_١) ج$$

بقسمة الطرفين على ن ينتج أخيراً أن

$$(٤٨) \quad ح = \frac{|مج| ش' - (ن_٢ - ن_١) ج}{ن}$$

هذا القانون يعطينا طريقة جديدة لاحتساب الانحراف المتوسط عن أى وسط و وهذه تسمى الطريقة المختصرة . فى هذا القانون واضح أن $ن_١$ هو عدد السينات الأصغر من أو التى تساوى أصغر العددين و ، $ن_٢$ وأن $ن_٢$ هو عدد السينات الأكبر من أو التى تساوى أكبر العددين و ، $ا$.

لاحتساب الانحراف المتوسط عن أى وسط و من توزيع تكرارى باستخدام الطريقة المختصرة نجرى العمليات الآتية بالترتيب :-

١ . نأخذ نقطة الأصل $ا$ عند مركز الفئة التى فيها يقع الوسط و . ثم نحسب انحراف مركز كل فئة عن نقطة الأصل بدلالة طول فئة التوزيع إن كانت كل الفئات متساوية أو بدلالة وحدة مناسبة إن لم تكن كل الفئات متساوية . ونسمى هذا الانحراف $ش'$.

٢ . نضرب تكرار كل فئة فى القيمة العددية المطلقة للانحراف المناظر .

٣ . نجمع حواصل الضرب التى نحصل عليها بهذه الكيفية .

٤ . نضرب هذا المجموع فى طول الفئة أو فى الوحدة .

٥ . نطرح من هذه النتيجة العدد $(ن_٢ - ن_١) ج$ حيث $ن_١$ هو مجموع تكرارات الفئات التى لها مراكز أصغر من أو تساوى أصغر العددين و ، $ا$ وحيث $ن_٢$ هو مجموع تكرارات الفئات التى لها مراكز أكبر من أو تساوى أكبر العددين و ، $ا$ $(ن_١ + ن_٢ = ن)$ وحيث $ج$ هو الفرق و - $ا$.

٦ . نقسم باقى الطرح على التكرار الكلى $ن$ فتكون النتيجة الانحراف المتوسط المطاوب $ح$ وذلك حسب (٤٨) .

الجدول ٥٩ يبين كيفية احتساب الانحراف المتوسط عن الوسيط من توزيع تكرارى باستخدام الطريقة المختصرة .

الجدول ٥٩ . احتساب الانحراف المتوسط من توزيع تكرارى : الطريقة المختصرة
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

عدد السلع في الانحراف المطلق ك ش أ	انحراف المركز عن نقطة الأصل (فئات) ش	عدد السلع ك	النسب
١٨	٦ —	٣	— ٥٥
٥٥	٥ —	١١	— ٦٥
١٠٤	٤ —	٢٦	— ٧٥
١١٧	٣ —	٣٩	— ٨٥
١٠٦	٢ —	٥٣	— ٩٥
٦٨	١ —	٦٨	— ١٠٥
.	٠	٥٧	— ١١٥
٤٦	١	٤٦	— ١٢٥
٧٤	٢	٣٧	— ١٣٥
٨٧	٣	٢٩	— ١٤٥
٧٢	٤	١٨	— ١٥٥
٦٠	٥	١٢	— ١٦٥
٤٨	٦	٨	— ١٧٥
٣٥	٧	٥	— ١٨٥
٨	٨	١	— ١٩٥
٨٩٨		٤١٣	

بمجموع الانحرافات المطلقة عن نقطة الأصل = ٨٩٨ فئة = ٨٩٨٠ وحدة
لأن الفئة تساوى ١٠ وحدات . أيضا $p = ١١٦,١٤$ وحدة ، $a = ١٢٠$
وحدة . إذن $j = ١١٦,١٤ - ١٢٠ = ٣,٨٦$ وحدة . أيضا $n = ٢٠٠$ ،
 $p = ٢١٣$ وإذن $n_p - n = ١٣$. إذن
 $(n - n_p) j = (٢٠٠ - ٢١٣) (٣,٨٦) = ٥٠,١٨$ وحدة .
إذن بمجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط = $٨٩٨٠ - (٥٠,١٨)$
 $= ٩٠٣٠,١٨$ وحدة والانحراف المتوسط عن الوسيط هو

$$ح = \frac{١٠٣٠٠٠٠٠٠}{٤١٣} = ٢١,٨٦ \text{ وحدة}$$

كما في الطريقة المطولة .

١٠٩ . الانحراف المعياري^١ . الانحراف المعياري هو أشهر مقاييس التشتت وأكثرها استخداما . وهو أيضا أهمها كلها من الناحية النظرية وقد بلغ من أهمية هذا المقياس في البحوث النظرية أنه صار يعتبر المقياس النظري الوحيد للتشتت وصارت باقي المقاييس تعتبر تقاريب مختلفة له . والانحراف المعياري يشبه الانحراف المتوسط في فكرته لأنه يتوقف مثله على استخدام وسط مناسب وقياس الانحرافات عن هذا الوسط ثم أخذ وسط مناسب لهذه الانحرافات . ففي الانحراف المتوسط نستخدم الوسط الحسابي البسيط للانحرافات المطلقة عن الوسط المستخدم . وفي الانحراف المعياري نستخدم الوسط التربيعي أو جذر متوسط المربعات للانحرافات عن الوسط المستخدم . وكما أن الانحراف المتوسط يكتسب أهمية نظرية خاصة عند احتسابه بالنسبة إلى الوسيط فكذلك الانحراف المعياري يكتسب أهمية خاصة عند احتسابه بالنسبة إلى الوسط الحسابي لأن مجموع مربعات انحرافات أي عدد من الأعداد عن وسطها الحسابي أصغر من مجموع مربعات انحرافات عن أي عدد آخر (البند ٧٠) . والانحراف المعياري يسكون أصغر ما يمكن عندما يحتسب بالنسبة إلى الوسط الحسابي . هذا هو السبب في أن كل الانحرافات المعيارية المهمة تحتسب بالنسبة إلى الوسط الحسابي دون غيره . لدينا التعريف الآتي للانحراف المعياري :

الانحراف المعياري لأي عدد من الأعداد عن أي وسط لها هو الوسط التربيعي لانحرافات الأعداد عن ذلك الوسط . فمثلا الوسط الحسابي للأعداد ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ يساوي ٤ وانحرافات الأعداد عن وسطها الحسابي هي ٢ - ، ١ - ، ٠ ، ١ ، ٢ ، والوسط التربيعي لهذه الانحرافات هو الجذر الموجب

١ مربع الانحراف المعياري يسمى التباين .

$$٢٢ = \sqrt[3]{\left(\frac{١٠}{٥}\right)} = \sqrt[3]{\left(\frac{٤+١+٠+١+٤}{٥}\right)}$$

أو ١,٤١. هذا إذن هو الانحراف المعياري للأعداد ٢, ٣, ٤, ٥, ٦ عن وسطها الحسابي. من التعريف ينتج أن الانحراف المعياري وليكن $\bar{e}$ للأعداد $s_1, s_2, \dots, s_n$ عن وسطها الحسابي $\bar{s}$ هو الجذر الموجب

$$\sqrt[3]{\left(\frac{١}{n} \sum (s_i - \bar{s})^3\right)} = \bar{e} \quad (٤٩)$$

حيث $s_1, s_2, \dots, s_n$ هي انحرافات السينات عن $\bar{s}$ أي $s_i - \bar{s}$, $s_1 - \bar{s}, \dots, s_n - \bar{s}$. من هذه المعادلة يحسب الانحراف المعياري في أية حالة خاصة كما في المثال السابق.

لاحتساب الانحراف المعياري من توزيع تكراري نفرض أن $K_1, K_2, \dots, K_n$ هي تكرارات التوزيع، $s_1, s_2, \dots, s_n$ مراكز فئاته ونستخدم الفرض المركزي كالعادة فيكون مجموع مربعات الانحرافات $\sum K_i (s_i - \bar{s})^2$ حيث $s_1, s_2, \dots, s_n$ هي انحرافات المراكز عن الوسط المستخدم. أيضا عدد الانحرافات في هذه الحالة هو بالطبع التكرار الكلي $\sum K_i$. إذن الانحراف المعياري للتوزيع هو الجذر التربيعي الموجب

$$\sqrt[3]{\left(\frac{\sum K_i (s_i - \bar{s})^2}{\sum K_i}\right)} = \bar{e} \quad (٥٠)$$

هذا هو القانون العام للانحراف المعياري.

الجدول ٦٠ يبين طريقة استخدام (٥٠) لاحتساب الانحراف المعياري عن الوسط الحسابي من توزيع تكراري وهي الطريقة المطولة لاحتساب الانحراف المعياري في مثل هذه الحالة ونلاحظ أن عمليات الضرب اللازمة لها طويلة جدا. من الجدول نجد

$$٠,٧٤٢,٤٩٤٨ = \frac{٣٠٦٦٥٠,٣٦٣٢}{٤١٣} = \bar{e}^2$$

$$\bar{e} = ٢٧,٢٥ \text{ وحدة.}$$

الجدول ٦٠ . احتساب الانحراف المعياري من توزيع تكراري : الطريقة المطولة
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

عدد السلع ك	الانحراف عن الوسط (س = ١١٩,٠٨) ش	مربع الانحراف ش ^٢	عدد السلع ك	الانحراف عن الوسط (س = ١١٩,٠٨) ش	مربع الانحراف ش ^٢	عدد السلع ك	الانحراف عن الوسط (س = ١١٩,٠٨) ش	مربع الانحراف ش ^٢	عدد السلع ك	الانحراف عن الوسط (س = ١١٩,٠٨) ش	مربع الانحراف ش ^٢
٦٠	٥٩,٠٨ —	٣٤٩٠,٤٤٦٤	٦٠	٥٩,٠٨ —	٣٤٩٠,٤٤٦٤	٦٠	٥٩,٠٨ —	٣٤٩٠,٤٤٦٤	٦٠	٥٩,٠٨ —	٣٤٩٠,٤٤٦٤
٧٠	٤٩,٠٨ —	٢٤٠٨,٨٤٦٤	٧٠	٤٩,٠٨ —	٢٤٠٨,٨٤٦٤	٧٠	٤٩,٠٨ —	٢٤٠٨,٨٤٦٤	٧٠	٤٩,٠٨ —	٢٤٠٨,٨٤٦٤
٨٠	٣٩,٠٨ —	١٥٣٧,٢٤٦٤	٨٠	٣٩,٠٨ —	١٥٣٧,٢٤٦٤	٨٠	٣٩,٠٨ —	١٥٣٧,٢٤٦٤	٨٠	٣٩,٠٨ —	١٥٣٧,٢٤٦٤
٩٠	٢٩,٠٨ —	٨٤٥,٦٤٦٤	٩٠	٢٩,٠٨ —	٨٤٥,٦٤٦٤	٩٠	٢٩,٠٨ —	٨٤٥,٦٤٦٤	٩٠	٢٩,٠٨ —	٨٤٥,٦٤٦٤
١٠٠	١٩,٠٨ —	٣٦٤,٠٤٦٤	١٠٠	١٩,٠٨ —	٣٦٤,٠٤٦٤	١٠٠	١٩,٠٨ —	٣٦٤,٠٤٦٤	١٠٠	١٩,٠٨ —	٣٦٤,٠٤٦٤
١١٠	٩,٠٨ —	٨٢,٤٤٦٤	١١٠	٩,٠٨ —	٨٢,٤٤٦٤	١١٠	٩,٠٨ —	٨٢,٤٤٦٤	١١٠	٩,٠٨ —	٨٢,٤٤٦٤
١٢٠	٠,٩٢	٠,٨٤٦٤	١٢٠	٠,٩٢	٠,٨٤٦٤	١٢٠	٠,٩٢	٠,٨٤٦٤	١٢٠	٠,٩٢	٠,٨٤٦٤
١٣٠	١٠,٩٢	١١٩,٢٤٦٤	١٣٠	١٠,٩٢	١١٩,٢٤٦٤	١٣٠	١٠,٩٢	١١٩,٢٤٦٤	١٣٠	١٠,٩٢	١١٩,٢٤٦٤
١٤٠	٢٠,٩٢	٤٣٧,٦٤٦٤	١٤٠	٢٠,٩٢	٤٣٧,٦٤٦٤	١٤٠	٢٠,٩٢	٤٣٧,٦٤٦٤	١٤٠	٢٠,٩٢	٤٣٧,٦٤٦٤
١٥٠	٣٠,٩٢	٩٥٦,٠٤٦٤	١٥٠	٣٠,٩٢	٩٥٦,٠٤٦٤	١٥٠	٣٠,٩٢	٩٥٦,٠٤٦٤	١٥٠	٣٠,٩٢	٩٥٦,٠٤٦٤
١٦٠	٤٠,٩٢	١٦٧٤,٤٤٦٤	١٦٠	٤٠,٩٢	١٦٧٤,٤٤٦٤	١٦٠	٤٠,٩٢	١٦٧٤,٤٤٦٤	١٦٠	٤٠,٩٢	١٦٧٤,٤٤٦٤
١٧٠	٥٠,٩٢	٢٥٩٢,٨٤٦٤	١٧٠	٥٠,٩٢	٢٥٩٢,٨٤٦٤	١٧٠	٥٠,٩٢	٢٥٩٢,٨٤٦٤	١٧٠	٥٠,٩٢	٢٥٩٢,٨٤٦٤
١٨٠	٦٠,٩٢	٣٧١١,٢٤٦٤	١٨٠	٦٠,٩٢	٣٧١١,٢٤٦٤	١٨٠	٦٠,٩٢	٣٧١١,٢٤٦٤	١٨٠	٦٠,٩٢	٣٧١١,٢٤٦٤
١٩٠	٧٠,٩٢	٥٠٢٩,٦٤٦٤	١٩٠	٧٠,٩٢	٥٠٢٩,٦٤٦٤	١٩٠	٧٠,٩٢	٥٠٢٩,٦٤٦٤	١٩٠	٧٠,٩٢	٥٠٢٩,٦٤٦٤
٢٠٠	٨٠,٩٢	٦٥٤٨,٠٤٦٤	٢٠٠	٨٠,٩٢	٦٥٤٨,٠٤٦٤	٢٠٠	٨٠,٩٢	٦٥٤٨,٠٤٦٤	٢٠٠	٨٠,٩٢	٦٥٤٨,٠٤٦٤
٤١٣			٤١٣			٤١٣			٤١٣		

١١٠. الطريقة المختصرة لاحتساب الانحراف المعياري عن الوسط الحسابي .

بقسمة طرفي (٨) على ن ينتج أن

$$\frac{1}{3} \text{ مج ش}^2 = \frac{1}{3} \text{ مج ش}^2 - \text{ج}^2$$

أو

$$\frac{1}{3} \text{ مج ش}^2 = \text{ع}^2 - \frac{1}{3} \text{ مج ش}^2 - \text{ج}^2 \quad (٥١)$$

الآن اكتب

$$\frac{1}{3} \text{ مج ش}^2 = \text{ع}^2 \quad (٥٢)$$

حيث ع^2 يمثل تباين السينات بالنسبة إلى نقطة الأصل الاختيارية .

هذا يعطى

$$\text{ع}^2 = \text{ع}^2 - \frac{1}{3} \text{ مج ش}^2 \quad (٥٣)$$

هذا القانون (٥٣) يعطينا بالاشتراك مع (٥٢) طريقة جديدة اسمها الطريقة المختصرة لاحتساب الانحراف المعياري عن الوسط الحسابي .

يمثل ا في هذه القوانين أى عدد اختياري وهناك حالة خاصة تستحق الذكر لأنها مهمة . إذا أخذنا $1 = 0$. يكون $s = s'$ ، $\bar{s} = \bar{s}$ ج ويصير (٥١)

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \sum s^2 - \left(\frac{1}{n} \sum s \right)^2 \quad (٥٤)$$

أو

$$\bar{s} = \frac{1}{n} \sum s^2 - \bar{s}^2 \quad (٥٥)$$

حيث $\bar{s} = \frac{1}{n} \sum s^2$ هو مربع الوسط التربيعي للسينات . هذا هو القانون (٢٥) مكتوبا في شكل آخر والآن يمثل $\bar{s}$ تباين السينات بالنسبة إلى نقطة الأصل $1 = 0$. هذا القانون الجديد (٥٥) يصلح بنوع خاص لاحتساب الانحراف المعياري لسلسلة بسيطة من الأعداد بشرط ألا يكون عددها كبيرا (لا أكبر من ٥٠) وبشرط ألا يكون أى عدد مكونا من أكثر من رقمين اثنين حتى لا يكون احتساب مربعات الأعداد صعبا .

من (٥٥) نرى أنه إذا اعتبرنا $s_1, s_2, \dots, s_n$ كأنها متغيرات مستقلة يكون الانحراف المعياري $\bar{s}$ دالة متجانسة من درجة ١ في هذه المتغيرات . أى

$$\bar{s}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \bar{s}(ks_1, ks_2, \dots, ks_n) \quad (٥٦)$$

لأى عدد حقيقي k . هذه النتيجة مفيدة في بعض التطبيقات .

الجدول ٦١ يبين طريقة استخدام (٥٣) لاحتساب الانحراف المعياري عن الوسط الحسابي من توزيع تكراري . من هذا الجدول نجد

$$\bar{s} = \frac{38}{13} = 2.9230769 \text{ فئة}$$

$$\bar{s}^2 = 8.54427 \text{ فئة مربعة}$$

$$\bar{s}' = \frac{307}{13} = 23.61538 \text{ فئة مربعة}$$

$$\bar{s}' - \bar{s}^2 = 15.07111 = 7.43414 \text{ فئة مربعة}$$

$$= 2,725 \text{ فئة}$$

$$= 27,25 \text{ وحدة لأن الفئة تساوى عشر وحدات.}$$

الجدول ٦١. احتساب الانحراف المعياري من توزيع تكرارى : الطريقة المختصرة
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

المنسوب	عدد السلع ك	انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية (فئات) ش'	عدد السلع في الانحراف ك ش'	عدد السلع في مربع الانحراف ك ش' ٢
٥٥ —	٣	٦ —	١٨ —	١٠٨
٦٥ —	١١	٥ —	٥٥ —	٢٧٥
٧٥ —	٢٦	٤ —	١٠٤ —	٤١٦
٨٥ —	٣٩	٣ —	١١٧ —	٣٥١
٩٥ —	٥٣	٢ —	١٠٦ —	٢١٢
١٠٥ —	٦٨	١ —	٦٨ —	٦٨
١١٥ —	٥٧	٠	٠	٠
١٢٥ —	٤٦	١	٤٦	٤٦
١٣٥ —	٣٧	٢	٧٤	١٤٨
١٤٥ —	٢٩	٣	٨٧	٢٦١
١٥٥ —	١٨	٤	٧٢	٢٨٨
١٦٥ —	١٢	٥	٦٠	٣٠٠
١٧٥ —	٨	٦	٤٨	٢٨٨
١٨٥ —	٥	٧	٣٥	٢٤٥
١٩٥ —	١	٨	٨	٦٤
٤١٣			٣٨ —	٣٠٧٠

نقطة الأصل الاختيارية في هذه الطريقة يجوز أن تكون أية نقطة بخلاف نقطة الأصل الاختيارية في الطريقة المختصرة لاحتساب الانحراف المتوسط من توزيع تكرارى فإنها لا بد أن تكون مركز الفئة التى فيها يقع الوسط المستخدم ولا يمكن أن تكون خلاف ذلك .

هذه الطريقة المختصرة لاحتساب الانحراف المعيارى لاتصلح إلا إذا كان الوسط المستخدم الوسط الحسابى . ولاحتساب الانحراف المعيارى بالنسبة إلى أى وسط آخر كالوسيط مثلا لا بد من استخدام الطريقة المطولة .

١١١. الانحراف الربيعي^١. الانحراف الربيعي هو أقدم مقاييس التشتت وأطولها تاريخاً. يختلف هذا المقياس عن الانحرافين المتوسط والمعياري في فكرته فهو لا يتوقف مثلهما على فكرة الانحرافات بل هو مقياس وضعي يتوقف على وضعي قيمتين معينتين في السلسلة أو في التوزيع التكراري. هاتان القيمتان هما الربيعان الأول والثالث.

سنشرح الآن ما نقصده بالربيعين الأول والثالث. فكرة الربيع تشبه فكرة الوسيط. فكما أن الوسيط هو تلك النقطة على محور المتغير التي تقسم البيانات بعد ترتيبها حسب القيمة أو توزيعها توزيعاً تكرارياً إلى جزئين متساويين فكذلك الربيعات هي تلك النقاط على محور المتغير التي تقسم البيانات إلى أربعة أجزاء متساوية. واضح أن هناك ثلاثاً من هذه النقاط أو الربيعات أصغر هذه الربيعات الثلاثة يسمى الربيع الأول أو الأدنى وأكبرها يسمى الربيع الثالث أو الأعلى. أما الربيع الثاني أو الأوسط فواضح أنه هو والوسيط شيء واحد. فمثلاً في التوزيع التكراري للمسافة بين الانعكاسات الحلزونية في شعر القطن (الجدول ١٩) إذا رتبنا المسافات ترتيباً تصاعدياً نحصل على الأوضاع الآتية: ٢٧٩ مسافة (الربيع الأول) ٢٧٩ مسافة (الوسيط) ٢٧٩ مسافة (الربيع الثالث) ٢٧٩ مسافة. أي أن الربيع الأول يقع بين ٨,٥ و ١٠,٥ وحدة والربيع الثالث يقع بين ٢٨,٥ و ٣٢,٥ وحدة. أما الوسيط فيقع بين ١٦,٥ و ٢٠,٥ وحدة.

واضح أن انحراف الربيعين الأول والثالث عن الوسيط أي الفرق بين كليهما وبين الوسيط يعطيان فكرة جيدة عن تشتت التوزيع. فكما كان هذان الانحرافان صغيرين كان التشتت صغيراً وكما كانا كبيرين كان التشتت كبيراً. هذان الانحرافان لا يتساويان إلا إذا كان التوزيع متماثلاً وواضح أنه لا يوجد ما يدعو إلى اتخاذ أحدهما دون الآخر مقياساً للتشتت. لذلك نأخذ الوسيط

١ يسمى أيضاً الانحراف المحتمل والخطأ المحتمل.

الحسابي للانحرافين المذكورين ونسميه الانحراف الربيعي . هذا العدد يعطى ولاشك مقبلا ساقيا لسكثافة التوزيع حول نقطة تنصيفه .

ليكن b_1 الربيع الأول ، b_2 الربيع الثاني أو الوسيط ، b_3 الربيع الثالث وليكن b الانحراف الربيعي . بتطبيق التعريف ينتج أن

$$(٥٧) \quad b = \frac{(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3)}{2} = \frac{b_1 - b_3}{2}$$

هذه الصيغة الأخيرة تبين أن الانحراف الربيعي يساوى نصف الفرق بين الربيعين الأول والثالث . هذا هو السبب في أن الانحراف الربيعي كان وما زال يعرف باسم نصف المدى أو نصف المسافة بين الربيعين . وواضح أن الانحراف الربيعي موجب دائما .

لاحتساب الانحراف الربيعي في أية حالة خاصة باستخدام (٥٧) لابد من احتساب الربيعين الأول والثالث أولا . فإذا طرحنا الربيع الأصغر من الربيع الأكبر وقسمنا الفرق على ٢ تكون النتيجة الانحراف الربيعي المطلوب . واحتساب الربيعين الأول والثالث لا يختلف كثيرا عن احتساب الوسيط . فمثلا التغير الوحيد اللازم إدخاله في القانون (٢٧) لاحتساب الوسيط من توزيع تكراري حتى يصلح لاحتساب الربيع هو تغيير $\frac{1}{2}$ إلى $\frac{1}{4}$ للربيع الأول أو إلى $\frac{3}{4}$ للربيع الثالث مع تغيير معاني باقي الرموز بالطبع حتى تتفق مع تغيير $\frac{1}{4}$ إلى $\frac{3}{4}$ أو $\frac{5}{4}$.

فمثلا في التوزيع التكراري لمنسوبات الأسعار في ١٩٢٣ لدينان = ٤١٣ ، $\frac{1}{4} = ١٠٣,٢٥$ ، $\frac{3}{4} = ٣٠٩,٧٥$. إذن على أساس الفرض المركزي يكون

$$b_1 = ٩٥ = ١٠ \times \frac{٧٩ - ١٠٣,٢٥}{٥٣} + ٩٩,٥٨$$

$$b_3 = ١٣٥ = ١٠ \times \frac{٣٠٣ - ٣٠٩,٧٥}{٣٧} + ١٣٦,٨٢$$

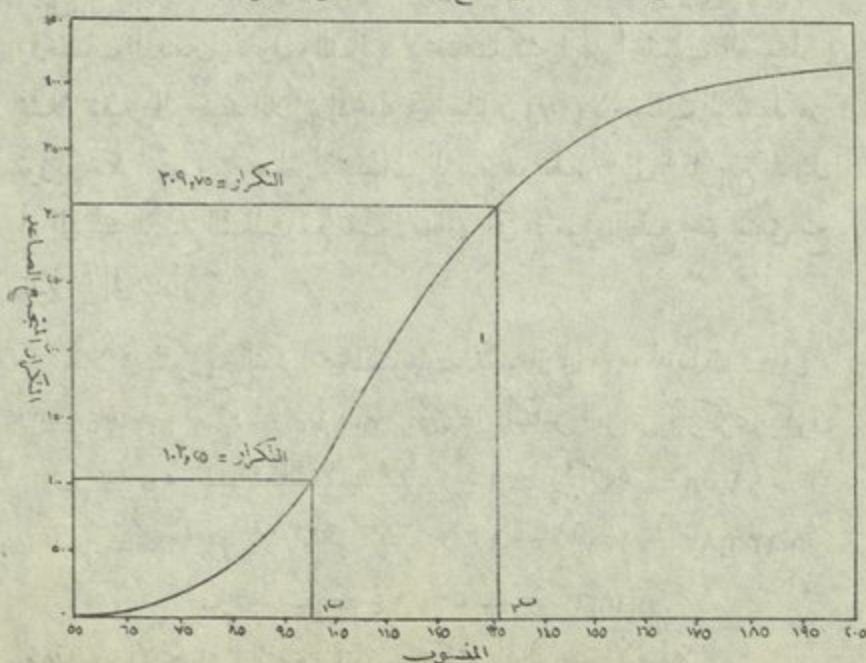
$$b_2 - b_1 = ٣٧,٢٤ = b$$

وهذا هو الانحراف الربيعي للتوزيع مكتوبا بالوحدة الأصلية .

١١٢ . الطريقة البيانية لإيجاد الانحراف الربيعي من توزيع تكرارى .
 يفرد الانحراف الربيعي من بين مقاييس التشتت المدروسة حتى الآن بإمكان
 إيجاد من توزيع تكرارى بطريقة بيانية . أما الطريقة فتتوقف على استخدام
 المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط .

للحصول على الربيعين الأول والثالث بيانياً نرسم خطين مستقيمين أقيين
 عند النقطتين $\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{4}$ على المحور الرأسى حيث ن هو التكرار الكلى للتوزيع
 ومن نقطتي تقاطع هذين الخطين مع المنحنى المتجمع نرسم خطين مستقيمين
 رأسيين . هذان يقطعان المحور الأفقى عند الربيعين المطلوبين وبأخذ نصف
 الفرق بين هذين نحصل على الانحراف الربيعي المطلوب .
 الشكل ٤١ يوضح الطريقة فى حالة التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار
 مجموعة السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ .

الشكل ٤١ . إيجاد الانحراف الربيعي من توزيع تكرارى : الطريقة البيانية
 (منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)



١١٣. الخطأ المحتمل . إذا مثلت الربيعات الثلاثة على شكل تكرارى كما فى الشكل ٣٧ فإن الخطوط الرأسية التى تمثلها تقسم المساحة الواقعة تحت الشكل إلى أربعة أجزاء متساوية لأن عدد الحدود الأصغر من الربيع الأدنى وعدد الحدود الواقعة بين هذا الربيع وبين الوسيط وعدد الحدود الواقعة بين الوسيط وبين الربيع الأعلى وعدد الحدود الأكبر من الربيع الأعلى كلها متساوية وكل واحد منها يساوى بالتعريف ربع التكرار الكلى . إذن المساحة الواقعة تحت الشكل بين الخططين الرأسين المرسومين عند الربيعين الأدنى والأعلى تساوى نصف المساحة كلها . لذلك نقول إن احتمال وجود أية قيمة s فى المدى $b_1 < s < b_2$ يساوى $\frac{1}{4}$ أى أن احتمال وجود s فى المدى ٢ المحصور بين الربيعين الأدنى والأعلى يساوى احتمال وجود s خارج نفس المدى . لهذا السبب عرف الانحراف الربيعى b فى نظرية الأخطاء منذ زمن طويل باسم الانحراف أو الخطأ المحتمل .

إذا كان التوزيع التكرارى متماثلاً فإن النتيجة السابقة يمكن أن تذكر فى الصيغة الآتية : احتمال انحراف أى حد عن الوسط بمقدار أصغر من b زيادة أو نقصا يساوى احتمال انحراف الحد عن الوسط بمقدار أكبر من b . فمثلاً إذا كان التوزيع متماثلاً والوسط يساوى ١٠٠ والانحراف الربيعى أو الخطأ المحتمل يساوى ١٠ يكون احتمال انحراف أى حد عن ١٠٠ بمقدار أصغر من ١٠ زيادة أو نقصا يساوى احتمال انحراف الحد عن ١٠٠ بمقدار أكبر من ١٠ . ويمكننا أن نقول إن نصف حدود التوزيع تقع بين ٩٠ ، ١١٠ والنصف الآخر إما أصغر من ٩٠ أو أكبر من ١١٠ .

فى التوزيع التكرارى المتماثل إذا رسمنا خطين رأسيين يبعد كل منهما عن

١ احتمال وجود أية قيمة s فى المدى $s' < s < s''$ يتناسب مع المساحة الواقعة تحت المنحنى التكرارى بين الخططين الرأسين $s = s'$ ، $s = s''$ ويساوى نسبة هذه المساحة إلى المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى . والنتيجة المذكورة تنبع بأخذ $s' = b_1$ ، $s'' = b_2$.

الوسط مسافة تساوى الانحراف الربيعي يحصر الخطان بينهما مساحة تساوى ٥٠ في المائة من المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى التكرارى . ماذا يحدث إذا نحن استبدلنا الانحراف الربيعي بالانحراف المتوسط أو المعيارى ؟ يكفينا هنا ذكر النتائج . إذا استخدمنا الانحراف المتوسط نحصل على مساحة تساوى ٥٧,٥ في المائة تقريبا من المساحة الكلية وإذا استخدمنا الانحراف المعيارى نحصل على ٦٨,٢٧ في المائة تقريبا من المساحة الكلية أى على مايقرب من ثلثى هذه المساحة . أيضا الخطان الرأسيان المرسومان فى هذه الحالة الأخيرة يمران بنقطتى انقلاب المنحنى التكرارى المتماثل .

هذه المساحات الواقعة تحت المنحنى التكرارى المتماثل كانت فى وقت ما موضوع دراسة من جانب عدد كبير من الرياضيين والإحصائيين على السواء وقد وضعت النتائج فى جداول^١ . فمثلا وجد أن المساحة الواقعة تحت المنحنى بين خطين رأسيين يبعد كل منهما عن الوسط مسافة تساوى ثلاثة أمثال الانحراف المعيارى تساوى ٩٩,٧٣ فى المائة تقريبا من المساحة كلها أى مايربى على ٩٩ فى المائة من هذه المساحة . إذن جل هذه المساحة يقع فى مدى طوله ٦ على جانبي الوسط . هذه الجداول قيمة ومفيدة لاشك . فمثلا من النتيجة الأخيرة نعلم أنه إذا أعطينا توزيعا تكراريا متماثلا فهما تغيرت الحدود أو تشتتت فإن احتمال انحراف أى حد عن الوسط بمقدار أكبر من ثلاثة أمثال الانحراف المعيارى زيادة أو نقصا لا يمكن أن يتجاوز ٥ فى المائة .

وفى الوقت الذى فيه درست المساحة الواقعة تحت المنحنى التكرارى المتماثل درست كذلك العلاقات بين المقاييس المختلفة للنشنت لما بين المسألتين من صلة واضحة . فوجد أن الانحراف الربيعى فى أى توزيع تكرارى متماثل

١ انظر أمين بس أمين ، جداول إحصائية (القاهرة ، دار الفكر العربى ، ١٩٤٧) ، الجدول ٦ .

هذا الجدول يعطى المساحات الواقعة تحت المنحنى التكرارى المتماثل فى المدى من ٠,٠٠ إلى ٥,٠٠ انحرافا معياريا .

أصغر دائماً من الانحراف المتوسط وأن الانحراف المتوسط أصغر من الانحراف المعياري . هذا يساعد ولا شك على ضبط الأخطاء في النتائج الحسابية . أما العلاقات بين هذه الانحرافات الثلاثة فهي

$$(٥٨) \quad \epsilon = 1,4826 \text{ ب} \quad \text{ب} = 0,6745 \epsilon$$

$$(٥٩) \quad \text{ب} = 0,8453 \text{ ح} \quad \text{ح} = 1,1843 \text{ ب}$$

$$(٦٠) \quad \text{ح} = 0,7980 \epsilon \quad \epsilon = 1,2533 \text{ ح}$$

هذه العلاقات تختصر عادة إلى الصيغ الآتية البسيطة :

$$(٦١) \quad \text{ب} = \frac{2}{3} \epsilon$$

$$(٦٢) \quad \text{ب} = \frac{2}{3} \text{ ح}$$

$$(٦٣) \quad \text{ح} = \frac{3}{2} \epsilon$$

كل هذه النتائج تظل صحيحة على وجه التقريب للتوزيع التكراري غير المتماثل بشرط أن يكون التوزيع بسيط الالتواء ووحيد النمط وبشرط أن يقاس الانحراف المتوسط بالنسبة إلى الوسيط والانحراف المعياري بالنسبة إلى الوسيط الحسابي . فمثلاً في التوزيع التكراري لمنسوبات الأسعار في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ وهو توزيع بسيط الالتواء كما نعلم (البند ٨٥) لدينا

$$\bar{\text{س}} = 119,08 \quad \epsilon = 27,25$$

$$\epsilon = 81,75$$

$$\bar{\text{س}} - 3 \epsilon = 27,23 \quad \bar{\text{س}} + 3 \epsilon = 200,83$$

ويمكننا أن نقول إن عدد السلع التي لها منسوب أصغر من ٢٧,٢٣ أو أكبر من ٢٠٠,٨٣ لا يمكن أن يتجاوز ١ في المائة من ٤١٣ أي ٤ . بالرجوع إلى الجدول ٤ الذي يعطى هذا التوزيع نجد أن المنسوبات تبدأ عند ٥٥ وليس

١ الصيغة المضبوطة لهذه العلاقة هي

$$\text{ح} \left(\frac{2}{3} \right) = \epsilon \quad \epsilon \left(\frac{2}{3} \right) = \text{ح}$$

وهنا يرمز ط للعدد الشهير ٣,١٤١٥٩... وليس لـ π .

يوجد سلع ذات منسوب أصغر من ٣٧,٣٣ . أيضا عدد السلع التي لها منسوب بين ١٩٥ ، ٢٠٥ هو ١ . إذن الآن نعرف أن عدد السلع التي لها منسوب منحرف عن الوسط الحسابي للمنسوبات بمقدار أكبر من ثلاثة أمثال الانحراف المعياري عن الوسط هو ١ وهذا أصغر من ١ في المائة من ٤١٣ . وعن هذا التوزيع نعرف أيضا أن

$$ح = ٢١,٨٦ ، ع = ٢٧,٢٥ ، ب = ١٨,٦٢$$

$$\frac{٢}{٣} ع = ١٨,١٧ ، \frac{٤}{٥} ع = ٢١,٨٠$$

وواضح أن $ب = \frac{٢}{٣} ع$ وأن $ح = \frac{٤}{٥} ع$ على وجه التقريب .

مثال . في ١٠٠ قراءة لكمية ما كم يكون عدد القراءات التي ينتظر أن تختلف عن الوسط بأقل من

(١) الخطأ المحتمل ، (٢) الخطأ المطلق المتوسط ؟

احتمال انحراف أية قراءة عن الوسط بأقل من الخطأ المحتمل زيادة أو نقصا يساوى ٥٠ في المائة . وبما أن عدد القراءات هو ١٠٠ إذن عدد القراءات التي يحتمل أن تختلف عن الوسط بأقل من الخطأ المحتمل هو

$$٠,٥٠ = ٠,٥٠ \times ١٠٠$$

أيضا احتمال انحراف أية قراءة عن الوسط بأقل من الخطأ المطلق المتوسط زيادة أو نقصا يساوى ٥٧,٥ في المائة . إذن عدد القراءات التي يحتمل أن تختلف عن الوسط بأقل من الخطأ المطلق المتوسط هو

$$٥٧,٥ = ٠,٥٧٥ \times ١٠٠$$

أى يساوى ٥٧ .

١١٤ . الانحراف العسيري والانحراف المئينى . العشيرات هي تلك النقاط

على محور المتغير التي تقسم التوزيع التكرارى إلى عشرة أجزاء متساوية . وواضح أن هناك تسعا من هذه النقاط أو العشيرات وأن العشير الخامس أو الأوسط هو الوسيط .

واضح أن العشيرات التسعة تقيس التشتت بكيفية تشبه قياس الربيعات له غير أن العشيرات تعطى بالطبع فكرة أجود عن التشتت مما تعطيه الربيعات . ولقياس التشتت باستخدام العشيرات يكتفى عادة بذكر قيم العشيرات التسعة بالترتيب لأنه لم يتم الاتفاق بعد على انحراف عشيرى معين لقياس التشتت . ويميل بعض الإحصائيين رغم ذلك إلى تعريف الانحراف العشيرى بأنه الفرق بين العشيرين الأول والتاسع أو بأنه نصف هذا الفرق . لكن قيم العشيرات التسعة كفيالة في ذاتها بإظهار مقدار ما في التوزيع التكرارى من تشتت ووصف هذا التشتت وصفا دقيقا مفصلا .

المئينات هى تلك النقط على محور المتغير التى تقسم التوزيع التكرارى إلى مائة جزء متساوية . وواضح أن هناك تسعا وتسعين مئينا . هذه المئينات تنتقل بفكرة تقسيم التوزيع إلى أجزاء متساوية إلى أبعد ما تصل إليه الربيعات أو العشيرات . فمثلا المئين الثالث والأربعون هو تلك النقطة على محور المتغير التى تقسم التوزيع إلى جزئين أحدهما وهو الواقع تحتها يحتوى على ٤٣ في المائة من التكرار الكلى والجزء الآخر يحتوى على مابقى من ذلك التكرار أى ٥٧ في المائة منه . وواضح أن هذه النقطة لا يمكن الحصول عليها عن طريق الربيعات أو العشيرات . لكن المئين العاشر هو العشير الأول والمئين الخامس والعشرين هو الربع الأول والمئين الخمسين هو العشير الخامس أو الربع الثانى أو الوسيط إلخ .

تستخدم المئينات بكثرة في العلوم الاجتماعية وبالأخص في علم التربية وعلم النفس . لكنها قليلة الاستخدام جدا في دراسة البيانات العامة وبالأخص البيانات الاقتصادية لأننا في العادة لانريد صورة أكثر تفصيلا للتوزيع مما تعطيه العشيرات .

واحساب العشيرات والمئينات لا يختلف كثيرا عن احتساب الوسيط والربيعات . فإن كانت البيانات لا تزال على حالها الأصلية سلسلة بسيطة من

الأعداد فإن احتساب العشيرات والمئينات لا يتطلب أكثر من تقسيم الأعداد بعد ترتيبها إلى العدد المطلوب من الأجزاء المتساوية عشرة كان أو مائة. وإن كانت البيانات موزعة توزيعاً تكرارياً تحتسب العشيرات أو المئينات باستخدام القانون (٢٧) للوسيط بعد إدخال التغيرات اللازمة عليه. ويمكننا أيضاً الحصول على العشيرات والمئينات في هذه الحالة بكل بساطة باستخدام الطريقة البيانية. فترسم المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط للتوزيع ونقسم المحور الرأسي إلى عشرة أجزاء متساوية أو إلى مائة جزء متساوية في الحالتين بالترتيب.

الآن يمكننا الشروع في تعميم فكرة العشير والمئين بالبحث عن تلك النقاط على محور المتغير التي تقسم التوزيع التكرارى إلى l جزءاً متساوياً حيث l أى عدد صحيح موجب. هناك $l-1$ من هذه النقاط. لتكن $r = (1, 2, \dots, l-1)$ قيم المتغير التي تناظر هذه النقاط بالترتيب. بتعديل القانون (٢٧) لاحتساب الوسيط من توزيع تكرارى تعديلاً مناسباً بالكيفية الواضحة نحصل على القانون الآتى لاحتساب القيم $r = (1, 2, \dots, l-1)$ من توزيع تكرارى:

$$(٦٤) \quad r = ar + \left(r - \frac{n}{l} \right) \frac{f_r}{k_r} \quad (r=1, 2, \dots, l-1)$$

حيث k_r هو تكرار الفئة التي فيها يقع r ، ar الحد الأدنى لهذه الفئة، f_r طولها، k_r هو مجموع التكرارات من التكرار الأول إلى تكرار الفئة التي تسبق فئة r مباشرة أى

$$k_r \geq r \geq \frac{n}{l} > k_r + k_r.$$

ذلك هو القانون العام لاحتساب أية قيمة من هذا القبيل. فلاحساب

١ في ١٩٢٠ أثبت كارل بيرسن أن انحراف الخط الرأسي الذى يفصل $\frac{1}{4}$ من المساحة الواقعة تحت المنحنى التكرارى يعطى التشتت في حالة التوزيع المتماثل إلى درجة كبيرة من الدقة.

الوسيط نأخذ ل = ٢ ولاحتساب الريعيات نأخذ ل = ٤ ولاحتساب العشيريات نأخذ ل = ١٠ ولاحتساب المئينات نأخذ ل = ١٠٠ .

مثال . يعطى الجدول ٤٣ التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ . احسب قيم العشيريات التسعة للتوزيع .
الجدول ٥٢ يعطى التكرارات المتجمعة الصاعدة لتوزيع المنسوبات .
باستخدام هذه التكرارات والقانون (٦٤) مع ل = ١٠ نحسب القيم التسع المطلوبة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ .
بالكيفية الآتية . لدينان = ٤١٣، $\frac{1}{10} = ٤١,٣$. إذن

$$٨٥,٣٣ = ٨٥\frac{1}{3} = ١٠ \times \frac{٤٠ - ٤١,٣}{39} + ٨٥ = ١٠$$

$$٩٥,٦٨ = ٩٥\frac{26}{39} = ١٠ \times \frac{٧٩ - ٨٣,٦}{53} + ٩٥ = ٢٠$$

$$١٠٣,٤٧ = ١٠٣\frac{20}{39} = ١٠ \times \frac{٧٩ - ١٢٣,٩}{53} + ٩٥ = ٣٠$$

$$١٠٩,٨٨ = ١٠٩\frac{10}{17} = ١٠ \times \frac{١٣٢ - ١٦٥,٢}{68} + ١٠٥ = ٤٠$$

$$١١٦,١٤ = ١١٦\frac{8}{17} = ١٠ \times \frac{٢٠٠ - ٢٠٦,٥}{57} + ١١٥ = ٥٠ \quad (\text{الوسيط})$$

$$١٢٣,٣٩ = ١٢٣\frac{22}{57} = ١٠ \times \frac{٢٠٠ - ٢٤٧,٨}{57} + ١١٥ = ٦٠$$

$$١٣١,٩٨ = ١٣١\frac{40}{57} = ١٠ \times \frac{٢٥٧ - ٢٨٩,١}{٤٦} + ١٢٥ = ٧٠$$

$$١٤٢,٤١ = ١٤٢\frac{10}{37} = ١٠ \times \frac{٣٠٣ - ٣٣٠,٤}{37} + ١٣٥ = ٨٠$$

$$١٥٦,٥٠ = ١٥٦\frac{1}{4} = ١٠ \times \frac{٣٦٩ - ٣٧١,٧}{١٨} + ١٥٥ = ٩٠$$

هذه النتيجة الأخيرة تدل على أن تسعة أعشار السلع لها منسوب أصغر

من ١٥٦,٥ .

١١٥ . معاملات النشنت . كل مقاييس النشنت التى عرفناها وتكلمنا عنها فى هذا الفصل تعبر عنها فى حالتها الراهنة أعداد مطلقة وهذه الأعداد المطلقة تميز بنفس الوحدة التى تميز المتغير الملائم للسألة . فى هذا البند نحول هذه الأعداد المطلقة إلى نسب ونبين كيفية استخدام هذه النسب لقياس النشنت . هذه النسب تسمى معاملات النشنت .

واضح أن المقام الذى عليه نقسم أى مقياس حتى نحوله إلى معامل هو القيمة النموذجية للبيانات . أى أننا نقسم كل مقياس على الوسط الذى استخدم عند احتساب الانحرافات وفى حالة الانحراف الربيعى لنا أن نقسم على الوسيط أو أحسن على الوسط الحسابى للربيعين الأول والثالث . فمثلا من الانحراف المتوسط نحصل على معاملات التشتت $\bar{c}/\bar{s}$ ، $\bar{c}/\bar{p}$ ، $\bar{c}/\bar{m}$ وذلك حسب كون الانحراف المتوسط مقيسا بالنسبة إلى الوسط الحسابى أو الوسيط أو النمط بالترتيب . لكن أهم هذه المعاملات هو بالطبع ثانيها وهذا نسميه المعامل المتوسط للتشتت . بالمثل المعامل المعيارى هو $\bar{c}/\bar{s}$ والمعامل الربيعى هو $\bar{c}/\bar{p}$ أو أحسن $(\bar{p} - \bar{m})/(\bar{p} + \bar{m})$. وقد اقترح كارل بيرسن تسمية المعامل المعيارى للتشتت مضروبا فى مائة أى $100 \bar{c}/\bar{s}$ معامل التغير . هذا المعامل هو بالطبع النسبة المئوية بين الانحراف المعيارى والوسط الحسابى .

الجدول ٦٢ يعطى قيم المقاييس الثلاثة الرئيسية للتشتت وقيم المعاملات المناظرة لها فى حالة التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار مجموعة السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ ويبين علاقة هذه المقاييس والمعاملات كل لنظيره .

الجدول ٦٢ . مقاييس التشتت ومعاملاته

(منسوبات أسعار بعض السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

المقياس	قيمة	
	المعامل	المقياس
ح	٠,١٨٨	٢١,٨٦
ع	٠,٢٢٩	٢٧,٢٥
ب	٠,١٦٠ أو ٠,١٥٨	١٨,٦٢

أيضا معامل بيرسن للتغير يساوى ٢٢,٩ .

واضح أن معامل التشتت كمقياس التشتت يدل على مقدار انحراف كل

حد في المتوسط عن الوسط . وأنه كلما كان المعامل صغيرا كانت الحدود قريبة من وسطها وكلما كان المعامل كبيرا كانت الحدود بعيدة عن وسطها . تلك إحدى فوائد معامل التشتت . لكن الفائدة الحقيقية للمعامل لا تظهر إلا عند المقارنة بين التشتت في توزيعين تكراريين مختلفين . إذا أعطينا مثل هذين التوزيعين وكان الفرق بين وسطيهما صغيرا فإننا نستطيع المقارنة بينهما من حيث التشتت بذكر الوسط في كل منهما والمقياس المناسب للتشتت كأن نذكر الوسيط في كل منهما والانحراف المتوسط أو الوسط الحسابي في كل منهما والانحراف المعياري أو الوسيط في كل منهما والانحراف الربيعي إلخ . أما إذا كان الفرق بين الوسيطين كبيرا فإن المقارنة بين التوزيعين على هذا النحو لا تكون مثمرة ولا بد من استخدام معامل التشتت الذي يتوقف على الوسط والمقياس معا . وحتى إذا كان الفرق بين الوسيطين صغيرا والوحدتان المستخدمتان لقياس المتغير في التوزيعين مختلفتين بأن كانت إحدى الوحدتين قرشا والثانية ساعة فإننا لا نستطيع المقارنة بين التوزيعين من حيث التشتت مباشرة باستخدام الوسط والمقياس . بل لابد في هذه الحالة أيضا من استخدام معامل التشتت لأن هذا لا يتوقف على الوحدة المستخدمة لقياس المتغير لأنه نسبة مجردة عن التمييز . تلك هي الفائدة الحقيقية والوظيفة الرئيسية لمعامل التشتت .

١١٦ . الشروط الواجب توافرها في المقياس الجيد للتشتت .^١ الشروط الواجب توافرها في المقياس الجيد للتشتت هي بعينها الشروط الواجب توافرها في الوسط الجيد (البند ٨٨) لأن أكثر مقاييس التشتت إن هي إلا أوساط لسلسلة من الانحرافات . إذن نشترط في المقياس الجيد للتشتت أن يكون

١ بما أن الانحرافين العشري والمئتي لا يختلفان اختلافا ماديا عن الانحراف الربيعي إذن سنتركهما خارج موضوع هذا البند ونعتبر أن كل ما يقال عن الانحراف الربيعي يسرى عليهما أيضا . وسنترك أيضا المدى كأساس لتقدير التشتت لأننا في هذا الكتاب لا نعتبره مقياسا جيدا للتشتت .

معرفا تعريفا متينا وأن يكون بسيطا وخاليا من التعقيد وأن يكون سهل الاحتساب وأن يكون في متناول العمليات الجبرية وأن يكون مستقرا .
نقول إننا نشترط كل هذا في أى مقياس جيد للتشتت فإلى أى حد تتوافر هذه الشروط في المقاييس الثلاثة الآتية للتشتت : الانحراف المتوسط ، الانحراف المعياري والانحراف الربيعي ؟ للإجابة عن هذا السؤال سنأخذ المقاييس الثلاثة ونبحثها الواحد تلو الآخر في ضوء الشروط الخمسة المذكورة .
الانحراف المتوسط مقياس متين التعريف بل اريب وربما كان أبسط المقاييس الثلاثة وأكثرها خلوا من التعقيد . بل ربما كان المقياس الطبيعي والمنطقي للتشتت . وهو أيضا مقياس سهل الاحتساب . لكنه لا يقع بسهولة في متناول العمليات الجبرية وهذا راجع إلى توقيفه على تغيير بعض الإشارات من سالب إلى موجب . لذلك نجد الانحراف المتوسط قليل الاستخدام في البحوث الإحصائية العالية وقد أصبح الآن أقل شأنا بكثير من الانحراف المعياري .

والانحراف المعياري كالانحراف المتوسط متين التعريف لكنه ليس في بساطته ولا يفهم بسهولة مثله . أيضا احتساب الانحراف المعياري أصعب قليلا من احتساب الانحراف المتوسط لكنه يقع في متناول العمليات الجبرية وهذه ميزة كبيرة . وفيما يختص بشرط الاستقرار يمكننا أن نقول إن الانحراف المعياري هو أكثر المقاييس الثلاثة استقرارا .

والانحراف الربيعي لا يحقق شرط متانة التعريف وبالأخص إذا كان المتغير منفصلا شأنه في ذلك شأن الوسيط والنمط . لكنه مقياس بسيط وسهل في فهمه . وهو أيضا سهل في احتسابه بل هو أول المقاييس الثلاثة تلبية لشرط سهولة الاحتساب . لكنه لا يقع في متناول العمليات الجبرية شأنه في ذلك شأن الوسيطين الوضعيين . ولا يمكن أن يقال عنه إنه مستقر .

مما تقدم يتضح أن الانحراف المعياري هو أكثر المقاييس الثلاثة أمثالا

للسروط الخمسة الواجب توافرها في المقياس الجيد للتشتت . يمكننا إذن أن نتفق مع يول على أن الانحراف المعياري هو المقياس الوحيد الذي يمكن استخدامه في دراسة التشتت الإحصائي إلا إذا وجدت أسباب تبرر أو تحتم استخدام مقياس آخر خلافاً^١.

إذا اتفقنا مع يول على هذا الرأي الأخير فواضح أن دائرة اختيارنا لمقياس التشتت الذي نستخدمه في أية حالة معينة تكون محدودة جداً وتضييق دائرة الاختيار على هذا النحو هو بالطبع هدفنا الذي نرمي إليه في هذا البند . لكن الاتفاق مع يول على رأيه هذا لا يمنع كما قلنا من استخدام مقياس آخر غير الانحراف المعياري إن وجدت أسباب تبرر أو تحتم استخدام ذلك المقياس الآخر . فمثلاً هناك حالات يكون استخدام الانحراف الربيعي فيها أفضل وأريح من استخدام الانحراف المعياري . تلك الحالات هي بعينها الحالات التي فيها يكون استخدام الوسيط أو النقط أفضل من استخدام الوسط الحسابي والأوساط القانونية عموماً . نقصد بذلك أولاً الحالات التي فيها تكون لبعض حدود البيانات قيم متطرفة ولا يراود إقامة وزن كبير للانحرافات المتطرفة ثم الحالات التي فيها تكون معلوماتنا عن قيم بعض حدود البيانات ناقصة . ففي حالات النوع الأول مثلاً يتحتم استخدام الوسيط لقياس القيمة النموذجية للبيانات وواضح أن استخدام الربيعين الأول والثالث لقياس التشتت ينسجم حالتئذ مع استخدام الوسيط لقياس القيمة النموذجية . فالانحراف الربيعي لا يتأثر بتناثر باي انحرافات متطرفة بعكس الانحراف المعياري فإنه يعطى أهمية خاصة لهذه الانحرافات لأنه يتوقف على مربعات الانحرافات . وقد بلغ من شدة حساسية الانحراف المعياري للانحرافات المتطرفة أنه وجد في بعض المسائل المحتوية على انحرافات كبيرة جداً أن الانحراف المعياري كان أكبر من الوسط الحسابي وواضح أن الانحراف المعياري في أية حالة

1 G. U. Yule, Introduction to the theory of statistics, 144.

من هذا القبيل لا يكون ذا قيمة كبيرة كمقياس للتثنت. لذلك يجب ألا يستخدم الانحراف المعيارى فى أية حالة من حالات هذا النوع إلا إذا أريد فعلا إقامة وزن كبير للانحرافات المتطرفة. أما الانحراف المتوسط فيقع فى هذا المضمار وسطا بين الانحرافين الربيعى والمعيارى لأن الوزن الذى يقيمه الانحراف المتوسط لآى انحراف يتناسب مع القيمة العددية المطلقة للانحراف فهو يقيم للانحرافات الصغيرة وزنا صغيرا وللانحرافات الكبيرة وزنا كبيرا كل بنسبة قيمته العددية المطلقة .

١١٧. المزوم الإحصائية . إذا كان ر عددا صحيحا موجبا أو صفرا فالعزم الرأى لآى توزيع تكرارى بسيط حول نقطة الأصل الاختيارية هو مجموع حواصل ضرب التكرارات فى القوى الرائية لانحرافات مراكز الفئات المناظرة عن النقطة المقسوما على التكرار الكلى للتوزيع . أى

$$(65) \quad \overline{Mr} = \frac{\sum K(1-s)}{\sum K} = \frac{\sum Ks'}{\sum K}$$

وواضح أن $\overline{Mr} = 1$. هذه العزوم مفيدة جدا لأنه يمكن استخدامها وسيلة لوصف التوزيع التكرارى وصفا إحصائيا دقيقا . فمثلا باستخدام العزمين الأول والثانى حول النقطة 1 = . نستطيع التعبير عن الوسط الحسابى وعن الانحراف المعيارى للتوزيع كما يأتى . لدينا

$$(66) \quad \overline{s} = \frac{\sum Ks}{\sum K} = \overline{Mr}_1$$

$$(67) \quad \overline{s^2} = \frac{\sum Ks^2}{\sum K} = \overline{Mr}_2 - \overline{Mr}_1^2$$

وسوف نرى فى الفصل القادم فائدة العزم الثالث والعزم الرابع فى دراسة

١ فى هذا البند والبنود الثلاثة التالية ندرس العزوم الإحصائية لتوزيع تكرارى ولا ندرسها لسلسلة بسيطة لأن العزوم العالية قليلة الاستخدام جدا مع السلاسل البسيطة .

الالتواء والانبعاج . لكن العزم الخامس وما فوقه من عزوم لا تظهر كثيرا في الدراسات الإحصائية الأولية .

أهم هذه العزوم هي العزوم المأخوذة حول الوسط الحسابي . بأخذ $1 = \bar{s}$ وكتابة مر بدل مر' في (٦٥) نحصل على العزم الرأى للتوزيع حول وسطه الحسابي . أى

$$(٦٨) \quad \text{مر} = \frac{\text{مجم ك} (\bar{s} - s)}{\text{مجم ك}} = \frac{\text{مجم ك ش}'}{\text{مجم ك}}$$

وواضح أن مر. = ١ ، مر_١ = ٠ ، مر_٢ = ٠ ، مر_٣ = ٠ .

هناك علاقة بسيطة بين مر ، مر' سهل إثباتها بتطبيق نظرية الحدين . لدينا في الواقع من (٧)

$$\text{ش} = \text{ش}' - \text{ج}$$

فإذا طبقنا نظرية الحدين للأس الصحيح الموجب ر نحصل على

$$\text{ش}' = (\text{ش}' - \text{ج}) = \text{مجم} (1 - \text{ر ق ل ش}') = \text{ر ق ل ش}' - \text{ج ل}.$$

بضرب الطرفين في ك ثم جمع النتيجة حدا حدا ينتج بعد القسمة على مجم ك أن

$$(٦٩) \quad \text{مر} = \text{مجم} (1 - \text{ر ق ل مر}') = \text{ر ق ل مر}' - \text{ج ل}.$$

هذه المعادلة تعطى العزم الرأى حول الوسط الحسابي بدلالة العزوم من مر' إلى مر' مأخوذة حول نقطة الأصل الاختيارية ١ ومن السهل حفظها في الصيغة الرمزية

$$(٧٠) \quad \text{مر} = (\text{مر}' - \text{ج})$$

حيث نقصد بذلك فك الطرف الأيسر بنظرية الحدين ثم كتابته مر' بدل مر' لجميع قيم ل من ٠ إلى ر .

بما أن

$$(٧١) \quad ج = \frac{مج ك ش'}{مج ك} = مر'$$

إذن بالتعويض في (٦٩) نحصل على

$$(٧٢) \quad مر' = مج (١ - ر) ل' ر ق ل مر' - ل' مر' ل'$$

هذه المعادلة تعطينا صيغة ثانية للعلاقة الرئيسية بين العزوم المحسوبة حول الوسط الحسابي وبين العزوم المحسوبة حول أية نقطة أخرى ويلاحظ أن آخر حدين يمكن كتابتهما كحد واحد على النحو الآتي :

$$(١ - ر) ل' - (١ - ر) مر' ل'$$

بأخذ $ر = ١, ٢, ٣, ٤$ بالترتيب في (٧٢) نحصل على سلسلة العلاقات الخاصة الآتية :

$$(٧٣) \quad \left. \begin{aligned} مر' &= ١ \\ مر' - مر' &= ٢ \\ مر' - مر' + مر' &= ٣ \\ مر' - مر' + مر' + مر' &= ٤ \end{aligned} \right\}$$

مثال . احسب العزوم الأربعة الأولى للتوزيع التكراري لمنسوبات الأسعار المبينة في الجدول ٤٣ حول نقطة الأصل $س = ٠$. استخدم هذه القيم لاحتساب العزوم الأربعة الأولى لنفس التوزيع حول الوسط الحسابي .
الجدول ٦٣ يبين كيفية احتساب العزوم الأربعة الأولى للتوزيع المذكور حول النقطة $س = ٠$ ومنه نحصل على

$$\begin{aligned} مر' &= \frac{٤٩١٨}{٤١٣} = ١١,٩٠٧٩٩.٣١٥ \\ مر' &= \frac{٦١٦٣٠}{٤١٣} = ١٤٩,٢٢٥١٨١٥٩٨ \\ مر' &= \frac{٨١٠٢٦٨}{٤١٣} = ١٩٦١,٩٠٧٩٩.٣١٥ \\ مر' &= \frac{١١١٣٦٨٥٠}{٤١٣} = ٢٦٩٦٥,٧٣٨٤٩٨٧٨٩ \end{aligned}$$

الجدول ٦٣ . احتساب العزوم الأربعة الأولى لتوزيع تكرارى حول نقطة الأصل
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

لمنسوب (قيم مركبة) س	عدد السلع ك	١-١٠ ك س	١-٢٠ ك س	١-٣٠ ك س	١-٤٠ ك س
٦٠	٣	١٨	١٠٨	٦٤٨	٣٨٨٨
٧٠	١١	٧٧	٥٣٩	٣٧٧٣	٢٦٤١١
٨٠	٢٦	٢٠٨	١٦٦٤	١٣٣١٢	١٠٦٤٩٦
٩٠	٣٩	٣٥١	٣١٥٩	٢٨٤٣١	٢٥٥٨٧٩
١٠٠	٥٣	٥٣٠	٥٣٠٠	٥٣٠٠٠	٥٣٠٠٠٠
١١٠	٦٨	٧٤٨	٨٢٢٨	٩٠٥٠٨	٩٩٥٥٨٨
١٢٠	٥٧	٦٨٤	٨٢٠٨	٩٨٤٩٦	١١٨١٩٥٢
١٣٠	٤٦	٥٩٨	٧٧٧٤	١٠١٠٦٢	١٣١٣٨٠٦
١٤٠	٣٧	٥١٨	٧٢٥٢	١٠١٥٢٨	١٤٢١٣٩٢
١٥٠	٢٩	٤٣٥	٦٥٢٥	٩٧٨٧٥	١٤٦٨١٢٥
١٦٠	١٨	٢٨٨	٤٦٠٨	٧٣٧٢٨	١١٧٩٦٤٨
١٧٠	١٢	٢٠٤	٣٤٦٨	٥٨٩٥٦	١٠٠٢٢٥٢
١٨٠	٨	١٤٤	٢٥٩٢	٤٦٦٥٦	٨٣٩٨٠٨
١٩٠	٥	٩٥	١٨٠٥	٣٤٢٩٥	٦٥١٦٠٥
٢٠٠	١	٢٠	٤٠٠	٨٠٠٠	١٦٠٠٠٠
	٤١٣	٤٩١٨	٦١٦٣٠	٨١٠٢٦٨	١١١٣٦٨٥٠

لايجاد $م_١$ ، $م_٢$ ، $م_٣$ ، $م_٤$ نعوض في (٧٣) . هذا يعطى

$$م_١ = ٠$$

$$م_٢ = ٧,٤٢٤٩٤٨$$

$$م_٣ = ٨,١٠٣٥٤٩$$

$$م_٤ = ١٥٥,٢٨٨٠٠٩$$

هذه العزوم مكتوبة بدلالة الفئة والفئة في هذه الحالة ١٠ وحدات .

لكتابة النتائج بدلالة الوحدة الأصلية نضرب العزم الرأى في ١٠ . فمثلا

$$م_٢ = ٧,٤٢٤٩٤٨ \times ١٠٠ = ٧٤٢,٤٩٤٨$$

هذا يعطينا العزم الثانى حول الوسط الحسابى مكتوبا بدلالة الوحدة الأصلية .

وقس على ذلك مع أى عزم آخر .

١١٨. الطريقة المختصرة لإحساب العزوم حول الوسط الحسابي. لاحتساب أى عزم وليكن العزم الرأى لتوزيع تكررارى حول الوسط الحسابي يمكننا أن نشرع فى تكوين جدول يعطى حواصل ضرب ك فى قوى ش المختلفة من القوة ١ إلى القوة ر. مثل هذا الجدول يعطى مج ك ش وبقسمة هذا المجموع على مج ك نحصل على العزم المطلوب. تلك هى الطريقة المطولة لاحتساب العزوم حول الوسط الحسابي وواضح أنها لا تختلف كثيرا عن الطريقة المطولة لاحتساب الانحراف المعياري من توزيع تكررارى وواضح أيضا أن عمليات الضرب اللازمة لها طويلة جدا إلا فى حالات خاصة نادرة.

أما الطريقة المختصرة لاحتساب أى عزم حول الوسط الحسابي فتشبه الطريقة المختصرة لاحتساب الوسط الحسابي أو لاحتساب الانحراف المعياري حول الوسط الحسابي. وتتركب الطريقة من أخذ نقطة أصل اختيارية عند مركز إحدى الفئات ذات التكرارات الكبرى واحتساب العزم المطلوب أولا حول نقطة الأصل الاختيارية ثم استخدام (٧٢) لاحتساب العزم حول الوسط الحسابي.

الجدول ٦٤ يبين كيفية احتساب العزوم الأربعة الأولى للتوزيع المذكور فى المثال الأخير حول الوسط الحسابي باستخدام نقطة الأصل الاختيارية $a = 120$ من هذا الجدول نجد

$$م١' = \frac{38}{413} = 0.092009685$$

$$م٢' = \frac{307}{413} = 0.7433414044$$

$$م٣' = \frac{200}{413} = 0.484261765$$

$$م٤' = \frac{6308}{413} = 15.273808717$$

لإيجاد م١، م٢، م٣، م٤ نعوض فى (٧٣). هذا يعطى

$$م١ = 0$$

$$م٢ = 7.424948$$

$$م = ٨,١٠٣٥٤٩$$

$$م = ١٥٥,٢٨٨٠٠٩$$

هذه النتائج تتفق مع نتائج البند ١١٧ .

الجدول ٦٤ . احتساب العزوم الأربعة الأولى من توزيع تكرارى: الطريقة المختصرة
(منسوبات أسعار بعض السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠)

النسب	عدد السلع ك	ش'	ك ش'	ك ش'	ك ش'	ك ش'
٥٥ —	٣	٦ —	١٨ —	١٠٨	٦٤٨ —	٣٨٨٨
٦٥ —	١١	٥ —	٥٥ —	٢٧٥	١٣٧٥ —	٦٨٧٥
٧٥ —	٢٦	٤ —	١٠٤ —	٤١٦	١٦٦٤ —	٦٦٥٦
٨٥ —	٣٩	٣ —	١١٧ —	٣٥١	١٠٥٣ —	٣١٥٩
٩٥ —	٥٣	٢ —	١٠٦ —	٢١٢	٤٢٤ —	٨٤٨
١٠٥ —	٦٨	١ —	٦٨ —	٦٨	٦٨ —	٦٨
١١٥ —	٥٧	٠	٠	٠	٠	٠
١٢٥ —	٤٦	١	٤٦	٤٦	٤٦	٤٦
١٣٥ —	٣٧	٢	٧٤	١٤٨	٢٩٦	٥٩٢
١٤٥ —	٢٩	٣	٨٧	٢٦١	٧٨٣	٢٣٤٩
١٥٥ —	١٨	٤	٧٢	٢٨٨	١١٥٢	٤٦٠٨
١٦٥ —	١٢	٥	٦٠	٣٠٠	١٥٠٠	٧٥٠٠
١٧٥ —	٨	٦	٤٨	٢٨٨	١٧٢٨	١٠٣٦٨
١٨٥ —	٥	٧	٣٥	٢٤٥	١٧١٥	١٢٠٠٥
١٩٥ —	١	٨	٨	٦٤	٥١٢	٤٠٩٦
	٤١٣		٣٨ —	٣٠٧٠	٢٥٠٠	٦٣٠٥٨

١١٩ . تصحيحات سيرر^١ واضح أن احتساب العزوم من توزيع تكرارى كاحتساب أى ثوابت تكرارية أخرى يتوقف على الفرض المركزى . هذا الفرض يعرض قيم العزوم للخطأ وواضح أنه يهملنا أن نعرف كيف نصحح هذه القيم عند احتسابها من توزيع تكرارى حتى نستطيع إصلاح الخطأ الناشئ من استخدام الفرض المركزى . هذه التصحيحات معروفة الآن فعلا

1 W. F. Sheppard, The calculation of the moments of a frequency distribution, Biometrika, 5 (1906—1907), 450—459.

فقد تمكن شپرد بطريقة لا يمكن إعطاؤها هنا بالتفصيل من الحصول على قوانين لتصحيح العزوم المحسوبة من توزيعات تكرارية لمتغير متصل. وقد استخدم شپرد للحصول على قوانينه شرطاً عاماً يمكن وصفه هنا بأن المنحنى التكرارى يمس المحور الأفقى مسا من رتبة عالية عند كل من طرفيه. أى إذا كان المنحنى التكرارى $v = d(s)$ حيث $d(s)$ دالة لها معاملات تفاضلية من أية رتبة فإن $d(s)$ ، $d'(s)$ ، $d''(s)$ ، ... تنعدم كلها عند $s = a$ ، $s = b$ حيث a ، b هما الطرفان. هذا الشرط يتوافر لحسن الحظ في أكثر التوزيعات التكرارية التى نعرفها لكنه لا يتوافر فيها كلها. فمثلاً الشرط المذكور لا يتوافر في أى توزيع تكرارى أعرج أو أجوف أو مستطيل لأن المنحنى التكرارى لا يمس المحور الأفقى عند الطرفين في أية حالة من الحالات الثلاث. وفى أى توزيع للدخول أو للوفيات حسب العمر عند الوفاة يبدأ التوزيع بتكرار كبير عند الصفر وواضح أن شرط شپرد لا يمكن أن يتوافر في هذه الحالة.

لتكن $Mr'_1, Mr'_2, Mr'_3, \dots$ العزوم حول نقطة الأصل الاختيارية a ولتكن $Mr'_1, Mr'_2, Mr'_3, \dots$ عزوم شپرد المصححة مأخوذة حول نفس النقطة. لدينا القانون العام الآتى لاحتساب هذه العزوم المصححة:^١

$$(٧٤) \quad Mr'_r = \sum_{l=0}^r \binom{r}{l} (-1)^{r-l} (b-a)^l Mr'_l$$

حيث $b = 1$ ، $a = 0$ ، $Mr'_1 = \frac{1}{2}$ ، $Mr'_2 = \frac{1}{6}$ ، $Mr'_3 = \frac{1}{24}$ ، ... هى أعداد برنولى الشهيرة وحيث يدل f على طول فترة التوزيع.

بأخذ $r = 1, 2, \dots, 6$ في (٧٤) نحصل على سلسلة القوانين الخاصة بالآية التى يمكن إضافة $Mr'_r = Mr'_r (1)$ إليها:

1 H. Wold, Sulla correzione di Sheppard, Giorn. dell' Ist. Ital. Att., 4, 304.

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{مر^1} &= \overline{مر^1} \\
 \overline{مر^2} &= \overline{مر^1} - \frac{1}{12} \overline{ف^2} \\
 \overline{مر^3} &= \overline{مر^1} - \frac{1}{4} \overline{مر^2} \overline{ف^2} \\
 \overline{مر^4} &= \overline{مر^1} - \frac{1}{2} \overline{مر^2} \overline{ف^2} + \frac{7}{240} \overline{ف^4} \\
 \overline{مر^5} &= \overline{مر^1} - \frac{2}{3} \overline{مر^2} \overline{ف^2} + \frac{7}{48} \overline{مر^4} \overline{ف^4} \\
 \overline{مر^6} &= \overline{مر^1} - \frac{1}{2} \overline{مر^2} \overline{ف^2} + \frac{7}{16} \overline{مر^4} \overline{ف^4} - \frac{31}{1344} \overline{ف^6}
 \end{aligned} \right\} (٧٥)$$

هذه القوانين تعرف الآن باسم تصحيحات شپرد .

إذا أخذنا العزوم حول الوسط الحسابي للتوزيع أى إذا أخذنا نقطة الأصل الاختيارية عند الوسط الحسابي تبقى الصيغة العامة لقانون شپرد كما هى إذا كتبنا العزوم من غير فتحات وتأخذ سلسلة القوانين الخاصة (٧٥) الصيغة الآتية :

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{مر^0} &= \overline{مر^0} \\
 \overline{مر^1} &= \overline{مر^0} - \frac{1}{12} \overline{ف^2} \\
 \overline{مر^2} &= \overline{مر^0} \\
 \overline{مر^3} &= \overline{مر^0} - \frac{1}{4} \overline{مر^1} \overline{ف^2} + \frac{7}{240} \overline{ف^4} \\
 \overline{مر^4} &= \overline{مر^0} - \frac{2}{3} \overline{مر^1} \overline{ف^2} + \frac{7}{48} \overline{مر^3} \overline{ف^4} \\
 \overline{مر^5} &= \overline{مر^0} - \frac{1}{2} \overline{مر^1} \overline{ف^2} + \frac{7}{16} \overline{مر^3} \overline{ف^4} - \frac{31}{1344} \overline{ف^6}
 \end{aligned} \right\} (٧٦)$$

وإلى هذه القوانين يمكننا إضافة $\overline{مر} = \overline{مر} (= ١)$.

اعتبر تصحيح شپرد للعزم الثانى فى الصيغة

$$\overline{مر^2} = \overline{مر^0} - \frac{1}{12} \overline{ف^2}$$

هذا التصحيح بسيط وأيضاً مهم بنوع خاص وفيه $\overline{مر^0}$ هو تباين التوزيع بالنسبة إلى الوسط الحسابى أى $\overline{مر^2}$ وأما $\overline{مر^0}$ فهو التباين المصحح بالنسبة إلى الوسط الحسابى أى $\overline{مر^2}$. إذن لدينا .

$$\overline{مر^2} = \overline{مر^2} - \frac{1}{12} \overline{ف^2} \quad (٧٧)$$

هذه العلاقة البسيطة تمكننا من إصلاح الخطأ الناشئ عند احتساب الانحراف المعياري عن الوسط الحسابي من توزيع تكرارى . ونلاحظ أن التصحيح يعطى على الدوام قيمة أصغر وأن الفرق بين $\bar{e}_1$ ، $\bar{e}_2$ لا يتوقف إلا على f ويتناسب مع مربع f . إذن كلما كان f كبيرا كان التصحيح كبيرا . لكن هذا التصحيح صغير فى العادة ولذا يمكن إهماله فى الأعمال الإحصائية الرتوية .

نلاحظ أيضا أن الوسط الحسابي لا يحتاج إلى أى تصحيح عند احتسابه من توزيع تكرارى لأن $\bar{e}_1 = \bar{e}_2$ وكذلك العزم الثالث .
مثال . صحح العزم الثانى لتوزيع منسوبات أسعار مجموعة السلع فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ واحسب القيمة المصححة للانحراف المعياري عن الوسط الحسابي .

لدينا $\bar{e}_1 = 7,424948$ كما فى البند ١١٧ . بتطبيق السطر الثانى من (٧٦) مع $f = 1$ نحصل على

$$\bar{e}_1 - 7,424948 = \frac{1}{11} - 7,424948 = -0,083333$$

$$= 0,341615$$

$$\bar{e}_2 = \bar{e}_1 . \text{ إذن}$$

$$\bar{e}_2 = 0,341615 = \bar{e}_1 = 0,341615$$

هذا يعطينا القيمة المصححة للانحراف المعياري بدلالة طول الفئة والقيمة المصححة بدلالة الوحدة الأصلية تساوى عشرة أمثال ذلك أو ٢٧,١ وحدة . والقيمة المصححة تمثل الحقيقة فى هذه الحالة أكثر من القيمة الأصلية $\bar{e}_1 = 27,25$ وحدة لأن التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار السلع يحقق شرط شپرد العام (انظر الشكل ٣٦) .

١٢٠ . العزوم الإحصائية : أى عدد من المتغيرات . من الممكن تعميم نتائج البنود الثلاثة الأخيرة لأى عدد من المتغيرات . يعرف العزم الرانى الزينى

مر'رز لآى توزيع تكرارى مزدوج حول نقطتى الأصل الاختياريتين ا ،
ب بالمعادلة

$$(٧٨) \text{ مر'رز} = \frac{\text{مج ك} (س - ا) (ص - ب) \text{ ز}}{\text{مج ك}} = \frac{\text{مج ك ش'رض' ز}}{\text{مج ك}}$$

هذا صحيح لآى عددین صحيحین موجبین ر ، ز وصحيح أيضا إذا كان أحد العددين ر ، ز أو كلاهما صفرا . إذا كان أحد العددين ر ، ز صفرا يصير العزم العزم العادى للتوزيع التكرارى البسيط المسكون من الصف أو العمود المناظر للتوزيع المزدوج . أيضا واضح أن مر' = ١ . إذا لم يكن أحد العددين ر ، ز صفرا فإن العزم المزدوج مر'رز يختلف فى تركيبه عن أى عزم من العزوم البسيطة السالف ذكرها وهذه العزوم الجديدة فوائد إحصائية جمّة . فمثلا لأول هذه العزوم وهو مر'١١ أهمية قصوى فى نظرية الارتباط . إذا كان ا ، ب الوسطين الحسابيين للسينات والصادات بالترتيب يصير العزم مر'رز

$$(٧٩) \text{ مر'رز} = \frac{\text{مج ك} (س - \bar{س}) (ص - \bar{ص}) \text{ ز}}{\text{مج ك}} = \frac{\text{مج ك ش'رض' ز}}{\text{مج ك}}$$

أى أننا نميز العزوم المحسوبة حول المركز المتوسط للتوزيع عن العزوم المحسوبة حول أية نقطة أخرى بكتابة الأولى من غير فتحات . وكما فى الحالة السابقة البسيطة يمكننا كتابة العلاقة الآتية بين العزم مر'رز والعزوم مر'رز :

$$(٨٠) \text{ مر'رز} = (\text{مر}' - \text{جس}') (\text{مر}' - \text{جس}') \text{ ز}$$

حيث يقصد بذلك كتابة مر'م بدل مر'ل مر'ع عند فك الطرف الأيسر بنظرية الحدين . هذه العلاقة تناظر العلاقة (٧٠) فى الحالة البسيطة .

أما طرائق احتساب العزوم مر'رز من توزيع تكرارى مزدوج فسندرسها فى الفصل الثانى من الجزء الثانى .

الوسيط بمقدار يساوى x أو أكثر ليس أكبر من n ح / x .
اكتب

$$\text{ش} - \text{ر} = \text{ب} - \text{پ} \quad (\text{ر} = 1, 2, \dots, n)$$

حيث ب هو الوسيط . لدينا من تعريف الانحراف المتوسط

$$n \text{ ح} = \text{م} \text{ ح} = \text{م} \text{ ش} + \text{م} \text{ ش}''$$

حيث $\text{م} \text{ ش}''$ يمثل مجموع الانحرافات التي تساوى x أو أكثر ، $\text{م} \text{ ش}$ يمثل مجموع الانحرافات الأصغر من x . بما أن $\text{م} \text{ ش}''$ لا يتحوى على حدود سالبة إذن لدينا

$$n \text{ ح} \leq \text{م} \text{ ش}''$$

لكن كل حد في $\text{م} \text{ ش}''$ أكبر من أو يساوى x . إذن لدينا $n \text{ ح} \leq \text{م} \text{ ش}''$ حيث م هو عدد حدود $\text{م} \text{ ش}''$. هذا يثبت النتيجة المطلوبة $n \text{ ح} \geq \text{م} \text{ ش}''$ ويعطى حدا أعلى لعدد القيم الأصلية التي تختلف عن الوسيط بمقدار يساوى x أو أكثر حيث x أى عدد موجب .

١٢٢ . مثال ٢ . سجلت أطوال ٣٠ أغرودة من أغاريد القبرات بالدقائق إلى أقرب نصف دقيقة كما يأتى :

١ ، ١ ½ ، ١ ½ ، ١ ، ٢ ، ١ ½ ، ٢ ½ ، ٣ ½ ، ٦ ، ٤ ½ ،
١ ، ٣ ½ ، ١ ½ ، ١ ، ١ ، ١ ، ١ ، ٢ ½ ، ١ ، ٤ ،
١١ ، ٢ ½ ، ١ ، ٦ ، ١ ، ٣ ½ ، ٢ ، ٢ ½ ، ١ ½ ، ٢ ½ .
أوجد الطول المتوسط والانحراف المتوسط عن الوسط .

الطول المتوسط هو

$$2,45 \text{ دقيقة} = \frac{24 \frac{1}{2}}{10} = \frac{73 \frac{1}{2}}{30} = \frac{2 \frac{1}{2} + 0 + 1 + 1}{30}$$

لإيجاد الانحراف المتوسط عن الوسيط نستخدم القانون (٤١) . لدينا

١٧ قيمة أصغر من الوسط وبمجموع هذه هو ١٩ ولدينا ١٣ قيمة أكبر من الوسط وبمجموع هذه هو $٥٤\frac{1}{3}$ ($١٩ - ٧٣\frac{1}{3} = ٥٤\frac{1}{3}$). بتطبيق (٤١) ينتج أن الانحراف المتوسط عن الوسط هو

$$١,٥١ \text{ دقيقة} = \frac{٤٥,٣}{٣٠} = \frac{٩,٨ + ٣٥,٥}{٣٠} = \frac{٢,٤٥ \times (١٧ - ١٣) - (١٩ - ٥٤\frac{1}{3})}{٣٠}$$

١٢٣. مثال ٣. أحصى عدد الكلمات في كل صفحة من صفحات كتاب فوجد أن عدد الكلمات موزع على صفحات الكتاب كما في التوزيع التكرارى الآتى:

عدد الصفحات	عدد الكلمات في الصفحة	عدد الصفحات	عدد الكلمات في الصفحة
٤٥	٣٥٤ - ٣٥٠	٥	٣١٩ - ٣٠٠
٣٩	٣٥٩ - ٣٥٥	١٣	٣٢٤ - ٣٢٠
٣١	٣٦٤ - ٣٦٠	٢٤	٣٢٩ - ٣٢٥
٢١	٣٦٩ - ٣٦٥	٣٤	٣٣٤ - ٣٣٠
١٢	٣٧٤ - ٣٧٠	٤١	٣٣٩ - ٣٣٥
٤	٣٧٩ - ٣٧٥	٤٨	٣٤٤ - ٣٤٠
٤	٤٠٠ - ٣٨٠	٤٤	٣٤٩ - ٣٤٥

احسب متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة والانحراف المعيارى .
وإذا كانت كل صفحة تحتوى على ٣٨ سطرا فأوجد أيضا الانحراف المعيارى في السطر الواحد .

لاحتساب الوسط الحسابى المطلوب والانحراف المعيارى نستخدم الطريقة المختصرة فنأخذ نقطة الأصل الاختيارية عند مركز الفئة ٣٤٥ - ٣٤٩ أى عند النقطة ٣٤٧ ونأخذ الوحدة تساوى $\frac{1}{2}$ أى نصف كلمة . لدينا الجدول الآتى :-

١. استخدام الطريقة المختصرة فيه تسهيل كبير للعمل في هذه الحالة .

عدد الصفحات في الصفحة (قيم مركزية)	عدد الصفحات	انحراف المركز عن نقطة الأصل الاختيارية (وحدات)	عدد الصفحات في الانحراف	عدد الصفحات في مربع الانحراف
٣٠٩,٥	٥	٧٥ —	٣٧٥ —	٢٨١٢٥
٣٢٢	١٣	٥٠ —	٦٥٠ —	٣٢٥٠٠
٣٢٧	٢٤	٤٠ —	٩٦٠ —	٣٨٤٠٠
٣٣٢	٣٤	٣٠ —	١٠٢٠ —	٣٠٦٠٠
٣٣٧	٤١	٢٠ —	٨٢٠ —	١٦٤٠٠
٣٤٢	٤٨	١٠ —	٤٨٠ —	٤٨٠٠
٣٤٧	٤٤	.	.	.
٣٥٢	٤٥	١٠	٤٥٠	٤٥٠٠
٣٥٧	٣٩	٢٠	٧٨٠	١٥٦٠٠
٣٦٢	٣١	٣٠	٩٣٠	٢٧٩٠٠
٣٦٧	٢١	٤٠	٨٤٠	٣٣٦٠٠
٣٧٢	١٢	٥٠	٦٠٠	٣٠٠٠٠
٣٧٧	٤	٦٠	٢٤٠	١٤٤٠٠
٣٩٠	٤	٨٦	٣٤٤	٢٩٥٨٤
	٣٦٥		١٢١ —	٣٠٦٤٠٩

$$١ = ٣٤٧ \text{ كلمة،}$$

$$ج = \frac{١٢١}{٣٦٥} = ٠,٣٣١٥٠٧ \text{ وحدة}$$

$$= ٠,١٦٥٧٥٣ \text{ كلمة لأن الوحدة تساوي نصف كلمة،}$$

$$س = ٣٤٧ - ٠,١٦٥٧٥٣ = ٣٤٦,٨٣٤٢٤٧ \text{ كلمة.}$$

إذن متوسط عدد الكلمات في الصفحة الواحدة هو ٣٤٧ كلمة إلى أقرب قيمة
ممكنة لعدد الكلمات. ١ أيضا

$$ج^٢ = ٠,١٠٩٨٩٧ \text{ وحدة مربعة،}$$

$$س' = \frac{٣٠٦٤٠٩}{٣٦٥} = ٨٣٩,٤٧٦٤٣٨ \text{ وحدة مربعة.}$$

$$إذن س' = ٨٣٩,٤٧٦٤٣٨ - ٠,١٠٩٨٩٧ = ٨٣٩,٣٦٦٥٤١ \text{ وحدة مربعة،}$$

$$س = ٢٨,٩٧١٨ \text{ وحدة}$$

$$= ١٤,٤٨٥٩ \text{ كلمة لأن الوحدة تساوي نصف كلمة.}$$

١. لاحظ أننا تقرب الوسط إلى أقرب قيمة ممكنة لأن المتغير منفصل.

هذا يعطينا الانحراف المعياري لعدد الكلمات في الصفحة الواحدة .
 بما أن كل صفحة تحتوي على ٣٨ سطرا إذن عدد الكلمات في السطر الواحد يساوي عدد الكلمات في الصفحة الواحدة مقسوما على ٣٨ . وبما أن الانحراف المعياري لأي عدد من الأعداد هو دالة متجانسة من درجة ١ في تلك الأعداد باعتبارها متغيرات مستقلة إذن بتطبيق (٥٦) مع $\frac{1}{38} = 0$ ينتج أن الانحراف المعياري لعدد الكلمات في السطر الواحد يساوي الانحراف المعياري لعدد الكلمات في الصفحة الواحدة مقسوما على ٣٨ . إذن الانحراف المعياري المطلوب في السطر الواحد هو

$$\frac{1}{38} = \frac{19,4809}{38} = 0,3812 \text{ كلمة .}$$

١٢٤ . مثال ٤ . إذا كان ص تكرار قراءة س فأوجد الانحراف المعياري

بإيجاد مكان الربيع :-

٦٧	٦٦	٦٥	٦٤	٦٣	٦٢	٦١	٦٠	٥٩	٥٨	٥٧	س
٣٥٠	٣٣٥	٢٨٨	١٧٥	٩٨	٥٧	٣٤	١٨	٩	٥	٥	ص
٧٧	٧٦	٧٥	٧٤	٧٣	٧٢	٧١	٧٠	٦٩	٦٨		
٥	٧	١٢	٢٠	٣٧	٦٤	١٠٥	١٨٠	٢٨٥	٣٣٦		

لايجاد مكان الربيع نبدأ باحتساب التكرارات المتجمعة الصاعدة .
 لدينا $2425 = 0,2425$ إذن $\frac{2}{3} = 0,6667$ ، $\frac{3}{4} = 0,75$. باستخدام التكرارات المتجمعة الصاعدة المعطاة في الجدول الموجود على الصفحة التالية ينتج أن

$$\begin{aligned} \frac{200,20}{288} + 64,5 &= \frac{401-60,6,20}{288} + 64,5 = \text{ب} \\ 65,213 &= 0,713 + 64,5 = \\ \frac{108,70}{280} + 68,5 &= \frac{1710-1818,70}{280} + 68,5 = \text{ب} \\ 68,882 &= 0,382 + 68,5 = \\ \text{ب} - \text{ب} &= 3,669 , \text{ب} = 1,834 \text{ إذن} \end{aligned}$$

هذا يعطينا الانحراف الربيعي للقيم المعطاة .

س	مجم	س	مجم
٥٧	٥	٦٨	١٧١٠
٥٨	١٠	٦٩	١٩٩٥
٥٩	١٩	٧٠	٢١٧٥
٦٠	٣٧	٧١	٢٢٨٠
٦١	٧١	٧٢	٢٣٤٤
٦٢	١٢٨	٧٣	٢٣٨١
٦٣	٢٢٦	٧٤	٢٤٠١
٦٤	٤٠١	٧٥	٢٤١٣
٦٥	٦٨٩	٧٦	٢٤٢٠
٦٦	١٠٢٤	٧٧	٢٤٢٥
٦٧	١٣٧٤		

لايجاد الانحراف المعياري نستخدم النصف الأول من العلاقة (٥٨) في الصيغة $\sigma = 1,483 \cdot b$. إذن الانحراف المعياري المطلوب هو

$$\sigma = 1,483 \times 1,834 = 2,720$$

١٢٥ . مثال ٥ . يقيس فلكي زاوية ١٠٠ مرة . فإذا كانت قيمة σ هي $2,7/5$ عندما تكون الوحدة المستخدمة "١" فكم من الأخطاء ينتظر أن تكون لها قيمة عددية بين "٢" ، "٤" ؟

للإجابة عن هذا السؤال لا بد من استخدام الجدول ٦ المشار إليه على الصفحة ٢٦٦ . هذا الجدول يعطي المساحة $A(s)$ الواقعة تحت منحنى الخطأ المتماثل من $\sigma = 0$ إلى s عندما يكون الانحراف المعياري $2,7/5$. إذن لكي نستطيع تطبيق الجدول على المسألة الحالية لا بد من تحويل قيمة σ المعطاة من $2,7/5$ إلى $2,7$. لعمل ذلك نجعل الوحدة المستخدمة لقياس الزوايا "٤" بدلا من "١" . هذا التغيير في الوحدة المستخدمة يجعل الانحراف

المعيارى يصبح $0.4 \times 27/5$ أى $27/5$ كما زيد وبحول السؤال إلى : كم من الأخطاء ينتظر أن تكون لها قيمة عددية بين 0.8 ، 1.6 ؟
لدينا من الجدول المذكور

$$0.44520 = (1.6) | 0.28814 = (0.8) |$$

$$0.15706 = (0.8) | - (1.6) | \quad \text{إذن}$$

هذا يعطينا المساحة الواقعة تحت منحنى الخطأ المتماثل بين $s = 0.8$ وبين $s = 1.6$. أيضا $(-s) = (s)$ لأن المنحنى متماثل . إذن المساحة الواقعة تحت المنحنى بين $s = 0.8$ ، $s = -0.8$ تساوى المساحة الواقعة تحته بين $s = 0.8$ ، $s = 1.6$. بالجمع ينتج أن المساحة الواقعة تحت المنحنى بين $|s| = 0.8$ ، $|s| = 1.6$ هى

$$0.31412 = 0.15706 \times 2$$

هذا يعطينا احتمال الوقوع فى خطأ له قيمة عددية بين 0.8 ، 1.6 بدلالة الوحدة الجديدة أو بين 2 ، 4 بدلالة الوحدة الأصلية . وبما أن عدد الأخطاء هو ١٠٠ إذن عدد الأخطاء التى ينتظر أن تكون لها قيمة عددية بين 2 ، 4 هو

$$31.412 = 0.31412 \times 100$$

أى يساوى ٣١ .

١٢٦ . مثال ٦ . يبين الجدول الآتى معدلات المواليد والوفاة والزواج فى الآلاف من السكان ومعدلات وفيات الأطفال فى الآلاف من عدد المواليد فى المناطق الإدارية المختلفة بالمملكة المصرية سنة ١٩٤٢ . احسب

- (أ) الانحراف المتوسط لمعدلات المواليد فى المحافظات ،
- (ب) الانحراف المعيارى لمعدلات وفيات الأطفال فى الوجه البحرى ،
- (ج) الانحراف الربيعى لمعدلات الوفاة فى جميع أنحاء المملكة ،
- (د) معامل التغير فى معدلات الزواج فى الوجهين البحرى والقبلى .

معدل				المنطقة
الرواج	الوفاة	وفيات الأطفال	المواليد	
٤٤,٨	٣٦,٩	٢:٨	٤٦,٤	المحافظات : القاهرة
٣٥,٢	٢٥,٢	٢٠٤	٣٤,٤	الإسكندرية
٣٤,٩	٢٩,٢	١٨٩	٣٩,٢	القنال
٣٠,٨	٢٨,٨	١٧٤	٤١,٤	دمياط
٥٤,٣	٥٤,١	٢٥٣	٦٤,٣	السويس
٢٢,١	٢٣,٢	١٦٥	٣٢,٢	الحدود
٣٠,٢	٢٥,٠	١٢١	٣٥,٦	الوجه البحري : البحيرة
٣٤,٦	٢٧,٣	١٣٦	٤٠,١	الشرقية
٣٠,٤	٣٤,٥	١٧١	٤١,٣	الدقهلية
٢٩,٥	٢٩,٧	١٤٦	٣٨,٩	الغربية
٣٤,٨	٣٣,٥	١٧٩	٤١,٨	القليوبية
٣٠,٣	٣٢,٩	١٩٥	٣٩,١	المنوفية
٢٤,٢	٢٨,١	١٦٦	٣٧,٧	الوجه القبلي : أسيوط
٢٣,٣	٣٤,١	١٥٧	٣٠,٨	أسوان
٢٩,٢	٢٣,٢	١٤٤	٣٤,٩	بنى سويف
٣٩,٥	٢٨,٧	١٩٦	٤٠,٥	القيوم
٢٣,٨	٢٣,٠	١٢٢	٣٤,٨	جرجا
٢٤,١	٢٣,٨	١٩٦	٤٢,٦	الجيزة
٢٥,٧	١٦,٩	١١٠	٢٧,٦	قنا
٢٧,٩	٢٥,٤	١٦٩	٣٦,٦	المنيا

(١) المعدل الوسيط لمعدلات المواليد في المحافظات هو

$$٠.٤٠,٣ = \frac{٤١,٤ + ٣٩,٢}{٢}$$

هذا المعدل أصغر من معدلات المواليد في محافظات دمياط والقاهرة والسويس وأكبر من معدلات المواليد في محافظات القنال والإسكندرية والحدود. أيضا مجموع معدلات المواليد في المحافظات الثلاث الأولى هو

$$١٥٢,١ = ٦٤,٣ + ٤٦,٤ + ٤١,٤$$

وبمجموع معدلات المواليد في المحافظات الثلاث الأخيرة هو

$$٠.١٠٥,٨ = ٣٢,٢ + ٣٤,٤ + ٣٩,٢$$

بتطبيق (٤٢) ينتج أن الانحراف المتوسط المطلوب هو

$$٠.٧,٧١٧ = \frac{٤٦,٣}{٦} = \frac{١٠٥,٨ - ١٥٢,١}{٦}$$

(ب) الوسط الحسابي لمعدلات وفيات الأطفال في الوجه البحرى هو

$$108 = \frac{118}{\frac{1}{1}} = (190 + 179 + 146 + 171 + 136 + 121) \frac{1}{6}$$

وانحرافات المعدلات الستة عن الوسط هى - ٣٧ ، - ٢٢ ، ١٣ ، ١٢ ،

٢١ ، ٢٧ . مجموع مربعات هذه الانحرافات هو

$$3976 = 1369 + 441 + 144 + 169 + 484 + 1369$$

ومتوسط هذه المربعات هو $\frac{3976}{6} = 662\frac{2}{3}$. إذن جذر متوسط مربعات

الانحرافات هو

$$25,74 = \sqrt{662\frac{2}{3}}$$

وهذا هو الانحراف المعيارى المطلوب .

(ج) لإيجاد الانحراف الربيعى لمعدلات الوفاة في جميع أنحاء المملكة

نرتب هذه المعدلات حسب القيمة حتى نستطيع الحصول على الربيعين الأول

والثالث لسلسلة المعدلات . لدينا الترتيب الآتى :

$$16,9, 23,0, 23,2, 23,2, 25,0, 25,2, 25,4, 27,3, 28,1, 28,7, 28,8$$

$$28,8, 29,2, 29,7, 29,9, 32,5, 32,8, 34,1, 34,5, 36,9, 54,1$$

عدد هذه المعدلات يساوى ٢٠ . إذن ترتيب الربيع الأول في السلسلة

الصاعدة هو $\frac{21}{2}$ أو ١٠.٥ . هذا يضع الربيع الأول عند ربع المسافة بين المعدلين

الخامس والسادس أى عند ٢٥,٠٥ . أيضا ترتيب الربيع الثالث في نفس

السلسلة هو $\frac{73}{2}$ أو ٣٦,٥ . وهذا يضع الربيع الثالث عند ثلاثة أرباع المسافة

بين المعدلين الخامس عشر والسادس عشر أى عند ٣٣,٥٧٥ . إذن المسافة

بين الربيعين الأول والثالث تساوى

$$8,025 = 25,05 - 23,075$$

والانحراف الربيعى المطلوب يساوى نصف هذه المسافة أى ٤,٢٦٢٥ .

(د) لاحتساب معامل التغير في معدلات الزواج في الوجهين البحرى

والقبلى نبحث عن الوسط الحسابى وعن الانحراف المعيارى في الحالتين .

الوسط الحسابي لمعدلات الزواج في الوجه البحري هو

$$31,63 = \frac{189,8}{6} = (30,3 + 34,8 + 29,5 + 30,4 + 34,6 + 30,2) \frac{1}{6}$$

وانحرافات المعدلات المذكورة عن الوسط هي - ١,٢٣ ، ٢,٩٧ ، ١,٤٣ ، ٢,١٣ ، ٣,١٧ ، ١,٣٣ . مجموع مربعات هذه الانحرافات هو

$$1,7689 + 10,0489 + 4,5369 + 1,0129 + 8,8209 + 2,0449$$

أى ٢٨,٧٣٣٤ . إذن متوسط المربعات يساوى ٤,٧٨٨٩ والانحراف المعياري

يساوى ٢,١٩ . إذن معامل التغير في معدلات الزواج في الوجه البحري هو

$$0,69 = \frac{2,19}{31,63} 100$$

بالمثل الوسط الحسابي لمعدلات الزواج في الوجه القبلي هو

$$(27,9 + 25,7 + 34,1 + 23,7 + 29,5 + 29,2 + 23,3 + 24,2) \frac{1}{8}$$

$$0,28,45 = \frac{227,6}{8} =$$

إذن انحرافات المعدلات في هذه الحالة تساوى - ٤,٢٥ ، ٠,٧٥ ، ٠,١٥ ، ٠,٥٥ ، ٠,٧٥ ، ٠,٦٥ ، ٠,٥٥ ، ٠,٧٥ . وبمجموع مربعاتها هو

$$11,00 + 0,50 + 0,02 + 0,30 + 0,50 + 0,42 + 0,30 + 0,50$$

$$+ 22,0625 + 122,1025 + 0,0625 + 26,0225 + 18,0625$$

$$0,229,6000 = 0,3025 + 7,0625 + 31,9225$$

بقسمة هذا المجموع على عدد مديريات الوجه القبلي وهو ٨ ينتج أن متوسط

مربعات الانحرافات يساوى ٢٨,٧ والانحراف المعياري لمعدلات الزواج في

الوجه القبلي يساوى ٥,٣٦ . إذن معامل التغير في معدلات الزواج في الوجه

القبلي هو

$$0,18,8 = \frac{5,36}{28,45} 100$$

١٢٧ . مثال ٧ . إذا أعطيت البيانات

٢٠,٢٥	٤,٩٠	١٣,٧٩	٢,٧٧	ع
٤	٥	٧	١	ف

فصحح هذه الانحرافات المعيارية من أخطاء الفرض المركزي باستخدام تعديلات شپرد .

بتطبيق (٧٧) على البيانات المعطاة نحصل على النتائج الآتية .

$\bar{z}$	$\bar{z}$	$\frac{1}{f}$	f	$\bar{z}$
٢,٧٥	٧,٥٨٩٦	٠,٨٣٣	١	٧,٦٧٢٩
١٣,٦٤	١٨٦,٠٨٠٨	٤,٠٨٣٣	٤٩	١٩٠,١٦٤١
٤,٦٨	٢١,٩٢٦٧	٢,٠٨٣٣	٢٥	٢٤,٠١٠٠
٢٠,٢٢	٤٠٨,٧٢٩٢	١,٣٣٣٣	١٦	٤١٠,٠٦٢٥

١٢٨ . مثال ٨ . يبين الجدول الآتي توزيع ٤٠١٨ قراءة للارتفاع البارومتري أخذت يومياً الساعة ٩ صباحاً عند Churchstoke من أعمال ويلز بين ١٨٧٨ و ٨٨ . احسب الوسط الحسابي والعزم الثاني والعزم الثالث والعزم الرابع حول الوسط الحسابي (مصححة من خطأ الفرض المركزي) . استخدم عرض الفئة الذي يساوي ١,٠ بوصة وحدة .

الارتفاع البارومتري	التكرار	الارتفاع البارومتري	التكرار	الارتفاع البارومتري	التكرار
٢٨,٤	١	٧١,٥	٣	٣٧٧	٣٠,٢
٥,٥	٠,٥	١٣٢	٤	٣٢٩	٣
٦,٦	١,٥	١٨١	٥	٢٠٧,٥	٤
٧,٧	٥	٢٥٨	٦	١٣٣	٥
٨,٨	٧,٥	٣٢٩	٧	٩٣,٥	٦
٩,٩	١٢,٥	٣٦٠,٥	٨	٤٦	٧
٢٩,٠	١٣,٥	٤٢٦	٩	٦,٥	٨
١,١	٣٤	٤٥٨	٣٠,٠	٢	٩
٢,٢	٤٦,٥	٤٨٤,٥	١	١	٣١,٠
				٤٠١٨	

الجدول الآتي يبين الطريقة المختصرة لاحتساب العزوم الأربعة الأولى

حول النقطة ١ = ٣٠,٠ بوصة . من الجدول نجد

$$٠,٤٥٥٤٥٠ - = \frac{١٨٣٠ -}{٤٠١٨} = ١' \text{ مس'}$$

$$١٢,٦٤٦٥٩٠ = \frac{٥٠٨١٤}{٤٠١٨} = ٢' \text{ مس'}$$

$$٣٣,٠٧٤٦٦٤ - = \frac{١٣٢٨١٤ -}{٤٠١٨} = ٣' \text{ مس'}$$

$$٠٥٤٣,٥٢٥٦٣٥ = \frac{٢١٨٣٨٨٦}{٤٠١٨} = ٤' \text{ مس'}$$

س	ك	ش'	كش'	كش'٢	كش'٣	كش'٤
٢٨,٤	١	١٦ —	١٦ —	٢٥٦	٤٠٩٦ —	٦٥٥٣٦
١,٥	٠,٥	١٥ —	٧,٥ —	١١٢,٥	١٦٨٧,٥ —	٢٥٣١٢,٥
٢,٦	١,٥	١٤ —	٢١ —	٢٩٤	٤١١٦ —	٥٧٦٢٤
٣,٧	٥	١٣ —	٦٥ —	٨٤٥	١٠٩٨٥ —	١٤٢٨٠,٥
٤,٨	٧,٥	١٢ —	٩٠ —	١٠٨٠	١٢٩٦٠ —	١٥٥٥٢٠
٥,٩	١٢,٥	١١ —	١٣٧,٥ —	١٥١٢,٥	١٦٦٣٧,٥ —	١٨٣٠١٢,٥
٦,٠	١٣,٥	١٠ —	١٣٥ —	١٣٥٠	١٣٥٠ —	١٣٥٠٠٠
٧,١	٣٤	٩ —	٣٠٦ —	٢٧٥٤	٢٤٧٨٦ —	٢٢٣٠٧٤
٨,٢	٤٦,٥	٨ —	٣٧٢ —	٢٩٧٦	٢٣٨٠٨ —	١٩٠٤٦٤
٩,٣	٧١,٥	٧ —	٥٠٠,٥ —	٣٥٠٣,٥	٢٤٥٢٤,٥ —	١٧١٦٧١,٥
١٠,٤	١٣٢	٦ —	٧٩٢ —	٤٧٥٢	٢٨٥١٢ —	١٧١٠٧٢
١١,٥	١٨١	٥ —	٩٠٥ —	٤٥٢٥	٢٢٦٢٥ —	١١٣١٢٥
١٢,٦	٢٥٨	٤ —	١٠٣٢ —	٤١٢٨	١٦٥١٢ —	٦٦٠٤٨
١٣,٧	٣٢٩	٣ —	٩٨٧ —	٢٩٦١	٨٨٨٣ —	٢٦٦٤٩
١٤,٨	٣٦٠,٥	٢ —	٧٢١ —	١٤٤٢	٢٨٨٤ —	٥٧٦٨
١٥,٩	٤٢٦	١ —	٤٢٦ —	٤٢٦	٤٢٦ —	٤٢٦
١٦,٠	٤٥٨	٠	٠	٠	٠	٠
١٧,١	٤٨٤,٥	١	٤٨٤,٥	٤٨٤,٥	٤٨٤,٥	٤٨٤,٥
١٨,٢	٣٧٧	٢	٧٥٤	١٥٠٨	٣٠١٦	٦٠٣٢
١٩,٣	٣٢٩	٣	٩٨٧	٢٩٦١	٨٨٨٣	٢٦٦٤٩
٢٠,٤	٢٠٧,٥	٤	٨٣٠	٣٣٢٠	١٣٢٨٠	٥٣١٢٠
٢١,٥	١٣٣	٥	٦٦٥	٣٣٢٥	١٦٦٣٥١	٨٣١٢٥
٢٢,٦	٩٣,٥	٦	٥٦١	٣٣٦٦	٢٠١٩٦	١٢١١٧٦
٢٣,٧	٤٦	٧	٣٢٢	٢٢٥٤	١٥٧٧٨	١١٠٤٤٦
٢٤,٨	٦,٥	٨	٥٢	٤١٦	٣٣٢٨	٢٦٦٢٤
٢٥,٩	٢	٩	١٨	١٦٢	١٤٥٨	١٣١٢٢
٢٦,٠	١	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠٠
	٤٠١٨	—	١٨٣٠ —	٥٠٨١٤	١٣٢٨٩٤ —	٢١٨٣٨٨٦

لإيجاد الوسط الحسابي للتوزيع نستخدم $\bar{s} = 1 + ج$. لدينا $1 = 300$ ،
 $ج = \bar{s}' = 0,455$ إذن

$$\bar{s} = 300 - 0,455 = 299,545 \text{ وحدة}$$

$$= 29,9545 \text{ بوصة}$$

لأن عرض الفئة يساوى ١، بوصة. ولإيجاد العزم الثانى والعزم الثالث والعزم الرابع للتوزيع حول الوسط الحسابى نعوض فى (٧٣). هذا يعطى القيم الآتية:

$$\bar{m}_3 = 12,4392، \bar{m}_2 = 15,9839، \bar{m}_1 = 498,8811$$

بما أن التكرار صغير عند طرفى التوزيع إذن يمكننا أن نفرض أن المنحنى التكرارى للتوزيع يمس المحور الأفقى مسا على الرتبة عند الطرفين وأنه يمكن تطبيق تصحيحات شپرد فى هذه الحالة. بالتعويض فى (٧٦) مع $f = 1$ نحصل على

$$\bar{m}_2 = 12,3558، \bar{m}_1 = 15,9839، \bar{m}_0 = 492,6907$$

هذه العزوم مكتوبة بدلالة عرض الفئة الذى يساوى ١، بوصة وليكتابة النتائج بدلالة الوحدة الأصلية يكفى ضرب العزم الرأى فى ١، بوصة.

أسئلة

١. تكلم عن المدى كأساس لتقدير النشئت.
٢. أثبت أن الانحراف المتوسط يكون أصغر ما يمكن عندما يقاس من الوسط.

- احسب الانحراف المتوسط لمعدلات الوفاة المعطاة فى الجدول ١١ ثم قارن النتيجة بالانحرافين المتوسطين المحسوبين من توزيعين تكرارين طول فترة التوزيع فى أحدهما تساوى ١٠ وحدات وفى الآخر تساوى ١٣ وحدة.
٣. احسب الانحراف المعيارى للأعداد الآتية:

٧ ، ٩ ، ٣ ، ١ ، ٢ ، ٤ ، ٧ ، ٢ ، ١ ، ٨

٤ ، ٨ ، ٧ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، ١ ، ٢ ، ٩ ، ٥

(أ) باحتساب انحرافات الأعداد عن وسطها الحسابي ،

(ب) باحتساب الانحرافات عن نقطة الأصل $= ١$.

٤ . في أحد اختبارات علم النفس طلب من خمسة عشر شخصا أن يدونوا أسماء الإعلانات التجارية التي يذكرونها عقب عرض ٨١ إعلانا عليهم لمدة معينة فكانت النتيجة كما يلي :—

رقم الشخص	عدد الإعلانات المدونة	رقم الشخص	عدد الإعلانات المدونة
١	١٢	٩	٣٧
٢	٢١	١٠	٣٩
٣	٢١	١١	٣٩
٤	٢٣	١٢	٣٩
٥	٢٧	١٣	٤٠
٦	٢٨	١٤	٤٩
٧	٣٠	١٥	٥٤
٨	٣٤		

احسب بأخذ نقطة الأصل الاختيارية عند الصفر الانحراف المعياري لقوات ذاكرة هذه المجموعة .

٥ . يعطى الجدول الآتي التوزيع التكراري لأعمار كل البنين كما كانوا في إحدى مدارس مدينة مانشستر في صيف سنة ١٩٢١ :

العمر (سنتين)	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
عدد التلاميذ *	٢٩	١١٢	١٧٣	٢٥٥	٢٦٣	١٧٣	٨٠	٢٥
	١١١٠							

احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأعمار .

٦ . اشرح معنى الانحراف المعياري وتكلم عن أهميته في دراسة التوزيعات التكرارية .

احسب الانحراف المعياري للأجور الآتية (قروش) :-

الأجر	التكرار	الأجر	التكرار
٤ -	١٢	٢٤ -	٨٤
٨ -	٣١	٢٨ -	٦٢
١٢ -	٤٨	٣٢ -	٣٩
١٦ -	٦٩	٣٦ -	٢٢
٢٠ -	٩٥	٤٠ -	١١
			٤٧٣

٧ . يصف الجدول الآتي التوزيع التكراري لأجور جماعة من عمال مصنع معين مقدرة بالقروش :

الأجر	عدد العمال	الأجر	عدد العمال
٤ -	١٧	١٨ -	٦٤
٦ -	٢٤	٢٠ -	٤٨
٨ -	٣٧	٢٢ -	٣١
١٠ -	٥٢	٢٤ -	٢٢
١٢ -	٦٣	٢٦ -	١١
١٤ -	٨٧	٢٨ -	٥
١٦ -	٧٩		٥٤٠

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للأجور .

٨ . في ١٩٢٤ أخذت عينة مؤلفة من ٨٩٨ أسرة من الطبقة العاملة في مدينة

Bolton وصنفت الأسر حسب عدد الغرف المقطونة :

عدد الغرف	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
عدد الأسر	١٥	٤٧٧	٢٢٧	١٦٩	٧	٢	١

اثبت أن ٣,٦٥ هو الوسط الحسابي لعدد الغرف المقطونة في أسرة واحدة وأوجد الانحراف المعياري لعدد الغرف المقطونة للأسرة الواحدة في هذه المجموعة من الأسر .

٩ . أوجد برسم المنحنى المتجمع الصاعد الوسيط والربيعين الأول والثالث للتوزيع التكراري الآتي وحقق النتائج بالحساب .

الوزن (جرامات)	عدد البذور	الوزن (جرامات)	عدد البذور
٠,١٠ -	١٥	٠,٦٠ -	٩٠
٠,٢٠ -	٣٣	٠,٧٠ -	٦١
٠,٣٠ -	٥٨	٠,٨٠ -	٣٠
٠,٤٠ -	٩٢	٠,٩٠ -	١٢
٠,٥٠ -	١٢٠		٥١١

١٠ . يبين الجدول الآتي التوزيع التكراري للأجور اليومية لعمال مصنع في القاهرة .

الأجر (قروش)	-٤	-٨	-١٢	-١٦	-٢٠	-٢٤	-٢٨	-٣٢
عدد العمال	٣٧	٢٣٣	٣٧٤	٢٠٦	٧٦	٦٠	١٠	٤

ارسم منحنيًا متجمعًا لهذا التوزيع وأوجد منه قيم الوسيط والربيعين الأول والثالث ثم حقق النتائج باحتساب هذه القيم .

١١ . يبين الجدول الآتي عدد حالات الطلاق التي تمت في مصر سنة ١٩٤٣ مقسمة حسب طول الحياة الزوجية التي سبقت الطلاق .

عدد حالات الطلاق	طول الحياة الزوجية	عدد حالات الطلاق	طول الحياة الزوجية
٣٨٩٥	٤ سنة —	٣٤٥٧	أقل من شهر
١١٤٩٤	— " ٥	١٢٥٣٤	شهر —
٤١٩٢	— " ١٠	١٠٥١٨	٦ شهور —
١٩١٥	— " ١٥	١٤٧٤٤	سنة —
٢١٣٠	٢٠ سنة فأكثر	٩٥٤٨	٢ " —
٨٠٠٧٥		٥٦٤٨	٣ " —

مثل هذا التوزيع بيانياً بمدرج تكرارى واحسب الربعين الأدنى والأعلى لطول الحياة الزوجية قبل الطلاق .

أى نوع من الأوساط تفضل استخدامه لتمثيل القيمة النموذجية فى هذه الحالة ولماذا؟

١٢ . احسب قيم الوسيط والربع الثالث والعشير الثالث والمئين الخامس عشر للتوزيع الآلى الذى يمثل عدد البنين والبنات فى جميع مدارس المملكة المصرية سنة ١٩٤٣ :—

عدد البنين والبنات (مئات)	العمر (سنين)
١٤٦	أقل من ٥ سنين
٤٤٧٥	— ٥
٥٠٩٥	— ٨
٣٦٢٠	— ١٠
٧٩٠	— ١٣
٦٧٠	١٦ وفوق
١٤٧٩٦	

١٣ . إذا أعطيت توزيع مرتبات الإناث كما فى السؤال ٥ من مجموعة الأسئلة ٤ فأى وسيط وأى مقياس للتشتت تعتقد أنهما أصح من غيرهما

للمقارنة بينهما وبين نظيريهما من توزيع مماثل للذكور ؟ احسب المقياسين اللذين يقع اختيارك عليهما .

١٤ . مقاييس التشتت لاتصلح على إعلانها لمقارنة التشتت في توزيعين تكراريين مختلفين . اشرح هذه العبارة بوضوح وبين كيف تقارن التشتت في توزيع تكرارى بالتشتت في توزيع آخر .

يعطى أول الجدولين التاليين التوزيع التكرارى للأجور اليومية (قروش)

الأجر	عدد العمال	الأجر	عدد العمال
٤ —	٢٦	٢٤ —	٤٠
٨ —	٧٨	٢٨ —	٣٢
١٢ —	١٠٧	٣٢ —	٢٠
١٦ —	١١٣	٣٦ —	١٤
٢٠ —	٦٥	٤٠ —	٥
			٥٠٠

ويعطى ثانيهما التوزيع التكرارى لساعات العمل الأسبوعية لجماعة من العمال .

عدد الساعات	عدد العمال	عدد الساعات	عدد العمال
٤٠ —	٢١	٥٠ —	٨٤
٤٢ —	٣٥	٥٢ —	٦٩
٤٤ —	٥٢	٥٤ —	٤٥
٤٦ —	٧٣	٥٦ —	٣٠
٤٨ —	٩١		٥٠٠

قارن تشتت الأجور بتشتت ساعات العمل .

١٥ . بين الجدول الآتى أعمار عشرة عمال بالسنين وعدد أطفال كل

منهم :-

٢٥	٤١	٤٠	٢٤	٣٧	٣٠	٢٣	٢٨	٢٦	٢٢	عمر العامل
١	٥	٥	٢	٤	٣	٢	١	٣	٢	عدد الأطفال

قارن بين التغير في عمر العامل وبين التغير في عدد الأطفال باحتساب معامل التغير في الحالتين .

١٦ . يبين الجدول الآتي التغيرات في درجة الحرارة والرطوبة في أربع مدن مصرية خلال سنة معينة : —

درجة الحرارة (سنتجريد)				الرطوبة (في المائة)				الشهر
أسوان	أسيوط	الإسكندرية	الجيزة	أسوان	أسيوط	الإسكندرية	الجيزة	
١٤,٦	١١,٥	١٤,١	١١,٦	٤٢	٦٦	٦٠	٧٣	يناير
١٥,٦	١٢,١	١٤,٣	١٢,٠	٣٥	٦٤	٦٢	٧٤	فبراير
١٩,٢	١٥,٣	١٤,٦	١٤,٥	٢٧	٥٢	٦٤	٦٨	مارس
٢٢,٤	١٨,٩	١٦,٦	١٧,١	١٩	٤٠	٦٦	٦٤	أبريل
٣٠,٥	٢٥,٨	٢٠,٩	٢٢,٦	١٦	٣٤	٦٨	٥٦	مايو
٣١,٢	٢٦,٩	٢٣,٠	٢٤,٦	١٦	٣٦	٧٣	٥٧	يونيو
٣٣,٦	٢٩,٣	٢٥,٦	٢٧,٣	١٦	٣٥	٧٧	٥٩	يوليو
٣٣,٥	٢٩,١	٢٦,٦	٢٧,٢	٢٠	٤٤	٧٥	٦٨	أغسطس
٣١,٦	٢٧,٠	٢٦,٤	٢٥,٣	٢٤	٥٤	٧٠	٧٢	سبتمبر
٣٠,٠	٢٥,٩	٢٥,١	٢٤,٨	٢٨	٥٨	٦٨	٦٧	أكتوبر
٢٥,٢	٢١,١	٢٢,٢	٢٠,٤	٤٢	٦٥	٦٩	٧٦	نوفمبر
٢٠,٠	١٥,٧	١٨,٣	١٥,١	٥٤	٧٦	٦٧	٨٤	ديسمبر
٢٥,٦	٢١,٥	٢٠,٦	٢٠,٢	٢٨	٥٢	٦٨	٦٨	الوسط السنوي

قارن بين التغير في

- درجات الرطوبة في الإسكندرية وأسيوط ،
- درجات الرطوبة في الجيزة وأسوان ،
- درجات الحرارة في الإسكندرية وأسيوط ،
- درجات الحرارة في الجيزة وأسوان .

١٧ . احسب مع تعديلات شپرد القيمة المتوسطة والانحراف المعياري لدرجات الحرارة المسجلة في الجدول الآتي وهي أعلى درجات الحرارة في

نيويورك لكل يوم من يوليو في السنين ١٩١١ - ٢٠ (قيم مركزية):

درجة الحرارة	عدد الأيام	درجة الحرارة	عدد الأيام
٦٤	٢	٨٢	٥١
٦٧	٥	٨٥	٤٥
٧٠	١١	٨٨	٣١
٧٣	٢٦	٩١	١١
٧٦	٤٥	٩٤	١٣
٧٩	٦٦	٩٧	٤
			٣١٠

١٨. اكتب مذكرة قصيرة عن تصحيحات شپرد عند احتساب معاملات عزمية من توزيع تكرارى.
١٩. إذا كانت

$$ص = ١ \quad (٠ \leq س \leq ١)$$

معادلة المنحنى التكرارى لتوزيع ذى عدد صحيح من الفئات المتساوية ذات الطول ف فائت أن تصحى العزمين الثانى والرابع حول الوسط الحسابى هما^١

$$\begin{aligned} \overline{م٢} &= \overline{م١} + \frac{١}{١٢} ف^٢, \\ \overline{م٤} &= \overline{م٣} + \frac{١}{١٢} م١ ف^٢ + \frac{١}{٨٠} ف^٤. \end{aligned}$$

^١ Sir W. P. Elderton, Correzioni dei momenti quando la curva è simmetrica, 'Giorn. dell' Ist. Ital. Att.', 16 (1938), 145.

الفصل السابع

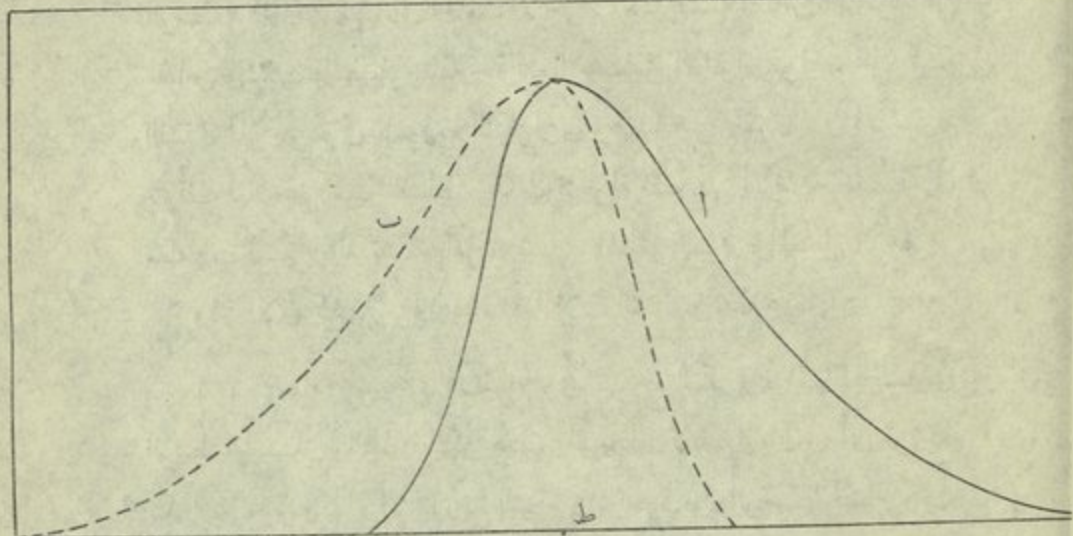
الالتواء

١٢٩ . الالتواء والفرصه من دراسة^١ درسنا في الفصل الرابع الأنواع المختلفة للتوزيع التكرارى فتبين لنا أن هناك توزيعات متماثلة تميل فيها الحدود إلى أحد جانبي النمط بقدر ما تميل إلى الجانب الآخر وتوزيعات أخرى مائلة أو ملتوية تميل فيها الحدود إلى أحد جانبي النمط أكثر من ميلها إلى الجانب الآخر . والآن نريد قياس كمية الالتواء الموجودة في أى توزيع تكرارى قياسا بالمعنى الإحصائى للكلمة .

تبدو أهمية قياس الالتواء في توزيع تكرارى واضحة إذا علمنا أنه من الممكن لتوزيعين تكراريين أن يتحدا في النمط أو الوسط أيا كان وفي الانحراف المعياري في الوقت الذى فيه يختلفان اختلافا كليا في الالتواء . الشكل ٤٢ يرينا مثل هذين التوزيعين . في هذا الشكل نجد منحنين تكراريين ١ ، ب لهما نمط واحد ط وانحراف معيارى واحد لأن كلا المنحنيين هو في الحق صورة الآخر في الخط الرأسى المرسوم عند ط . رغم هذا نرى المنحنيين مختلفين اختلافا ماديا لأنهما ملتويان في اتجاهين مختلفين . فبينما يقع الذيل الطويل للمنحنى ١ في الجهة الموجبة أى الجهة اليمنى من النمط . يقع الذيل الطويل للمنحنى ب في الجهة السالبة أى الجهة اليسرى من النمط . أيضا من السهل رسم شكل لتوزيعين تكراريين لهما وسط واحد وانحراف معيارى واحد وملتويان في اتجاه واحد ولكن بقدرين مختلفين . وكأن اتحاد أى توزيعين في الوسط والانحراف المعياري غير كاف لاتحادهما في الالتواء .

١ دراسة الالتواء مهمة في علم الأحياء والعلوم الطبيعية ولكنها أقل أهمية من دراسة النشئت وبالأخص في العلوم الاجتماعية .

الشكل ٤٢ . توزيعان تكراريان متحددان في النمط والانحراف المعياري
ومختلفان في الالتواء.



أى اختلاف من هذا القبيل بين توزيعين تكراريين لا يمكن ظهوره
إلا بقياس الالتواء . وقياس الالتواء فى أى توزيع تكرارى خطوة رئيسية
وضرورية لتلخيص التوزيع .

١٣٠ . مقاييس الالتواء ومعاملاته . هناك مقاييس كثيرة للالتواء
أشهرها ثلاثة . هذه الثلاثة هى مقياس بيرسن ، المقياس العزمى والمقياس
الرابعى . فمقياس بيرسن يتوقف على الفرق بين الوسط الحسابى وبين النمط
(أو الوسيط) . والمقياس العزمى يتوقف على العزم الثالث للتوزيع التكرارى
حول الوسط الحسابى . والمقياس الرابعى يتوقف على الفرق بين بعد الربع
الأول عن الوسيط وبعد الربع الثالث عن الوسيط .

تحول هذه المقاييس الثلاثة لأسباب تشبه الأسباب المذكورة فى البند
١١٥ إلى معاملات بقسمة كل واحد منها على مقياس مناسب للتشتت . ولا
نقسم فى هذه الحالة على وسط كما فعلنا مع مقاييس التشتت عند تحويلها إلى

معاملات لأننا الآن لانريد معرفة كمية الالتواء منسوبة إلى الوسط الذي يمثل التوزيع وإنما نريد معرفة مقدار ما تميل به حدود التوزيع إلى أحد جانبي الوسط أكثر من ميلها إلى الجانب الآخر. أيضا بقسمة مقياس الالتواء على مقياس التشتت بالسكيفية المقترحة نجعل معامل الالتواء يتوقف على كمية التشتت الموجودة في التوزيع التكرارى وهذا عمل معقول لأن الالتواء يتوقف فعلا على كمية التشتت. بذلك تتحول مقياس الالتواء الثلاثة إلى معاملات تسمى بالترتيب معامل بيرسن، المعامل العزمى والمعامل الربيعى. ولنر الآن كيف نعرف هذه المعاملات الثلاثة وكيف نحسبها.

١٣١. معامل بيرسن للالتواء. فى التوزيع التكرارى المتماثل يتساوى الوسط الحسابى والنمط. لكن هذين الوسطين لا يتساويان فى أى توزيع تكرارى ملتو وكلما زاد التوزيع التواء زاد الفرق بين الوسط الحسابى وبين النمط. هذا يجعل الفرق بين الوسط الحسابى وبين النمط مقياسا معقولا للالتواء وهذا الفرق أى $\bar{s} - \bar{p}$ هو فعلا مقياس بيرسن للالتواء. على هذه الفكرة البسيطة بنى بيرسن طريقته لقياس الالتواء فى توزيع تكرارى. للحصول على معامل بيرسن للالتواء نقسم المقياس على الانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى أو على أى مقياس آخر للتشتت كالانحراف المتوسط عن النمط أو عن الوسيط أو عن الوسط الحسابى. لكن العادة جرت على تعريف معامل بيرسن للالتواء بأنه يساوى خارج قسمة الفرق بين الوسط الحسابى والنمط على الانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى. سنكتب لـ $\bar{p}$ ليدل على معامل بيرسن للالتواء فيكون

$$\bar{p} = \frac{\bar{s} - \bar{p}}{\bar{e}} \quad (٨٣)$$

من هذه المعادلة يحسب المعامل $\bar{p}$ بسهولة تامة متى علم $\bar{s}$ ، $\bar{p}$ ، $\bar{e}$. فمثلا فى التوزيع التكرارى لمنسوبات الأسعار فى ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ لدينا

$$\bar{s} = 119,08, \quad \bar{t} = 110,77, \quad \bar{e} = 27,25.$$

بتطبيق (٨٣) نحصل على

$$\bar{l} = \frac{110,77 - 119,08}{27,25} = \frac{-8,31}{27,25} = -0,30$$

إذا كان $\bar{s} = \bar{t}$ يكون $\bar{l} = 0$ وتلك هي حالة التوزيع التكرارى المتماثل. أيضا $\bar{l}$ يكون موجبا إذا كان $\bar{s} < \bar{t}$ وسالبا إذا كان $\bar{s} > \bar{t}$. لدينا إذن توزيعات تكرارية متماثلة وتوزيعات تكرارية ذات التواء موجب وتوزيعات تكرارية ذات التواء سالب. فى التوزيع التكرارى الموجب يكون $\bar{s} < \bar{t}$ ويقع الذيل الطويل للمنحنى التكرارى فى الجهة الموجبة أى الجهة اليمنى من النمط كما فى المنحنى ١ (الشكل ٤٢). وفى التوزيع التكرارى السالب يكون $\bar{s} > \bar{t}$ ويقع الذيل الطويل للمنحنى التكرارى فى الجهة السالبة أى الجهة اليسرى من النمط كما فى المنحنى ٢ (الشكل ٤٢). أى أن الجزء الأكبر من المنحنى يقع فى هذه الحالة إلى يسار النمط. لكن التوزيعات التكرارية ذات الالتواء السالب نادرة فى الحياة العملية.

إذا كان التوزيع التكرارى بسيط الالتواء ووحيد النمط يمكننا التعويض عن $\bar{s} - \bar{t}$ من العلاقة (٣٨) وفى هذه الحالة إذا كتبنا $\bar{l}$ بدلا من $\bar{l}$ تصير المعادلة (٨٣)

$$\bar{l} = \frac{\bar{s} - \bar{t}}{\bar{e}} \quad (٨٤)$$

لكن هذه المعادلة قد تعطى نتائج لا يمكن الاعتماد عليها كثيرا. هذا المعامل الجديد يقع بين -3 و $+3$ وواضح أن كبر هذا المدى يجعله حساسا للغاية. ويمكننا أيضا استبدال النمط فى (٨٣) بالوسيط رأسا لأن الوسيط كالنمط وسط وضعى لا يتأثر كثيرا بالقيم المتطرفة. فى هذه الحالة نحصل على

$$\bar{l} = \frac{\bar{s} - \bar{t}}{\bar{e}} \quad (٨٥)$$

إذا كان التوزيع التكرارى بسيط الالتواء فالوسيط لا يختلف كثيرا عن الوسط الحسابى . فإذا استبدلنا النمط بالوسيط واحتسبنا ل^١ من (٨٥) يكون المعامل الناتج صغيرا جدا ولا يمكن الاعتماد عليه كثيرا فى قياس الالتواء . إذن المعادلة (٨٥) لا يمكن الاعتماد عليها كثيرا فى قياس الالتواءات البسيطة .

ويجوز كما قلنا أن نقسم على الانحراف المتوسط عن الوسيط بدلا من الانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى .

المعادلات الثلاث (٨٣) - (٨٥) تعطى ثلاثة معاملات مختلفة للالتواء . أى واحد من هذه نسميه معامل بيرسن للالتواء . أهم هذه الثلاثة هو المعامل ل^١ الذى اقترحه بيرسن وقد بين بيرسن أن هذا المعامل يمكن التعبير عنه بدلالة العزوم الأربعة الأولى فى حالة فئة كبيرة من التوزيعات التكرارية المعروفة باسمه . إذا عرفنا

$$ت_١ = \frac{\sum \frac{f_i}{n} \cdot \frac{f_i^2}{n}}{\sum \frac{f_i^3}{n^2}} \quad (٨٦)$$

$$ت_٢ = \frac{\sum \frac{f_i}{n} \cdot \frac{f_i^3}{n}}{\sum \frac{f_i^4}{n^2}} \quad (٨٧)$$

فواضح أن ت_١ ، ت_٢ كلاهما موجب إلا إذا كان صفرا وفى حالة منحنيات بيرسن يمكن إثبات أن

$$ل_١ = \sqrt{\frac{١}{٢} \frac{ت_٢}{ت_١}} \quad (٨٨)$$

هذه المعادلة تعرف معاملا يمكن استخدامه لقياس الالتواء فى أى توزيع تكرارى^١.

١٣٢ . المعامل العزمى للالتواء . المعامل العزمى للالتواء هو أحسن المعاملات الثلاثة للالتواء وأهمها كلها من الناحية النظرية . لكنه أيضا أصعبها

١ سوف يظهر أن ت_١ هو مربع المعامل العزمى للالتواء وأن ت_٢ هو المعامل العزمى للانبعاج .

في احتسابه لأنه يتوقف على العزم الثالث للتوزيع حول الوسط الحسابي واحتساب هذا يحتاج إلى وقت طويل . والآن نسأل أنفسنا : إذا كان العزم الثالث للتوزيع حول الوسط الحسابي صعبا في احتسابه كما نقول فلم اخترناه لقياس الالتواء ولم نختَر عزما آخر أسهل منه كالعزم الثاني أو العزم الأول ؟ لننظر أولا إلى العزم الأول للتوزيع حول الوسط الحسابي . هذا يساوى الصفر لكل توزيع تكررارى متماثل أو غير متماثل لأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي صفر في كل حالة . إذن العزم الأول للتوزيع حول الوسط الحسابي لا ينفع لقياس الالتواء لأنه صفر دائما . وما بال العزم الثاني حول الوسط الحسابي ؟ هذا العزم موجب من تعريفه لكل توزيع تكررارى متماثل أو غير متماثل فهو إذن لا يفرق بين التوزيعات التكرارية المتماثلة والمتلوية ونحن نريد عزما يكون صفرا إذا كان التوزيع متماثلا ولا يكون صفرا إلا في هذه الحالة . إذن العزم الثاني للتوزيع حول الوسط الحسابي لا ينفع لقياس الالتواء لأنه موجب دائما . وما يقال عن العزم الثاني يقال عن العزم الرابع وعن العزم السادس وعن كل عزم من رتبة زوجية . لم يبق الآن للتوزيع من العزوم حول الوسط الحسابي إلا العزوم ذات الرتبة الفردية وقد رأينا أن أول هذه العزوم لا ينفع . لننظر إذن إلى أول العزوم الباقية وهو العزم الثالث . هذا العزم أى مره يساوى الصفر لكل توزيع تكررارى متماثل لأن الحدود الموجبة تمحو الحدود السالبة في كل حالة من هذا القبيل . ولكنه لا يساوى الصفر في أى توزيع تكررارى ملتبس وكلما زاد التوزيع التواء زادت القيمة العددية المطلقة للعزم الثالث . ومثل العزم الثالث في ذلك مثل أى عزم آخر فردى إلا العزم الأول . إذن كل العزوم الفردية حول الوسط الحسابي تنفع لقياس الالتواء إلا العزم الأول وأبسط هذه العزوم هو بالطبع العزم الثالث . إذن طبيعى أن نستخدم العزم الثالث حول الوسط لقياس الالتواء . تلك فكرة المعامل العزمى للالتواء .

المقياس العزى للالتواء هو العزم الثالث حول الوسط الحسابى أى $مرم$.
لتحويل هذا المقياس إلى المعامل العزى للالتواء نقسم المقياس على مكعب
الانحراف المعيارى . بما أن $مرم = ٢$ إذن لو كتبنا ث_١ للمعامل العزى
لالتواء يكون

$$ث_١ = \frac{مرم}{مرم^٣} \quad (٨٩)$$

مع أخذ الإشارة الموجبة للجذر . وواضح من مقارنة المعادلتين (٨٩) ، (٨٦)
أن ث_١ يساوى ث_٢ إذا فسرنا الجذر بأنه موجب أو سالب حسب كون
ث_١ موجبا أو سالبا بالترتيب . إذن ث_١ يعطى مربع المعامل العزى للالتواء .
فشلا فى التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار مجموعة السلع فى ١٩٣٣ على
أساس ١٩٢٠ لدينا (البند ١١٧)

$$مرم = ٨,١٠٣٥٤٩$$

وهذا هو المقياس العزى للالتواء . أيضا

$$مرم = ٧,٤٢٤٩٤٨$$

وبتطبيق (٨٩) ينتج أن

$$ث_١ = ث_٢ = \frac{٨,١٠٣٥٤٩}{٧,٤٢٤٩٤٨} = ١,٠٧٤٠١$$

هذا هو المعامل العزى للالتواء فى هذه الحالة ويلحظ أنه موجب .

إذا كان $مرم = ٠$ يكون $ث_١ = ٠$. وتلك كما قدمنا هى حالة التوزيع
التكرارى المتماثل . أيضا بما أن مقام ث_١ موجب دائما إذن ث_١ يكون أكبر
من الصفر إذا كان $مرم$ موجبا ويكون أصغر من الصفر إذا كان $مرم$ سالبا .
وواضح أن $مرم$ يكون موجبا إذا وقع الذيل الطويل للتوزيع فى الجهة الموجبة
لأن مجموع مكعبات الانحرافات الموجبة يكون فى هذه الحالة أرجح من
مجموع مكعبات الانحرافات السالبة ويكون سالبا إذا وقع الذيل الطويل
للنخنى فى الجهة السالبة .

لتحويل المقياس العزمى إلى معامل قسمنا المقياس على $\frac{1}{\epsilon}$ ويجوز أن
نقسم على $\frac{1}{\epsilon}$ كما يفعل بعض الكتاب^١. أيضا لا بأس من تعريف المقياس
العزمى للالتواء بأنه مر $\frac{1}{\epsilon}$ أى الجذر التكعيبي للعزم الثالث حول الوسط
الحسابى وتحويل هذا المقياس إلى معامل بالقسمة على $\frac{1}{\epsilon}$ أو على الانحراف
المتوسط ح. لكن القسمة على الانحراف المعيارى أفعل لأن العزم الثالث
يعطى أهمية خاصة للانحرافات المتطرفة لتوقفه على مكعبات الانحرافات فمن
اللائق إذن أن نقسم على مقياس للالتواء يعطى مثله أهمية خاصة لكل انحراف
متطرف أى الانحراف المعيارى. إذا قسمنا على الانحراف المعيارى نحصل
على مر $\frac{1}{\epsilon}$ / $\frac{1}{\epsilon}$ أو مر $\frac{1}{\epsilon}$ / مر $\frac{1}{\epsilon}$ وواضح أن هذا يساوى الجذر التكعيبي للمعامل
العزمى للالتواء أى $\frac{1}{\epsilon}$. فمثلا فى المثال السابق ث = ٠,٤٠١. وهذا يعطى
ث $\frac{1}{\epsilon}$ = ٠,٧٤. وإذا قسمنا على الانحراف المتوسط نحصل على مر $\frac{1}{\epsilon}$ / ح.
لدينا مر $\frac{1}{\epsilon}$ = ٢,٠٠٨٥٩٢. وبتعويض هذه القيمة مع ح = ٢,١٨٦ نجد أن
مر $\frac{1}{\epsilon}$ / ح = ٠,٩٢.

١٣٣. المعامل الربيعى للالتواء. يتوقف المعامل الربيعى للالتواء مثل
معامل بيرسن على فكرة بسيطة. فى التوزيع التكرارى المتماثل يقع الربيعان
الاول والثالث على بعدين متساويين من الوسيط ويقع الوسيط فى منتصف

١ إذا كانت معادلة المنحنى التكرارى للتوزيع

$$س = ١ - ١٠ - ١٠٠ س - ١٠٠٠ س^٣ \quad (ب، ج، ٠ < ١)$$

فى المدى $س \leq ٠$ فإنه يمكن إثبات أن

$$س = \frac{١}{١٠}، ط = \frac{١ - ١٠}{١٠}، مر = \frac{١}{١٠}، مر = \frac{١}{١٠}$$

إذن $س - ط = \frac{١}{١٠}$ ، $ب = \frac{١}{١٠}$ وهذا يجعل مقياس بيرسن للالتواء أى

$$\frac{س - ط}{ب} = \frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠} / \frac{١}{١٠} = مر = \frac{١}{١٠}$$

هذا هو السبب الذى جعل بعض الكتاب يفضلون $\frac{1}{\epsilon}$ مر / $\frac{1}{\epsilon}$ على مر / $\frac{1}{\epsilon}$ كتعريف
لالتواء. أو يمكننا ترك المعامل العزمى كما هو وتعريف معامل بيرسن بأنه $\frac{١}{١٠} (س - ط) / \frac{1}{\epsilon}$.

المسافة بينهما . لكن بعدى الربيعين الأول والثالث عن الوسيط لا يتساويان
في أى توزيع تكرارى ملتو وكلما زاد التوزيع التواء زاد الفرق بين هذين
البعدين . فإذا أخذنا الفرق بين البعدين أى بين ب_٢ - ب_١ وبين ب_٣ - ب_٢
كان لدينا أساس جيد لإنشاء مقياس معقول للالتواء . هذا الفرق أى

$$(ب_٢ - ب_١) - (ب_٣ - ب_٢) = ب_١ - ٢ب_٢ + ب_٣$$

هو المقياس الربيعى للالتواء .

لتحويل هذا المقياس إلى المعامل الربيعى للالتواء نقسم المقياس على
المقياس الربيعى للانحراف أى ب . لكن بعض الكتاب ومنهم بولى يقسم
المقياس الربيعى للالتواء على ٢ ب وبعضهم يقسمه على ٣ . سنكتب لـ
للمعامل الربيعى للالتواء . بالقسمة على ب يكون

$$(٩٠) \quad ل_٢ = \frac{ب_١ - ٢ب_٢ + ب_٣}{ب}$$

فمثلا فى التوزيع التكرارى لمنسوبات الأسعار فى ١٩٣٣ لدينا

$$ب_١ = ٩٩,٥٨ \quad ب_٢ = ١١٦,١٤ \quad ب_٣ = ١٣٦,٨٢ \quad ب = ١٨,٦٢$$

بتطبيق (٩٠) نجد أن

$$ل_٢ = \frac{٩٩,٥٨ - ٢(١١٦,١٤) + ١٣٦,٨٢}{١٨,٦٢} = ٠,٢٢$$

إذا كان ب_١ - ب_٢ = ب_٢ - ب_٣ يكون ل_٢ = ٠ وهذه هى حالة
التوزيع التكرارى المتماثل . أيضا ل_٢ يكون موجبا إذا كان ب_٢ - ب_١ أكبر
من ب_٣ - ب_٢ أى إذا كان الربيع الأول أقرب إلى الوسيط من الربيع الثالث
ويكون سالبا إذا كان ب_٢ - ب_١ أصغر من ب_٣ - ب_٢ أى إذا كان الربيع
الثالث أقرب إلى الوسيط من الربيع الأول أو إذا كان الربيع الأول أقرب
إلى الذيل من الربيع الثالث . والمعامل الربيعى للالتواء يستطيع أخذ أية
قيمة بين - ٢ ، + ٢ فهو إذن أقل حساسية من معامل بيرسن الثانى ل_١ .
لكن قيمته تقع فى العادة بين - ١ ، + ١ .

هناك مقياس آخر للالتواء يشبه المقياس الربيعي في التركيب وفيه يستخدم العشيران الأول والتاسع بدل الربيعين الأول والثالث . هذا المقياس الآخر يسمى المقياس العشيري للالتواء وسنكتبه ل'. لدينا

$$\begin{aligned} (٠,٥ - ٠,٥) - (٠,٥ - ٠,٥) &= ٠,٥ - ٠,٥ + ٠,٥ - ٠,٥ \\ \frac{٠,٥ + ٠,٥ - ٠,٥}{٢} &= ل' \end{aligned} \quad (٩١)$$

حيث ٠,٥ ، ٠,٥ هما العشيران الأول والتاسع بالترتيب وأما ٠,٥ فهو الوسيط . في التوزيع التكراري لمنسوبات أسعار السلع في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠ لدينا كما في البند ١١٤

$$١٥٦,٥٠ = ٠,٥ ، ١٦,١٤ = ٠,٥ ، ٨٥,٣٣ = ٠,٥$$

وبتطبيق (٩١) ينتج أن

$$ل' = \frac{٨٥,٣٣ + ٢٣٢,٢٨ - ١٥٦,٥٠}{٢} = ١,٠٤$$

ل' ، ل' ثابتان بسيطان جدا في احتسابهما . ويمكن أيضا إيجادهما بيانيا باستخدام المنحنى المتجمع الصاعد أو الهابط . فمثلا لإيجاد المعامل الربيعي للالتواء بيانيا ماعلينا إلا أن نرسم الشكل ونستخدمه لإيجاد الربيعات الثلاثة (البند ١١٢) ثم نطبق (٩٠) لاحتساب المعامل المطلوب .

١٣٤ . المقارنة بين المعاملات الثلاثة للالتواء . ليست المقارنة بين معاملات الالتواء سهلة لأن وجوه المقارنة ليست واضحة في هذه الحالة . مما لا ريب فيه أن معامل بيرسن أكثر حساسية للالتواءات البسيطة من المعامل الربيعي . لذلك يستخدم معامل بيرسن لقياس الالتواء في التوزيعات التكرارية البسيطة الالتواء ويستخدم أيضا للمقارنة من حيث الالتواء بين توزيعين تكراريين بسيطين الالتواء . لكن احتساب هذا المعامل لا يكون سهلا إلا إذا كان للتوزيع نمط واضح . فإن لم يكن النمط واضحا لأي سبب من الأسباب فإن المعادلة (٨٣) لا تنفع لاحتساب معامل بيرسن وفي

هذه الحالة نستخدم (٨٤) أو (٨٥) للحصول على المعامل المطلوب . لكن النتيجة في كلتا الحالتين لا يمكن الاعتماد عليها كثيرا للأسباب المذكورة في البند ١٣١ . والنتيجة النهائية هي أن معامل بيرسن لا يمكن استخدامه إلا إذا كان للتوزيع نمط واضح . هذا هو العيب الرئيسى لهذا المعامل .

يمتاز المعامل العزى للالتواء على معامل بيرسن وعلى المعامل الربيعى أيضا بمثانة تعريفه وبأنه أكثر المعاملات الثلاثة استقرارا . لكنه لا يستخدم كثيرا فى الأعمال الإحصائية البسيطة لصعوبة احتسابه . والمعامل العزى يعطى أهمية خاصة للانحرافات المتطرفة لأنه يتوقف على مكعبات الانحرافات وواضح أن هذا يرفع من شأنه كمعامل للالتواء . فالسؤال الرئيسى فى الالتواء هو تحديد الفرق بين انحراف القيم إلى يمين النمط وانحرافها إلى يساره وواضح أن المقياس الأمثل للالتواء يجب أن يعطى أهمية خاصة للانحرافات الكبيرة . ويمتاز المعامل الربيعى للالتواء على معامل بيرسن بأنه لا يتوقف على النمط وبسهولة إيجاد حسايها وبياناتها . لكن هذا المعامل ليس حساسا للالتواءات البسيطة كمعامل بيرسن . لذلك لا يستخدم المعامل الربيعى لقياس الالتواء فى التوزيعات التكرارية البسيطة الالتواء بل يترك ذلك لمعامل بيرسن . لكنه يستخدم لقياس الالتواء فى التوزيعات الشديدة الالتواء والتوزيعات ذات النمط غير الواضح . ويستخدم أيضا فى الحالات التى فيها لا يراد إقامة وزن كبير للانحرافات المتطرفة لأنه لا يتأثر بها فهو فى ذلك ضد المعامل العزى تماما .

١٣٥ . الانبعاث^١ . من الممكن لتوزيعين تكراريين أن يتحدا فى الوسط وفى الانحراف المعيارى وفى معامل الالتواء ويختلفا فى شكل المنحنى التكرارى إذ يكون المنحنى الذى يمثل أحد التوزيعين أكثر انبعاجا عند النمط من المنحنى الذى يمثل التوزيع الآخر . إذن لكى يكمل تلخيص أى توزيع تكرارى لابد من قياس انبعاث التوزيع عند النمط . هذا الانبعاث مختلف بالطبع عن

الانبعاج العام للمنحنى التكرارى الناشئ أولا من التشدد وثانيا من الالتواء وقياسه يعد بمثابة الخطوة الأخيرة من سلسلة الخطوات الضرورية لتلخيص أى توزيع تكرارى .

لقياس الانبعاج فى توزيع تكرارى سنستخدم معاملين مختلفين وهما المعامل العزمى للانبعاج والمعامل الوضعى للانبعاج . وسندرس الآن هذين المعاملين بالترتيب .

١٣٦ . المعامل العزمى للانبعاج . المعامل العزمى للانبعاج أحسن من المعامل الوضعى لكنه أيضا أصعب فى احتسابه . هذا المعامل يتوقف على العزم الرابع للتوزيع حول الوسط الحسابى وواضح أن احتسابه فى أية حالة معينة يحتاج إلى شيء من الوقت . يعرف المعامل العزمى للانبعاج بأنه خارج قسمة العزم الرابع للتوزيع حول الوسط الحسابى أى M_4 على القوة الرابعة للانحراف المعيارى عن الوسط الحسابى أى M_2 . بما أن $M_2 = \sigma^2$ إذن ينتج من هذا التعريف أن المعامل العزمى للانبعاج يساوى M_4 / σ^4 حيث σ هو الثابت الإحصائى المعروف بالمعادلة (٨٧) .

إذا اعتبرنا عددا كبيرا من المنحنيات التكرارية المتحدة فى الانحراف المعيارى نجد أن ارتفاع المنحنى عند النمط أو الوسط يكون أصغر إذا كان σ أصغر ويكون أكبر إذا كان σ أكبر . وواضح أن لهذا الارتفاع علاقة كبيرة بانبعاج المنحنى عند النمط . فالمنحنى يكون قصيرا ومفلطحا عند النمط إذا كان ارتفاعه عند النمط صغيرا ويكون طويلا ومدببا إذا كان ارتفاعه عند النمط كبيرا . إذن σ معامل يصلح لقياس الانبعاج عند النمط .

إذا كان التوزيع التكرارى متماثلا فإنه باستخدام حساب التكامل يمكن إثبات أن $M_3 = 0$ أو $M_3 = 0$. إذن لو اعتبرنا انبعاج المنحنى التكرارى المتماثل عند النمط عاديا فإننا نصف أى توزيع تكرارى متماثل أو غير متماثل بأنه متكافئ إذا كان $M_3 = 0$ ونصف أى توزيع فيه

ت > ٣ بأنه مفلطح لأنه أكثر انبعاجا من التوزيع المتماثل وأى توزيع فيه
ت < ٣ بأنه مدبب لأنه أقل انبعاجا من التوزيع المتماثل .

فمثلا في التوزيع التكرارى لمنسوبات الأسعار في ١٩٣٣ على أساس ١٩٢٠
لدينا من البند ١١٧

$$\text{مصر} = ١٥٥,٢٨٨٠٠٩ , \text{مصر} = ٧,٤٢٤٩٤٨$$

من هاتين القيمتين نجد

$$\text{ت} = ٢,٨١٦$$

بما أن ت > ٣ إذن التوزيع التكرارى لمنسوبات الأسعار مفلطح .
في أى توزيع تكرارى يسمى العدد ت - ٣ فضلة الانبعاج أو الفضلة
بالاختصار ويكتب ت . أى

$$\text{ت} = ٣ - \frac{\text{مصر}}{\text{مصر}} \quad (٩٢)$$

وواضح أن الفضلة صفر في كل توزيع تكرارى متكافئ . في المثال السابق
ت $= ٢,٨١٦$ والفضلة تساوى - ١,٨٤ . لكن بعض الكتاب يعرّف
الفضلة بأنها $\frac{١}{٣} (ت - ٣)$ وبعضهم يعرفها بأنها $\frac{١}{٨} (ت - ٣)$.

١٣٧ . **المعامل الوضعى للانبعاث** . المعامل الوضعى للانبعاث أبسط من
المعامل العزمى وهو يتوقف على الفكرة الآتية البسيطة . إذا أخذنا قيمتين
معينتين على جانبي النمط أو الوسط في توزيع تكرارى وأخذنا المدى المحصور
بينهما وقارنا هذا المدى بمدى آخر مشابه له ويحصر بين طرفيه جزءا من
التوزيع أكبر مما يحصره المدى الأول فإن النسبة بين المدى الأصغر والمدى
الأكبر تدل على ارتفاع المنحنى التكرارى عند النمط . هذا الارتفاع يكون
في الواقع أصغر إذا كانت النسبة المذكورة أكبر ويكون أكبر إذا كانت
النسبة أصغر . إذن النسبة المذكورة تعطى مقياسا صالحا لانبعاث التوزيع
عند النمط

لتعريف المعامل الوضعي للانبعاث نأخذ المدى الربيعي المحصور بين الربيعين الأول والثالث وننسبه إلى المدى المئيني المحصور بين المئينين العاشر والتسعين ثم نأخذ نصف النسبة الناتجة . هذا يعطى المعامل الآتي :

$$(٩٣) \quad \frac{ب}{١٠٠ - ١٠٠} = ٠$$

حيث ب هو الانحراف الربيعي أى نصف المدى الربيعي وحيث ١٠٠ ، ١٠٠ هما المئينان العاشر والتسعون (أو العشيران الأول والتاسع) بالترتيب . هذا المعامل موجب دائما ويتراوح فى القيمة بين ٠ ، ١ . فهو يكون صفرا إذا كان ب صفرا وفى هذه الحالة يجتمع النصف الأوسط للتوزيع عند نقطة واحدة ويكون ١ إذا تساوى المديان الربيعي والمئيني وفى هذه الحالة تجتمع كل القيم الواقعة بين المئين العاشر وبين الربيع الأول عند نقطة واحدة وتجتمع كل القيم الواقعة بين الربيع الثالث وبين المئين التسعين عند نقطة أخرى .

إذا آل التوزيع التكرارى إلى التماثل فإنه باستخدام طرائق تتوقف على حساب التكامل يمكن إثبات أن $٠,٢٦٣١٥ < ٠$. لذلك نصف أى توزيع تكرارى متماثل أو غير متماثل بأنه متكافئ . إذا كان $٠,٢٦٣١٥ = ٠$ ونصف أى توزيع فيه $٠,٢٦٣١٥ < ٠$ بأنه مفلطح لأنه أكثر انبعاثا من التوزيع المتماثل وأى توزيع فيه $٠,٢٦٣١٥ > ٠$ بأنه مدبب لأنه أقل انبعاثا من التوزيع المتماثل .

فمثلا فى التوزيع التكرارى لمنسوبات أسعار ١٩٢٣ على أساس ١٩٢٠

$$ب = ١٨,٦٢ ، ١٠ ، ٨٥,٣٣ = ٠,٥ ، ١٥٦,٥٠ = ٠$$

إذن

$$٠,٢٦٢ = \frac{١٨,٦٢}{٧١,١٧} = \frac{١٨,٦٢}{٨٥,٣٣ - ١٥٦,٥٠} = ٠$$

هذه القيمة أصغر من $٠,٢٦٣١٥$. بقليل . إذن التوزيع المذكور يكاد يكون متكافئ . الانبعاث لكن انبعاثه أصغر قليلا جدا من انبعاث التوزيع المتكافئ .

هذه النتيجة مختلفة عن النتيجة السابقة لكن النتيجة السابقة أدنى إلى الحق لأن المعامل العزمي للانبعاث أدق بكثير جدا من المعامل الوضعي وأشد منه حساسية وأكثر استقرارا .

هذا المعامل الوضعي بسيط جدا في احتسابه . ويمكن أيضا إيجاد بياننا باستخدام أحد المنحنيين المتجمعين بالسكيفية المعروفة .

١٣٨ . تلخيص البيانات . في الفصول الأربعة الأخيرة عرفنا كيف نوزع البيانات توزيعا تكراريا وعرفنا كيف نمثلها بوسط يعبر عن قيمتها النموذجية وعرفنا كيف نقيس تشتتها حول هذه القيمة النموذجية وعرفنا كيف نقيس التواءها وأخيرا عرفنا كيف نعبر عن كمية الانبعاث الموجودة في البيانات باستخدام معامل الانبعاث .

باحساب هذا المعامل الأخير يتم لنا تكوين صورة للبيانات محتوية على توزيع تكراري للحدود التي تتركب البيانات منها ووسط مناسب ومقياس أو معامل للتشتت ثم معاملين مناسبين أحدهما للالتواء والثاني للانبعاث . والصورة لا يمكن أن تكمل إلا بوجود هذه الأشياء الخمسة مجتمعة فيها . عند هذا الحد تنتهي عملية تلخيص البيانات .

أمثلة عامة

١٣٩ . مثال ١ . استخدم العلاقة التقريبية بين الوسط والوسط والنمط في توزيع قريب من التماثل لإيجاد النمط والالتواء لتوزيع فيه الوسط هو ٧,٥٦ والوسط ٦,٣٩ والانحراف المعياري ٤,٣٧ .

لدينا $\bar{x} = 7,56$ ، $\sigma = 4,37$ ، وبتعويض هاتين القيمتين في (٣٩) نجد

$$\mu = 19,17 - 10,12 = 9,05$$

هذا يعطي النمط المطلوب . أيضا $\tau = 4,27$. بتطبيق (٨٣) ينتج أن

$$0.80 = \frac{3.01}{4.37} = \frac{4.05 - 7.06}{4.37} = L$$

وهذا يعطى الالتواء المطلوب .

١٤٠ . مثال ٢ . احسب الثابت الإحصائي L من البيانات الآتية عن

عدد العضلات في ديدان الأنقليسات الأوروبية :

عدد العضلات	عدد الديدان	عدد العضلات	عدد الديدان
١٥٤	١	١٥٩	٤٥
١٥٥	٧	١٦٠	٢٢
١٥٦	٢١	١٦١	١٢
١٥٧	٣٨	١٦٢	٢
١٥٨	٥٢	١٦٣	١
		٢٠١	

الجدول الآتي يبين الطريقة .

س	ك	ش'	ك ش'	ك ش'	ك ش'
١٥٤	١	٤ —	٤ —	١٦	٦٤ —
١٥٥	٧	٣ —	٢١ —	٦٣	١٨٩ —
١٥٦	٢١	٢ —	٤٢ —	٨٤	١٦٨ —
١٥٧	٣٨	١ —	٣٨ —	٣٨	٣٨ —
١٥٨	٥٢	٠	٠	٠	٠
١٥٩	٤٥	١	٤٥	٤٥	٤٥
١٦٠	٢٢	٢	٤٤	٨٨	١٧٦
١٦١	١٢	٣	٣٦	١٠٨	٣٢٤
١٦٢	٢	٤	٨	٣٢	١٢٨
١٦٣	١	٥	٥	٢٥	١٢٥
	٢٠١		٢٣	٤٩٩	٣٣٩

مر_١ = ٠,١٦٤١٧٩ ، مر_٢ = ٢,٤٨٢٥٨٧ ، مر_٣ = ١,٦٨٦٥٦٧
بتعويض هذه القيم في (٧٣) نجد أن

مر_٢ = ٢,٤٥٥٦٣٢ ، مر_٣ = ٠,٤٧٢٦٥١
هذان العزمان يصبحان بعد تعديلات شپرد

مر_٢ = ٢,٣٧٢٢٩٩ ، مر_٣ = ٠,٤٧٢٦٥١
من هاتين القيمتين نجد

ت_١ = ٠,٠١٧ ، ت_٢ = ٠,١٢٩

١٤١. مثال ٣. فيما يلي أوزان مجموعة من ٣٢٢ أرنباً بالهسكتوجرامات .
احسب ت_١ ، ت_٢ لهذه المجموعة .

الوزن	التكرار	الوزن	التكرار
١٠ — ١٤	٢٨	٣٠ — ٣٤	٥
١٥ — ١٩	٩٥	٣٥ — ٣٩	٠
٢٠ — ٢٤	١٣٠	٤٠ — ٤٤	١
٢٥ — ٢٩	٦٣		

الجدول الآتي يبين الطريقة .

س	ك	ش'	ك ش'	ش' ٢	ك ش' ٢	ش' ٣	ك ش' ٣
١٠ — ١٤	٢٨	٢ —	٥٦ —	١١٢	٢٢٤ —	٤٤٨	٤٤٨
١٥ — ١٩	٩٥	١ —	٩٥ —	٩٥	٩٥ —	٩٥	٩٥
٢٠ — ٢٤	١٣٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
٢٥ — ٢٩	٦٣	١	٦٣	٦٣	٦٣	٦٣	٦٣
٣٠ — ٣٤	٥	٢	١٠	٢٠	٤٠	٨٠	٨٠
٣٥ — ٣٩	٠	٣	٠	٠	٠	٠	٠
٤٠ — ٤٤	١	٤	٤	١٦	٦٤	٢٥٦	٢٥٦
	٣٢٢		٧٤ —	٣٠٦	١٥٢ —	٩٤٢	٩٤٢

$$٠,٢٢٩٨١٤ - = \frac{٧٤-}{٣٢٢} = \text{مر}^١$$

$$٠,٩٥٠٣١١ = \frac{٣٠٦}{٣٢٢} = \text{مر}^٢$$

$$٠,٤٧٢٠٥٠ - = \frac{١٥٢-}{٣٢٢} = \text{مر}^٣$$

$$٠,٩٢٥٤٦٦ = \frac{٩٢}{٣٢٢} = \text{مر}^٤$$

لإيجاد العزوم حول الوسط نعوض في (٧٣) . هذا يعطى

$$\text{مر}^٣ = ٠,٨٩٧٤٩٦, \text{مر}^٢ = ٠,١٥٨٨٥٨, \text{مر}^٤ = ٠,٢٧٨٤٣٠٤$$

هذه تصبح بعد تعديلات شپرد

$$\text{مر}^٣ = ٠,٨١٤١٦٣, \text{مر}^٢ = ٠,١٥٨٨٥٨, \text{مر}^٤ = ٠,٢٦٤٧٢٢$$

من هذه القيم نجد

$$\text{ت} = ٠,٠٤٦٨, \text{ت}^٧ = ٠,٢١٦٢$$

أيضا

$$\text{ت}^٣ = ٠,٣٠٦٧$$

هذه النتائج تدل على أن التوزيع بسيط الالتواء ومدبب .

١٤٢ . مثال ٤ . تقدم ٣٩٣ طالبا إلى امتحان فكان التوزيع التكرارى

لدرجاتهم هو :

الدرجة	عدد الطلبة	الدرجة	عدد الطلبة
٠ -	٣	١٠ -	٨٣
٢ -	١٥	١٢ -	٦٩
٤ -	٢٨	١٤ -	٤٢
٦ -	٤٤	١٦ -	٢٧
٨ -	٧١	١٨ -	١١

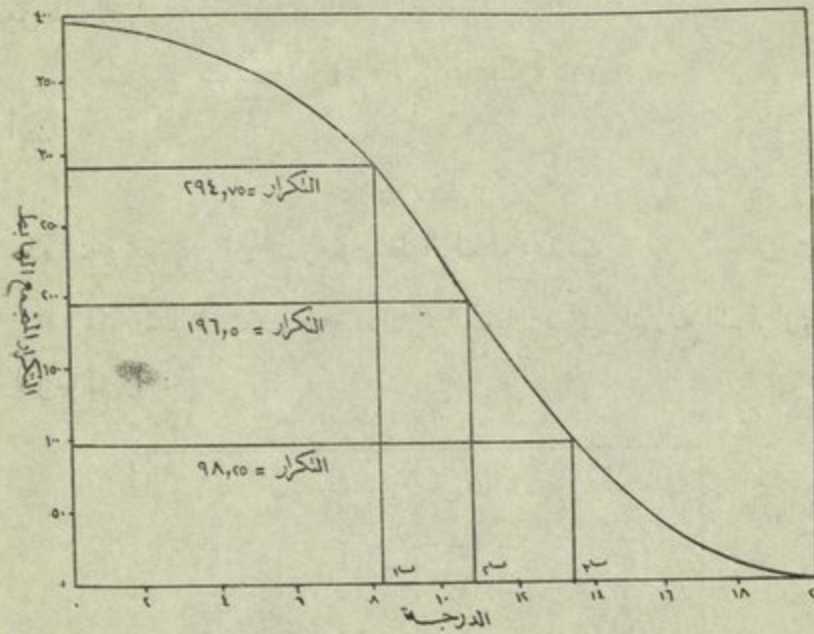
ارسم المنحنى المتجمع الهابط واستخدم المنحنى لقياس الوسيط وإيجاد التشتت والالتواء .

الجدول الآتى يعطى التكرارات المتجمعة الهابطة لتوزيع الدرجات .

الدرجة	عدد الطلبة	الدرجة	عدد الطلبة
٠ — ٢٠	٣٩٣	١٠ — ٢٠	٢٣٢
٢ — ٢٠	٣٩٠	١٢ — ٢٠	١٤٩
٤ — ٢٠	٣٧٥	١٤ — ٢٠	٨٠
٦ — ٢٠	٣٤٧	١٦ — ٢٠	٣٨
٨ — ٢٠	٣٠٣	١٨ — ٢٠	١١

باستخدام هذه القيم نحصل على المنحنى المبين في الشكل ٤٣ .

الشكل ٤٣ . التوزيع التكرارى لدرجات



بالقياس نجد أن

$$٨,٢٥ = ب_١ , ١٠,٨٧٥ = ب_٢ , ١٣,٥٠ = ب_٣$$

إذن $ب_٣ - ب_١ = ٥,٢٥$ وبالقسمة على ٢ ينتج أن الانحراف الريعى لتوزيع

الدرجات هو $ب = ٢,٦٢٥$. أيضا

$$٢١,٧٥ = ب_٢ + ب_١ , ٢١,٧٥ = ب_٢$$

إذن $٢ ب = ١ ب + ١ ب$ ويبدو أن المعامل الربيعي للالتواء صفر وأن التوزيع متماثل .

إذا احتسبنا الربيعات نجد أن

$$١ ب = ٨,٢٣٢ ، ٢ ب = ١٠,٨٥٥ ، ٣ ب = ١٣,٤٧١$$

هذا يعطى

$$٢ ب = ٢,٦١٩ ، ١ ب - ٢ ب + ٣ ب = ٠,٠٠٧$$

إذن

$$٢ ب = \frac{٠,٠٠٧}{٢,٦١٩} = ٠,٠٠٣$$

هذا يظهر التواء سالباً صغيراً جداً . لكن هذا الالتواء البسيط لا يمكن الحصول عليه من الشكل وعلى أى حال لا يمكن الاعتماد عليه كثيراً لأن المعامل الربيعي للالتواء ليس حساساً للالتواءات البسيطة .

١٤٣ . مثال ٥ . يعطى الجدول الآتى توزيع أجور ٣٠٧ عاملاً بالقروش

على الفئات المبينة :

الأجر	عدد العمال
أقل من ٥ قروش	١٤
٥	٧٨
٩	٩٨
١٣	٥٨
١٧	٤١
٢١	٨
أكثر من ٢٥ قرشا	١٠

كيف تقيس تشتت الأجور فى هذا التوزيع التكرارى وما مقدار هذا

التشتت ؟ كيف تلخص هذا التوزيع ؟

التوزيع المعطى مفتوح لأنه يبدأ وينتهى بفئة مفتوحة . إذن لقياس

التشتت لابد من استخدام أحد المقاييس الوضعية للتشتت ولنحتسب الانحراف الربيعي مثلاً .

$$\text{لدينا } \sigma = 3.7, \sigma^2 = 13.79 \text{ إذن}$$

$$\text{ب} = 8.26 = 8 \times \frac{17}{78} = 4 \times \frac{14 - 76.75}{78} + 5 = 1$$

$$\text{ب} = 10.78 = 10 \times \frac{40}{78} = 4 \times \frac{10 - 23.25}{78} + 13 = 3$$

إذن ب - ب = 3 - 1 = 2 قرشاً وبالقسمة على 2 ينتج أن الانحراف الربيعي هو ب = 3.76 قرشاً .

لكي يكمل تلخيص التوزيع التكراري للأجور يلزمنا البحث عن وسط مناسب ومعامل مناسب يقيس الالتواء وآخر يقيس الانبعاج . أما الوسط المناسب في هذه الحالة فهو الوسيط . لدينا $\sigma = 103.5$ وإذن

$$\text{ب} = 11.01 = 11 \times \frac{20}{78} = 4 \times \frac{12 - 103.5}{78} + 9 = 3$$

هذا يعطي الأجر الوسيط .

لقياس الالتواء نستخدم المعامل الربيعي للالتواء لأن التوزيع مفتوح .
لدينا

$$\text{ب} - 2 \times \text{ب} + \text{ب} = 8.26 + 23.02 - 10.78 = 1.02 \text{ قرشاً .}$$

إذن

$$\text{ل} = 0.27 = \frac{1.02}{3.76}$$

لم يبق الآن إلا قياس الانبعاج . بما أن التوزيع مفتوح إذن لابد من استخدام المعامل الوضعي للانبعاج . لذلك نحتسب المئينين العاشر والتسعين .

$$\text{لدينا } \sigma = 3.7 \text{ إذن}$$

$$5.86 = 5 \times \frac{17}{78} = 4 \times \frac{14 - 30.7}{78} + 5 = 1.0$$

$$19.76 = 19 \times \frac{10}{78} = 4 \times \frac{24.8 - 27.3}{78} + 17 = 1.0$$

$$13.90 = 1.0 - 1.0$$

بتطبيق (٩٣) ينتج أن

وهذه هي الفضلة المطلوبة . واضح من النتيجة الأخيرة أن $\theta > 0$ لجميع قيم n . إذن التوزيع التكرارى المستطيل توزيع مفلطح لجميع قيم n .
بكتابة θ فى الصيغة

$$\theta = \frac{3}{n} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{n} + 3 \right) / \left(\frac{1}{n} + 1 \right)$$

نرى أن $\theta \leq \frac{3}{n} = 1,8$ عندما $n \rightarrow \infty$ أيضا
 $\theta = 3 - 1,8 = 1,2$ عندما $n = 3$.
لكن التوزيع المستطيل هو الحد الفاصل بين التوزيعات ذات التكرارات الكبرى وبين التوزيعات الجوفاء . إذن يمكننا أن نستنتج أن كل توزيع تكرارى متماثل فيه $\theta > 1,8$ أو $\theta > 1,2$ يكون توزيعاً أجوف .
لإيجاد فضلة التوزيع المستطيل باستخدام المعامل الوضعى للانبعاث نفرض أن المدى يساوى ١ فيكون المدى بين الربيعين نصف المدى السكلى أى $\frac{1}{2}$.
أيضا المدى بين المئينين العاشر والتسعين يساوى أربعة أخماس المدى السكلى أو $\frac{4}{5}$. بتطبيق (٩٣) ينتج أن $\frac{4}{5} / \frac{1}{2} = \frac{8}{5} = 1,6$ أو $0,3125$. وعلى هذا الأساس تكون الفضلة $0,26315 - 0,3125 = 0,04935$.

أُسْئَلَةٌ ٧

- ١ . اشرح المقصود بالالتواء وكيف يمكن قياسه . ما العلاقة التقريبية بين الوسط والوسيط والنمط فى توزيع لا يبعد كثيرا عن التماثل ؟ استخدم هذه العلاقة لإيجاد النمط والالتواء لتوزيع فيه الوسط هو $3,973$ والوسيط 4 والانحراف المعيارى $1,41$.
- ٢ . أوجد الوسط الحسابى والانحراف المعيارى للأوزان المعطاة فى السؤال ٩ من مجموعة الأسئلة ٦ واختبر تماثل هذا التوزيع .
- ٣ . يعطى ثانى الجدولين المذكورين فى السؤال ١٤ من مجموعة الأسئلة ٦

التوزيع التكرارى لساعات العمل الأسبوعية لجماعة من العمال . احسب النمط ثم اختبر تماثل التوزيع .

٤ . كان توزيع الباشلات الموجودة فى ١٥٠ خلية كما يلى :

عدد الباشلات فى الخلية	عدد الخلايا	عدد الباشلات فى الخلية	عدد الخلايا
٠	٣	٥	٢٥
١	١٥	٦	١٧
٢	٢٢	٧	٥
٣	٢٦	٨	٩
٤	٢٣	٩	٥
			١٥٠

احسب الثابتين الإحصائيين t_1 ، t_2 .

٥ . احسب الثابتين الإحصائيين t_1 ، t_2 للبيانات الآتية عن سمك

١٧٦ بنسب من السنة ١٩٢١ بالبوصات .

السمك	عدد البنات	السمك	عدد البنات
٠,٠٦١ — ٠,٠٦٠	٦	٠,٠٧١ — ٠,٠٧٠	٢٣
٠,٠٦٣ — ٠,٠٦٢	١٣	٠,٠٧٣ — ٠,٠٧٢	١٠
٠,٠٦٥ — ٠,٠٦٤	٢٧	٠,٠٧٥ — ٠,٠٧٤	٤
٠,٠٦٧ — ٠,٠٦٦	٥١	٠,٠٧٧ — ٠,٠٧٦	٢
٠,٠٦٩ — ٠,٠٦٨	٤٠		١٧٦

٦ . ارسم المنحنى المتجمع الصاعد للتوزيع المذكور فى السؤال ٣ وأوجد

منه الوسيط والربيعين الأول والثالث ومقياس النشتت ومعامل الالتواء .

٧ . ارسم فى شكل واحد المنحنى التكرارى والمنحنى المتجمع الصاعد

للتوزيع التكرارى الآتى :

القيمة	التكرار	القيمة	التكرار
٨ —	٩	٢٠ —	٥٨
١٠ —	٢١	٢٢ —	٣٥
١٢ —	٣٨	٢٤ —	٢٢
١٤ —	٥٧	٢٦ —	١١
١٦ —	٦٧	٢٨ —	٥
١٨ —	٧٠		٣٩٣

استخدم الشكل لإيجاد الوسيط والنمط والالتواء ثم حقق نتائجك باستخدام القوانين .

٨ . كيف يقاس التواء مجموعة من البيانات ؟

أوجد مقياس التواء أعداد مرات ظهور مرض القدم والفم في بريطانيا المعطاة في الجدول الآتي :

التاريخ	عدد مرات الظهور	التاريخ	عدد مرات الظهور
١٩٢٣ أغسطس	١٤	١٩٢٤ فبراير	٢٩٧
سبتمبر	٥٩	مارس	١٩١
أكتوبر	٨٨	أبريل	٨٣
نوفمبر	٥٢١	مايو	٣١
ديسمبر	١١٤٨	يونيو	٤٩
١٩٢٤ يناير	٦٧٦	يوليو	٩٢

٩ . وزن عدد ما من الذكور البريطانيين البالغين سن الرشد ثم صنفوا إلى مجموعات أوزانها ٩. ودون ١٠٠ رطل ، ١٠٠. ودون ١١٠ أرطال ، ... ، ٢٧. رطلا ودون ٢٨٠ رطلا ، ٢٨٠ رطلا فما فوق . وقد كانت أعداد هذه المجموعات بالترتيب ٣ ، ٣٤ ، ١٥٢ ، ٣٩٠ ، ٨٦٧ ، ١٦٢٣ ، ١٥٥٩ ، ١٣٢٦ ، ٧٨٧ ، ٤٧٦ ، ٢٦٣ ، ١٠٧ ، ٨٥ ، ٤١ ، ١٦ ، ١١ ، ٨ ، ١ ، ٠ .

أوجد الوزن المتوسط والوزن الوسيط بأقصى ما تسمح به البيانات من الدقة .

كيف كانت تتأثر النتائج لو أن الأوزان أخذت إلى أقرب رطل فقط ؟
١٠ . ارسم

(١) مدرجا تكراريا ، (ب) منحنيا تكراريا مهدا ، (ج) منحنيا متجمعا لتمثيل الإحصائيات المعطاة في السؤال ٩ .

بين الوسط والوسيط والنمط على كل منحني .

١١ . اشرح المسميات الانحراف الربيعي ، الانحراف المتوسط والالتواء .

موضحا بالإشارة إلى إحصائيات السؤال ٩ .

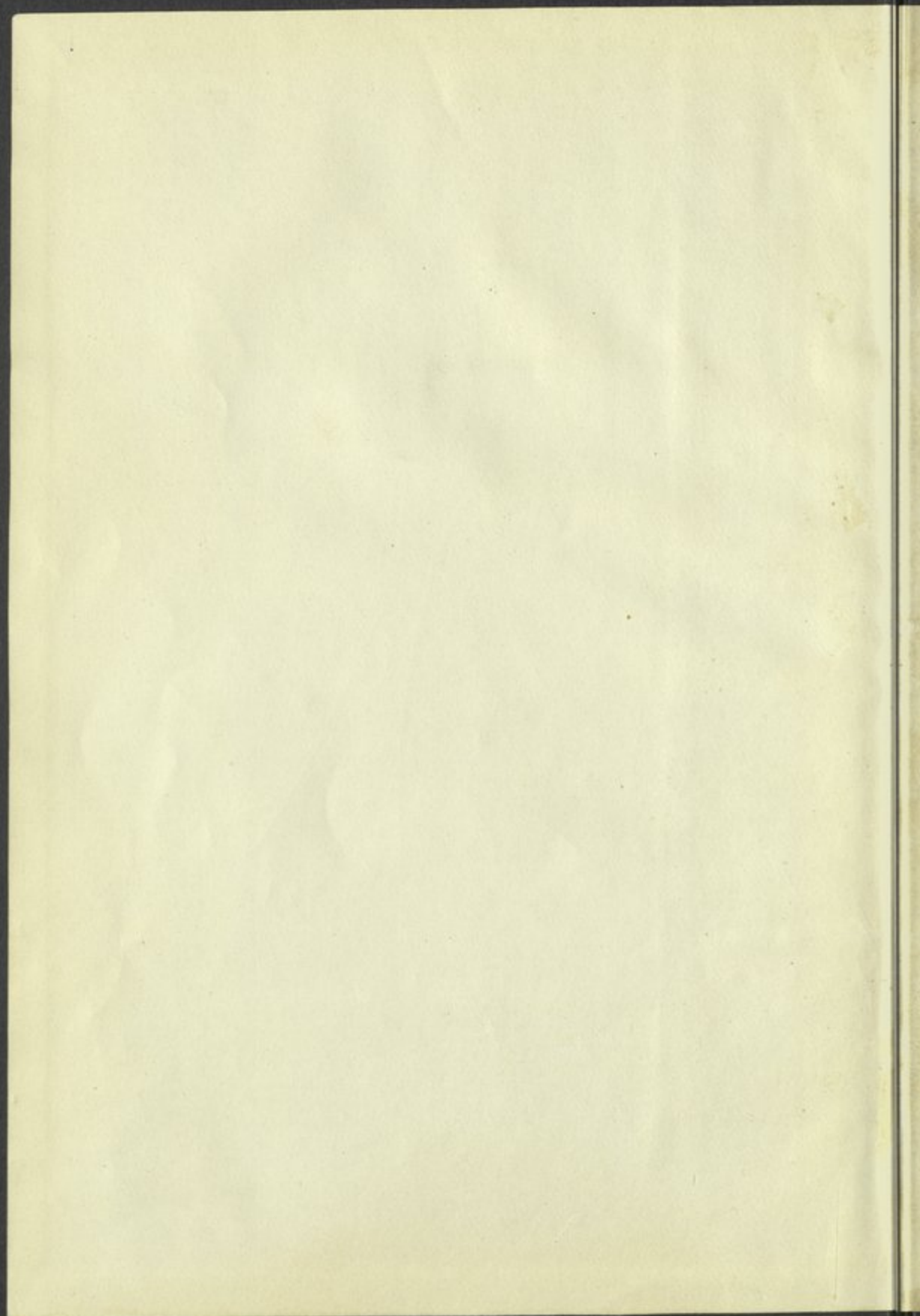
بسم الله الرحمن الرحيم

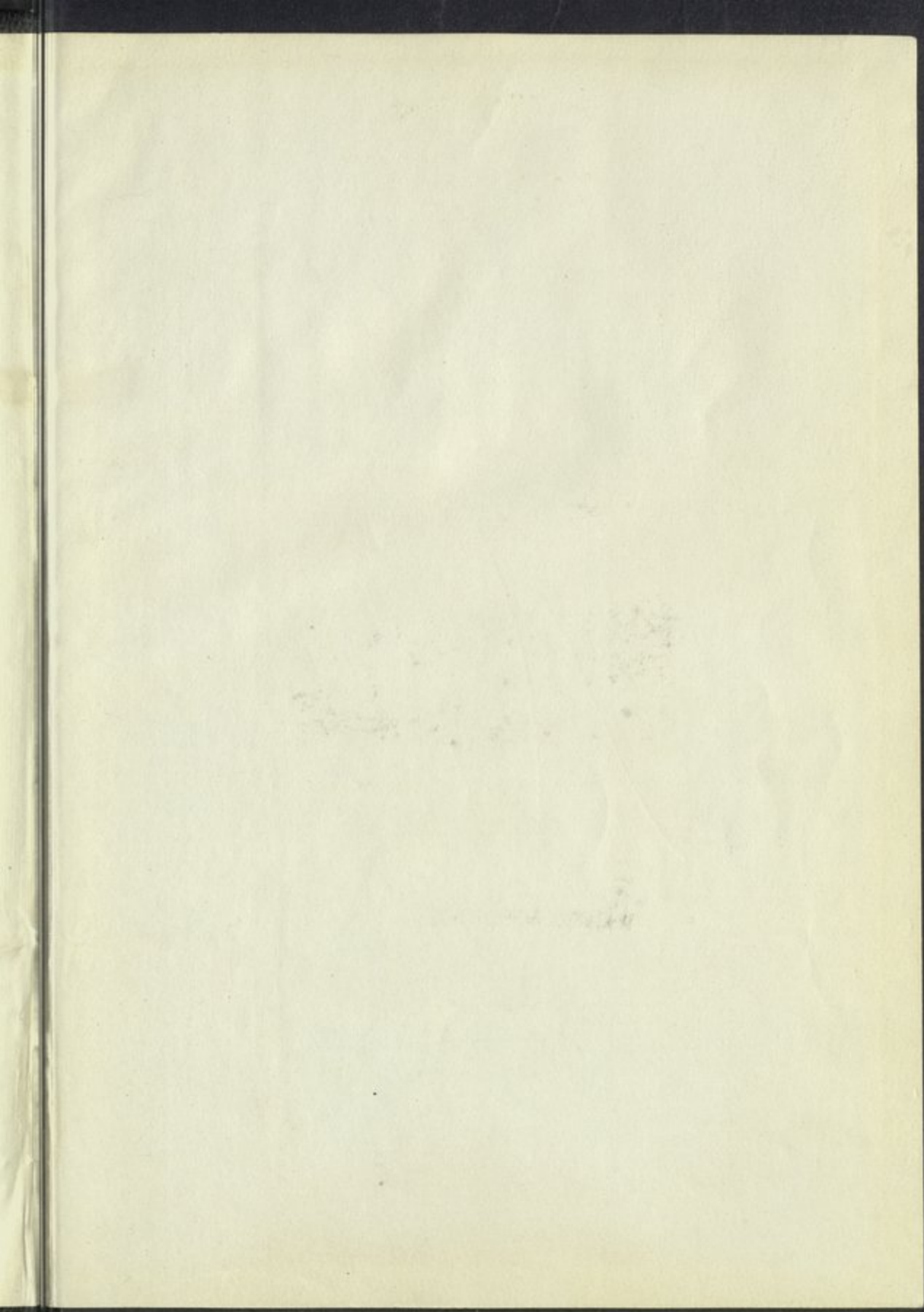
الحمد لله الذي هدانا لهذا

الذي كنا في ضلال عنه

والذي كنا في غيابة

عن ربنا





فواز، أمين يس
الاقتصاد الاقتصادي

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES



01012893



AMERICAN
UNIVERSITY OF BEIRUT

