511: K23kiA
قازان - محمد نشأة
كتاب الحساب للتلاميذ المدارس الثانوية
DEC 7 X233
APR 21 A369

511
K23kiA
DE 21 '58
NY 5 54
OC 31
Le NOV 1972

29
511
K23ki A
c.1

كتاب الحساب

لتلاميذ المدارس الثانوية

دروس عملية ونظرية

مقرر الصف الرابع

بموافق منهاج وزارة معارف الجمهورية السورية

تأليف

محمد نشأة قدورات

استاذ الرياضيات في مدرسة تجهيز البنات بحلب

١٣٦١ — الطبعة الثانية — ١٩٤٢

67498
حقوق الطبع محفوظة

Cat. Harv. 1947

مكتبة المعارف للحسيب وأولاده بحلب

طواحين وهاشيي

الفصل الاول

في الاعداد الصحيحة

البحث الاول — في خواص الاعمال الاربعة

حاصل الجمع

١ — لنفرض ان مدرسة تحتوي على ثلاث فصول، عدد تلاميذ الفصل الاول منها هو (ب) وعدد تلاميذ الفصل الثاني (حـ) والثالث (ء) .

فعدد التلاميذ الذين تحتويهم هذه المدرسة هو حاصل جمع ب ، حـ ، ء ويفاد بالوضع (ب + حـ + ء) .

والاعداد ب ، حـ ، ء يقال لها حدود حاصل الجمع .

ولما كان عدد تلاميذ المدرسة لايتغير فيما اذا بدأنا بعد التلاميذ من الفصل الاول فالثاني فالثالث او من الفصل الثالث فالاول فالثاني اذن يمكننا ان نكتب :

ب + حـ + ء = ء + ب + حـ

وينتج من ذلك الخاصة الآتية :

خاصة (١) — حاصل جمع عدة اعداد لايتغير فيما اذا اضيفت هذه الاعداد الى بعضها في اي ترتيب كان

٢ — لنفرض في المثال السابق ان تلاميذ الفصل الثاني جلسوا مع تلاميذ الفصل الثالث في غرفة واحدة فعندئذ يكون عدد تلاميذ المدرسة وزع على غرفتين

احـــداهما تحتوي على تلاميذ الفصل الاول وعددهم ب والثانيـة تحتوي على تلاميذ الفصلين الثاني والثالث وعددهم (حـ + ء)

ومن حيث ان حاصل جمع التلاميذ لايتبدل فيما اذا جلس تلاميذ كل فصل منهم في غرفة او اتحـدت تلاميذ بعض الفصول مع اخرى عليه يمكننا ان نكتب :

$$ب + حـ + ء = ب + [حـ + ء]$$

وهذه المساواة تفاد بالخاصة الآتية :

خاصة (٢) — حاصل جمع عدة اعـــداد لايتغير اذا عوض طائفة منها بحاصل جمعها .

٣ — اذا بدلنا طرفي المساواة ، $ب + حـ + ء = ب + [حـ + ء]$ كلاً بالآخر يصير :

$$ب + [حـ + ء] = ب + حـ + ء$$

وهذه المساواة تشمر الخاصة الآتية :

خاصة (٣) — حاصل جمع عدة اعداد لايتغير اذا عوض احدها بمجموعة اعداد تساويه .

مثلاً — : $٨ + ١٢ = ٨ + [٧ + ٥]$

٤ — من الخاصة السابقة ينتج :

١ً — لاضافة مجموعة اعداد الى عدد ما ، يضاف كل من حـــدودها على التعاقب الى ذلك العدد

مثلاً — ليكن ؛ $م = حـ + ء$

فيمكننا ان نكتب : $ب + م = ب + [حـ + ء]$

او : ب + م = ب + حـ + ء

٢ً — لاضافة مجموعة اعداد الى مجموعة ثانية ، يضاف حدود كل من المجموعتين الى بعضها

مثلاً — ليكن : ب = ق + ك ، م = حـ + ء + هـ

فنكتب : ب + م = [ق + ك] + [حـ + ء + هـ]

او : ب + م = ق + ك + حـ + ء + هـ

ملاحظة — الطريقة المتبعة في جمع الاعداد هي عبارة عن تطبيقات الخواص السابقة .

مثلاً : ٥٢ + ٤٣٧ = [٢ + ٥٠] + [٧ + ٣٠ + ٤٠٠]

تضاف الاعداد ذات الرتب المتساوية الى بعضها

يصير ، ٥٢ + ٤٣٧ = [٢ + ٧] + [٥٠ + ٣٠] + ٤٠٠

، ٥٢ + ٤٣٧ = ٩ + ٨٠ + ٤٠٠ = ٤٨٩

حاصل الطرح — الفضل

٣ — الفضل بين عددين ب : حـ [بفرض ان ب > حـ] هو عدد ثالث مثل [ل] اذا اضيف الى [حـ] ينتج العدد [ب]

ويفاد بالوضع : ل = ب — حـ او ل + حـ = ب

فالعددان ب ، حـ يسميان [حدي الفضل]

خاصة (١) — الفضل بين عددين لايتغير اذا ضيف الى حديه عدد واحد او طرح منهما عدد واحد .

اذ في الحقيقة لو فرضنا ان عدد تلاميذ الفصل الاول في احدى المدارس [٤٠]

وعدد تلاميذ الفصل الثاني منها [٣٠] لكان الفضل بين تلاميذ الفصلين [١٠]

اي ٤٠ — ٣٠ = ١٠

فاذا دخل الى كل من الفصلين ٥ تلاميذ او خرج من كل منهما ٥ تلاميذ فالفضل بينهما لايتغير

اي : [٤٠ + ٥] — [٣٠ + ٥] = ١٠

او : [٤٠ — ٥] — [٣٠ — ٥] = ١٠

وبصورة عامة يكون : [ب + هـ] — [حـ + هـ] = ل

او : [ب — هـ] — [حـ — هـ] = ل

٦ — **خاصة (٢)** — لاضافة فضل عددين الى عدد مايضاف الحد الاول من الفضل ويطرح الثاني

مثلاً : ٣٧٠ + [١٢ — ٧] = ٣٧٠ + ١٢ — ٧

اذ في الحقيقة لو فرضنا ان قرية عدد نفوسها ٣٧٠ نسمة وكان في احد الشهور عدد المواليد فيها ١٢ وعدد الوفيات ٧ ، فعدد نفوسها في نهاية ذلك الشهر يبلغ :

٣٧٠ + ٥ = ٣٧٥ او ٣٧٠ + ١٢ — ٧ = ٣٧٥

وعليه : ب + [حـ — ء] = ب + حـ — ء

ويتضح مما سبق :

ان القوس المسبوقة باشارة زائد [+] يمكن حذفها مع ابقاء اشارات حدودها .

٧ — **خاصة (٣)** لطرح فضل عددين من عدد يضاف الحد الثاني من الفضل ويطرح الاول

اي : ٣٧٠ — [١٢ — ٧] = ٣٧٠ + ٧ — ١٢

حيث لو فرضنا في المثال السابق [مادة — ٦] ان عدد الوفيات في القرية ١٢ وعدد المواليد ٧ لكان عدد نفوسها في نهاية الشهر بالغاً :

٣٧٠ — ٥ = ٣٦٥ او ٣٧٠ + ٧ — ١٢ = ٣٦٥

وعليه : ب — [حـ — ء] = ب + ء — حـ

وينتج من هذه الخاصة :

ان القوس المسبوقة باشارة ناقص [—] يمكن حذفها مع عكس شارات حدودها .

٨ — **خاصة (٤)** — لطرح مجموعة اعداد من عدد ما يطرح كل من حدود المجموعة على التعاقب من ذلك العدد .

مثال : ٢٧ — [٧ + ٥] = ٢٧ — ٧ — ٥

في الحقيقة لو فرضنا ان تلميذاً يملك ٢٧ فرنكاً ، اشترى كتاباً بمبلغ ٧ فرنكات ودفتراً بمبلغ ٥ فرنكات فيكون الباقي عنده بعد ذلك هو :

٢٧ — ١٢ = ١٥ فرنكاً او ٢٧ — ٧ — ٥ = ١٥

٩ — **قاعدة** — لاصلاح طائفة اعداد بعضها مسبوق باشارة زائد والبعض الآخر مسبوق باشارة ناقص ؛ يجمع كل نوع من الاعداد على حدة ويطرح الناتجان من بعضهما .

مثلاً : [٨ + ٦] — [٣ + ٩ + ١٥] = ٦ — ٣ + ٨ — ٩ + ١٥

، ب + حـ — ء + ق — ه = [ب + حـ + ق] — [ء + ه]

تمارين

١ـ المطلوب اصلاح التراكيب الآتية بعد حذف اقواسها :

٢٥ + [٧ + ٨ + ٥]	ب + [ح + ء + ب]
٤٨ + [٢٥ − ٣٧]	ب + [ح − ب]
٣٩ − [١٥ + ١١]	ب − [ح + ب]
٢٤ − [١٢ − ٩ + ٣]	ب − [ح − ء + ب]
٨ + [٧ − ٣ + ١١] − [٨ + ٥ − ١٠]	ب + [٢ ح − ٢٥] − [ح − ٤ ب]

٢ـ وضع ثلاثة اعداد متعاقبة من الاعداد الآتية ضمن قوس مسبوقة باشارة زائد والثلاثة الاخرى ضمن قوس مسبوقة باشارة ناقص .

١٥ − ٨ + ١٢ − ١٣ − ٢٤ − ٤٨	ب − ٢ ح + ٣ ء − ٣ ب + ٥ ح − ء
٢٢ + ١٧ − ١١ + ١٤ − ١٢ + ٢٥	١٢ ب + ح − ٥ ء + ٧ ب − ٤ ح + ٣ ء
١٢ − ٨ − ٩ − ١١ + ١٥ + ٢٤	٨ ب + ٧ ح + ٦ ء − ٥ ب − ٤ ح − ٣ ء
١٥ − ٢٥ + ١٤ − ٨ − ١٠ − ١٧	٧ ح − ٤ ب + ٥ ء − ٣ ب − ٤ ح − ٢ ء
١٦ − ١١ − ٩ − ٢٤ + ١٨ + ١٢	٢ ب + ٣ ح + ٤ ء − ب − ٢ ح − ٣ ء

المساواة

١٠ — **المساواة** — يقال للمقدارين ب ، ح انهما متساويان فيما اذا كان مجموع الوحدات الدال عليها العدد ب مساوياً لمجموع وحدات ح

ونكتب : ب = ح

مثلاً — ليكن ب = ١٢ + ٥ — ٨ فرضاً

، ﻫ = ٧ — ٤ + ٦ ـ

اذاً : ١٢ + ٥ — ٨ = ٧ — ٤ + ٦

يشاهد ان كلاً من طرفي المساواة يساوي ٩

١١ — **قاعدة (١)** — يمكن ان يضاف الى كل من طرفي المساواة عدد واحد او يطرح منهما عدد واحد

١ً — لنضيف فرضاً العدد «٧» الى طرفي المساواة ،

١٢ - ٧ = ٥ ——————— «١»

فيصير ، ١٢ - ٧ + ٧ = ٥ + ٧

او، ١٢ = ٥ + ٧ ——————— «٢»

فنلاحظ ان العدد ٧ كان في الطرف الاول من المساواة «١» مسبوقاً باشارة ناقص اصبح في الطرف الثاني من المساواة «٢» مسبوقاً باشارة زائد

٢ً — لنطرح فرضاً العدد ٥ من طرفي المساواة ،

٢٤ + ٥ = ٢٩ ——————— «١»

فيصير : ٢٤ + ٥ - ٥ = ٢٩ - ٥

او: ٢٤ = ٢٩ - ٥ ——————— [٢]

فنلاحظ ان العدد ٥ كان في الطرف الاول من المساواة [١] مسبوقاً باشارة زائد اصبح في الطرف الثاني من المساواة [٢] مسبوقاً باشارة ناقص

وينتج من القاعدة السابقة :

نتيجة — يمكن ان ينقل احد حدود المساواة من طرف لآخر مع تبديل اشارته .

١٢ — **قاعدة (٢)** — يمكن ان تضاف المساويات الى بعضها طرفاً الى طرف او تطرح من بعضها طرفاً من طرف .

مثلاً — ليكن لدينا المساويات الآتية :

١٢ + ٥ - ٨ = ٧ - ٤ + ٦ ، ٤ = ٩ - ٥

١ً — نضيف المساواتين الى بعضها فيحدث

١٢ + ٥ - ٨ = ٧ - ٤ + ٦

٤ = ٩ - ٥

---

١٢ + ٥ - ٨ + ٤ = ٧ - ٤ + ٦ + ٩ - ٥

وباصلاح طرفي المساواة الاخيرة ينتج ان كلاً منهما يساوي ١٣

٢ً — نطرح المساواتين السابقتين طرفاً من طرف يصير :

١٢ + ٥ — ٨ = ٧ — ٤ + ٦

٤ = ٩ — ٥

---

١٢ + ٥ — ٨ — ٤ = ٧ - ٤ + ٦ — (٩ — ٥)

او ١٢ + ٥ — ٨ — ٤ = ٧ — ٤ + ٦ — ٩ + ٥

وباصلاح طرفي المساواة ينتج ان كلاً منهما يساوي ٥

حاصل الضرب (الجداء)

١٣ — **الضرب** — هو عملية مختصرة لجمع الاعداد المتساوية :

مثلاً : ٥ + ٥ + ٥ يمكن كتابته ٥ × ٣ = ١٥

فالعدد ٥ يسمى مضروباً والعدد ٣ يسمى مضروب فيه والناتج (١٥) يسمى جداء

وحاصل ضرب العددين ب ، ﺣ يكتب : ب × ﺣ او ب ﺣ

ملاحظة:

١ً ــ اذا كان المضروب واحداً فحاصل الضرب يساوي المضروب فيه

اي : ١ × ٤ = ٤

اذ أن : ١ × ٤ = ١ + ١ + ١ + ١ = ٤

٢ً ــ اذا كان المضروب صفراً فحاصل الضرب يساوي الصفر (لاشيء)

مثلاً : ٠ × ٤ = ٠

لان : ٠ × ٤ = ٠ + ٠ + ٠ + ٠ = ٠

خواص الجداء

١٤ــ **خاصة (١)** جداء عدة اعداد لايتغير اذا تبدلت مواقع الاعداد

مثلاً : ٥ × ٣ = ٣ × ٥

اذ في الحقيقة : ٥ × ٣ = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥

، : ٣ × ٥ = ٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣ = ١٥

وبصورة عامة ب × ﺣ = ﺣ × ب

وعندما يكون احد المضروبين رقماً يكتب في الطرف الايمن من الجداء

مثلاً : ٥ × ب = ٥ ب (يقرأ خمسة ب)

ويسمى الرقم المكتوب على يمين الحرف مباشرة (مثلاً) وهو يشعر احد مضاعفات الحرف الذي بجانبه .

مضاعفات عدد ما

١٥ــ مضاعفات عددما هي عبارة عن حاصل ضربه بالاعداد :

١ ، ٢ ، ٣ ، ..... ،

فمثلاً مضاعفات ٧ هي : ٧ × ١ ، ٧ × ٢ ، ٧ × ٣ ، .....

او : ٧ ، ١٤ ، ٢١ ، .....

وكذلك مضاعفات ب هي ب ، ٢ ب ، ٣ ب ، .....

ملاحظة — من التعريف السابق ينتج :

ان مضاعفات العدد ليس لها نهاية وان اصغر مضاعف لعددما هو نفسه .

حاصل القسمة

١٦ — القسمة هي عملية معاكسة للضرب . فاذا علم جداء عددين واحدهما، يمكن بواسطة القسمة ان يعلم الثاني .

مثلاً — جداء عددين ٢٠ وأحدهما ٥ فما الثاني ؟

نفرض ان العدد الثاني هو (س) فيكون :

٢٠ = ٥ × س

فالعدد ٢٠ يسمى مقسوماً ، ٥ مقسوم عليه ، س هو حاصل القسمة

وحاصل القسمة س يفاد بالوضع : س = ٢٠ ÷ ٥

وعليه فالمساواتان : { ٢٠ = ٥ × س ، س = ٢٠ ÷ ٥ } هما بمعنى واحد وتستخرج احداهما من الثانية

وبصورة عامة : ب = ﺟ × س

او س = $\frac{ب}{ﺟ}$

ملاحظة — لاجل ان يكون حاصل القسمة (س) عدداً صحيحاً يجب ان يكون المقسوم احد مضاعفات المقسوم عليه . وفي هذه الحالة يقال للمقسوم عليه (قاسماً)

وعليه فالعدد ٥ هو قاسم ٢٠ لان ٢٠ من مضاعفات ٥

قواسم عدد ما

١٧ — يمكن ان يكون للعدد عدة قواسم . فمثلا العدد ١٨ هو مضاعف لكل من الاعداد : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨

وعليه فالاعداد : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨ هي قواسم ١٨

وينتج من ذلك ان قواسم كل عدد محدودة اصغرها (واحد) واعظمها العدد نفسه .

ملاحظة — بما ان كل عدد هو مضاعف نفسه وقاسمها بآن واحد اذن كل عدد يقبل القسمة على نفسه والواحد .

خواص المضاعفات والقواسم

١٨ — **خاصة** — لضرب مجموعة اعداد بعدد مايمكن ان تضرب احدود

المجموعة على التعاقب بذلك العدد وتضاف الحواصل الى بعضها .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل ضرب المجموعة (١٢ + ٨ + ٥) بالعدد ٣ فيكون :

$$٣ \times (١٢ + ٨ + ٥) = ٣ \times ١٢ + ٣ \times ٨ + ٣ \times ٥$$

حيث : $٣ \times (١٢ + ٨ + ٥) = (١٢ + ٨ + ٥) + (١٢ + ٨ + ٥) + (١٢ + ٨ + ٥)$

او : $٣ \times (١٢ + ٨ + ٥) = ١٢ + ٨ + ٥ + ١٢ + ٨ + ٥ + ١٢ + ٨ + ٥$

ومنه : $٣ \times (١٢ + ٨ + ٥) = (١٢ + ١٢ + ١٢) + (٨ + ٨ + ٨) + (٥ + ٥ + ٥)$

او : $٣ \times (١٢ + ٨ + ٥) = ٣ \times ١٢ + ٣ \times ٨ + ٣ \times ٥$

وبصورة عامة :

$$(ب + حـ + ء) \times ق = ب ق + حـ ق + ء ق$$

وبالعكس : $ب ق + حـ ق + ء ق = ق (ب + حـ + ء)$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

١٩ — **نتيجة** — حاصل جمع عدة مضاعفات لعدد ما هو مضاعف نفس العـــدد .

تطبيقات

لحساب المجموعة : $٨ \times ٥ + ١٢ \times ٥ + ٢٧ \times ٥$

يلاحظ ان كلا من حدود هذه المجموعة هو من مضاعفات ٥

فبالاستناد على الخاصة السابقة يمكننا ان نكتب :

$$(٨ + ١٢ + ٢٧) \times ٥ = ٥ \times ٢٧ + ٥ \times ١٢ + ٥ \times ٨$$

$$\text{او } ٨ \times ٥ + ١٢ \times ٥ + ٢٧ \times ٥ = ٤٧ \times ٥$$

[يشاهد ان حاصل الجمع هو من مضاعفات ٥]

وكذلك : $(١ + ٤ + ٧) \times ب = ب + ٤ب + ٧ب$

او : $١٢ب = ب + ٤ب + ٧ب$

ويتضح من المثال السابق انه اذا اشتركت عدة حدود بمضروب واحد يمكن وضع المضروب المشترك خارج قوس تحصر بقية المضاريب مع شاراتها .

٢٠ — **خاصة** — لقسمة مجموعة اعداد على عدد ما يقسم كل من تلك الاعداد [ان امكن] على ذلك العدد وتضاف الحواصل الى بعضها .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل قسمة المجموعة $(١٤ + ٢١ + ٣٥)$ على ٧

فيكون : $[١٤ + ٢١ + ٣٥] \div ٧ = ٢ + ٣ + ٥$

اذ في الحقيقة : $(١٤ + ٢١ + ٣٥) = (٢ + ٣ + ٥) \times ٧$

وبصورة عامة: $(ب + حـ + ء) \div هـ = \frac{ب}{هـ} + \frac{حـ}{هـ} + \frac{ء}{هـ}$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

٢١ — **نتيجة** — اذا قسم عدد طائفة اعداد فهو يقسم حاصل جمعها.

٢٢ — **خاصة** — لضرب فضل عددين بعددما يمكن ان يضرب حدا

الفضل على التعاقب بذلك العدد ويطرح الحاصلان من بعضهما .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل ضرب الفضل (٢٤ — ١٩) في العدد ٣

نقول : $(٢٤ - ١٩) \times ٣ = ٣ \times ٢٤ - ٣ \times ١٩$

حيث : $(٢٤ - ١٩) \times ٣ = (٢٤ - ١٩) + (٢٤ - ١٩) +$
$(٢٤ - ١٩)$

او : $(٢٤ - ١٩) \times ٣ = ٢٤ - ١٩ + ٢٤ - ١٩ + ٢٤ - ١٩$

ومنه : $(٢٤ - ١٩) \times ٣ = (٢٤ + ٢٤ + ٢٤) - (١٩ +$
$١٩ + ١٩)$

او : $(٢٤ - ١٩) \times ٣ = ٣ \times ٢٤ - ٣ \times ١٩$

وبصورة عامة :

$$(ب - ح) \times و = ب و - ح و$$

وبالعكس : $ب و - ح و = و (ب - ح)$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

٢٣ — نتيجة — الفضل بين مضاعفي عدد ما هو مضاعف العدد نفسه

تطبيق — لحساب فضل الجداءين : $٣٧ \times ٧ - ٢٥ \times ٧$

نضع المضروب المشترك ٧ خارج قوس تحصر بقية المضاريب مع شاراتها

اي : $٣٧ \times ٧ - ٢٥ \times ٧ = ٧ (٣٧ - ٢٥)$

او : $٣٧ \times ٧ - ٢٥ \times ٧ = ٧ \times ١٢$

وهذا يشعر بان الفضل بين مضاعفي العدد ٧ هو مضاعف ٧ ايضاً

وكذلك ٨ ب - ٥ ب = (٨ - ٥) ب = ٣ ب

٢٤ — **خاصة** — لقسمة فضل عددين على عدد يقسم كل من حدي الفضل (ان امكن) على ذلك العدد ويطرح الحاصلان من بعضهما .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل قسمة الفضل (٢٨ — ٢٠) على ٤

نقول : (٢٨ - ٢٠) ÷ ٤ = ٧ - ٥

حيث : ٢٨ - ٢٠ = ٤ × (٧ - ٥)

وبصورة عامة : (ب — حـ) ÷ م = $\frac{ب}{م} - \frac{حـ}{م}$

٢٥ — **نتيجة** — إذا قسم عدد عددين آخرين فهو يقسم فضلهما .

٢٦ — **خاصة** — لضرب جداء عدة اعداد بعدد ما يمكن ان يضرب احد مضاريب الجداء بذلك العدد

مثلاً — لضرب الجداء : ٧ × ٢ × ١٣ في ٥

(٧ × ٢ × ١٣) × ٥ = ٧ × (٢ × ٥) × ١٣ = ٧ × ١٠ × ١٣

وبصورة عامة : ب حـ ء × م = ب × (حـ م) × ء

وينتج من هذه الخاصة :

٢٧ — **نتيجة** — إذا كان احد مضاريب جداء مضاعفاً لعدد ما فالجداء نفسه يكون مضاعفاً لذلك العدد .

مثلاً — في الجداء : ح = ١٧ × ٣٥ × ٢

العدد ٣٥ مضاعف ٧ إذاً ح هو مضاعف ٧ ايضاً .

ملاحظة — الضرب جداءين يساوي ضرب مضاريب احدهما بمضاريب الثاني .

مثلاً — $(٧ \times ٢ \times ١٣) \times (٥ \times ٣) = ٧ \times ٢ \times ١٣ \times ٥ \times ٣$

٢٨ — **خاصة** — لقسمة جداء عدة اعداد على عدد ما يكفي ان يقسم احد مضاريب الجداء [ان امكن] على ذلك العدد

مثلاً — $[٧ \times ١٠ \times ١٣] \div ٥ = ٧ \times \frac{١٠}{٥} \times ١٣ = ٧ \times ٢ \times ١٣$

حيث : $٧ \times ١٠ \times ١٣ = [٧ \times ٢ \times ١٣] \times ٥$

وعليه : $ب \times ج \times د \div م = ب \times \frac{ج}{م} \times د$

وينتج من هذه الخاصة :

٢٩ — **نتيجة** — إذا قسم عدد احد مضاريب جداء فهو يقسم الجداء نفسه

مثلاً — ليكن العدد ٤ قاسماً ١٢ في الجداء :

$ح = ٧ \times ١٢ \times ١٥$ اذاً هو قاسم ح ايضاً .

تمارين

١ — المطلوب حل التمارين الآتية :

$٦ \times [١٥ + ٧ - ١٢]$	$ب \times [ج + د - هـ]$
$م \times [٦ + ٥ + ٤]$	$ك \times [ج + ب + ١]$
$[٢٤ + ١٦ + ١٢] \div ٤$	$[ب + ج + د] \div م$
$[٢٧ - ١٨] \div ٣$	$[ب - ج] \div م$
$١٥ \times ٤ \times ٧ \div ٥$	$ب \times ج \times د \div ب$

٢ – وضع المجموعات الآتية بصورة مضاريب

١٢٥×٧+١٢٥×٢+١٢٥	ب ح + ب ى + ب هـ
٣٢٤×٩+٣٢٤×٤-٣٢٤×٣	م هـ + م و + م ى
١٠ + ١٥ + ٥	٢ ب + ٣ ب + ب
٢٧ – ٣٦ + ١٨	٢ ب ح + ٤ ى ح + ٨ ح
٤٢ + ١٤ – ٣٥	١٥ ب – ١٠ ب – ٥ ب

٣٠–حل مجموعة مؤلفة من حدود ذات نوع واحد من الحروف

مثال – لتكن المجموعة : م = ٥ ب + ٧ ب + ٩ ب

نشاهد ان حدود المجموعة تشترك في الحرف ب وعليه نضع ب المضروب المشترك خارج قوس فيصير :

م = ٥ ب + ٧ ب + ٩ ب = ب [٥ + ٧ + ٩] = ب × ٢١

او ٢١ ب

ومن المثال السابق نستنتج القاعدة الآتية :

قاعدة – لجمع عدة حدود ذات نوع واحد من الحروف تضاف امثال الحروف الى بعضها ويجعل الناتج مثلاً للحرف المشترك

مثال (١) – م = ٣ ح + ٤ ح + ٧ ح = (٣ + ٤ + ٧) ح = ١٤ ح

مثال (٢) – م = $\frac{٢}{٥}$ ك + $\frac{٣}{٥}$ ك = ($\frac{٣}{٥}$ + $\frac{٢}{٥}$) ك = ك

مثال (٣) – م = $\frac{٣}{٤}$ ب + $\frac{٢}{٥}$ ب = ($\frac{٢}{٥}$ + $\frac{٣}{٤}$) ب

(٥) (٤)

= ($\frac{١٥}{٢٠}$ + $\frac{٨}{٢٠}$) ب = $\frac{٢٣}{٢٠}$ ب

ويتضح من الامثلة السابقة :

ان مجموعة الحدود المتساوية بالحرف هي عبارة عن حد واحد .

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية :

٥ س + ٧ س + ١٣ س	٣ ب حـ + ٥ ب حـ + ب حـ
٩ س + ١٢ س − ١٠ س	٧ س ص − ١٢ س ص + ١٣ س ص
٢٤ س − ٧ س − ١١ س	٢٥ ب س − ١٢ ب س − ٨ ب س
$\frac{٢}{٥}$ س + $\frac{٣}{٤}$ س + $\frac{١}{٢}$ س	$\frac{١}{٢}$ ب حـ + $\frac{٣}{٥}$ ب حـ − $\frac{٥}{٦}$ ب حـ
$\frac{٢}{٣}$ ب − $\frac{٤}{٥}$ ب + $\frac{١}{٤}$ ب	$\frac{٣}{٤}$ س ع − $\frac{٣}{٥}$ س ع + $\frac{٣}{٢}$ س ع

﴿ البحث الثاني — قابلية القسمة ﴾

٣١ — **تعريف** — يقال للعدد انه قابل القسمة على عدد آخر اذا لم يبق باق من قسمته عليه . اي اذا كان العدد الاول من مضاعفات العدد الثاني .

مثلاً — العدد ٢٤ يقبل القسمة على ٦ لان ٢٤ من مضاعفات ٦

ويكون ٢٤ ÷ ٦ = ٤

قابلية القسمة على ١٠ ، ٢ ، ٥

٣٢ — **قاعدة** — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ١٠ يلزم ويكفي ان يكون منتهياً بصفر .

مثال — العددان ٧٠ ، ٥٤٠ كل منهما يقبل القسمة على ١٠

حيث : ٧٠ = ١٠ × ٧ ؛ ٥٤٠ = ١٠ × ٥٤

ولما كان العددان ٧٠، ٥٤٠ هما من مضاعفات ١٠ اذن يقبلان القسمة على ١٠

باقي قسمة عددما على ١٠

مثال — ما هو باقي قسمة ٣٥٧ على ١٠ ؟

العدد : ٣٥٧ = ٣٥٠ + ٧ = مضاعف ١٠ + ٧

ومن حيث ان العدد ٧ لا يقبل القسمة على ١٠ اذن الباقي من قسمة ٣٥٧ على ١٠ هو ٧ وينتج من ذلك ان باقي قسمة عددٍ ما على ١٠ يساوي رقم احاده

ملاحظة — يتضح من المثال السابق ان كل عدد هو من مضاعفات ١٠ زائد رقم آحاده .

٣٣ — **قاعدة** — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٢ او ٥ يلزم ويكفي ان يكون رقم آحاده قابلاً القسمة على ٢ او ٥ واما ان يكون صفراً

حيث علمنا من القاعدة السابقة ان كل عدد هو من مضاعفات ١٠ زائد رقم آحاده

وبما ان ١٠ = ٢ × ٥ اذن كل عدد هو من مضاعفات ٢ او ٥ مضافاً اليه رقم احاده

مثلاً — العدد : ٣٥٧ = مضا ١٠ + ٧ = مضا ٢ + ٧

، : ٣٥٧ = مضا ١٠ + ٧ = مضا ٥ + ٧

وهذا يشعر بان باقي قسمة عددما على ٢ او ٥ يساوي باقي قسمة رقم آحاده على ٢ او ٥

وينتج من ذلك ان العدد يقبل القسمة على ٢ او ٥ اذا كان رقم آحاده قابلا القسمة على ٢ او ٥ (من مضاعفات ٢ او ٥)

امثلة : ٨٥٦ = مضا ٢ + ٦ = مضا ٢

٤٧٣٥ = مضا ٥ + ٥ = مضا ٥

قابلية القسمة على ١٠٠ ، ٢٥٤

٣٤ — **قاعدة** — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ١٠٠ يلزم ويكفي ان يكون منتهياً بصفرين .

مثال — العددان : ٦٠٠ ، ٤٠٠ ٢٥ كل منهما يقبل القسمة على ١٠٠

حيث : ٦٠٠ = ١٠٠ × ٦ ، ٢٥٤٠٠ = ١٠٠ × ٢٥٤

ولما كان العددان ٦٠٠ ، ٢٥٤٠٠ هما من مضاعفات ١٠٠ اذن يقبلان القسمة على ١٠٠

باقي قسمة عددما على ١٠٠

مثال — ماهو باقي قسمة ٨٣٧٩ على ١٠٠ ؟

العدد : ٨٣٧٩ = ٨٣٠٠ + ٧٩ = مضا ١٠٠ + ٧٩

ومن حيث ان العدد ٧٩ لا يقبل القسمة على ١٠٠ اذن الباقي من قسمة ٨٣٧٩ على ١٠٠ هو ٧٩

وينتج من ذلك :

ان باقي قسمة عددما على ١٠٠ يساوي العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته.

ملاحظة — يتضح من المثال السابق ان كل عدد هو من مضاعفات ١٠٠ زائد العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته .

٣٥ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٤ او ٢٥ يلزم ويكفي ان يكون العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته قابلا القسمة على ٤ او ٢٥ واما ان يكون صفرين .

حيث علمنا من القاعدة السابقة ان كل عدد هو على مضاعفات ١٠٠ زائد العدد المؤلف من آحاده وعشراته . وبما ان ١٠٠ = ٤ × ٢٥

اذن كل عدد هو من مضاعفات ٤ او ٢٥ زائد عدد آحاده وعشراته

مثلاً — العدد : ٨٣٧٩ = مضا ١٠٠ + ٧٩ = مضا ٤ + ٧٩

، : ٨٣٧٩ = مضا ١٠٠ + ٧٩ = مضا ٢٥ + ٧٩

وهذا يشعر ان باقي قسمة عددما على ٤ او ٢٥ يساوي باقي قسمة العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته على ٤ او ٢٥

وينتج من ذلك ان كل عدد يقبل القسمة على ٤ او ٢٥ اذا كان العدد

المؤلف من رقمي آحاده وعشراته يقبل القسمة على ٤ او ٢٥ (من مضاعفات ٤ او ٢٥)

امثلة : ٧٥٦ = مضا ٤ + ٥٦ = مضا ٤

٣٨٧٥ = مضا ٢٥ + ٧٥ = مضا ٢٥

قابلية القسمة على ٩ ، ٣

٣٦ — تمرين — يلاحظ ان : ١٠ = ٩ + ١

١٠٠ = ٩٩ + ١ :

١٠٠٠ = ٩٩٩ + ١ :

وان الاعداد : ٩ ، ٩٩ ، ٩٩٩ ، ... هي من مضاعفات ٩ اذن يمكننا ان نكتب المساويات السابقه بالصورة الآتية :

١٠ = مضا ٩ + ١

١٠٠ = مضا ٩ + ١

١٠٠٠ = مضا ٩ + ١

ولنضرب طرفي هذه المساويات فرضاً بالاعداد ٥ ، ٧ ، ٨ على الترتيب فيحدث :

١٠ × ٥ = (مضا ٩ + ١) × ٥ او ٥٠ = مضا ٩ + ٥

١٠٠ × ٧ = (مضا ٩ + ١) × ٧ ، ٧٠٠ = مضا ٩ + ٧

١٠٠٠ × ٨ = (مضا ٩ + ١) × ٨ ، ٨٠٠٠ = مضا ٩ + ٨

ويتضح مما سبق ان العدد المؤلف من رقم متبوع باصفار هو من مضاعفات ٩ زائد ذلك الرقم .

٣٧ — **نظرية** — كل عدد هو من مضاعفات ٩ زائد مجموع ارقامه .

مثلاً — ليكن العدد هو : ٨٧٢٥ فالمطلوب ان :

٨٧٢٥ = مضا ٩ + (٥ + ٢ + ٧ + ٨)

في الحقيقة — العدد ٨٧٢٥ يمكن كتابته : ٨٧٢٥ = ٨٠٠٠ + ٧٠٠ + ٢٠ + ٥

وان : ٨٠٠٠ = مضا ٩ + ٨
، : ٧٠٠ = مضا ٩ + ٧
، : ٢٠ = مضا ٩ + ٢
، : ٥ = ٥ + ٠

وبجمع هذه المساواة طرفاً الى طرف

يحدث : ٨٧٢٥ = مضا ٩ + (٨ + ٧ + ٢ + ٥)

او : ٨٧٢٥ = مضا ٩ + ٢٢

ولما كان العدد ٢٢ هو عبارة عن مجموع ارقام العدد ٨٧٢٥ اذن ثبت المطلوب

وينتج من النظرية السابقة القاعدة الآتية :

٣٨ — **قاعدة** — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٩ يلزم ويكفي ان يكون مجموع ارقامه قابلاً القسمة على ٩

مثال — (١) — العدد : ٨٧٢٥ = مضا ٩ + ٢٢ = مضا ٩ + ٤

وعليه فالعدد ٨٧٢٥ لا يقبل القسمة على ٩ والباقي من قسمته على ٩ يساوي ٤

وينتج من هذه القاعدة ان باقي قسمة عددما على ٩ يساوي باقي قسمة مجموع ارقامه على ٩

مثال — (٢) — العدد : ٤٥٦٣ = مضا ٩ + ١٨ = مضا ٩

وعليه فالعدد ٤٥٦٣ يقبل القسمة على ٩

٣٩ — **قاعدة** — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٣ يلزم ويكفي ان يكون مجموع ارقامه قابلاً القسمة على ٣ حيث في الحقيقة ان ٩ هو من مضاعفات ٣ وعليه فكل عدد يكون مساوياً مضاعف ٣ زائد مجموع ارقامه .

مثال (١) — العدد : ٨٧٢٥ = مضا ٣ + ٢٢ = مضا ٣ + ١

اذاً العدد: ٨٧٢٥ لايقبل القسمة على ٣ والباقي من قسمته على ٣ يساوي ١

وينتج من المثـــال السابق ان باقي قسمة عددما على ٣ يساوي باقي قسمة مجموع ارقامه على ٣

مثال (٢) — العدد : ٣٤٦٢ = مضا ٣ + ١٥ = مضا ٣

قابلية القسمة على ١١

٤٠ — **تمهيد** — يلاحظ ان : ١٠ = مضا ١١ - ١

، : ١٠٠ = مضا ١١ + ١

، : ١٠٠٠ = مضا ١١ - ١

، : ١٠٠٠٠ = مضا ١١ + ١

وبضرب طرفي المساويات فرضاً بالاعداد : ٣ ، ٥ ، ٩٠٦ بالترتيب

يحدث : ١٠ × ٣ = (مضا ١١ - ١) × ٣ او ٣٠ = مضا ١١ - ١

١٠٠ × ٥ = (مضا ١١ + ١) × ٥ ، ٥٠٠ = مضا ١١ + ٥

٦ - مضا ١١ = ٦ × ١٠٠٠ ، ٦ × (مضا ١١ - ١) = ٦٠٠٠

٩ + مضا ١١ = ٩ × ١٠٠٠٠ ، ٩ × (مضا ١١ + ١) = ٩٠٠٠٠

ويتضح من ذلك ان العدد المؤلف من رقم متبوع بأصفار فردية يساوي مضاعف ١١ ناقص ذلك الرقم والمتبوع باصفار زوجية يساوي مضاعف ١١ زائد ذلك الرقم .

٤١ — نظرية — كل عدد يساوي مضاعف ١١ زائد الفرق بين مجموعي ارقامه الفردية الرتبة والزوجية الرتبة

مثلاً — ليكن العدد هو : ٧٩٤٦ فالمطلوب ان :

٧٩٤٦ = مضا ١١ + (٩ + ٦) - (٧ + ٤)

البرهان — العدد ٧٩٤٦ يكتب ٧٠٠٠ + ٩٠٠ + ٤٠ + ٦

وان : ٧٠٠٠ = مضا ١١ - ٧

، : ٩٠٠ = مضا ١١ + ٩

، : ٤٠ = مضا ١١ - ٤

، : ٦ = ٠ + ٦

وبجمع المساويات طرفاً الى طرف

يحدث : ٧٩٤٦ = مضا ١١ + (٩ + ٦) - (٧ + ٤)

، : ٧٩٤٦ = مضا ١١ + (١٥ - ١١)

ومنه : ٧٩٤٦ = مضا ١١ + ٤

ولما كان العدد ٤ هو الفرق بين مجموعي الارقام الفردية الرتبة والزوجية الرتبة للعدد ٧٩٤٦ اذاً ثبت المطلوب .

٤٢ ــ **قاعدة** ــ لاجل ان يقبل عدد القسمة على ١١ يلزم يكفي ان يكون الفرق بين مجموعي ارقامه الفردية الرتبة والزوجية الرتبة مساوياً الصفر او عدداً من مضاعفات ١١ .

امثلة : العدد ٧٥٦٨ يقبل القسمة على ١١ حيث (٨ + ٥) - (٦ + ٧) = ٠

« ٢٩٤٨ « « « ١١ « (٨ + ٩) - (٤ + ٢) = ١١

« ٤٥٦٧٨ لايقبل « « ١١ « (٨ + ٦ + ٤) - (٧ + ٥) = ٦

نتيجة ــ الباقي من قسمة عدد ما على ١١ يساوي الفضل الكائن بين مجموعي ارقامه الفردية الرتبة والزوجية الرتبة .

٤٣ ــ **ملاحظة** ــ اذا استعرضنا سلسلة الاعداد الطبيعية :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ....

نرى ان : ١ً ــ احد كل عددين متعاقبين يقبل القسمة على ٢

٢ً ــ « « ثلاثة اعداد متعاقبة « « « ٣

٣ً ــ « « عددين شفعيين متعاقبين يقبل القسمة على ٤ ومن الملاحظة السابقة ينتج الخواص الآتية :

خاصة (١) ــ حاصل ضرب كل عددين متعاقبين يقبل القسمة على ٢

مثلاً ــ ليكن العددان المتعاقبان هما : ب ، ب + ١

فالمطلوب ان : ب (ب + ١) = مضا ٢

في الحقيقة ان الجداء : ب (ب + ١) هو من مضاعفات ٢ لان احد مضاربه عدد زوجي يقبل القسمة على ٢

خاصة (٢) — حاصل ضرب كل ثلاثة اعداد متعاقبة يقبل القسمة على ٦

مثال — لتكن الاعداد المتعاقبة هي : ب ، ب + ١ ، ب + ٢

فالمطلوب ان : ب (ب + ١) [ب + ٢] = مضا ٦

في الحقيقة الجداء ب [ب + ١] [ب + ٢] هو من مضاعفات ٦ لان احد مضاربيه يقبل القسمة على ٢

واحدها يقبل على ٣ وعليه فالجداء هو من مضاعفات ٢ ، ٣ في آن واحد

اذن يقبل القسمة على ٦ وهو المطلوب .

مثلاً — ح = ٧ × ٨ × ٩ = ٥٠٤ = مضا ٦

خاصة (٣) — حاصل ضرب كل عددين شفعيين متعاقبين يقبل القسمة على ٨

مثلاً — ليكن العددان الشفعيان المتعاقبان هما : ٢ ب ، ٢ ب + ٢

وجداءهما [ح]

فالمطلوب ان : ح = ٢ ب [٢ ب + ٢] = مضا ٨

حيث باصلاح الطرف الثاني من المساواة يحدث :

ح = ٤ ب^{٢} + ٤ ب [يوضع المضروب المشترك ٤ ب خارج قوس]

يصير : ح = ٤ ب [ب + ١]

نقول ان الجداء ح يقبل القسمة على ٤ لان احد مضاربيه ٤

وكذلك ح « « « ٢ « « « يقبل على ٢ باعتبار

ان مضروبين من مضاربيه عددان متواليان .

وبما ان ح يقبل القسمة على ٤ ، ٢ في وقت واحد اذن هو من مضاعفات ٨ وهذا المطلوب .

تمارين

١ــ ماهي بواقي قسمة الاعداد : ٤٨٥٧ ، ١٣٥٢٩ ، ٧٩٥٨ على ٩ ، ١١

٢ــ كتابة ٥ اعداد ذات رتب مختلفة تقبل القسمة على ٩ وكذلك خمسة اعداد تقبل على ١١

٣ــ كتابة ٥ اعداد ذات رتب مختلفة تقبل القسمة على ٩ ، ١١ في آن واحـــد .

٤ــ بأي الارقام يعوض (س) في العدد (٧ س ٣٩) ليكون الباقي من قسمة العدد الناتج على ٩ مساوياً ٢ ، ٣

٥ــ بأي الارقام يعوض (س) في العدد (٧ س ٣٩) ليكون العدد الناتج

أ ــ قابلاً القسمة على ١١

ب ــ ليكون الباقي من قسمته على ١١ مساوياً ٣

القوى وخواصها

تعاريف

٤٤ ــ **قوة العدد** ــ هي عبارة عن حاصل ضربه بنفسه عدة مرات .

فمثلاً ــ القوة الثالثة للعدد ٥ هي ٥ × ٥ × ٥ وتكتب $٥^{٣}$

ويقال للعدد ٣ الدال على درجة القوة (اساً)

وكذلك فالقوة الرابعة للعدد (ب) هي ب × ب × ب × ب وتكتب $ب^{٤}$

ملاحظة ــ القوة الثانية للعدد يقال لها (مربعاً) والقوة الثالثة يقال لها (مكعباً)

وعليه : ٥^{٢} يقرأ مربع خمسة ، ٤^{٣} يقرأ مكعب اربعة

القوة الاولى للعدد ٥ هي : ٥

والقوى المتعاقبة للعدد ٥ هي : ٥ ، ٥^{٢} = ٢٥ ، ٥^{٣} = ١٢٥ ، ٥^{٤} = ٦٢٥ ، .....

وكذلك القوى المتعاقبة للعدد ١٠ هي ، ١٠ ، ١٠^{٢} = ١٠٠ ، ١٠^{٣} = ١٠٠٠ ، ١٠^{٤} = ١٠٠٠٠ ، ...

ويتضح بان قوة العدد المؤلف من واحد متبوع باصفار تساوي ١ متبوع باصفار بقدر وحدات درجة القوة .

٤٥ — **قاعدة** — لرفع جداء عدة اعداد لقوة ما يمكن ان يرفع كل من مضاريب الجداء الى تلك القوة وتضرب النواتج ببعضها .

مثال (١) — (٤ × ٧)^{٢} = ٤^{٢} × ٧^{٢}

اذ في الحقيقة : (٤ × ٧)^{٢} = (٤ × ٧) × (٤ × ٧)

او : (٤ × ٧)^{٢} = ٤ × ٧ × ٤ × ٧

او : (٤ × ٧)^{٢} = ٤ × ٤ × ٧ × ٧ = ٤^{٢} × ٧^{٢}

مثال (٢) — (ب ح ء)^{٣} = ب^{٣} × ح^{٣} × ء^{٣}

وبصورة عامة : (ب ح)^{ن} = ب^{ن} × ح^{ن}

القوى المختلفة لعدد ما

٤٦ — خاصة (١) — حاصل ضرب عدة قوى مختلفة لعدد ما يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل مجموع درجات قوى المضاريب

مثلاً : ٧^{٢} × ٧^{٣} = ٧^{٥}

حيث في الحقيقة : $٧^{٢} = ٧ \times ٧$ ، $٧^{٣} = ٧ \times ٧ \times ٧$ } وبضرب المساواتين طرفاً مع طرف

ينتج : $٧^{٢} \times ٧^{٣} = (٧ \times ٧) \times (٧ \times ٧ \times ٧) = ٧^{٥}$

وكذلك : $ب^{٢} \times ب^{٣} \times ب = ب^{٦}$

٤٧ — خاصة (٢) — حاصل قسمة قوتين مختلفتين لعدد ما يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل فضل درجتي القوتين .

مثلاً : $٧^{٥} \div ٧^{٢} = ٧^{٣}$

اذ ان : $٧^{٣} \times ٧^{٢} = ٧^{٥}$

وكذلك : $ب^{٦} \div ب^{٤} = ب^{٢}$

ملاحظة : $٦^{٢} \div ٦^{٢} = ١$ لان المقسوم والمقسوم عليه متساويان .

وبناء على قاعدة قسمة القوتين يكون :

$٦^{٢} \div ٦^{٢} = ٦^{٠}$ اذن $٦^{٠} = ١$

وينتج من ذلك ان كل عدد بقوة صفر يساوي الواحد اي : $ب^{٠} = ١$

٤٨ — خاصة (٣) — حاصل رفع قوة عدد من درجة ما يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل جداء درجتي الرفع مع المرفوع

مثلاً : $(٥^{٢})^{٣} = ٥^{٢} \times ٥^{٣} = ٥^{٦}$

اذ في الحقيقة : $(٥^{٢})^{٣} = ٥^{٢} \times ٥^{٢} \times ٥^{٢} = ٥^{٦}$

وكذلك : $(ب^{٥})^{٣} = ب^{٥} \times ب^{٥} \times ب^{٥} = ب^{١٥}$

٤٩ — خاصة (٤) — حاصل جذر قوة عدد ما يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل قسمة أس العدد الاصلي على دليل الجذر .

مثلاً : $\sqrt[4]{٥^{٤}} = ٥^{\frac{٤}{٤}} = ٥^{٢}$ اذ في الحقيقة لو ربعنا الطرفين يحدث :

$$(\sqrt[4]{٥^{٤}})^{٢} = (٥^{٢})^{٢}$$

ومنه : $٥^{٤} = ٥^{٤}$ وهو المطلوب

وبصورة عامة $\sqrt[4]{ب^{٤}} = ب^{\frac{٤}{٤}} = ب^{١}$ ، $\sqrt[3]{س^{٣}} = س^{\frac{٣}{٣}}$

ملاحظة — من الخاصة السابقة يتضح بان العدد قد يكون أسه كسراً وحينئذ يكون ذلك العدد ناتجاً عن جذر قوة اسها بسط الكسر ودليل جذرها مقام الكسر .

فمثلاً العدد : $٧^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[3]{٧^{٢}}$ وكذلك العدد $ب^{\frac{٢}{٥}} = \sqrt[5]{ب^{٢}}$

﴿ البحث الثالث — الاعداد الاولية ﴾

٥٠ — **تعريف** — يقال للعدد (اولياً) اذا لم يكن له قاسماً سوى نفسه والواحد

مثلاً — العدد : ٢٩ اولي لانه لا يقبل القسمة الا على نفسه والواحد

« : ٣٥ تالي (غير اولي) لانه يقبل القسمة على ٥ ، ٧

ملاحظة — الاعداد الشفعية جميعها (ما عدا ٢) تالية لانها من مضاعفات ٢

اما الاعداد الوترية فمنها ما يكون اولياً ومنها تالياً

ويتضح من هذه الملاحظة ان الاعداد الاولية جميعها وترية ما عدا (٢)

٥١ — **نظرية** — اذا كان العدد تالياً لابد ان يكون له قاسماً اولياً على الاقل

مثلاً — العدد ٢٤ تالي وهو ٢٤ = ٤ × ٦

، ٦ « لان ٦ = ٢ × ٣ (هنا ٣ عدد اولي)

اذاً : ٢٤ = ٤ × ٢ × ٣ اي ان العدد ٢٤ يقبل قاسماً اولياً ٣

وينتج من هذه النظرية ان كل عدد غير اولي يتألف من حاصل ضرب عدة اعداد اولية

٥٢ — انشاء جدول الاعداد الاولية التي هي اقل من ٥٠

فلاجل انشاء جدول الاعداد الاولية التي هي اقل من ٥٠ نكتب جميع الاعداد المتعاقبة من ١ الى ٥٠ (شكل — ١)

١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٢٠	١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١
٣٠	٢٩	٢٨	٢٧	٢٦	٢٥	٢٤	٢٣	٢٢	٢١
٤٠	٣٩	٣٨	٣٧	٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	٣٢	٣١
٥٠	٤٩	٤٨	٤٧	٤٦	٤٥	٤٤	٤٣	٤٢	٤١

ونشطب بعد ذلك الاعداد التالية الموجودة بينها على الصورة الآتية :

١ — نشطب مضاعفات (٢) اعتباراً من العدد الذي يلي ٢ وهي الاعداد الواقعة في المرتبة الثانية لكل عددين متواليين .

اي : ٢ × ٢ ، ٢ × ٣ ، ٢ × ٤ ، ....

٢ — نشطب مضاعفات (٣) اعتباراً من العدد الذي يلي ٣ وهي الاعداد الواقعة في المرتبة الثالثة لكل ثلاثة اعداد متتابعة .

اي ٣ × ٢ ، ٣ × ٣ ، ٣ × ٤ ، ....

٣ ــ نشطب مضاعفات (٥) اعتباراً من العدد الذي يلي ٥ وهي الاعداد الواقعة في المرتبة الخامسة لكل خمسة اعداد متعاقبة

اي : ٥ × ٢ ، ٥ × ٣ ، ٥ × ٤ ، ....

٤ ــ نشطب مضاعفات (٧) اعتباراً من العدد الذي يلي ٧ وهي الاعداد الواقعة في المرتبة السابعة لكل سبعة اعداد متوالية .

اي : ٧ × ٢ ، ٧ × ٣ ، ٧ × ٤ ، ....

فالاعداد الباقية في الجدول بدون شطب وهي :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧ ، ٤١ ، ٤٣ ، ٤٧ ، اعداد اولية

ملاحظة ــ يلاحظ في الاعمال السابقة :

١ً ــ اننا بشطب مضاعفات ٢ نكون شطبنا جميع الاعداد الشفعية التي هي من مضاعفات ٤ ، ٦ ايضاً

٢ً ــ عندما بدأنا بشطب مضاعفات ٥ وجدنا في الجدول طائفة من مضاعفاتها مشطوبة

فمثلاً : ٥ × ٢ شطبت باعتبارها من مضاعفات ٢

٥ × ٣ » » » ٣

٥ × ٤ » » » ٢

ولذلك ابتدأ الشطب بصورة عملية اعتباراً من ٥ × ٥ = ٥٢ = ٢٥

وهكذا في مضاعفات ٧ فقد ابتدأنا بشطبها اعتباراً من ٧٢ = ٤٩

٣ً ــ بعد مضاعفات ٧ يجب المباشرة (استناداً على الملاحظة السابقة)

بشطب مضاعفات ١١ اعتباراً من ١١^{٢}=١٢١ ثم مضاعفات ١٣ ابتداءً من ١٣^{٢}=١٦٩ وهكذا بقية المضاعفات . ولكن بما ان العدد الاخير في الجدول السابق خمسين وهو اصغر من ١٢١ فعليه اكتفينا بشطب مضاعفات الاعداد الاولية : ٢، ٣، ٥، ٧ فقط لان مضاعفات الاعداد الاولية التي تلي ٧ والموجودة في الجدول المذكور شطبت في الاعمال المتقدمة .

ذكرى — الطريقة التي اتبعناها لايجاد الاعداد الاولية تسمى (غربال ئه راتوستين) نسبة لمخترعها ئه راتوستين وهو فيلسوف رياضي يوناني جاء في القرن الثاني قبل الميلاد.

٥٣ — **نظرية** — العدد يكون اولياً اذا لم يقبل القسمة على احد الاعداد الاولية التي مربعاتها اصغر منه

مثلاً — العدد : ٢٧١ هل هو اولي ؟

لذلك نقسمه على الاعداد الاولية : ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ الذي مربع كل منها اصغر من ٢٧١ بصورة متتابعة .

فنرى ان ٢٧١ لا يقبل القسمة على ٢ لان آحاده ليس عدداً شفعاً او صفراً .

، « « « ٣ « مجموع ارقامه ليس من مضاعفات ٣

، « « « ٥ « آحاده ليس ٥ او صفراً

ثم لنجرب ونقسمه على ٧، ١١ ، ١٣

٢٧١	٧
٦١	٣٨
٥	

٢٧١	١١
٥١	٢٤
٧	

٢٧١	١٣
١١	٢٠

بما ان العدد ٢٧١ لم يقبل القسمة على ٧، ١١ ، ١٣ اذن هو اولي .

إذ في الحقيقة لو تابعنا عمليات التقسيم على الاعداد الاولية التي تلي ١٣ وفرضنا ان ٢٧١ قبل القسمة على ١٧ فعندئذ خارج القسمة يجب ان يكون :

اولاً — اصغر من ١٧ لأن ١٧ × ١٧ = ٢٨٩ وهذا اكبر من ٢٧١ اي

$٢٧١ < ١٧^{٢}$

ثانياً — حاصل القسمة المفروض اما ان يكون اولياً او غير اولي فاذا كان اولياً لا بد ان يكون مساوياً احد الاعداد السابقة ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ والحال وجدنا بالعمل ان هذه الاعداد لا تقسم ٢٧١ وعليه فالحاصل المفروض غير اولي واذا كان غير اولي يقتضي ان يقبل القسمة على الاعداد الاولية التي هي اصغر من ١٧ وعندئذ يكون مضاعفه ٢٧١ قابلاً القسمة عليه ايضاً ولكن تحقق لدينا بالعمل انه لا يوجد عدد اولي اصغر من ١٧ يقسم ٢٧١ اذن العدد ٢٧١ لا يقبل القسمة على ١٧ ولا على اي عدد اولي اصغر من ١٧ وعليه فهو عدد اولي وثبت المطلوب .

٥٤ — **قاعدة** — لمعرفة عدد هل هو اولي اوغير اولي يقسم على الاعداد الاولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، .... بالتتابع الى ان ينتج حاصل قسمة اصغر من المقسوم عليه او مساويه فاذا لم يقبل القسمة في احدى العمليات المذكورة كان العدد اولياً .

مثال (١) — العدد : ٢٢١ لا يقبل القسمة على ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ثم

٢٢١	١٣
٩١	١٧
..	

من حيث ان العدد ٢٢١ قبل القسمة على ١٣ اذن هو غير اولي لأن ١٣ × ١٧ = ٢٢١

مثال (٢) — العدد : ٢٢٩ لا يقبل القسمة على ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ فلنقسمه على الاعداد الاولية التي تلي ١١ وهي : ١٣ ، ١٧ ، ....

٢٢٩ | ١٣	٢٢٩ | ١٧
اي ١٧	ثم ١٣
٩٩	٥٩
٨	٨

هنا حاصل القسمة اكبر من المقسوم عليه | هنا حاصل القسمة اصغر من المقسوم عليه

إذاً العدد ٢٢٩ اولي لانه في القسمة الاخيرة ظهر حاصل قسمة ١٣ اصغر من المقسوم عليه ١٧

ويلاحظ ان ٢٢٩ لم يقبل القسمة على احد الاعداد التي مربعاتها اصغر منه .

٥٥ — **خاصة** — الباقي من قسمة اي عدد اولي (اكبر من ٣) على ٦ لا يكون الا (١) او (٥)

مثلاً — ليكن العدد ب اولياً

فالمطلوب ان : ب = مضا ٦ + ١ او ب = مضا ٦ - ١

في الحقيقة ان باقي قسمة اي عدد على ٦ هو احد الاعداد :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

اولا — ان ب لايمكن ان يكون مضاعفاً للعدد ٦ لانه ليس شفعاً

ثانياً — لا يمكن ان يكون الباقي من قسمة ب على ٦ مساوياً ٢ او ٤

حيث لو كان ب = مضا ٦ + ٢ ، او ب = مضا ٦ + ٤

لكان العدد ب شفعاً وهذا مخالف للفرض

ثالثاً — لايمكن ان يكون الباقي من قسمة ب على ٦ مساوياً ٣

اذ لو كان ب = مضا ٦ + ٣ لكان العدد ب من مضاعفات ٣ وهذا غير اولي

اذاً لا يمكن ان يكون الباقي من قسمة ب على ٦ الا ١ او ٥ وهذا المطلوب

تمارين

المطلوب بيان الاعداد الاولية وغير الاولية من الاعداد الآتية

٢٧٣ ، ١٥٧ ، ٢٩١ ، ٣١٣ ، ٥٥١

٥٧٧ ، ١٠٠١ ، ١٤٢١ ، ١٥٠٧ ، ١٥١٩

تفريق عدد الى مضاربه الاولية

٥٦ — تفريق عدد الى مضاربه الاولية هو عبارة عن وضعه بصورة حاصل ضرب مضاريب اولية

مثال (١) — لتفريق العدد ٩١٨ الى مضاربه الاولية .

نقول : ٩١٨ يقبل القسمة على ٢ ، اي ٩١٨ = ٢ × ٤٥٩

« : ٤٥٩ « « « ٣ ، « ٤٥٩ = ٣ × ١٥٣

اذاً : ٩١٨ = ٢ × ٣ × ١٥٣

وكذلك: ١٥٣ يقبل القسمة على ٣ ، اي ١٥٣ = ٣ × ٥١

اذاً : ٩١٨ = ٢ × ٣ × ٣ × ٥١

وكذلك : ٥١ يقبل القسمة على ٣ ، اي ٥١ = ٣ × ١٧

وعليه : ٩١٨ = ٢ × ٣ × ٣ × ٣ × ١٧

وبصورة عملية يجري التفريق على الوجه الآتي :

٩١٨	٢
٤٥٩	٣
١٥٣	٣
٥١	٣
١٧	١٧
١	

ويكتب :

$٩١٨ = ٢ \times ٣^{٣} \times ١٧$

٥٧ — **قاعدة** — لتفريق عدد الي مضاربيه الاولية ترسم بحذاء العدد مستقيماً رأسياً ونضع في الجهة الثانية منه اصغر قاسم اولي للعدد المفروض ، ثم نقسم العدد على القاسم الاولي ونضع الناتج تحت العدد المفروض وكذلك نضع امام الناتج اصغر قاسم اولي له ونقسم الناتج عليه ونضع الحاصل تحت الناتج الاول وهكذا نكرر العمل حتى ينتهي التقسيم ويظهر الناتج الاخير مساوياً (الواحد)

فالاعداد الاولية الموضوعة في حذاء المستقيم هي المضاريب الاولية التي جداؤها يساوي العدد المفروض

مثال (٢) — العدد ٣٦٠ يفرق الى مضاربيه كما يلي :

٣٦٠	٢
١٨٠	٢
٩٠	٢
٤٥	٣
١٥	٣
٥	٥
١	

ويكتب :

$٣٦٠ = ٢^{٣} \times ٣^{٢} \times ٥$

مثال (٣) — تفريق العدد ٣٥٠٠٠ الى مضاربيه الاولية

نقول : $٣٥٠٠٠ = ٣٥ \times ١٠٠٠ = ٥ \times ٧ \times ١٠^{٣}$

او : $٣٥٠٠٠ = ٥ \times ٧ \times ٥^{٣} \times ٢^{٣} = ٢^{٣} \times ٥^{٤} \times ٧$

تمارين

المطلوب تفريق الاعداد الآتية الى مضاريبها الاولية :

٥٨٨ ، ١٣٣٢ ، ١٨٠٠ ، ٢٥٢٠ ، ٣٣١٢

١٦٨٠٨ ، ٣٠٣٢٤ ، ١١١١١١ ، $١٢^{٣} \times ٢٠^{٢} \times ٣٥$ ، ٣٦٠٠٠

جداء عددين بواسطة مضاريبهما الاولية

٥٨ — **قاعدة** — لايجاد حاصل ضرب عددين بواسطة مضاريبهما الاولية تجمع اسس كل من المضاريب الاولية المشتركة ويجعل الناتج اساً للمضروب المشترك وتؤخذ المضاريب غير المشتركة بنفسها .

مثال العدد : $٩١٨ = ٢ \times ٣^{٣} \times ١٧$ ، $٣٦٠ = ٢^{٣} \times ٣^{٢} \times ٥$

فالجداء : $٩١٨ \times ٣٦٠ = (٢ \times ٣^{٣} \times ١٧) \times (٢^{٣} \times ٣^{٢} \times ٥)$

او : $٩١٨ \times ٣٦٠ = ٢ \times ٣^{٣} \times ١٧ \times ٢^{٣} \times ٣^{٢} \times ٥$

ومنه : $٢٣٠٤٨٠ = ٢^{٤} \times ٣^{٥} \times ١٧ \times ٥$

قسمة عددين بواسطة مضاريبهما الاولية

٥٩ — **قاعدة** — لايجاد حاصل قسمة عددين بواسطة مضاريبهما الاولية تطرح اسس مضاريب المقسوم عليه من اسس نفس المضاريب الموجودة في المقسوم ويجعل الناتج اساً للمضروب المشترك وتؤخذ المضاريب غير المشتركة بذاتها .

مثال — العدد : ٣٣٠٤٨٠ = $٢^{٤} \times ٣^{٥} \times ١٧ \times ٥$ ،

$١٧ \times ٣^{٣} \times ٢ = ٩١٨$

فحاصل القسمة : ٣٣٠٤٨٠ ÷ ٩١٨ =

$(٢^{٤} \times ٣^{٥} \times ١٧ \times ٥) \div (٢ \times ٣^{٣} \times ١٧)$

او : $\frac{٣٣٠٤٨٠}{٩١٧} = \frac{٢^{٤} \times ٣^{٥} \times ١٧ \times ٥}{٢ \times ٣^{٣} \times ١٧}$

ومنه : ٣٦٠ = $٢^{٣} \times ٣^{٢} \times ٥$

٦٠ — نظرية — لأجل ان يقبل عدد القسمة على عدد آخر يلزم ويكفي ان يحتوي الاول على جميع المضاريب الأولية الموجودة في الثاني بقوة تساوي قوى نظائرها على الاقل .

مثال (١) — ليكن : ب = $٢^{٣} \times ٥^{٢} \times ٧$ ؛ حـ = $٢ \times ٥ \times ٧$

فنقول ان العدد ب يقبل القسمة على حـ ؛ حيث ان المضاريب الاولية التي تؤلف المقسوم عليه توجد بين مضاريب المقسوم وهي بقوة تساوي او اقل بين نظائرها .

وعليه يكون : ب ÷ حـ = $(٢^{٣} \times ٥^{٢} \times ٧) \div (٢ \times ٥ \times ٧)$

او $\frac{ب}{حـ} = \frac{٢^{٣} \times ٥^{٢} \times ٧}{٢ \times ٥ \times ٧} = ٢^{٢} \times ٥ \times ١$

مثال (٢) ليكن : ح = $٢^{٣} \times ٥^{٢}$ ؛ حَ = $٢^{٣} \times ٧$

فالعدد ح في هذا المثال لا يقبل القسمة على حَ حيث حَ يحتوي على مضروب اولي (٧) لا يوجد بين مضاريب ح اي ان ٧ ليس مضروب مشترك .

مثال (٣) — ليكن : س = $٢^{٣} \times ٥ \times ٧$ ؛ سَ = ٢×٥^{٢}

كذلك العدد س هنا غير قابل القسمة على سَ لان المضروب المشترك (٥) قوتها في المقسوم اقل منها في المقسوم عليه .

قواسم العدد وكيفية ايجادها

٦١ — قواسم عدد ما هي جميع الاعداد التي تقسم ذلك العدد

مثال — ما هي قواسم ٤٨

الحل — نفرق العدد ٤٨ الى مضاربيه الاولية فيكون: ٤٨ = $٢^{٤} \times ٣$

وبالاستناد على النظرية السابقة نقول ان ٤٨ يقبل القسمة على :

$١ ، ٢ ، ٢^{٢} ، ٢^{٣} ، ٢^{٤} ، ١ \times ٣ ، ٢ \times ٣ ، ٢^{٢} \times ٣ ، ٢^{٣} \times ٣ ، ٢^{٤} \times ٣$

او : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨

اي ان قواسم العدد ٤٨ هي الاعداد المدرجة اعلاه لانها تحتوي على مضاربيب من نوع المضاربيب المؤلف منها ٤٨ وبقوة لا تزيد عن نظائرها في المقسوم

وتستخرج القواسم السابقة بصورة عملية كما يلي :

٤٨	٢	١
٢٤	٢	٢
١٢	٢	٤
٦	٢	٨
٣	٣	١٦
١		٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨

شرح العمل — يفرق العدد ٤٨ الى مضاربيه الاولية ويرسم مستقيماً رأسياً بحذاء المضاربيب المذكورة ثم نضع (١) في الطرف الاعلى باعتبار ان كل عدد يقبل القسمة على (١) ونضرب ٢ في ١ ونضع الحاصل بحذاء المستقيم امام العدد(٢)

ونضرب بعد ذلك كلاً من المضاريب الاولية بالنواتج الحاصلة بصورة متعاقبة هـذا اذا كانت المضاريب متساوية اما اذا كان احد المضاريب يختلف عن سابقه يقتضي ان يضرب بجميع النواتج الحاصلة على التوالي .

مثال (٢) — قواسم العدد ٢١٠ هي :

٢١٠	٢	١
١٠٥	٣	٢
٣٥	٥	٦ ، ٣
٧	٧	١٠ ، ٥ ، ١٥ ، ٣٠
١		١٤ ، ٧ ، ٢١ ، ٤٢ ، ٣٥ ، ٧٠ ، ١٠٥ ، ٢١٠

ملاحظة — عدد قواسم عددٍ ما يساوي حاصل ضرب اسس مضاريبه الاولية بعد اضافة الواحد لكل منها ففي المثال الاول، العدد ٤٨ = ٢^٤ × ٣

وحاصل ضرب اسس مضاريبه الاولية بعد اضافة الواحد لكل منها هي:

(٤ + ١) × (١ + ١) = ٥ × ٢ = ١٠ اي عدد قواسم ٤٨ هو ١٠

وفي المثال الثاني ، العدد : ٢١٠ = ٢ × ٣ × ٥ × ٧

وحاصل ضرب اسس مضاريبه الاولية بعد اضافة واحد لكل منها

(١+١) × (١+١) × (١+١) × (١+١) = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ = ١٦

وعليه فالعدد ٢١٠ له ١٦ قاسماً

٦٢ — **خاصة** — اذا كتبت قواسم عددٍ ما على الترتيب فحاصل ضرب كل قاسمين متناظرين منها يساوي ذلك العدد .

مثلاً — قواسم ٤٨ ترتب على الوجه الآتي :

١	٢	٤	٨	١٦	٣	٦	١٢	٢٤	٤٨
٤٨	٢٤	١٢	٦	٣	١٦	٨	٤	٢	١

فالقاسمان المتناظران : ١ ، ٤٨ حاصل ضربهما ١ × ٤٨ = ٤٨

« « : ٤ ، ١٢ « « ٤ × ١٢ = ٤٨

« « : ٣ ، ١٦ « « ٣ × ١٦ = ٤٨

وكذلك لو كتبت قواسم ٢١٠ بحسب ترتيبها كما يلي :

نشاهدان	١	٢	٣	٦	٥	١٠	١٥	٣٠
	٢١٠	١٠٥	٧٠	٣٥	٤٢	٢١	١٤	٧

حاصل ضرب العددين المتناظرين ١ ، ٢١٠ هو ١ × ٢١٠ = ٢١٠

« « « « ٣ ، ٧٠ « ٣ × ٧٠ = ٢١٠

« « « « ١٥ ، ١٤ « ١٥ × ١٤ = ٢١٠

ملاحظة — اذا كان عدد القواسم وتراً فالقاسم الذي يقع في الوسط يكون متناظراً مع نفسه .

مثلاً — عدد قواسم ٣٦ هو ٩

فاذا كتبت بحسب ترتيبها :

١	٢	٣	٤	٦	٩	١٢	١٨	٣٦
٣٦	١٨	١٢	٩	٦	٤	٣	٢	١

يشاهد ان القاسم (٦) يناظر نفسه و ٦ × ٦ = ٣٦

تطبيقات

خاصة القواسم المتناظرة تفيد كثيراً في حل المسائل الحسابية التي هي من الانواع الآتية :

١ً — المسائل المفروض فيها جداء عددين وحاصل جمعهما

٢ً = « « « « « وفضلهما

٣ً — « « « « « وحاصل قسمتهما

مثال (١) — ماالعددان اللذان جدائهما ٤٨ وحاصل جمعهما ١٦ ؟

الحل — نوجد قواسم ٤٨ ونفتش على اثنين متناظرين منها يكون حاصل جمعهما ١٦ فنرى العددين ١٢ ، ٤ وهما العددان المطلوبان .

مثال (٢) — ماالعددان اللذان جدائهما ٢١٠ واحـــدهما يزيد عن الثاني ١١ ؟

كذلك نوجد قواسم ٢١٠ ونفتش على اثنين متناظرين منها يكون فضلهما ١١ فنرى العددين ٢١ ، ١٠ وهما العددان المطلوبان

مثال (٣) — ماالعددان اللذان جدائهما ٣٦ وحاصل قسمتهما ٤ ؟

نوجد قواسم ٣٦ ونفتش على اثنين متناظرين منها يكون حاصل قسمتهما ٤ فنرى العددين ١٢ ، ٣ وهما العددان المطلوبان .

تمارين

١ ماهي عدد قواسم الاعداد الآتية :

٢٤ ، ١٢٦ ، ٩٦ ، ٧٥ ، ٩٠

٢ — المطلوب ايجاد قواسم الاعداد الآتية :

٦ ، ٢٨ ، ٤٩٦ ، ٢٢٠ ، ٢٨٤

٤٠٠ ، ١١٨٤ ، ١٢١٠ ، ٤٩٠٠ ، ١٨٩٠٠

٣ — ما العددان اللذان حاصل ضربهما ١٦٨ وحاصل جمعهما ٣٤ ؟

٤ — « « « « « ٥٨٨ « طرحهما ٢٨ ؟

٥ — « « « « « ١٤٤ « قسمتهما ٤ ؟

﴿ البحث الرابع ﴾

القاسم المشترك الاعظم والمضاعف المشترك الاصغر لعدة اعداد

١ — القاسم المشترك الاعظم

٦٣ — **تعريف** — يقال للعدد انه قاسم مشترك لعدة اعداد فيما اذا قسم كلا من تلك الاعداد .

مثال — قواسم الاعداد : ٣٦ ، ٦٠ ، ٨٤ على الترتيب هي :

٣٦	١	٢	٣	٤	٦	٩	١٢	١٨	٣٦	
٦٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	١٠	١٢	١٥	٢٠	٣٠	٦٠
٨٤	١	٢	٣	٤	٦	٧	١٢	١٤	٢١	٢٨	٤٢	٨٤

فيلاحظ في الجدول السابق ان القواسم المشتركة بين الاعداد : ٣٦ ، ٦٠ ، ٨٤ هي :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢

تعريف — يقال لأكبر قاسم مشترك بين عدة اعداد (**قاسم مشترك اعظم**)

مثال — الاعداد : ٣٦ ، ٦٠ ، ٤٨ قاسمها المشترك الأعظم هو (١٢)

ملاحظة — قواسم العدد ١٢ هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢

وعليه فالقواسم المشتركة بين الاعداد ٣٦ ، ٦٠ ، ٨٤ هي بنفس الوقت قواسم القاسم المشترك الاعظم لها .

٦٤ — **نظرية** — القواسم المشتركة لعدة اعداد هي بنفس الوقت قواسم القاسم المشترك الاعظم لتلك الاعداد .

نتيجة — لمعرفة القواسم المشتركة لعدة اعداد يجب :

١ً — حساب القاسم المشترك الاعظم لتلك الاعداد.

٢ً — يفتش على قواسم القاسم المشترك الاعظم

ايجاد القاسم المشترك الاعظم

٦٥ — **قاعدة** — لايجاد القاسم المشترك الاعظم لعدة اعداد يعمل مايلي:

اولاً — تفرق الاعداد المفروضة الي مضاربها الاولية

ثانياً — تضرب المضاريب الاولية المشتركة ذات اصغر قوة فحاصل الضرب هو القاسم المشترك الاعظم

مثال — ليكن المطلوب ايجاد القاسم المشترك الاعظم للاعداد :

٣٦٠ ، ١٤٤ ، ٣٧٨

العمل

٢	٣٦٠
٢	١٨٠
٢	٩٠
٣	٤٥
٣	١٥
٥	٥
	١

٢	١٤٤
٢	٧٢
٢	٣٦
٢	١٨
٣	٩
٣	٣
	١

٢	٣٧٨
٣	١٨٩
٣	٦٣
٣	٢١
٧	٧
	١

اي ان : $٣٦٠ = ٢^{٢} \times ٣^{٢} \times ٥$ ؛ $١٤٤ = ٢^{٤} \times ٣^{٢}$ ؛ $٣٧٨ = ٢ \times ٣^{٣} \times ٧$

والقاسم المشترك الاعظم للاعداد : ٣٦٠، ١٤٤، ٣٧٨، هو: $٢ \times ٣^{٣} = ١٨$

ملاحظة — القواسم المشتركة للاعداد : ٣٦٠، ١٤٤، ٣٧٨ هي نفس قواسم ١٨

وهي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨

٦٦ — **تعريف** — يقال للعددين انهما متوافقان اذا وجد بينهما قاسم مشترك مثل العددين : ٤ ، ٦ والعددين ١٥ ، ٩ ويقال للعددين انهما اوليان معاً (متباينان) فيما اذا لم يكن بينهما قاسم مشترك غير الواحد .

مثل العددين : ٥ ، ٩ والعددين : ٣ ، ٨

٦٧ — **خاصة** — إذا قسم عددان على قاسمهما المشترك الأعظم فالحاصلان يكونان عددين متباينين

مثلاً — ليكن العددان ٣٦٠ ، ٣٧٨

$٣٦٠ = ٢^{٢} \times ٣^{٢} \times ٥$ ؛ $٣٧٨ = ٢ \times ٣^{٣} \times ٧$

فالقاسم المشترك الاعظم للعددين ٣٦٠ ، ٣٧٨ هو ، $٢ \times ٣^{٢} = ١٨$

ويشاهد ان : $٣٦٠ \div ١٨ = ٢٠$ ، $٣٧٨ \div ١٨ = ٢١$

فيتضح من تدقيق حاصلي القسمة ٢١،٢٠ انه ليس بينهما قاسم مشترك سوى (١) وعليه فهما اوليان معاً (متباينان)

٢ – المضاعف المشترك الاصغر

٦٨– **تعريف** – يقال للعدد انه مضاعف مشترك لعدة اعداد فيما اذا كان مضاعفاً لكل منها على حدة

مثال – مضاعفات الاعداد : ١٤ ، ١٠ ، ٣٥ على الترتيب هي:

١٤	١٤، ٢٨، ٤٢، ٥٦، ٧٠، ٨٤، ٩٨، ١١٢، ١٢٦، ١٤٠، ١٥٤...
١٠	١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٨٠، ٩٠، ١٠٠، ١١٠، ١٢٠، ١٣٠، ١٤٠
٣٥	٣٥، ٧٠، ١٠٥، ١٤٠، ١٧٥، ٢١٠ .....

فالاعداد : ٧٠ ، ١٤٠ في المثال السابق هي مضاعفات مشتركة للاعداد ١٤ ، ١٠ ، ٣٥

تعريف – يقال لاصغر مضاعف مشترك بين عدة اعداد : مضاعف مشترك اصغر.

فمثلاً – المضاعف المشترك الاصغر للاعداد ١٤ ، ١٠ ، ٣٥ في المثال السابق هو ٧٠

ملاحظة – مضاعفات العدد ٧٠ هي : ٧٠ ، ١٤٠ ، ٢١٠ ... وهذه المضاعفات هي بنفس الوقت مضاعفات ١٤ ، ١٠ ، ٣٥

٦٩– **نظرية** – كل مضاعف مشترك لعدة اعداد هو بنفس الوقت مضاعف لمضاعفها الاصغر

نتيجة – لايجاد المضاعفات المشتركة لعدة اعداد يجب :

١ً — حساب مضاعفها المشترك الاصغر .

٢ً — يضرب المضاعف المشترك الاصغر بالاعداد : ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

ايجاد المضاعف المشترك الاصغر

٧٠ — **قاعدة** — لايجاد المضاعف المشترك الاصغر لعدة اعداد يعمل مايلي :

اولاً — يفرق كل من الاعـــداد المفروضة الى مضاربها الاولية

ثانياً — تضرب المضاريب الاولية المشتركة ذات اكبر قوة مع المضاريب غير المشتركة فحاصل الضرب هو المضاعف المشترك الاصغر .

مثال — المطلوب حساب المضاعف المشترك الاصغر للاعداد :

١٢ ، ٢٨ ، ٤٢ ، ٣٥

٢	١٢	٢	٢٨	٢	٤٢	٥	٣٥
٢	٦	٢	١٤	٣	٢١	٧	٧
٣	٣	٧	٧	٧	٧		١
	١		١		١		

اي ان : ١٢ = ٢٢ × ٣ ؛ ٢٨ = ٢٢ × ٧ ؛ ٤٢ = ٢ × ٣ × ٧ ؛

٣٥ = ٥ × ٧

فالمضاعف المشترك الاصغر للاعداد : ١٢ ، ٢٨ ، ٤٢ ، ٣٥

هو : ٢٢ × ٣ × ٥ × ٧ = ٤٢٠

ملاحظة — المضاعفات المشتركة للاعداد : ١٢ ، ٢٨ ، ٤٢ ، ٣٥ هي:

٤٢٠ × ١ ، ٤٢٠ × ٢ ، ٤٢٠ × ٣ ، ....

او ٤٢٠ ، ٨٤٠ ، ١٢٦٠ ، ....

٧١ — **خاصة** — اذ قسم مضاعف مشترك اصغر لعدة اعداد على كل منها فالحواصل تكون اعداداً متباينة .

مثلاً — الاعداد ١٢ ، ١٥ ، ٢٠ مضاعفها المشترك الاصغر هو : ٦٠

فيشاهد ان : ٦٠ ÷ ١٢ = ٥
٦٠ ÷ ١٥ = ٤
٦٠ ÷ ٢٠ = ٣
} اعداد متباينة

٧٢ — **نظرية** — لأجل ان يقبل عدد القسمة على عدة اعداد يلزم ويكفي ان يكون قابلاً القسمة على مضاعفها المشترك الاصغر .

مثلاً — كل عدد يقبل القسمة على ٩ ، ٥ لا بد ان يقبل القسمة على ٤٥

اذ في الحقيقة كل عدد يقبل القسمة على ٩ يكون مضاعف ٩

، » » » ٥ » » » ٥

ولأجل ان يقبل على كل من العددين ٩ ، ٥ يجب ان يكون :
مضاء ٩ ومضاء ٥ بآن واحد وعليه فهو مضاء ٤٥

٧٣ — **خاصة** — اذا ضرب عددان بثالث او قسما على ثالث فكل من قاسمهما المشترك الاعظم ومضاعفهما المشترك الاصغر يضرب او يقسم على ذلك العدد

مثال — ليكن العددان هما ١٢ ، ٢٨

١٢ = ٢² × ٣ } قاسمهما المشترك الاعظم هو : ٢² = ٤
٢٨ = ٢² × ٧ } مضاعفهما المشترك الاصغر هو : ٢² × ٣ × ٧ = ٨٤

١ً — لنضرب كلاً من العددين ١٢ ، ٢٨ في ٢ فرضاً فالحاصلان يكونان : ٢٤ ، ٥٦

و ٢٤ = ٢³ × ٣ } قاسمهما المشترك الاعظم هو : ٢³ = ٨
٥٦ = ٢³ × ٧ } مضاعفهما المشترك الاصغر هو : ٢³ × ٣ × ٧ = ١٦٨

ويشاهد ان ٨ = ٤ × ٢ ؛ ١٦٨ = ٨٤ × ٢

٢ً — لنقسم كلاً من العددين ١٢ ، ٢٨ على ٢ فالناتجان يكون ٦ ، ١٤

و ٦ = ٢ × ٣ } قاسمهما المشترك الاعظم هو : ٢

١٤ = ٢ × ٧ } مضاعفهما المشترك الاصغر هو: ٢ × ٣ × ٧ = ٤٢

ويلاحظ ان ٢ = ٤ ÷ ٢ ، ٤٢ = ٨٤ ÷ ٢

٧٤ — **خاصة** — اذا ضرب المضاعف المشترك الاصغر لعددين بقاسمهما المشترك الاعظم فحاصل الضرب يساوي جداء العددين

مثال — ليكن — العددان هما : ١٢ ، ٢٨

١٢ = ٢٢ × ٣ } مضاعفهما المشترك الاصغر : ٢٢ × ٣ × ٧ = ٨٤

٢٨ = ٢٢ × ٧ } قاسمهما « الاعظم : ٢٢ = ٤

فيلاحظ ان : ٨٤ × ٤ = ١٢ × ٢٨ = ٣٣٦

تمارين

١ — المطلوب حساب القاسم المشترك الاعظم للاعداد الآتية :

٣٠٩ ، ٦٣٩	١٨٠ ، ٢٥٢ ، ٢٦٤
٤٦٨ ، ٥٤٠	٩٠ ، ١٢٦ ، ١٣٢
٦٢٤ ، ١٣٤٤	٢٧٠ ، ٣٧٨ ، ٣٩٦
٢٤٨٠، ٥٦٠٤	١٥٨٤، ١٩٨٠، ٢١١٢
٩٣٦ ، ٥٥٤٤	١٩١٢٥ ، ٣٥٦٤٠٠ ، ٣٩٣١٢٠

٢ — حساب المضاعف المشترك الاصغر للاعداد الآتية :

١٠٨ ، ١٤٤	٤٥ ، ١٢٠ ، ٢٧٠
٢٤ ، ٣٠	١٣٥، ٢٢٥ ، ٤٠٥

٣٦ ، ٨٤	١٣٢ ، ٢٥٢ ، ٤٢٠
٥٤ ، ٧٢	١٨٠ ، ٢١٦ ، ٣٢٥
٣٦٠، ١٠٠٨	٦٦ ، ١٢٦ ، ٢١٠

٣ — ما هما العددان اللذان قاسمهما المشترك الاعظم ١٢٠ ومضاعفهما المشترك الاصغر ٢٠

٤ — ما العددان اللذان جداؤهما ١٠٥٨٤ ومضاعفهما المشترك الاصغر ٥٠٤

٥ — » » » ٤٣٢ وقاسمهما المشترك الاعظم ١٢

﴿تداريب — مسائل محلولة على الابحاث السابقة﴾

(١) — ما هو اصغر عدد اذا قسم على ٥ ، ٧ ، ١١ يكون الباقي منه في كل حالة (٣) ؟

الحل — لنفرض ان العدد المطلوب هو (ب)

فيكون : ب = مضا ٥ + ٣

، : ب = مضا ٧ + ٣

، : ب = مضا ١١ + ٣

او : ب = مضا ٥ × ٧ × ١١ + ٣

ومنه : ب = مضا ٣٨٥ + ٣

وبما ان اصغر مضاعف لعدد ما هو نفسه اذن :

ب = ٣٨٥ + ٣ = ٣٨٨

وهذا العدد المطلوب

التحقيق :

٣٨٨ ÷ ٥ = ٧٧ والباقي ٣

٣٨٨ ÷ ٧ = ٥٥ » ٣

٣٨٨ ÷ ١١ = ٣٥ » ٣

٢ — محسن يريد توزيع مبلغ من المال يقرب من ٥٠٠ قرشاً على محتاجين فاذا وزعه على (٥) اشخاص او (٧) اشخاص يزيد منه ٤ قروش واذا وزعه على (٩) اشخاص لا يزيد منه شيء فالمطلوب حساب مقدار المبلغ وما يصيب كل من المحتاجين

في كل حالة ؟

الحل — لنفرض ان العدد هو (ب)

فيكون : ب = مضا ٥ + ٤

، : ب = مضا ٧ + ٤

، : ب = مضا ٩

او : ب = مضا ٣٥ + ٤ = مضا ٩

فلايجاد العدد المطلوب نفتش على احدمضاعفات العدد (٣٥) المحصور بين ٤٠٠ ـ ٥٠٠ بصورة اذا اضيف اليه ٤ يكون الناتج مساوياً مضا ٩

فنقول : مضا ٣٥ × ١٠ + ٤ = ٣٥٠ + ٤ = ٣٥٤ لايقبل القسمة على ٩

مضا ٣٥ × ١١ + ٤ = ٣٨٥ + ٤ = ٣٨٩ لايقبل القسمة على ٩

مضا ٣٥ × ١٢ + ٤ = ٤٢٠ + ٤ = ٤٢٤ لايقبل القسمة على ٩

مضا ٣٥ × ١٣ + ٤ = ٤٥٥ + ٤ = ٤٥٩ يقبل القسمة على ٩

اذن العدد ٤٥٩ هو المطلوب .

٣ — معلم اذا وزع (٥٧) قلماً على تلاميذه بصورة متساوية يزيد عنده (٥) اقلام واذا وزع (٧٥) قلماً على نفس التلاميذ بصورة متساوية يزيد عندة (٣) اقلام فالمطلوب حساب عدد التلاميذ .

الحل — لنفرض عدد التلاميذ ب

فيكون :

اولاً ـ ٥٣ = مضا ب + ٥ ومنه : ٥٣ ـ ٥ = مضا ب او ٤٨ = مضا ب

ثانياً ـ ٧٥ = مضا ب + ٣ ومنه : ٧٥ ـ ٣ = مضا ب او ٧٢ = مضا ب

فيلاحظ هنا ان العددين ٤٨ ، ٧٢ هما مضاعفان مشتركان للعدد (ب) فنفتش على قاسمهما المشترك الاعظم .

ان : ٤٨ = $٢^{٤} \times ٣$ } وقاسمهما المشترك الاعظم هو :
، : ٧٢ = $٢^{٣} \times ٣^{٢}$ } $٢^{٣} \times ٣ = ٢٤$ وهذا العدد المطلوب

التحقيق : ٥٣ ÷ ٢٤ = ٢ والباقي ٥ ، ٧٥ ÷ ٢٤ = ٣ والباقي ٣

ملاحظة — بما ان العدد ٢٤ هو مضاعف الاعداد :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢

اذن عدد التلاميذ يحتمل ان يكون ٢٤ او احد قواسمها .

ولما كان اكبر باقي في المسألة هو (٥) عليه يمكن ان يكون عدد التلاميذ اما ٢٤ او ١٢ او ٦

ويتضح مما سبق ان المسألة المدرجة اعلاه لها ٣ حالات ويعتبر عادةً العدد المعادل للقاسم المشترك الاعظم هو الحل اذا لم يطلب حالات مختلفة للمسألة

٤ ـ المطلوب ايجاد عدد ما يكون له ١٢ قاسماً

الحل — بما ان مقدار قواسم عدد ما يساوي حاصل ضرب اسس مضاريبها الاولية بعد اضافة الواحد لكل منها .

وان : ١٢ = ٢ × ٢ × ٣ = ٢ × ٦ = ٤ × ٣

اذن العدد المطلوب ايجاده اما ان يكون ناتجاً من ٣ مضاريب اولية او من مضروبين اوليين فقط .

فاذا كانت مضاريبه ثلاثة فاسسها يقتضي ان تكون : ١ ، ١ ، ٢

واذا كانت مضاريبه اثنين فأسسها يقتضي ان تكون: ٣ ، ٢ ، او ١ ، ٥

مثلاً — ح = ب × ح × ء^{٢} وبالفرض ح = ٢^{٢} × ٣ × ٥ = ٦٠

ح$_{١}$ = ب^{٣} × ح^{٢} ، ح$_{٢}$ = ٥^{٣} × ٣^{٢} = ١١٢٥

ح$_{٣}$ = ب × ح^{٥} ، ح$_{٤}$ = ٢^{٥} × ٣ = ٩٦

ملاحظة — يمكننا اعتباراي اعداد اولية هي المضاريب

٥ — المطلوب اثبات ان حاصل ضرب ٣ اعداد شفعية متعاقبة يقبل القسمة على ٤٨

الحل — لتكن الاعداد المفروضة هي ، ٢ ب ، ٢ ب + ٢ ، ٢ ب + ٤

فالمطلوب ان : ح = ٢ ب (٢ ب + ٢) (٢ ب × ٤) = مضا ٤٨

البرهان من المساواة : ح = ٢ ب (٢ ب + ٢) (٢ ب + ٤)

يمكننا ان نكتب : ح = ٢ ب × ٢ (ب + ١) × ٢ (ب + ٢)

(اخرج العدد المشترك في كل مضروب لخارج القوس)

او : ح = ٢ ب × ٢ × ٢ (ب + ١) (ب + ٢)

(بدلت مواقع المضاريب)

او : ح = ٨ ب (ب + ١) (ب + ٢)

فنلاحظ ان المساواة الاخيرة تقبل القسمة على ٨ لان احد مضايبها ٨

وكذلك « « « ٦ لان ٣ مضاريب منها متوالية

وبما ان ح تقبل على ٨ ، ٦ بآن واحد اذن تقبل على ٤٨

وعليه فالعدد ح = مضا ٤٨ وهذا المطلوب

﴿ مسائل على الابحاث السابقة ﴾

١ — ماأصغر عدد اذا قسم بصورة متعاقبة على ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ يكون الباقي في كل قسمة (١)

٢ — محسن يريد توزيع مبلغ من المال يقرب من ٧٠٠ فرنكا بين عدد من الفقراء فاذا وزعه على ٨ او ١٠ او ١٢ او ١٥ شخصاً بالتساوي يزيد عنده (٥) فرنكات واذا وزعه على ١١ شخصاً لايزيد عنده شيء فالمطلوب حساب مقدار المبلغ وما يصيب كل من الفقراء في كل حالة (٦٠٥)

٣ — ماهي اصغر سعة لبرميل مملوء بالخل ، اذا وزع في زجاجات سعة الواحدة ٤ ليترات او ٥ ليترات لايبقى فيه شيء واذا فرغ في زجاجات سعة الواحدة ٧ ليترات يبقى فيه ٣ ليترات ، وماعدد الزجاجات الممكن املاءها من كل نوع ؟

٤ — عدد من التلاميذ اذاجلس كل ٧ او ٨ منهم على رحلة في احدالفصول لايزيد محل شاغر على تلك الرحلات ولكن اذا جلس كل ٩ منهم على رحلة يزيد ٤ محلات شاغرة فالمطلوب حساب عدد الرحلات مع عدد التلاميذ . (٣٩٢ تلميذ)

٥ — ماأقل عدد من الجنود يمكن اصطفافهم خمسة خمسة او سبعة سبعة ولكن اذا اصطفوا تسعة تسعة يزيد منهم ٦ جنود . (١٠٥)

٦ — اوض بشكل مثلث اضلاعه ، ١٥٦ ، ٢٠٤ ، ٢٧٦ متراً يراد غرس اشجار على محيطها بابعاد متساوية وبصورة ان يقع في كل رأس منها شجرة فما هي اعظم مسافة ممكن جعلها بين كل شجرتين ؟ (١٢م)

٧ — بستاني اشترى ارضاً مستطيلة الشكل طول بعديها ١٥٠ ، ٢١٠ امتار يريد ان يغرس اشجاراً في اطرافها على ابعاد متساوية يقع في كل رأس منها شجرة وان لاتقل المسافة بين الاشجار المتجاورة عن ٥ امتار فالمطلوب حساب الابعاد

الممكنة بين كل شجرتين، وعدد الاشجار اللازمة في كل حالة .

٨ ـــ ماالعددان اللذان حاصل جمعهما ١٦٨ وقاسمهما المشترك الاعظم ٢٤ ؟

٩ ـــ « « « حاصل ضربهما ٢٥٣٥ « « « ١٣ ؟

١٠ ـــ ماعدد الارقام اللازمة لترقيم كتاب عدد صفحاته (٣٧٥) ؟

١١ ـــ ماعدد صفحات كتاب استعمل لأجل ترقيمها (٦٢٤) رقماً ؟

١٢ ـــ ماعدد الارقام اللازمة لكتابة الاعداد من ١ حتى ٣٢٥ ؟

١٣ ـــ « « « « « « ٣٥٧ الى ٨٣٧

١٤ ـــ ماهي الاعداد ذوات الثلاث مراتب وتقبل القسمة على ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

١٥ ـــ من رقمين مفروضين يمكن تشكيل عددين فقط فالمطلوب بيان:

١ً ـــ ان الفرق بين العددين المذكورين هو احدمضاعفات ٩

٢ً ـــ اذا كان الفرق بين العددين هو ٥٤ فما هما الرقمان ؟ (في الحالات المختلفة) (٧ ، ١ ؛ ٨ ، ٢ ؛ ٩ ، ٣)

١٦ ـــ اذا قسم اي عددين مفروضين على فضلهما فالباقيان من قسمتهما يتساويان

١٧ ـــ المطلوب اثبات ان في كل قسمة ممكنة يجب ان يكون المقسوم اعظم من ضعف الباقي .

١٨ ـــ المطلوب ايجاد الاعداد المحصورة بين (٥٠٠ ـ ٢٠٠٠) والتي اذا قسمت على ١٨ ، ٣٠ ، ٤٢ يكون الباقي منها في كل حالة ١٣ (١٩٠٣ ، ١٢٧٣ ، ٦٤٣)

١٩ ـــ قسم العددان ٣١٥ ، ٢٥٧ كل منهما على عدد فكان حاصل قسمتهما متساويين والباقيان هما على الترتيب ٧ ، ٥ فما المقسوم عليهما ؟ [٩ ، ١١]

٢٠ — قسم العددان ١٣٨٢٧ ، ١٦٨٢٤٣ على عدد واحد فكان الباقيان من قسمتهما على الترتيب هما ٤٧ ، ٢٣ فالمطلوب حساب المقسوم عليه في الحالات المختلفة . (٢٦ ، ١٣٠ ، ٦٥ ، ٥٢)

٢١ — مدرسة رغبت ان توزع ١٠٠٠ صفحة ورق على تلاميذ احد فصولها فاذا اعطت كلاً منهم مقداراً متساوياً يزيد عندها ١١ صفحة واذا وزعت ٩٠٠ صفحة على نفس التلاميذ بصورة متساوية ايضاً يزيد عندها ٣ صفحات فالمطلوب حساب عدد التلاميذ ؟ (٢٣ تلميذ)

٢٢ — شخصان كل منهما راكب على دراجة يسيران في نزهة حول دائرة ؛ الاول يقطع محيط الدائرة في ١٢ ثانية والثاني يقطعه في ٨ ثوان ففي اي وقت يتلاقى الشخصان لاول مرة فيما إذا خرجا من نقطة واحدة وسارا على اتجاه واحد . ومتى يتلاقيان إذا سارا على اتجاه معاكس .

٢٣ — ثلاثة تلاميذ اشتركوا في الركض حول دائرة فاذا خرج الثلاثة بآن واحد من نقطة على الدائرة وكان الاول يكمل دوره في ٢٤ ثانية والثاني في ٢٨ ثانية والثالث في ٣٦ ثانية فبعد كم من الزمن يمكن ان يتلاقوا معاً في النقطة التي خرجوا منها ؟ (٢٥٢ ثانية)

٢٤ — مجموع ارقام عدة اعداد يزيد دائماً عن ارقام حاصل جمع تلك الاعداد بقدر احد مضاعفات ٩

٢٥ — حاصل طرح اي عدد من عدد آخر بنفس رتبه وارقامه يساوي احد مضاعفات ٩

٢٦ — رقم عشرات حاصل طرح اي عدد ذي ثلاثة ارقام من معكوس وضعه يساوي ٩ وكذلك مجموع رقميه الآخرين يساوي ٩

٢٧ — تلميذ كتب رفيقه العدد ١٩٩٩٨ باعتبار انه حاصل جمع وكلفه ان يكتب فوقه عددين ذوي اربعة ارقام ثم كتب هو عددين آخرين بصورة سريعة فكان مجموع الاعداد الاربعة مساوياً ١٩٩٩٨ فالمطلوب معرفة كيف فكر التلميذ بكتابة العددين .

٢٨ — معلم كتب تلميذه العدد ٢٩٩٩٩٧ باعتبار انه حاصل جمع وكلفه ان يكتب فوقه ثلاثة اعداد ذات خمسة مراتب ثم اراد ان يكتب هو ثلاثة اعداد ايضاً بصورة لو جمعت الاعداد الستة يكون مساوياً ٢٩٩٩٩٧ فكيف يكتب المعلم اعداده؟

٢٩ — إذا جمع اي عدد ذي مراتب زوجية مع معكوس وضعه (تبدل مواقع ارقامه) فحاصل الجمع يكون مساوياً مضاعف ١١

٣٠ — حاصل طرح اي عدد ذي مراتب فردية من معكوس وضعه يساوي احد مضاعفات ١١

الفصل الثاني

﴿ بحث الكسور ﴾

معلومات اولية

٧٥ — حاصل جمع مقدارين من نوع واحد

مثال (١) — حاصل جمع قطعتين مستقيمتين هو قطعة مستقيمة تحدث من وضع احدى القطعتين بجانب الثانية بحيث يتحد مبدأ احداهما مع نهاية الاخرى

وهكذا فحاصل جمع عدة قطع مستقيمة يحدث من وضع تلك القطع بجانب بعضها على التتابع .

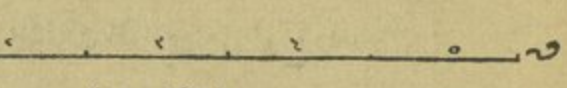
مثال (٢) — حاصل جمع زاويتين هو زاوية ثالثة تحدث من وضع احدى

الزاويتين بجانب الثانية على ان يتحدا في ضلع مشترك وتقع كل منهما على طرف منه

وكذلك حاصل جمع عدة زوايا ينتج من وضع تلك الزوايا بجانب بعضها بصورة متتابعة .

٧٦ — مضاعفات وقواسم مقدار ما

مثال (١)—ليكن ب حـ ، ء ق قطعتين مستقيمتين وان طول ء ق يساوي خمس مرات من طول ب حـ (شكل ٢)



(شكل ٢)

فيقال ان ء ق مضاعف ب حـ (ء ق تساوي ٥ امثال ب حـ)

ويكتب : ء ق = ٥ × ب حـ

وبالعكس فطول القطعة ب حـ يساوي حاصل قسمة ء ق على ٥

[ب حـ يساوي خمس ء ق]

ويكتب ب حـ = $\frac{١}{٥}$ ء ق او ب حـ = ء ق ÷ ٥

وبصورة عامة ، ضرب مقدار ما في ٥ [فرضاً] هو عبارة عن جمع ذلك المقدار خمس مرات متوالية ويقال لحاصل الجمع انه (**مضاعف**) ذلك المقدار

وكذلك يمكن تقسيم مقدار ما الى عدة اجزاء متساوية يقال لكل منها (**قاسم**) ذلك المقدار .

ملاحظة — يمكن اعتبار كل مقدار انه مضاعف نفسه وقاسمها في آن واحد

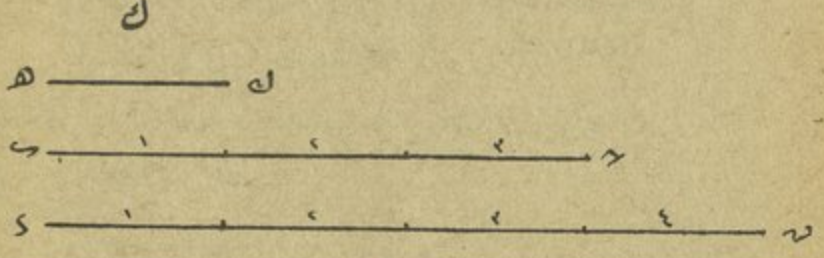
٧٧ — وحدة القياس للمقدار

في المثال السابق [مادة - ٧٢] كانت القطعة ك ق تساوي خمس مرات ب حـ اي ان طول القطعة ك ق علم بالنسبة الى طول ب حـ وعليه فالقطعة ب حـ اصبحت وحدة قياس للطول ك ق .

ويمكن اعتبار اي طول كان وحدة لقياس الاطوال ولكن بصورة عامة يعتبر المتر مع اجزائه واضعافه وحدات قياسية لتقدير الاطوال .

٧٨ — القياس المشترك لمقدارين من نوع واحد

مثال (١) لتكن ب حـ ، ك ق ، هـ ك ثلاث قطع مستقيمة (شكل ٣)



(شكل ٣)

وان طول ب حـ يساوي ٣ مرات هـ ك

« « ك ق « ٤ « «

فيكتب ب حـ = ٣ × هـ ك

ك ق = ٤ × هـ ك

وبالمقابل فان القطعة هـ ك تعادل ثلث ب حـ او ربع ك ق

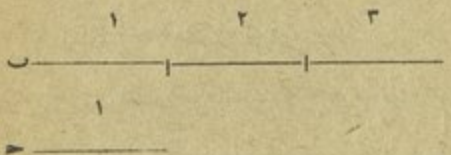
$$\begin{cases} \text{ويكتب : } هـ ك = \frac{١}{٣} ب حـ \\ هـ ك = \frac{١}{٤} ء ق \end{cases} \quad \text{ومنه } \frac{١}{٣} ب حـ = \frac{١}{٤} ء ق$$

ويتضح من المثال السابق ان القطعتين ب حـ ، ء ق هما ذاتا قياس مشترك لان كلاً منهما مضاعف هـ ك ويقال للقطعة هـ ك انها القياس المشترك (القاسم المشترك) للقطعتين ب حـ ، ء ق لانها قسمت الاثنتين الى اقسام متساوية .

ومن الواضح ان القياس المشترك (القاسم المشترك) لا يكون الا بين مقدارين من جنس واحد ، طولين ، سعتين ، زاويتين ، ثقلتين ، ...

٧٩ — التحري على القاسم المشترك الاعظم لمقدارين مفروضين

مثال — ليكن ب ، حـ هما طولا قطعتين مستقيمتين وان ب > حـ (شكل ٤)



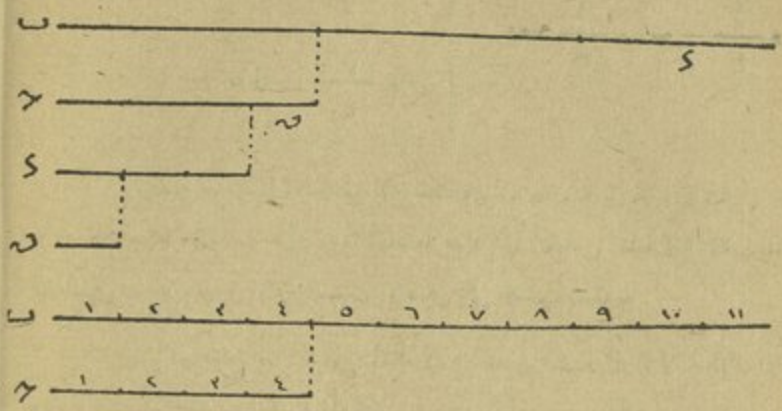
(شكل ٤)

١ً — لنفرض ان طول القطعة ب يحتوي على طول القطعة حـ ثلاث مرات صحيحة فتكون عندئذ حـ قاسماً مشتركاً للقطعتين ب ، حـ

حيث ان حـ هي قاسم نفسها وقاسم ب في آن واحد ولذلك فهي القاسم المشترك الاعظم المطلوب .

٢ً — لنفرض ان طول ب لا يحتوي على طول حـ مرات صحيحة بل ان (ب)

تحتوي على حـ مرتين ويزيد منها قسم طوله (ء) (شكل ٥)



(شكل ٥)

فحينئذ لاتكون القطعة حـ قاسماً مشتركاً للقطعتين ب ، حـ لان حـ لاتقسم ب تقسيماً متساوياً ، ولذلك نفتش على القاسم المشترك بين ء ، حـ اذ ان القاسم الذي يقسم ء ، حـ يقسم في الوقت نفسه ب

فنقارن القطعتين ء ، حـ ببعضهما لنرى هل ان ء تقسم حـ فنشاهد في الشكل ان طول حـ يحتوى على طول ء مرة واحدة ويزيد منه الطول ق اذاً ء لايقسم حـ تقسيماً تاماً وعليه فالقطعة ء ليست قاسماً مشتركاً بين القطعتين ء ، حـ .

وبنفس الطريقة نفتش على القاسم المشترك للقطعتين ق، ء فنقارن ق مع ء ونرى ان ق تقسم ء تقسيماً تاماً حيث ان ء تحتوي على ق ثلاث مرات صحيحة وعليه:

فالطول ق هو القاسم المشترك الاعظم للقطعتين ق ، ء

وكذلك هو قاسم مشترك اعظم للقطعتين ء ، حـ

وايضاً هو قاسم مشترك اعظم للقطعتين حـ ، ب

واذاً فالقاسم المشترك الاعظم للقطعتين ب ، حـ هو الطول ق ولدى مقارنة ب ، حـ بالقاسم المشترك الاعظم ق نرى ان ق تقسم ب الى ١١ جزءاً صحيحاً كما تقسم حـ الى ٤ اجزاء صحيحة من نفس اجزاء ب .

ملاحظة — القواسم المشتركة للقطعتين ب ، حـ هي نفس القواسم المشتركة للقطعتين ى ، ق واكبر هذه القواسم المشتركة هو القاسم ق

مثال (٢) — ليكن م ، ن هما مجموعتان من الكرات وان م > ن

١ً — لنفرض ان مقداري المجموعتين هما ٦٤ ، ١٦ كرة

في هذه الحالة يرى ان مقدار المجموعة الاولى يحتوي على المجموعة الثانية ٤ مرات صحيحة

اذاً المقدار ١٦ هو القاسم المشترك الاعظم للمجموعتين ٦٤ ، ١٦

حيث ان العدد ١٦ يقسم نفسه ويقسم ٦٤ في آن واحد .

٢ً — لنفرض ان مقداري المجموعتين هما ١٩٨ ، ٧٢ كرة

في هذه الحالة يرى ان العدد ٧٢ لايقسم ١٩٨ تقسيماً تاماً بل يزيد منه ٥٤

اذ : ١٩٨ = ٧٢ × ٢ + ٥٤ (الاولى تحتوي على مرتين من الثانية وزيادة ٥٤ كرة)

وكذلك : ٧٢ = ٥٤ × ١ + ١٨ (الثانية تحتوي على الباقي مرة واحدة وزيادة ١٨ كرة)

، ٥٤ = ١٨ × ٣ (الباقي الاول يحتوي على الباقي الثاني ٣ مرات بدون زيادة)

وعليه فالعدد ١٨ هو اكبر مقدار تحتوي عليه المجموعتان ١٩٨ ، ٧٢ في آن

واحد إذاً العدد ١٨ هو القاسم المشترك الاعظم للعددين ١٩٨ ، ٧٢

وهذه الطريقة هي الحالة الثانية لاستحصال القاسم المشترك الاعظم لعددين مفروضين وتطبق عادة عندما تكون الاعداد كبيرة. وتسمى (**طريقة التقسيم المتوالي**)

والقاعدة العملية فيها هي : ان يقسم العدد الكبير على الصغير ثم الصغير على الباقي ثم الباقي الاول على الباقي الثاني وهكذا يتابع تقسيم البواقي الى ان ينتهي التقسيم فالمقسوم عليه الاخير يكون هو القاسم المشترك الاعظم .

طريقة العمل /

مثال — (١)

		٢	١	٣
١٩٨	١٨	٧٢	٥٤	١٨
٥٤		١٨	٠	

القاسم المشترك الاعظم للعددين :
١٩٨ ، ٧٢ هو ١٨

مثال — (٢)

	٢	١	١	٧٢
٣٣٠٣٣	٩١	١٨٢	٢٧٣	٤٥٥
١١٨٣		٠	٩١	١٨٢
٢٧٣				

القاسم المشترك الاعظم للعددين :
٣٣٠٣٣ ، ٤٥٥ هو ٩١

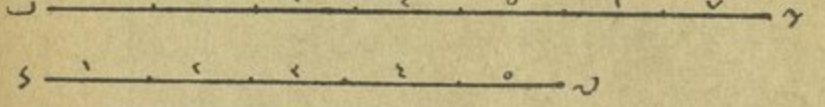
تمارين

المطلوب ايجاد القاسم المشترك الاعظم لكل من الاعداد الآتية بطريقة التقسيم المتوالي .

٤٤٢٩ ، ٨١٣٨	(١٠٣) ١٧٤٨ ، ١١٥٩٢	١٤٧٠٦ ، ٩٧٠٢
١٦٥٧١ ، ٤١٠٨٧	(٢٢٧) ٦٠٩١ ، ١٠٢٠٤	٨٣٨٤٩ ، ١٩٠٨٧
٢١١٦٧ ، ٣٥٠٤٧	(٣٤٧) ١٠٩١٥ ، ٢٥١٧٥	١٢٤١٢٠ ، ٣١١٦٦

٨٠ — كسر مقدار ما

مثال (١) — لتكن ب حـ ، ء ق قطعتين مستقيمتين وان ب حـ منقسمة الى ٧ اجزاء متساوية والقطعة ء ق تحتوي على ٥ من تلك الاجزاء (شكل ٦)



[شكل ٦]

فيقال ان ء ق تعادل خمسة اسباع ب حـ ويكتب :

$$\text{ء ق} = \frac{٥}{٧}\ \text{ب حـ وبالعكس ب حـ} = \frac{٧}{٥}\ \text{ء ق}$$

فالمقدار $\frac{٥}{٧}$ هو كسر (بسطه ٥ ومقامه ٧)

« $\frac{٧}{٥}$ « « معاكس للكسر الاول

ملاحظة — الافادة : ء ق $= \frac{٥}{٧}$ ب حـ تدل على ان المقدارين ب حـ ، ء ق بينهما قاسم مشترك اعظم يحتوي عليه ب حـ (المقام) ٧ مرات كما يحتوي عليه ء ق (البسط) ٥ مرات

مثال (٢) — لنفرض ان القطعة ء ق تعادل ربع ب حـ فنكتب

$$\text{ء ق} = \frac{١}{٤}\ \text{ب حـ ومنه يحدث : ب حـ} = ٤ \times \text{ء ق}$$

اذا العدد الصحيح ٤ والكسر $\frac{١}{٤}$ هما عددان متعاكسان .

﴿ مراجعة على القواعد المتعلقة بحسابات الكسور ﴾

الكسور الاعتبارية

كما ان العدد ٧ فرضاً يمكنه ان يشعر ٧ تلاميذ ، ٧ اقلام ، ٧ شجرات

كذلك الكسر $\frac{٣}{٥}$ (بالفرض) يمكنه ان يدل على $\frac{٣}{٥}$ سعة قنينة، $\frac{٣}{٥}$ مساحة ارض،

$\frac{٣}{٥}$ طول قطعة قماش

٨١ — الكسور المتساوية

تعريف — يقال للكسرين انهما متساويان فيما اذا كانت قيمة كل منهما تساوي مقداراً واحداً .

مثلاً — مقدار الساعة بالدقائق هو ٦٠ وربع الساعة هو ١٥ دقيقة

إذاً الكسران $\frac{١٥}{٦٠}$ ، $\frac{١}{٤}$ من الساعة يشعران زمناً واحداً وعليه فهما متساويان

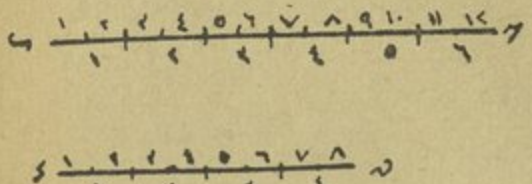
اي : $\frac{١٥}{٦٠} = \frac{١}{٤}$

في خواص الكسور

٨٢ — **خاصة (١)** — اذا ضرب حدا كسر بعددٍ واحد او قسما على عددٍ واحد فقيمة الكسر لا تتغير (هذه هي الخاصة الاساسية للكسور) .

مثلاً — ليكن لدينا القطعتان ب حـ ، ء ق ولنفرض ان ب حـ منقسمة

الى ٦ اجزاء متساوية والقطعة ك ق تحتوي على ٤ من هذه الاجزاء [شكل ٧]



[شكل ٧]

فيكون القياس المشترك بين القطعتين ب حـ ، ك ق هو $\frac{١}{٦}$

وعندئذ يمكننا ان نكتب : ك ق $= \frac{٤}{٦}$ ب حـ

فاذا قسم كل جزء من القطعتين المفروضتين الى قسمين متساويين يصبح القياس المشترك بينهما هو $\frac{١}{١٢}$ ويصير ك ق $= \frac{٨}{١٢}$ ب حـ

وبما ان طولي القطعتين ب حـ ، ك ق ثابتان اذاً قياس ك ق بالنسبة الى ب حـ لم يتبدل بعملية التقسيم وعليه يكتب ك ق $= \frac{٤}{٦}$ ب حـ $= \frac{٨}{١٢}$ ب حـ

ومنه ينتج ان : $\frac{٨}{١٢} = \frac{٤}{٦}$

ويلاحظ ان كلاً من حدي الكسر الثاني هو ضعف نظيره في الكسر الاول

اي : $\frac{٨}{١٢} = \frac{٢ \times ٤}{٢ \times ٦}$

كما ان كلاً من حدي الكسر الاول هو نصف نظيره في الكسر الثاني اي:

$$\frac{٨ \div ٢}{١٢ \div ٢} = \frac{٤}{٦}$$

وبصورة عامة: $\frac{ب}{حـ} = \frac{ب \times ء}{حـ \times ء} = \frac{ب \div ء}{حـ \div ء}$

ملاحظة — الخاصة السابقة هي اساس لعمليات الاختصار وتوحيد المقامات

الاختصار

٨٣ — اختصار الكسر هو عبارة عن شطب المضاريب المشتركة بين حديه للحصول على ابسط وضع له . ويقال للكسر انه (**مختصر**) فيما اذا كان حداه عددين متباينين .

قاعدة — لأجل اختصار كسر يقسم حداه على قاسمهما المشترك الاعظم

مثال — المطلوب اختصار الكسر : $\frac{٢٥٥}{٧٢٠}$

القاسم المشترك الاعظم للعددين ٢٥٥ ، ٧٢٠ هو : $٣ \times ٥ = ١٥$

$٢٥٥ = ٣ \times ٥ \times ١٧$

$٧٢٠ = ٢^{٤} \times ٣^{٢} \times ٥$

اذاً $\frac{٢٥٥}{٧١٠} \overset{(١٥)}{=} \frac{١٧}{٤٨}$

توحيد المقامات

٨٤ — توحيد مقامات الكسور هو عبارة عن ايجاد كسور تساوي الاولى بالقيمة وتتساوي فيما بينها بالمقام وتستند عملية توحيد المقامات على الخاصة الاساسية للكسور وهي :

اذا ضرب حدا الكسر بعدد ما فقيمة الكسر لاتتبدل .

فمثلاً — الكسر الاخصر : $\frac{٣}{٧}$ يمكن ايجاد عدة كسور تساويه بالقيمة

وذلك بضرب حديه بالاعداد المتوالية : ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، . . .

$$\text{اي } \frac{٣}{٧} = \frac{٦}{١٤} = \frac{٩}{٢١} = \frac{١٢}{٢٨} = \cdots\cdots$$

(٢) (٣) (٤)

ويلاحظ في الكسور الحادثة : $\frac{٦}{١٤}$ ، $\frac{٩}{٢١}$ ، $\frac{١٢}{٢٨}$ ان حدي كل منهما هما من

مضاعفات الكسر $\frac{٣}{٧}$ على التقابل وعليه فالمقام المشترك للكسور التي تحصل بعد

عملية التوحيد يجب ان يكون مضاعفاً لكل من مقامات الكسور المفروضة وللاختصار

يرجح ان يكون المقام المشترك للكسور هو المضاعف المشترك البسيط لمقاماتها

٨٥ — **قاعدة** — لتوحيد مقامات الكسر بعمل مايلي :

١ً — تختصر الكسور اذا امكن الاختصار

٢ً — يفتش على المضاعف المشترك الاصغر لمقاماتها

٣ً — يقسم المضاعف المشترك الاصغر على كل من مقامات الكسور ويضرب

حدا كل منها بحاصل القسمة .

مثال (١) — المطلوب توحيد مقامات الكسور : $\frac{٢١}{٢٨}$ ، $\frac{٧٠}{١٢٠}$ ، $\frac{٥٥}{١٠٠}$ ، $\frac{٨}{١٥}$

بعد الاختصار تصبح الكسور : $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{١٧}{١٢}$ ، $\frac{١١}{٢٠}$ ، $\frac{٨}{١٥}$

نفتش على المضاعف المشترك الاصغر لمقامات الكسور المختصرة :

$٤ = ٢^{٢}$ ؛ $١٢ = ٢^{٢} \times ٣$ ؛ $٢٠ = ٢^{٢} \times ٥$ ؛ $١٥ = ٣ \times ٥$

المضاعف المشترك الاصغر هو : $٢^{٢} \times ٣ \times ٥ = ٦٠$ اذاً هذا هو المقام المشترك الاصغر للكسور المفروضة فنقسم المضاعف المشترك الاصغر على مقام كل من الكسور ونضرب حديه بحاصل القسمة :

$٦٠ \div ٤ = ١٥$
$٦٠ \div ١٢ = ٥$
$٦٠ \div ٢٠ = ٣$
$٦٠ \div ١٥ = ٤$

$\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٧}{١٢}$ ، $\frac{١١}{٢٠}$ ، $\frac{٨}{١٥}$

(١٥) (٥) (٣) (٤)

او $\frac{٤٥}{٦٠}$ ، $\frac{٣٥}{٦٠}$ ، $\frac{٣٣}{٦٠}$ ، $\frac{٣٢}{٦٠}$

ملاحظة — لايجاد حاصل قسمة المقام المشترك على مقام كل من الكسور يستحسن شطب الاعداد الاولية المشتركة بين المقامين المذكورين

مثلاً : $٦٠ \div ١٢ = \underline{٢^{٢} \times ٣} \times ٥ \div \underline{٢^{٢} \times ٣} = ٥$

مثال (٢) — المطلوب توحيد مقامي الكسرين : $\frac{٣٢٩}{٤٢٠}$ ، $\frac{٦٥}{٤٢٩}$

$$\frac{٣٢٩}{٤٢٠}^{(٧)} = \frac{٤٧}{٦٠} \; ؛ \; \frac{٦٥}{٤٢٩}^{(١٢)} = \frac{٥}{٣٣}$$

نفتش على المضاعف المشترك الاصغر لمقامي الكسرين : $\frac{٤٧}{٦٠}$ ، $\frac{٥}{٣٣}$

$٦٠ = ٢^{٢} \times ٣ \times ٥$
$٣٣ = ٣ \times ١١$

المضاعف المشترك الاصغر :

$٢^{٢} \times ٣ \times ٥ \times ١١ = ٦٦٠$

وعليه: $\frac{٤٧}{٦٠}$ ، $\frac{٥}{٣٣}$ او $\frac{٥١٧}{٦٦٠}$ ، $\frac{١٠٠}{٦٦٠}$

(١١) (٢٠)

٨٦ — **خاصة (٢)** — اذا اضيف الى حدي كسر ما عدد واحد فقيمة الكسر تكبر اذا كان بسيطاً وتصغر اذا كان مركباً .

مثلاً — لنأخذ اولاً : الكسر البسيط $\frac{٣}{٥}$ ونضيف الى حديه العدد (٢)

يصير : $\frac{٣+٢}{٥+٢} = \frac{٥}{٧}$ فالمطلوب ان : $\frac{٥}{٧} < \frac{٣}{٥}$

(٥) (٧)

في الحقيقة اذا وجدنا مقامي الكسرين المذكورين يحدث : $\frac{٢٥}{٣٥}$ ، $\frac{٢١}{٣٥}$

ويتضح من ذلك ان الكسر الاول اكبر من الثاني اذاً $\frac{٥}{٧} > \frac{٣}{٥}$ وهو المطلوب

لنأخذ ثانياً الكسر المركب $\frac{٧}{٥}$ ونضيف الى حديه (٣) يصير :

$\frac{٣+٧}{٣+٥} = \frac{١٠}{٨}$ فالمطلوب ان $\frac{١٠}{٨} < \frac{٧}{٥}$ وبتوحيد مقاميهما ينتج : $\frac{٥٠}{٤٠}$ ، $\frac{٥٦}{٤٠}$

اي ان الاول اصغر من الثاني وعليه $\frac{١٠}{٨} < \frac{٥}{٧}$ وهو المطلوب .

٨٧ — **خاصة (٣)** اذا طرح من حدي الكسر عدد ما فقيمة الكسر تصغر اذا كان بسيطاً وتكبر اذا كان مركباً .

مثلاً — لنأخذ اولاً الكسر البسيط $\frac{٣}{٥}$ ونطرح من حديه (٢) يصير :

$$\frac{٣-٢}{٥-٢} = \frac{١}{٣} \text{ وهو اصغر من } \frac{٣}{٥} \text{ اي } \frac{١}{٣} < \frac{٣}{٥}$$

ولنأخذ ثانياً الكسر المركب $\frac{٨}{٥}$ ونطرح من حديه (٣) يصير :

$$\frac{٨-٣}{٥-٣} = \frac{٥}{٢} \text{ وهذا بالبداهة اكبر من } \frac{٨}{٥} \text{ اي } \frac{٥}{٢} > \frac{٨}{٥} \text{ وهو المطلوب}$$

الجمع والطرح

٨٨ — **قاعدة** — لجمع او طرح الكسور الاعتيادية ، توحد اولاً باصغر مقام مشترك ثم تجمع البسوط او تطرح من بعضها ويجعل الناتج بسطاً لكسر مقامه نفس المقام المشترك .

مثال (١) — المطلوب جمع الكسور : $\frac{٢١}{٢٨}$ ، $\frac{٧٠}{١٢٠}$ ، $\frac{٥٥}{١٠٠}$ ، $\frac{٨}{١٥}$

العمل — تختصر : $\frac{٢١}{٢٨}^{(٧)} + \frac{٧٠}{١٢٠}^{(١٠)} + \frac{٥٥}{١٠٠}^{(٥)} + \frac{٨}{١٥} =$

توحد في (٦٠) : $\frac{٣}{٤} + \frac{١١}{٢٠} + \frac{٧}{١٢} + \frac{٨}{١٥}$

(١٥) (٥) (٣) (٤)

تصير: $\frac{٤٥}{٦٠} + \frac{٣٣}{٦٠} + \frac{٣٥}{٦٠} = \frac{١٤٥}{٦٠}^{(٥)} = \frac{٢٩}{١٢}$

مثال (٢) — المطلوب طرح الكسور : $\frac{٣٢٩}{٤٢٠}$ ، $\frac{٦٥}{٤٢٩}$

تختصر : $\frac{٣٢٩}{٤٢٠}^{(٧)}$ ، $- \frac{٦٥}{٤٢٩}^{(١٣)} =$

نوحد في (٦٦٠) : $\frac{٤٧}{٦٠} - \frac{٥}{٣٣} = \frac{٥١٧}{٦٦٠} - \frac{١٠٠}{٦٦٠} = \frac{٤١٧}{٦٦٠} = \frac{١٣٩}{٢٢٠}$

(١١) (٢٠) (٣)

ملاحظة — اذا وجد اعداد صحيحة مع الكسور يعامل كل من الاعداد الصحيحة والكسور مع بعضها .

مثال (١) — م = $(٥ + \frac{٢}{٣}) + (٧ + \frac{٣}{٤}) + (٩ + \frac{٥}{٦})$

م = $(٥ + ٧ + ٩) + (\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٤} + \frac{٥}{٦})$

(٤) (٣) (٢)

م = $٢١ + (\frac{٨}{١٢} + \frac{٩}{١٢} + \frac{١٠}{١٢})$

م = $٢١ + \frac{٢٧}{١٢} = ٢١ + ٢ + \frac{٣}{١٢} = ٢٣ + \frac{١}{٤}$

مثال (٢) — ل = $(٦ + \frac{٣}{٤}) - (٤ + \frac{٧}{١٨})$

(٩) (٢)

ل = $(٦ + \frac{٢٧}{٣٦}) - (٤ + \frac{١٤}{٣٦})$ =

$(٦ - ٤) + (\frac{٢٧}{٣٦} - \frac{١٤}{٣٦}) = ٢ + \frac{١٣}{٣٦}$

مثال (٣) — ل = (١٤ + $\frac{١}{١٥}$) — (٧ + $\frac{٥}{٦}$)

(٢) (٥)

ل = [١٤ + $\frac{٢}{٣٠}$] — [٧ + $\frac{٢٥}{٣٠}$]

ل = [١٣ + $\frac{٣٢}{٣٠}$] — [٧ + $\frac{٢٥}{٣٠}$] = ٦ + $\frac{٧}{٣٠}$

الضرب

٨٩ — في ضرب الكسور يوجد حالتان :

الحالة الاولى :(**ضرب الكسر بعدد صحيح**) —في هذه الحالة يضرب بسط الكسر بالعدد الصحيح ويجعل الناتج بسطاً لكسر مقامه نفس مقام الكسر

مثال: $\frac{١٣}{٤٥} \times ١٨ = \frac{١٨ \times ١٣}{٤٥} = \frac{١٣ \times ٢}{٥} = \frac{٢٦}{٥} = ٥\frac{١}{٥}$

ملاحظة — اذا كان مقام الكسر قابلا القسمة على العدد الصحيح يترك البسط على حاله ويجعل حاصل القسمة مقاماً له .

مثال : $\frac{٤}{٣٥} \times ٧ = \frac{٤}{٣٥ \div ٧} = \frac{٤}{٥}$

الحالة الثانية — (**ضرب الكسر بكسر**) — في هذه الحالة تضرب البسوط فيما بينها وكذلك تضرب المقامات .

مثال [١] : $\frac{٣}{٤} \times \frac{٥}{٩} = \frac{٥ \times ٣}{٩ \times ٤} = \frac{٥}{٣ \times ٤} = \frac{٥}{١٢}$

مثال [٢] : $\frac{٥}{٦} \times \frac{١٢}{١٥} \times \frac{١٣}{٤} = \frac{١٣ \times ١٢ \times ٥}{٤ \times ١٥ \times ٦} = \frac{١٣}{٦}$

مثال [٣] : $١٥ \times \frac{٧}{٢٠} \times ٣ \times \frac{١٣}{٢١} = \frac{١٣ \times ٣ \times ٧ \times ١٥}{٢١ \times ٢٠} = \frac{١٣ \times ٣}{٤} = \frac{٣٩}{٤}$

ملاحظة — إذا كانت المضاريب اعداد صحيحة مع الكسور تصرف الاعداد الصحيحة للكسور المرافقة لها اولاً ثم يجري الضرب وفقاً للحالة السابقة .

مثال [١] : $٣ \frac{٢}{٥} \times \frac{٥}{٦} = \frac{٥}{٦} \times \frac{١٧}{٥} = \frac{٥ \times ١٧}{٦ \times ٥} = \frac{١٧}{٦}$

مثال [٢] : $٥ \frac{٣}{٤} \times ٣ \frac{١}{٥} = \frac{٢٣}{٤} \times \frac{١٦}{٥} = \frac{٢٣ \times ١٦}{٤ \times ٥} =$

$$١٨ \frac{٢}{٥} = \frac{٩٢}{٥} = \frac{٢٣ \times ٤}{٥}$$

حالة خاصة — إذا ضرب الكسر بنفسه ينتج احدى قواه

مثلاً : $\frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٣} = \frac{٣ \times ٣}{٥ \times ٥} = \frac{٣^{٢}}{٥^{٢}}$

او : $\frac{ب}{حـ} \times \frac{ب}{حـ} \times \frac{ب}{حـ} = \frac{ب \times ب \times ب}{حـ \times حـ \times حـ} = \frac{ب^{٣}}{حـ^{٣}}$

ونستخلص من ذلك انه لرفع كسر الى قوة ما يرفع كل من حديه الى تلك القوة .

التقسيم

٩٠ — في تقسيم الكسور يوجد حالتان :

الحالة الاولى — (**قسمة كسر على عدد صحيح**) — في هـــذه الحالة يضرب مقام الكسر بالعدد الصحيح ويترك البسط على حاله

مثال(١) : $\frac{٢٧}{٣١} \div ١٨ = \frac{٢٧}{١٨ \times ٣١} = \frac{٣}{٢ \times ٣١} = \frac{٣}{٦٢}$

ملاحظة — اذا كان بسط الكسر مضاعفاً للعدد الصحيح يقسم عليه ويترك المقام على حاله .

مثال : $\frac{٥٤}{٧٣} \div ٩ = \frac{٥٤ \div ٩}{٧٣} = \frac{٦}{٧٣}$

الحالة الثانية — (**قسمة كسر على كسر**) — في هذه الحالة يضرب المقسوم بعكس المقسوم عليه .

مثال (١) : $\frac{٧}{٨} \div \frac{٣}{٤} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٧}{٨} = \frac{٤ \times ٧}{٣ \times ٨} = \frac{٧}{٦}$

مثال (٢) : $٩ \div \frac{٦}{١٣} = \frac{٩}{١} \times \frac{١٣}{٦} = \frac{١٣ \times ٩}{٦} = \frac{٣٩}{٢}$

ملاحظة — اذا كان المقسوم والمقسوم عليه او كلاهما اعداد صحيحة مع كسور تصرف الاعـــداد الصحيحة للكسور ثم يجري التقسيم وفقاً للحـالات الســابقـــة .

مثال (١): $\frac{٢}{٥}$ ٢ ÷ ٤ $= \frac{١٢}{٥} = \frac{١٢ \div ٤}{٥} = \frac{٣}{٥}$

مثال(٢): $\frac{١}{٢}$ ٤ ÷ ٣ $\frac{١}{٤} = \frac{١٣}{٤} \div \frac{٩}{٢} = \frac{٤}{١٣} \times \frac{٩}{٢} = \frac{٤ \times ٩}{١٣ \times ٢} = \frac{١٨}{١٣}$

٩١ — **حاصل القسمة** — ليكن ب ، حـ عددين (صحيحين او كسرين)

فحاصل قسمتهما يفاد بالوضع ح $= \frac{ب}{حـ}$ ومنه ب $=$ حـ × ح

امثلة

حاصل قسمة : $\frac{٥}{٦}$ على ٧ هي $\frac{\frac{٥}{٦}}{٧} = ٧ \div \frac{٥}{٦} = \frac{٥}{٧ \times ٦} = \frac{٥}{٤٢}$

حاصل قسمة : ٩ على $\frac{٣}{١١}$ هي $\frac{٩}{\frac{٣}{١١}} = ٩ \div \frac{٣}{١١} = \frac{١١ \times ٩}{٣} = ٣٣$

حاصل قسمة : $\frac{٧}{٨}$ على $\frac{٣}{٥}$ هي $\frac{\frac{٧}{٨}}{\frac{٣}{٥}} = \frac{٧}{٨} \div \frac{٣}{٥} = \frac{٧}{٨} \times \frac{٥}{٣} = \frac{٣٥}{٢٤}$

ومن الامثلة السابقة يتضح ان حاصل قسمة اي مقدارين يمكن كتابتها بصورة كسر دائماً

ملاحظة — إذا فرضنا ان ب ، حـ ، و ، م اعداد صحيحة يمكننا كتابة حاصل القسمة بصورة عامة بالقوانين الآتية :

$$\text{أ} - \frac{\text{ب} + \text{حـ} + \text{ء}}{\text{م}} = \frac{\text{ب}}{\text{م}} + \frac{\text{حـ}}{\text{م}} + \frac{\text{ء}}{\text{م}}$$

حاصل قسمة مجموعة على عدد يساوي مجموع حاصل قسمة كل من حدودها على ذلك العدد .

$$\text{٢} - \frac{\text{ب} - \text{حـ}}{\text{م}} = \frac{\text{ب}}{\text{م}} - \frac{\text{حـ}}{\text{م}}$$

حاصل قسمة فضل على عدد يساوي فضل حاصلي قسمة كل من حديه على ذلك العـــدد .

$$\text{٣} - \frac{\text{ب} \times \text{حـ} \times \text{ء}}{\text{م}} = \text{ب} \times \frac{\text{حـ}}{\text{م}} \times \text{ء}$$

حاصل قسمة جداء اعداد على عدد يساوي جداء حاصل قسمة احد المضاريب على ذلك العدد بالمضاريب الأخر .

تمارين

١ — المطلوب اختصار الكسور الآتية :

$$\frac{٧٥}{١٠٥} ، \frac{١٣٢}{٤٥٩٠} ، \frac{٩٢٤}{٢١٥٦} ، \frac{٥١٣٠}{٩٥٧٦} ، \frac{١٧٨٥}{٢٢٩٥} ، \frac{٧٩٢}{٢٤٢٠}$$

$$\frac{٣٠٨}{٥٨٨} ، \frac{٢٢٨}{٢٨٥} ، \frac{٣٤٤}{٦٤٥} ، \frac{٦٥٥٢}{١٥٩١٢} ، \frac{٧٨١٢}{٩١٩٨} ، \frac{١٠٧٨}{١٣٨٦}$$

٢ — اصلاح الاعمال الآتية :

$\frac{١١}{١٨} + \frac{٣٥}{٢٢٥} + \frac{١٣}{٣٠}$

$\frac{٥٥}{١٨٠} + \frac{١٧}{٥٦} + \frac{٨}{٣٦}$

$\frac{١٧}{٢١} + \frac{٣}{٢٨} + \frac{١١}{١٥}$

$٣\frac{٣}{٤} + ٥\frac{١}{٣} + ٦\frac{٣}{٥}$

$٣\frac{٢}{٥} + \frac{٧}{٨} - ٤$

$٤\frac{٣}{٥} - ١\frac{١}{٤} ، ٧\frac{١}{٤} - ٣\frac{٢}{٣}$

$\frac{١٢}{٣٥} \times \frac{١٤}{٩} ، \frac{٥٦}{٥٥} \times \frac{١٥}{٦٣}$

$\frac{٨}{٩} \times (٢ + \frac{٥}{١١})$

$(٤ + \frac{٥}{٧}) + (١ + \frac{٣}{١١})$

$\frac{١٠٤}{٥٨٥} - \frac{٢٩}{٦٣} + \frac{٦٤}{٢٨٠}$

$\frac{٣٢٩}{٩٢٤} + \frac{٥٣}{٩٦٨} + \frac{١١٠٣}{١٤٥٢}$

$\frac{٧٥}{١٢٦} + \frac{٣١}{١٣٢} - \frac{٩٥}{٣٧٥}$

$(٣٢٥ + \frac{٧}{١٢}) - (١٨٧ + \frac{١٩}{٢٠})$

$(٨ + \frac{١١}{١٥}) \div (٢٩ + \frac{١}{٩})$

$(٣ - \frac{٣}{٤}) \div \frac{٦}{٢٣}$

$٨ \div (\frac{٣}{٤} + \frac{٢}{٥})$

$(\frac{١٧}{١٥} + \frac{٣}{٢٨}) \times (\frac{١١}{١٢} + \frac{٤}{١٣}) \times (٣٢ + \frac{٤}{١٣})$

$(٧ + \frac{٢}{٣}) + (٦ + \frac{١١}{١٥}) + (٣ + \frac{٨}{١٠})$

$\frac{٤٤}{٣٥} \div \frac{٩٩}{٢٠} ، \frac{٧٨}{٧٧} \div \frac{١٩٥}{١٧٦}$

$$\left(\frac{٧٣}{١٣٢}+\frac{٢٥}{٤٨٤}+\frac{٨٥}{٥٤٠}\right)\div\frac{٢٠٥}{٣٩٦}$$

الكسور العشرية والاعداد العشرية

٩٢ — **تعريف** — يقال للكسر انه عشري اذا كان مقامه ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٠٠٠ (من قوى العشرة)

امثلة : $\frac{٧}{١٠}$ ؛ $\frac{٥٣}{١٠٠}$ او $\frac{٥٣}{١٠^{٢}}$ ؛ $\frac{١٤٧٣٥}{١٠٠٠}$ او $\frac{١٤٧٣٥}{١٠^{٣}}$ ؛ $\frac{٣٢٧}{١٠٠٠٠}$ او $\frac{٣٢٧}{١٠^{٤}}$

افادة الكسر العشرى بعدد عشرى

لافادة كسر عشري بعدد عشري ؛ يكتب بسطه فقط ويفرز اعتباراً من آحاده خانات بقدر اصفار مقامه واذا كانت خانات البسط اقل عدداً من اصفار المقام يوضع على يساره اصفار بقدر الزيادة .

امثلة: $\frac{٧}{١٠}=$ ٠٫٧ ؛ $\frac{٥٣}{١٠٠}=$ ٠٫٥٣ ؛ $\frac{١٨٧٢٥}{١٠٠٠}=$ ١٨٫٧٢٥ ؛ $\frac{٢٥٤}{١٠٠٠٠}=$ ٠٠٠٢٥٤

افادة العدد العشرى بكسر عشرى

لافادة عدد عشري بكسر عشري تؤخذ ارقام العدد وتجعل بسطاً لكسر مقامه واحد متبوع باصفار بقدر خانات الجزء العشري .

امثلة : ١٤٫٥ = $\frac{١٥٤}{١٠}$ ؛ ٠٫٧٥ = $\frac{٧٥}{١٠٠}$ ؛ ٠٠٠٢٨ = $\frac{٢٨}{١٠٠٠}$

٩٣ — خواص الاعداد العشرية

١ً — اذا وضع على يمين العدد العشري عدةً اصفار او حذف عدة اصفار فقيمة العدد العشري لاتتغير .

امثلة : ٠,٧ = ٠,٧٠ ؛ ٢,٥ = ٢,٥٠٠

حيث : ٠,٧ = $\frac{٧}{١٠}$ و ٠,٧٠ = $\frac{٧٠}{١٠٠}$ وهنا يشاهدان ان: $\frac{٧}{١٠} = \frac{٧٠}{١٠٠}$

» ٢,٥ = $\frac{٢٥}{١٠}$ و ٢,٥٠٠ = $\frac{٢٥٠٠}{١٠٠٠}$ » » » $\frac{٢٥}{١٠} = \frac{٢٥٠٠}{١٠٠٠}$

٢ً — اذا نقل الفارز في العدد العشري الى اليمين خانة او خانتين او ثلاثة فالعدد يكبر ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ مرة واذا نقل الفارز الى الجهة اليسرى فالعدد يصغر .

امثلة : ٧,٢٥ ، ٧٢,٥ هنا ٧٢,٥ اكبر من ٧,٢٥ عشر مرات كما يتضح من افاديتهما بالكسرين :

$\frac{٧٢٥}{١٠٠}$ ، $\frac{٧٢٥}{١٠}$

١٢,٥ ، ١٢٥,٠ هنا ١٢٥,٠ اصغر من ١,٢٥ مائة مرة كما يشاهد في الكسرين:

$\frac{١٢٥}{١٠}$ ، $\frac{١٢٥}{١٠٠٠}$

وينتج من الخاصة السابقة :

اولاً — لضرب عدد عشري في ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... تنقل الفارز

الي اليمين خانات بقدر الاصفار واذا كانت خانات العدد اقل من الاصفار يوضع على يمينه اصفار بقدر الزيادة .

مثلاً — : ٣٧,٥ × ١٠ = ٣,٧٥ ؛ ٧,٥ × ١٠٠ = ٧٥٠

ثانياً — لقسمة عدد عشري على ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، . . . تنقل الفارز الى اليسار خانات بقدر الاصفار واذا كانت خانات العدد اقل من الاصفار يوضع على يساره اصفار بقدر الزيادة .

٧٨,٥ ÷ ١٠ = ٧,٨٥ ؛ ٢,٥ ÷ ١٠٠ = ٠,٠٢٥

٩٤ — اعمال الاعداد العشرية

الجمع والطرح يجريان وفقاً للاعداد الصحيحة بعد توحيد خانات الجزء العشري في كل منها .

امثلة : ٢,٥ + ٣,٧٥ = ٢,٥٠ + ٣,٧٥ = ٦,٢٥

٠,٣٧٥ + ١٢,٥ + ٧,٢٥ = ٠,٣٧٥ + ١٢,٥٠٠ + ٧,٢٥٠ = ٢٠,١٢٥

٣,٥ - ١,٢٥ = ٣,٥٠ - ١,٢٥ = ٢,٢٥

٤,١٢٥ - ٠,٨٥ = ٤,١٢٥ - ٠,٨٥٠ = ٣,٢٧٥

الضرب — الاعداد العشريه تضرب بعضها كالاعداد الصحيحة ويفرز اعتباراً من آحاد حاصل الضرب خانات بقدر الخانات العشرية الموجودة في الاعداد

امثلة: ٢,٥ × ٠,٥ = ١,٢٥ حيث $\frac{٢٥}{١٠} \times \frac{٥}{١٠} = \frac{١٢٥}{١٠٠} = ١,٢٥$

١,٢٥ × ٠,٢٥ = ٣,١٢٥ « $\frac{١٢٥}{١٠} \times \frac{٢٥}{١٠٠} = \frac{٣١٢٥}{١٠٠٠} = ٤,١٢٥$

$$٠٫٢٥ \times ٠٫٠٢ = ٠٫٠٠٥٠ \quad \text{حيث} \frac{٢٥}{١٠٠} \times \frac{٢}{١٠٠} = \frac{٥٠}{١٠٠٠٠} = ٠٫٠٠٥٠$$

القسمة — لقسمة عددين عشريين على بعضهما تطبق قاعد التقسيم في الاعداد الصحيحة بعد ان توحد الخانات العشرية في المقسوم والمقسوم عليه ويحذف الفارز من كليهما .

امثلة: $٢٫٥ \div ٠٫٥ = ٢٥ \div ٥ = ٥$ ؛ $\frac{٢٥}{١٠} \div \frac{٥}{١٠} = \frac{٢٥}{١٠} \times \frac{١٠}{٥} = ٥$

$$٢٫٨ \div ٠٫٠٧ = ٢٨٠ \div ٧ = ٤٠ \quad ٠٫٠٧ = ٢٫٨٠$$

$$٠٫٣٥ \div ٠٫٥ = ٣٥ \div ٥٠ = ٠٫٧ \quad ٠٫٥٠ = ٠٫٣٥$$

٩٥ — تحويل الكسور الاعتيادية الى عشرية

مثال — نلاحظ في الكسر العشري $\frac{٣٨}{١٠٠}$ ان مقامه لايحتوي الاعلى الاعداد الاولية ٢ ، ٥

اي ان : $١٠٠ = ٢^{٢} \times ٥^{٢}$

وبالاختصار يصبح الكسر $\frac{٣٨}{١٠٠} = \frac{١٩}{٥٠} = \frac{١٩}{٢ \times ٥^{٢}}$

اذاً عندما يكون الكسر الاعتيادي مساوياً كسراً عشرياً يكون مقامه محتوياً على الاعداد الاولية ٢ ، ٥ فقط

مثال — ليكن الكسر : $\frac{٩}{٤٠} = \frac{٩}{٢^{٣} \times ٥}$ ولنضرب حديه في $٥^{٢}$ يحدث

$$\frac{٢٢٥}{١٠٠٠} = \frac{٢٢٥}{١٠^{٣}} = \frac{٢٥ \times ٩}{٥^{٣} \times ٢^{٣}} = \frac{٢^{٥} \times ٩}{٢^{٥} \times ٥ \times ٢^{٣}} = \frac{٩}{٤٠}$$

ومن الامثلة السابقة ينتج القاعدة الآتية :

٩٦ — **قاعدة** لاجل ان يكون الكسر الاعتيادي (الاخصر) مساوياً كسراً عشرياً يلزم ويكفي ان يكون مقامه مؤلفاً من الاعداد الاولية ٢ ، ٥ فقط

اما اذا احتوى مقام الكسر على اعداد غير ٢ ، ٥ فهو لايساوي كسراً عشرياً البتة . وعندئذ لايمكن تقسيم بسطه على مقامه بصورة نهائية ويقال لناتج القسمة في هذه الحالة (**كسراً دورياً**) حيث يتكرر بعض ارقامه على الدوام

٩٧ — حاصل القسمة التقريبي

اذا قسم عدد على آخر ولم تنته القسمة فالمقدار المأخوذ من ناتج القسمة يسمى (**الحاصل التقريبي**)

مثال : $٣٩٫٢ \div ١٢ = \frac{٣٩٢}{١٠} \div ١٢ = \frac{٣٩٢}{١٢ \times ١٠}$

ان الكسر $\frac{٣٩٢}{١٢٠}$ لايعطي ناتجاً حقيقياً ولكن يعطي المقدار : ٣٫٢٦٦ مع استمرار الرقم ٦ فاذا اخذنا من الناتج المقدار ٣٫٢٦ او ٣٫٢٧ نكون اخذنا الحاصل التقريبي لقيمة الكسر $\frac{٣٩٢}{١٢٠}$ اذ ان القيمة الحقيقية للكسر المذكور محصورة بين ٣٫٢٦ ، ٣٫٢٧

اي : $٣٫٢٦ < \frac{٣٩٢}{١٢٠} < ٣٫٢٧$

ويقال للعدد ٢٫٢٦ انه مقرب الى اقل من ٠٫٠١ كما يقال للعدد ٣٫٢٧ انه مقرب الى اكثر من ٠٫٠١ اي ان مقدار الخطأ في الحالتين هو اقل من ٠٫٠١

ملاحظة — ان خانات الناتج كلما ازدادت ينقص مقدار الخطأ في التقريب

مثلاً : $\frac{٢}{٣} = ٠٫٦$ هنا مقدار الخطأ اقل من ٠٫١

$\frac{٢}{٣} = ٠٫٦٦$ « « « « « ٠٫٠١

$\frac{٢}{٣} = ٠٫٦٦٦$ « « « « « ٠٫٠٠١

تمارين

المطلوب ١ً — تفريق الكسور التي تساوي كسوراً عشرية وتحويلها

٢ً — استحصال القيمة التقريبية للكسور غير العشرية بخطأ اقل من ٠٫٠٠١

$\frac{٧}{٢٠}$ ، $\frac{٢٨}{٥٠}$ ، $\frac{١٩}{٨٠}$ ، $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٩}{٧٥}$ ، $\frac{١٢}{١٢٥}$ ، $\frac{١٧}{٦٤}$

$\frac{٣١}{٥١٢}$ ، $\frac{١١}{٢٠٠}$ ، $\frac{٢٤}{٦٠}$ ، $\frac{٣٦}{٧٢}$ ، $\frac{١٤}{٦٠}$ ، $\frac{٢٧}{٨١}$ ، $\frac{١١}{١٥}$

$\frac{٤٢}{٤٥}$ ، $\frac{٣٩}{٢٢٥}$ ، $\frac{٥١٢}{٤٠}$ ، $\frac{١٢}{٣ \times ٥^{٢} \times ٢}$ ، $\frac{٤٩}{٧ \times ٥ \times ٢}$ ، $\frac{٢٩}{١١٠}$

٩٨ — تطبيقات وعمليات حرفية في الكسور

(عمليات الحروف في الكسور كعمليات الارقام)

١ً — توحيد مقامات الكسور مع جمعها وطرحها

$$\frac{ب}{ح}+٥=\frac{ب}{ح}+\frac{٥ح}{ح}=\frac{ب+٥ح}{ح}$$

$$\frac{ح}{٧}+ب=\frac{ح}{٧}+\frac{٧ب}{٧}=\frac{ح+٧ب}{٧}$$

$$\frac{ب}{٢}+\frac{٣}{ح}=\frac{ب ح}{٢ ح}+\frac{٦}{٢ ح}=\frac{٦+ب ح}{٢ ح}$$

$$\frac{ب}{ح}+\frac{ق}{ك}=\frac{ب ق}{ح ق}+\frac{ك ح}{ح ق}=\frac{ب ق+ك ح}{ح ق}$$

$$ب-\frac{٣}{ح}=\frac{ب ح}{ح}-\frac{٣}{ح}=\frac{ب ح-٣}{ح}$$

$$\frac{٣}{ب}-\frac{٥}{ح}=\frac{٣ ح}{ب ح}-\frac{٥ ب}{ب ح}=\frac{٣ ح-٥ ب}{ب ح}$$

$$\frac{ب}{ح}-\frac{٧}{٨}=\frac{٨ ب}{٨ ح}-\frac{٧ ح}{٨ ح}=\frac{٨ ب-٧ ح}{٨ ح}$$

$$\frac{ب}{ح}-\frac{ق}{ك}=\frac{ب ق}{ح ق}-\frac{ك ح}{ح ق}=\frac{ب ق-ك ح}{ح ق}$$

٢ً — ضرب الكسور وتقسيمها

$$٥\times\frac{ب}{٧}=\frac{٥ ب}{٧}$$

$$٤\times\frac{٥}{ح}=\frac{٤\times٥}{ح}=\frac{٢٠}{ح}$$

$$\frac{ك}{ب}\times ح=\frac{ك ح}{ب}$$

$$\frac{ب}{ح}\times\frac{ك}{ق}=\frac{ب\times ك}{ح\times ق}=\frac{ب ك}{ح ق}$$

$$٨\div\frac{ب}{٢}=٨\times\frac{٢}{ب}=\frac{١٦}{ب}$$

$$٦\div\frac{٤}{ح}=٦\times\frac{ح}{٤}=\frac{٦ ح}{٤}=\frac{٣ ح}{٢}$$

$$\frac{ك}{ب}\div ح=\frac{ك}{ب ح}$$

$$\frac{ب}{ح}\div\frac{ك}{ق}=\frac{ب}{ح}\times\frac{ق}{ك}=\frac{ب ق}{ح ك}$$

تمارين عامة على اعمال الكسور الحرفية

المطلوب اصلاح الكسور الآتية :

$$\frac{ن}{ح}+\frac{ح}{ن}\ ،\ \frac{ن}{ح}+\frac{٨}{ن}-٧\ ،\ \frac{ن}{ح}-\frac{ن}{ح}\ ،\ \frac{٥}{ك٢}$$

$$\frac{ن}{ح}+\frac{ح}{ن}+\frac{ك}{ح٢}\ ،\ \frac{٦}{ن}+\frac{ح}{٤}+\frac{ن}{٨}\ ،\ \frac{ح}{ك}+\frac{٥}{ن}+\frac{٨}{ن٣}$$

$$\frac{ن}{ح}-\frac{ك}{ق}+\frac{٥}{ح}\ ،\ \frac{٧}{ح}+٨-\frac{ن٤}{٥}\ ،\ \frac{ن}{ح}-(\frac{ك}{ق}+\frac{ك}{٤})$$

$$\frac{ن}{٥}+\frac{ح}{١٠}-\frac{ك}{١٥}\ ،\ \frac{٥}{ن}+\frac{١٠}{ح}-\frac{ك}{٢}\ ،\ \frac{ن}{٨}+\frac{ح}{٨}-\frac{ك}{ن٤}$$

$$\frac{٥}{ن}\times\frac{ح}{١٠}\ ،\ \frac{٦}{ن}\times\frac{ح}{٩}\times\frac{ن}{ح}\ ،\ \frac{ن}{٥}\times\frac{١٥}{ح}\times\frac{ح}{ن}\ ،\ \frac{ح}{ن}\times\frac{ن}{ح}$$

$$\frac{ن٤}{٩}\times\frac{ح٣}{٨}\ ،\ \frac{ن٢}{ح}\times\frac{ح٣}{٤}\ ،\ \frac{ن٨}{٩}+\frac{٣}{ن٤}\times ح$$

$$\frac{ن}{ح}\div\frac{ن٢}{ح}\ ،\ \frac{ن٤}{ح}\div\frac{ن٢}{ق}\ ،\ \frac{ن٣}{ح٤}\div\frac{ح٩}{٨}\ ،\ \frac{ن}{ح}\times\frac{٥}{ن٢}\div\frac{ن٣}{ح٢}$$

مسائل على مراجعة الكسور والمقاييس

١ — ارض مستطيلة الشكل طول احد بعديها ٤٧٥ متراً ، قسمت بواسطة عمود على هذا البعد الى قسمين وبيعت بسعر الهكتار ١٥٠٠ فرنكاً فبلغ ثمنها ٧١٢٥ فرنكاً وكان ثمن احداهما يزيد عن ثمن الثانية ٢٦٢٥ فرنكاً فالمطلوب حساب مساحة وبعدي كل من القسمين .

٢ — رجل اشترى ارض مستطيلة الشكل بمبلغ ٨٦٤,٢٠ ليرة ، طولها

يزيد ١٢ متراً عن عرضها فعمل لها سياجاً من التيل سعر المتر ١,٧٥ فرنكاً بلغت كلفته ٣٢٩ فرنكاً فما طول بعدي الارض وثمن شراء الآر منها ؟

٣ — شبه منحرف ارتفاعه ١٢٤ متراً ومساحته ٩٨,٥٨ آر ، احد قطريه يقسمه الى مثلثين مساحة احدهما تساوي ضعف مساحة الثاني فما طول قاعدتيه ؟

٤ — قطعة من المشمع مستطيلة الشكل محيطها ١٦ متراً وطولها يزيد مترين عن عرضها ، قسم من طرفيها قطعتين بواسطة مستقيمين يوازيان طولها فصار محيط القسم الباقي ١٤,٨٠ متراً فالمطلوب مساحة كل من القسمين المفرزين .

٥ — فلاح عنده ارض فرزها الى ثلاثة اقسام الاول يعادل $\frac{5}{9}$ الارض والثاني يعادل $\frac{3}{4}$ الباقي والثالث كان بشكل مثلث قاعدته ٨,٥ ديكامتر وارتفاعه ٦٣ متراً فاذا كان صاحب الارض اشتراها بسعر الآر ١٥٠ فرنكاً فكم يربح اذا باعها بسعر المتر المربع ١,٩٥ فرنكاً ؟

٦ — هرم صغير من المرمر ارتفاعه ١٢ سم : قاعدته مربع ضلعه ٦٥ مم موضوع على قاعدة مكعبة الشكل طول ضلعها ٩٠ مم ثقلهما معاً يساوي ٢,٦٥ كيلوغراماً فالمطلوب حساب حجم هذا الجسم وكثافة المرمر .

٧ — تاجر اشترى ٤٥ متراً من قماش بمبلغ ١٩١٢,٥ فرنكاً ، باع $\frac{1}{3}$ القماش بسعر المتر $47\frac{1}{4}$ فرنكاً وباع $\frac{2}{5}$ القماش بسعر المتر $49\frac{1}{2}$ فرنكاً والباقي باعه بسعر المتر ٤٨ فرنكاً فكم ربح في الجميع وكم كان ربحه في المائة. $(263\frac{1}{4} \div 13\frac{13}{17})$

٨ — مقامر خسر في اول مرة من لعبه $\frac{٢}{٥}$ دراهمه ثم ربح في ثاني لعبه $\frac{١}{٣}$ ما كان عنده بعد اول لعبة فصار جملة ما عنده (٤٢) فرنكاً فكم كانت دراهمه حين دخوله اللعب (٥٢,٥)

٩ — خرجت عربة ودراجة من نقطة واحدة والى جهة واحدة في نزهة حول دائرة في الساعة ١٠ والدقيقة ٥٣ صباحاً، العربة تقطع المسافة جميعها بمدة ساعة واحدة و٥ دقائق والدراجة تسير بسرعة تعادل اربعة اضعاف سرعة العربة ففي اي ساعة يتلاقيان في المرة الاولى وكذلك في الثانية (١١ و $\frac{٢}{٣}$ ١٤ ، ١١ و $\frac{١}{٣}$ ٣٦)

١٠ — ما اصغر عدد صحيح يقسم على الكسرين $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ فيكون حاصلا القسمة عددين صحيحين ؟ (٣٥)

١١ — ما اصغر كسر يقسم على الكسرين $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ فيكون حاصلا القسمة عددين صحيحين ؟

١٢ — ما اصغر كسر يقسم عليه الكسران : $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ فيكون حاصلا القسمة عددين صحيحين ؟

١٣ — طارد كلب ثعلباً يبعد عنه ١٢٠ خطوة وكان الثعلب يخطو (٥) خطوات في

الوقت الذي يخطو فيه الكلب ٣ خطوات فالمطلوب معرفة كم خطوة يخطوها الكلب حتى يلحق الثعلب مع العلم ان خطوة الكلب تعادل خطوتين من خطوات الثعلب . (٣٦٠)

١٤ — نظر كلب ثعلباً عن بعد فطارده حتى لحقه وخطى اثناء ذلك ٢٩٠ خطوة بينما الثعلب خطى ٣٨٥ خطوة فالمطلوب حساب البعد الذي كان بينهما مع العلم ان خطوتين من الكلب تعادل ٣ خطوات من الثعلب .

١٥ — حوض عليه ثلاث حنفيات ، الاولى والثانية تملئانه معاً في $1\frac{5}{7}$ يوماً والثانية والثالثة تملئانه معاً في $2\frac{2}{9}$ يوماً والاولى مع الثالثة تملئانه في $1\frac{7}{8}$ يوماً فالمطلوب حساب :

١ً — الزمن الذي تملأ فيه الحنفيات الثلاث الحوض .

٢ً — « « « « كل من الحنفيات الثلاث الحوض .

١٦ — اناء فيه ١٠ ليترات حليب ، ٥ ليترات ماء واناء آخر فيه ٨ ليترات حليب ، ٦ ليترات ماء اخذ ٧ ليترات من المزيج الاول ووضع في الاناء الثاني ثم اخذ ٧ ليترات مما صار في الاناء الثاني من المزيج ووضع في الاناء الاول فالمطلوب حساب كمية الحليب والماء التي صارت بعد ذلك في كل من الاناثين .

١٧ — اوصى رجل عند وفاته ان يوزع ماله البالغ ٣٩٦٠٠ فرنكاً بين زوجته وولديه وبنتيه على الصورة الآتية : الولد الكبير يأخذ $\frac{5}{12}$ من المال والصغير $\frac{4}{15}$ من

المال والزوجة تأخذ $\frac{٤}{١١}$ من المال الباقي من الولدين والبنتان تأخذان الباقي الاخير بالتساوي فالمطلوب حساب حصة كل منهم .

١٨— تاجر فتح تجارة بمبلغ ما ، في نهاية السنة الاولى كان صافي ارباحه يعادل $\frac{٢}{١٧}$ من رأسماله فاضافه الى الرأس المال وفي نهاية السنة الثانية كان صافي ارباحه يعادل $\frac{٦}{١١}$ من رأسماله في تلك السنة فاضافه الى الرأس المال وفي نهاية السنة الثالثة كان صافي ارباحه يعادل $\frac{١}{١٠}$ من رأسماله في تلك السنة فاضافه الى الرأس المال حيث بلغ ٢٨٥٠٠٠ فرنكاً فكم كان رأسماله في ابتداء السنة الاولى ؟

١٩— برميل يزن ٢٤٦ كيلوغراماً عندما يكون ملآناً من الماء ويزن ٢٣٠ كيلوغراماً اذ كان ملآناً زيتاً فالمطلوب حساب وزن البرميل عندما يكون فارغاً ومقدار سعته مع العلم ان كثافة الزيت (١,٩٢) (٤٦كغ، ٢٠٠ل)

٢٠— وزع مبلغ بين ثلاثة اشخاص فأخذ الاول ١٠٠٠ فرنكا و $\frac{١}{٤}$ الباقي من المبلغ واخذ الثاني بعده ٢٠٠٠ فرنكاً و $\frac{١}{٤}$ الباقي منه واخذ الثالث الباقي الاخير فكانت حصصهم متساوية فما هو المبلغ الاصلي . (٩٠٠٠)

٢١— عطار خلط مقدارين من القهوة ببعضهما ، الاول يعادل $\frac{٣}{٧}$ الخليط اشتري الكيلوغرام منه بمبلغ ٨,٥٠ فرنكاً والباقي من الخليط اشتراه بسعر الكيلو

غرام ٩,٢٠ فرنكاً ثم باع الخليط جميعه بسعر الكيلوغرام ١٤ فرنكاً فكان ربحه في الجميع ٧١٤ فرنكاً فما مقدار القهوة (٦٠، ٨٠ كغ)

٢٢- سمان اشترى مقداراً من البيض كل أثنتين بمبلغ ٠,٧٥ فرنكاً، باع نصفه بسعر الواحدة ٠,٥٠ فرنكاً و $\frac{١}{٣}$ البيض باعه بسعر الاثني عشرية ٦,٧٥ فرنكاً وباع الباقي من البيض بسعر الاثنى عشرية ٧,٥ فرنكا فكان ربحه في البيض جميعه ٤٨ فرنكا فما عدد البيض ؟ (٢٨٨)

٢٣- رجل فتح تجارة فكان ربحه في نهاية السنة الاولى $\frac{٣}{٢٠}$ من رأسماله وربح في السنة الثانية $\frac{٤}{٣}$ ما ربحه في السنة الاولى وخسر في السنة الثالثة مبلغاً قدره (٢٥٠٠) فرنكا ثم وجد ان ارباحه بلغت في نهاية السنة الثالثة (٣٩٥٠٠) فرنكا فكم كان رأسماله ؟

٢٤- ارض مستطيلة الشكل طولها ١٢٠ متراً ، عرضها يساوي $\frac{٣}{٥}$ طولها يراد ان تحاط بصفين من الاشجار احدهما يغرس في محيط الارض والثاني في داخله بشرط ان تكون المسافة بين كل شجرتين مترين فما عدد الاشجار اللازمة لذلك ؟ (٣٧٦)

٢٥- قضيب من الحديد مقطعه مربع فاذا كان طوله ٢,٤٠ متراً ووزنه ٢٦٩,٥٦٨ كغ فكم يكون طول ضلع مقطعه مع العلم ان كثافة الحديد (٧,٨)

الفصل الثالث

فى المربع والجزء المربع

﴿ البحث الاول — المربع ﴾

٩٩ — **تعريف** — مربع عدد هو عبارة عن حاصل ضربه بنفسه

امثلة — مربع العدد ٥ هو ٥ × ٥ = ٢٥ ويكتب $٥^{٢}$ = ٢٥

« « ٦,٥ « ٦,٥ × ٦,٥ = ٤٢,٢٥ ويكتب $٦,٥^{٢}$ = ٤٢,٢٥

« « ٠,٢٥ = ٠,٢٥ × ٠,٢٥ « $٠,٢٥^{٢}$ = ٠,٠٦٢٥

« « $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{٢٥} = (\frac{٢}{٥})^{٢}$

وبصورة عامة : مربع العدد ب يكتب $ب^{٢}$ وكذلك مربع الكسر $\frac{ب}{حـ}$ يكتب $\frac{ب^{٢}}{حـ^{٢}}$

ملاحظة — من الامثلة السابقة يتضح :

١ً — ان مربع الكسر الاعتيادي يساوي حاصل قسمة مربع بسطه على مربع مقامه .

٢ً — ان مربع الكسر هو كسر آخر اصغر منه .

خواص عامة على المربعات

١٠٠ — لنرسم جدولاً يحتوي على ثلاثة اعمدة (شكل-٧) ونكتب في احدها اعداداً صحيحة متوالية اعتباراً من الصفر ونكتب في العمود الثاني مربعات هذه

الاعداد بالتعاقب ثم نكتب في العمود الثالث الفرق بين المربعات المتوالية وبتدقيق الاعداد المرقمة في الجدول المذكور نلاحظ :

الاعداد	مربعاتها	الفضل
٠	٠	
		١
١	١	
		٣
٢	٤	
		٥
٣	٩	
		٧
٤	١٦	
		٩
٥	٢٥	
		١١
٦	٣٦	
		١٣
٧	٤٩	

(شكل ٧)

١ ـ الفرق بين مربعات الاعداد المتوالية هي اعداد فردية متوالية .

٢ـ مربع عددما يساوي حاصل جمع الاعداد الفردية المتوالية الاولى التي عددها يساوي وحدات هذا العدد .

$٢^{٢} = ١ + ٣$ ؛ $٣^{٢} = ١ + ٣ + ٥$ ؛

$٤^{٢} = ١ + ٣ + ٥ + ٧$

٣ـ الفرق بين مربعي عددين متواليين يساوي حاصل جمع نفس العددين .

$٣^{٢} - ٢^{٢} = ٣ + ٢$ ؛ $٤^{٢} - ٣^{٢} = ٤ + ٣$ ؛

$٥^{٢} - ٤^{٢} = ٥ + ٤$

١٠١ — **خاصة** — الفضل بين مربعي عددين متواليين هو عدد فردي يساوي حاصل جمع نفس العددين

وبالاستناد على هذه الخاصة ، يمكننا معرفة عددين متتابعين اذا علم الفضل بين مربعيهما وكذلك يمكننا معرفة الفضل بين مربعي عددين متتابعين مفروضين .

مثال (١) ـ الفضل بين مربعي عددين متتابعين ٧ فما هما العددان ؟

الحل ـ بما ان : $٧ = ٤ + ٣$ اذن العددان هما : ٤ ، ٣

التحقيق : $٤^{٢} - ٣^{٢} = ١٦ - ٩ = ٧$

مثال (٢ — ماهو الفضل بين مربعي العددين المتواليين ٧ ، ٦ ؟

الحل — ان : ٧ + ٦ = ١٣ وهو الفضل بين مربعي ٧ ، ٦

التحقيق : $٧^{٢} - ٦^{٢} = ٤٩ - ٣٦ = ١٣$

تطبيقات

الخاصة السابقة تسهل علينا حل مسائل حسابية هامة من نوع المسألة الآتية:

مسألة — معلم اذا صف تلاميذه صفوفاً منتظمة بشكل مربع يزيد منهم ١٦ تلميذ واذا اضاف لكل من الصفوف تلميذاً واحداً ينقصه ٧ ليكمل المربع الثاني فما عدد التلاميذ ؟

الحل — الفرق بين المربعين في هذه المسألة هو :

١٦ + ٧ = ٢٣ وبما ان ٢٣ = ١١ + ١٢ اذن عدد التلاميذ هو :

$١١^{٢} + ١٦ = ١٢١ + ١٦ = ١٣٧$ تلميذ

او $١٢^{٢} - ٧ = ١٤٤ - ٧ = ١٣٧$ »

ويتضح من الحل السابق ان الجواب الناتج من احدى الحالتين يحقق الجواب الناتج من الحالة الثانية .

مربع حاصل ضرب

١٠٢ — **خاصة** — مربع جداء عدة اعداد يساوي جداء مربعاتها .

مثلاً : $(٣ \times ٤ \times ٥)^{٢} = ٣^{٢} \times ٤^{٢} \times ٥^{٢}$

حيث : $(٣ \times ٤ \times ٥)^{٢} = (٣ \times ٤ \times ٥)(٣ \times ٤ \times ٥)$

، » » » $= ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٣ \times ٤ \times ٥$

او : $(٥ \times ٤ \times ٣)^{٢} = ٥ \times ٥ \times ٤ \times ٤ \times ٣ \times ٣$

ومنه $(٥ \times ٤ \times ٣)^{٢} = ٥^{٢} \times ٤^{٢} \times ٣^{٢}$

وبصورة عامة : $(ب \times حـ \times ء)^{٢} = ب^{٢} \times حـ^{٢} \times ء^{٢}$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

١٠٣ — **نتيجة (١)** — العدد المربع اسس مضاربه الاولية تكون زوجية حتما وعليه لمعرفة عددما كونه مربعاً اوغير مربع يفرق الى مضاربه الاولية ثم ينظر في اسسها فاذا كانت زوجية كان العدد مربعاً والا فهو غير مربع .

امثلة : العدد ٣٦ مربع لأن $٣٦ = ٢^{٢} \times ٣^{٢}$ ؛ ٢٤ غير مربع حيث : $٢٤ = ٢^{٣} \times ٣$

: ٩٠٠ « $٩٠٠ = ٢^{٢} \times ٣^{٢} \times ٥^{٢}$ ؛

٤٥ غير مربع حيث : $٤٥ = ٣^{٢} \times ٥$

١٠٤ — **نتيجة (٢)** — العدد المنتهي باصفار مربعه ينتهي بضعف تلك الاصفار

مثلاً : $٧٠^{٢} = (٧ \times ١٠)^{٢} = ٧^{٢} \times ١٠^{٢} = ٤٩ \times ١٠٠ = ٤٩٠٠$

، : $١٢٠٠^{٢} = (١٢ \times ١٠٠)^{٢} = ١٢^{٢} \times ١٠٠^{٢} = ١٤٤ \times ١٠٠٠٠ = ١٤٤٠٠٠٠$

يتضح مما سبق ان العدد المربع اذا كان منتهياً باصفار، يجب ان يكون عدد هاشفعاً .

تدريب (١) — ما اصغر عدد يضرب في ٣٢٥ ليكون الناتج عدداً مربعاً؟

الحل — ان $٣٢٥ = ٥^{٢} \times ١٣$ وبما ان المضروب ١٣ اسه واحد اذن يجب ان يضرب ٣٢٥ في ١٣ ليصير اس ١٣ شفعاً اي : $٣٢٥ \times ١٣ = ٥^{٢} \times ١٣^{٢}$

تدريب (٢) — ما اصغر عدد يقسم ٣٦٠٠٠ ليكون الناتج عدداً مربعاً؟

الحل — ان $٣٦٠٠٠ = ٢^{٢} \times ٣^{٢} \times ١٠$ ومن حيث ان المضروب ١٠ اسه ٣

اذن يجب ان يقسم العدد على ١٠ فيصير اس ١٠ شفعاً والعدد الناتج يكون مربعاً

اي : ٣٦٠٠٠ ÷ ١٠ = ٢ × ٣ × ١٠

LIBRARY

تمارين

المطلوب : ١ً — تفريق المربعات من غير المربعات من الاعداد الآتية:

٢ً — ماهو اصغر عدد يمكن ضربه في كل من الاعداد غير المربعة ليكون الناتج مربعاً .

٥٦٢٥ ، ١٥٦٢٥ ، ١٠٢٤ ، ٢٣١٠٤ ، ٢٥٠

١٦٧٥ ، ٥٠٨٠ ، ١١٧٦ ، ٣٢٤ ، ١١٢٠٥٨١

مربع مجموع عددين

١٠٥ — مربع مجموع عددين يساوي : مربع الاول زائد ضعف حاصل ضرب الاول بالثاني زائد مربع الثاني .

مثلاً : $(٥+٣)^٢ = ٥^٢ + ٢ \times ٥ \times ٣ + ٣^٢ = ٢٥ + ٣٠ + ٩ = ٦٤$

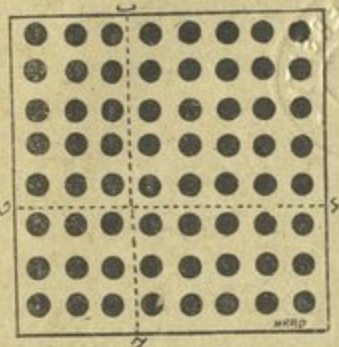
حيث : $(٥+٣)^٢ = (٥+٣)(٥+٣) = ٥ \times ٥ + ٥ \times ٣ + ٣ \times ٥ + ٣ \times ٣$

ومنه : $(٥+٣)^٢ = ٥^٢ + ٢ \times ٥ \times ٣ + ٣^٢$

وبصورة عامة : $(ب+حـ)^٢ = ب^٢ + ٢ب حـ + حـ^٢$

والشكل (٨) يوضح لنا هذه القاعدة .

نشاهد ان المربع الكبير يحتوي على ٦٤ كرة مرتبة في ٨ صفوف وهو في الوقت نفسه مؤلف من مربعين ومستطيلين ، احد المربعين يحتوي على ٢٥ كرة في خمسة صفوف والثاني يحتوي على ٩ كرات في ثلاثة صفوف ، وكل من المستطيلين يحتوي على ١٥ كرة مرتبة في خمسة صفوف يتألف كل منها من ثلاث كرات .



(شكل ٨)

١٠٦ — حساب مربع عدد اكبر من ١٠

بما ان كل عدد اكبر من ١٠ يمكن اعتباره مجموعة مؤلفة من آحاده وعشراته اذن مربعه يكون مساوياً ، الى مربع عشراته زائد ضعف حاصل ضرب عشراته بآحاده زائد مربع آحاده .

مثال (١) : $١٢^{٢} = (١٠ + ٢)^{٢} = ١٠^{٢} + ٢ \times ١٠ \times ٢ + ٢^{٢}$

$= ١٠٠ + ٤٠ + ٤ = ١٤٤$

مثال (٢) : $(٢٥)^{٢} = (٢٠ + ٥)^{٢} = ٢٠^{٢} + ٢ \times ٢٠ \times ٥ + ٥^{٢}$

$= ٤٠٠ + ٢٠٠ + ٢٥ = ٦٢٥$

ومن مطالعة الاجزاء الثلاثة التي يتألف منها مربع العدد نرى أن الجزئين الأوليين لا يحتويان على آحاد بسيطة وعليه فمربع العدد الصحيح ينتهي بنفس الرقم الذي ينتهي به مربع آحاده .

اي ان آحاد $٤٧^{٢}$ هو ٩ ؛ احاد $١٥٨^{٢}$ هو ٤

ولما كانت الآحاد البسيطة هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩
فمربعاتها تنتهي بالارقام : ١ ، ٤ ، ٩ ، ٦ ، ٥

ملاحظة — بما ان العدد المربع ينتهي حتما باحد الارقام : ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩
اذن فكل عدد ينتهي باحد الارقام : ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨ هو غير مربع كما انه ليس ضرورياً ان يكون العدد مربعاً اذا انتهى بالارقام ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩

١٠٧ — حساب مربع عدد منتهي بالرقم (٥)

مثال — العدد ٧٥ يمكن كتابته ٧٠ + ٥ ؛ ١٢٥ يمكن كتابة ١٢٠ + ٥

وبصورة عامة كل عدد ينتهي بالرقم ٥ يمكن كتابته (١٠ ب + ٥) باعتبار ب هو رقم عشراته .

وعليه : $(١٠ ب + ٥)^{٢} = ١٠٠ ب^{٢} + ١٠٠ ب + ٢٥$

ومنه : $(١٠ ب + ٥)^{٢} = ١٠٠ ب (ب + ١) + ٢٥$

ويتضح من المثال السابق ان مربع العدد المنتهي برقم «٥» يساوي مائة ضعف من حاصل ضرب عدد عشراته بالذي يليه مضافاً اليه ٢٥ .

مثلاً : $٧٥^{٢} = ٧ \times ٨ \times ١٠٠ + ٢٥ = ٥٦٠٠ + ٢٥ = ٥٦٢٥$

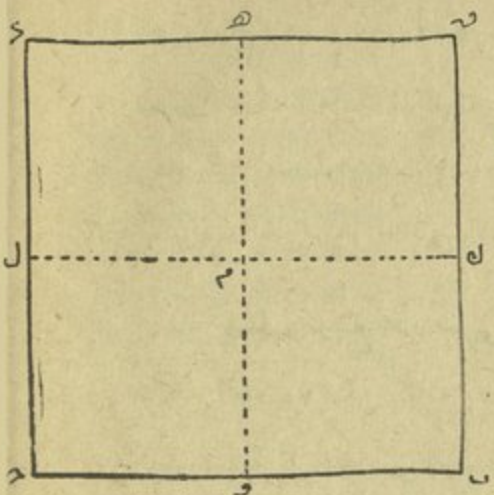
، : $١٢٥^{٢} = ١٢ \times ١٣ \times ١٠٠ + ٢٥ = ١٥٦٠٠ + ٢٥ = ١٥٦٢٥$

١٠٨ — **خاصة** — مربع كل عدد يساوي اربعة امثال مربع نصفه .

مثلاً — ليكن ب عدداً ما فيمكننا ان نكتب ب = ٢ × $\frac{ب}{٢}$

وبتربيع الطرفين يحدث : $ب^{٢} = (٢ \times \frac{ب}{٢})^{٢} = ٤ \times \frac{ب^{٢}}{٤} = ٤ \times (\frac{ب}{٢})^{٢}$

والرسم في (شكل ٩) يوضح لنا هذه الخاصة بجلاء



(شكل ٩)

يشاهد ان المربع المنشأ على المستقيم ب حهو ب حوق والمربع المنشأ على المستقيم وح (نصف ب ح) هو و حلم وان المربع ب حوق يساوي اربعة امثال و حلم

اي ان مربع ب ح : يساوي ٤ اضعاف مربع $\frac{\text{ب ح}}{٢}$

ملاحظة —

بالاستناد على الخاصة السابقة يمكن حساب مربعات بعض الاعداد بصورة سريعة

مثلاً : $١٤^{٢} = ٤ \times ٧^{٢} = ٤ \times ٤٩ = ١٩٦$ ؛

$١,٤^{٢} = ٤ \times ٠,٧^{٢} = ٤ \times ٠,٤٩ = ١,٩٦$

، : $١٨^{٢} = ٤ \times ٩^{٢} = ٤ \times ٨١ = ٣٢٤$ ؛

$١,٨^{٢} = ٤ \times ٠,٩^{٢} = ٤ \times ٠,٨١ = ٣,٢٤$

مربع فضل عددين

١٠٩ — مربع فضل عددين يساوي مربع الاول ناقص ضعف حاصل ضرب الاول بالثاني زائد مربع الثاني .

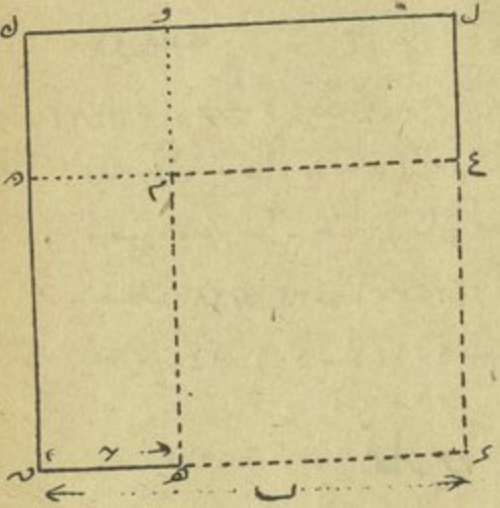
مثلاً : $(٥ - ٣)^{٢} = ٢٥ - ٢ \times ٥ \times ٣ + ٢٣ = ٢٥ - ٣٠ + ٩ = ٤$

حيث : $(٥ - ٣)^{٢} = (٥ - ٣)(٥ - ٣) = ٥ \times ٥ - ٥ \times ٣ - ٣ \times ٥ + ٣ \times ٣$

ومنه : $(٥ - ٣)^{٢} = ٥^{٢} - ٢ \times ٥ \times ٣ + ٣^{٢}$

وبصورة عامة : $(ب - حـ)^{٢} = ب^{٢} - ٢ ب حـ + حـ^{٢}$

والرسم في شكل (١٠) يوضح لنا الخاصة السابقة اذ نشاهد ان المربع



(شكل ١٠)

عم هـ و المنشأ على و هـ (و ق - هـ ق) يكافئ المربع الكبير ل ك ق و المنشأ على و ق زائد المربع الصغير وك ن م المنشأ على م ن او (هـ ق) ناقص المستطيلان وك ق هـ، ل ك ن ع اللذان بعداهما و ق ، هـ ق فاذا فرضنا ان و ق = ب، هـ ق = حـ يكون :

$(ب - حـ)^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} - ٢ ب حـ$

تطبيقات

قاعدة — مربع مجموع عددين ومربع فضل عددين تفيدان لحساب مربعات الاعداد القريبة من عدد مدور بالزيادة او بالنقص .

مثلاً - العدد ٤١ = ٤٠ + ١ مربعه يساوي ١٦٠٠ + ٨٠ + ١ = ١٦٨١

» ٥٢ = ٥٠ + ٢ » » ٢٥٠٠ + ٢٠٠ + ٤ = ٢٧٠٤

يضاف الى مربع الاول مربع الثاني وضعف جداء الاول بالثاني

» ٢٨ = ٣٠ - ٢ مربعه يساوي ٩٠٠ + ٤ - ١٢٠ = ٧٨٤

» ٣٩ = ٤٠ - ١ » » ١٦٠٠ + ١ - ٨٠ = ١٥٢١

يضاف الى مربع الاول مربع الثاني ويطرح ضعف جداء الاول بالثاني

١١٠ — **خاصة** — الفضل بين مربعي عددين يساوي حاصل ضرب مجموعهما بفضلهما .

اي : $٨^{٢} - ٥^{٢} = (٨ + ٥)(٨ - ٥)$

اذ في الحقيقة :

$(٨ + ٥)(٨ - ٥) = ٨ \times ٨ - ٨ \times ٥ + ٥ \times ٨ - ٥ \times ٥$

ومنه : $(٨ + ٥)(٨ - ٥) = ٨^{٢} - ٥^{٢}$

وبصورة عامة : $ب^{٢} - حـ^{٢} = (ب + حـ)(ب - حـ)$

تطبيقات : $٢٨ \times ٣٢ = (٣٠ - ٢)(٣٠ + ٢) = ٩٠٠ - ٤ = ٨٩٦$

$٣٩ \times ٤١ = (٤٠ - ١)(٤٠ + ١) = ١٦٠٠ - ١ = ١٥٩٩$

تمارين

المطلوب :

١ً ـ حساب مربعات الاعداد الآتية بصورة سريعة

٢١ ، ٣٢ ، ٥٣ ، ٨٤ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣

٣٩ ، ٤٨ ، ٥٧ ، ٩٩ ، ١٥ ، ٣٥ ، ٦٥

٩٥ ، ١٠٥ ، ٢,٥ ، ٧,٥ ، ٨,٥ ، ١٠,٥ ، ١١,٥

١,٦ ، ١,٦ ، ٢٢ ، ٢,٢ ، ٢٤ ، ٢,٤ ، ٢٦

٢ً — حساب العمليات الآتية بصورة سريعة .

٣١ × ٢٩ ، ٢٧ × ٣٣ ، ٤٨ × ٥٢ ، ٣٩ × ٤١ ، ٨٣ × ٧٧

٦٨ × ٧٢ ، ٥٩ × ٦١ ، ٩٤ × ٨٦ ، ١٠٥ × ٩٥ ، ١١٢ × ١٠٨

٣ً — حل المسائل الآتية :

١ — ماالعدد اللازم اضافته على مربع ٥٣ ليكون الناتج مساوياً مربع ٥٤ ؟

٢ — « « طرحه من « ٣٧ « « « « ٣٦ ؟

٣ — بستاني عنده مقدار من الاشجار اذا غرسها صفوفاً منتظمة بشكل مربع يزيد منها ١٤ شجرة فاذا اضاف الى كل صف شجرة واحدة ينقصه ١٥ شجرة ليحدث مربع اكبر من الاول فكم هي عدد اشجاره ؟

٤ — ضابط اذا صف جنوده صفوفاً منتظمة بشكل مربع يزيد منهم ٤٢ جندياً فاذا اضاف الى كل من الصفوف جندياً واحداً ينقصه ٥١ جندياً ليحدث مربع اخر فما عدد الجنود ؟

٥ — بيان ان باقي قسمة مربع اي عدد اولي (اكبر من ٣) على ٢٤ يساوي ١

٦ — بيان ان حاصل ضرب كل عددين صحيحين متواليين ينتهي باحد الارقام : (٠ ، ٢ ، ٦)

٧ — باقي قسمة العدد المربع الوتر على ٨ يساوي ١

٨ — « « « « الشفع « ١٦ « اما صفر او ٤

٩ — ماالعددان اللذان مجموعهما ٦٦ والفرق بين مربعيهما ١١٨٨ ؟

١٠ — « « فضلهما ١٦ « « « ٨٠٠ ؟

﴿ المبحث الثاني — الجذر المربع ﴾

تعاريف

١١١ — جذر مربع عدد ماهو عدد اخر مربعه يساوي الاول

مثلاً — جذر مربع ٢٥ هو ٥ حيث $٥^{٢} = ٢٥$

« « ٠,٣٦ هو ٠,٦ حيث $٠,٦^{٢} = ٠,٣٦$

« « $\frac{١٦}{٤٩}$ هو $\frac{٤}{٧}$ « $\left(\frac{٤}{٧}\right)^{٢} = \frac{١٦}{٤٩}$

وبصورة عامة : يقال ان جذر مربع ب هو (س) فيما اذا كان : $ب = س^{٢}$

ويرمز للجذر المربع بالاشارة ($\sqrt{}$) التي توضع عادة على العدد المطلوب جذر مربعه وتسمى « شارة الجذر »

فمثلاً : الوضع $\sqrt{٤٩}$ هو جذر مربع ٤٩ ويكون $\sqrt{٤٩} = ٧$

فالعدد ٤٩ يسمى المجذور والعدد ٧ هو حاصل الجذر .

ملاحظة — كل عدد مربع له جذر مربع حقيقي :

امثلة : $\sqrt{٢٥} = ٥$ ؛ $\sqrt{\frac{٤٩}{٦٤}} = \frac{٧}{٨}$ ؛ $\sqrt{٠,٨١} = ٠,٩$.

وكل عدد غير مربع له جذر تقريبي .

مثلاً — $\sqrt{٦٩}$ هو عدد محصور بين ٨ ، ٩ اي ان جذر مربع العدد ٦٩ هو اصغر من ٩ واكبر من ٨ ويؤخذ عادة العدد (٨) ويقال له الجذر المربع المقرب الى اقل من واحد : (اي ان مقدار الخطأ فيه اصغر من واحد)

وكذلك $\sqrt{٢٣}$ هو ٤ تقريباً

١١٢ — كيفية استخراج جذر مربع عدد

اولاً اذا كان العدد المفروض مؤلفاً من خانتين فأقل يستخرج جذر مربعه من جدول المربعات الآتي :

الاحاد البسطه	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
مربعاتها	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١

ثانياً — اذا كان العدد مؤلفاً من ثلاث خانات فاكثر يتبع القاعدة الآتية:

قاعدة — لأستخراج جذر مربع عددما يعمل مايلي :

١ً — يفرق العدد الى مراتب ثنائية (ذات خانتين) اعتباراً من احاده.

٢ً — يؤخذ الجذر المربع للمرتبة الاخيرة ويوضع الناتج على المستقيم الافقي المرسوم امام اشارة الجذر

٣ً — يطرح مربع الجذر الناتج من المرتبة الاخيرة وينزل امام حاصل الطرح مرتبة واحدة من المراتب المتوالية على اليمين .

٤ً — يقسم العدد الحادث (الباقي) على ضعف عشرات حاصل الجذر ويوضع الرقم الناتج من هذه القسمة امام العدد الموجود في حاصل الجذر

٥ً — يؤخذ حاصل جمع مربع العدد الناتج من القسمة السابقة مع جداثه بضعفي عشرات حاصل الجذر ويطرح من المقسوم فاذا انتهت مراتب المجذور كان العدد الموضوع على يمين المجذور هو حاصل الجذر المطلوب واذا لم تنته مراتب العدد تنزل مرتبة اخرى ويعاد العمل المشروح في البنود السابقة الى ان تنتهي المراتب

مثال (١) — حساب جذر مربع العدد : ٦٢٥

صورة العمل

٢٥

٦٬٢٥ ∨ جذر مربع ٦ هو ٢ تقريباً

٢ × ٢٠ = ٤٠

٤ | ٢٢٥ = ٢٢

٢ = ٢²

٥ × ٤٠ = ٢٠٠

يقسم على ٤٠

٢٥ = ٥²

٢٢٥ | ٢٢٥

... انتهى الجذر

او

٢٥

٦٬٢٥ ∨

٤٠

٤ | ٢٢٥

٥ | ٢٢٥

...

اذاً ∨٦٢٥ = ٢٥

مثال (٢) — حساب جذر مربع العدد : ٥٥٢٢٥

٢٣٥

٥٬٥٢٬٢٥ ∨

٤ | ١٥٢

٢٠ × ٢ = ٤٠

٤٠ × ٣ = ١٢٠

٣² = ٩

١٢٩ | ٢٣ ٢٥

يقسم على ٤٠

١٢٩

٢ × ٢٣٠ = ٤٦٠

٤٦٠ × ٥ = ٢٣٠٠

٥² = ٢٥

٢٣٢٥ | ٢٣٢٥

....

يقسم على ٤٦٠

او

٢٣٥

٥٬٥٢٬٢٥ ∨

٤ | ١٥٢

٣ | ١٢٩

٤٦٥ | ٢٣ ٢٥

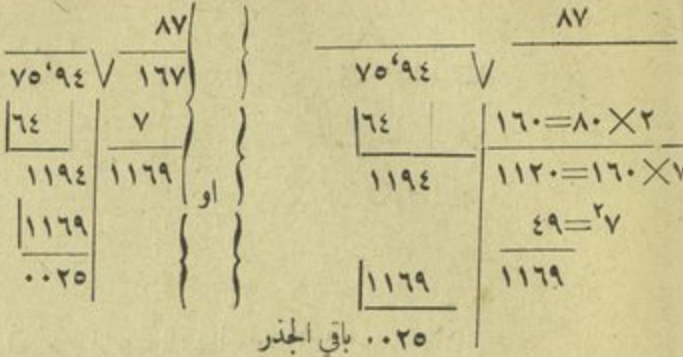
٥ | ٢٣ ٢٥

٢٣٢٥

....

اذاً ∨٥٥٢٢٥ = ٢٣٥

مثال (٣) حساب جذر مربع العدد : ٧٥٩٤



هنا الجذر تقريبي

ملاحظة — اذا انتهت عملية الجذر بدون باقي كان المجذور عدداً مربعاً كالعددين ٦٢٥ ، ٥٥٢٢٥ في المثالين الاول والثاني واذا خرج باق من عملية الجذر كان المجذور غير مربع كالعدد ٧٥٩٤ في المثال الثالث .

١١٣ — الباقي في الجذر المربع

علمنا سابقاً ان الفرق بين مربعي عددين متواليين يساوي حاصل جمعهما مثلاً — ليكن العددان المتواليان هما : (ب + ١) ، (ب) ولنحسب الفرق بين مربعيهما

$$(ب+١)^{٢} - ب^{٢} + ٢ب + ١ - ب^{٢} = ٢ب + ١$$

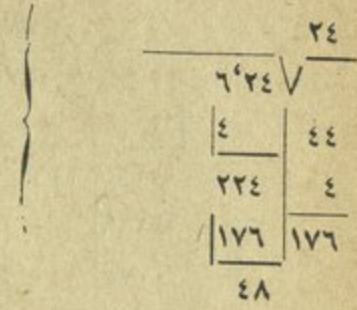
يلاحظ هنا ان حاصل الطرح ٢ ب + ١ عبارة عن ضعفي العدد الصغير زائد واحد .

وينتج من ذلك :

ان الباقي في الجذر المربع يجب ان لا يزيد عن ضعفي حاصل الجذر .

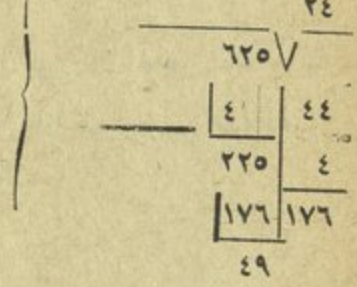
في الحقيقة لو زاد الباقي عن ضعفي حاصل الجذر واحد على الاقل لكان حاصل الجذر الحقيقي اكبر من الحاصل السابق بواحد

مثال



الباقي في هذه العملية يساوي ٢ × ٢٤
وعليه فحاصل الجذر هو ٢٤
ولا يمكن ان يكون اكبر من ٢٤

ولكن لنفرض اننا سهونا في العملية الآتية :



فيلاحظ ان الباقي في هذه العملية يساوي
٢ × ٢٤ + ١ اي انه يزيد عن ضعفي حاصل الجذر وعليه فحاصل الجذر الحقيقي هو اكبر من ٢٤ بواحد اي انه ٢٥

اذ أن $٢٥^{٢} - ٢٤^{٢} = ٤٩$

ملاحظة (١) — اذا كان باقي الجذر مساوياً حاصل الجذر فالعدد المجذور يكون عبارة عن حاصل عددين متتابعين اصغرهما حاصل الجذر .

مثلاً — ليكن العدد المجذور (ح) وحاصل الجذر التقريبي (ب)

فيكون : $ح = ب^{٢} + ب$ ومنه ينتج : $ح = ب(ب + ١)$

اذاً العدد ح يساوي حاصل ضرب العددين المتتابعين ب ، ب + ١

ملاحظة (٢) — اذا كان باقي الجذر مساوياً مثلي حاصل الجذر فالعدد المجذور يكون عبارة عن حاصل ضرب اي عددين شفعيين او وترين متتابعين اصغرهما حاصل الجذر

مثلاً — ليكن العدد المجذور (ح) وحاصل الجذر التقريبي (ب)

فيكون : ح = ب^{٢} + ٢ ب ومنه ينتج : ح = ب (ب + ٢)

إذاً العدد ح يساوي حاصل ضرب العـــددين ب ، ب + ٢ وهما متتابعان زوجيان او فرديان اصغرهما حاصل الجذر «د»

ومن الملاحظات السابقة ينتج القاعدة الآتية :

١١٤ — **قاعدة** — اذا علم حاصل ضرب اي عددين متتابعين او عددين متتابعين فرديين كانا ام زوجيين يمكن ايجادهما بطريقة الجذر المربع وذلك بان يحسب جذر مربع حاصل الضرب فالناتج يكون اصغر العددين .

مثال (١) — ما العددان المتواليان اللذان حاصل ضربهما يساوي ٦٥٠ ؟

العمل

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{٦٥٠} & ٢٥ \\ \hline ٤٥ & ٤ \\ \hline ٢٥٠ & ٥ \\ \hline ٢٢٥ & ٢٢٥ \\ \hline & ٢٥ \end{array}$$

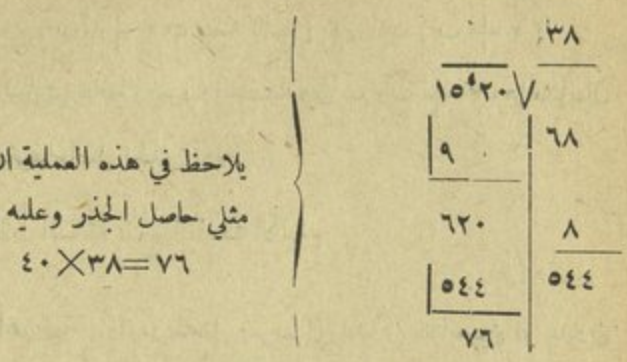
يلاحظ في هذه العملية ان باقي الجذر يساوي حاصل الجذر وعليه يكون:

٦٥٠ = ٢٥ × ٢٦

اذاً العددان هما : ٢٥ ، ٢٦

مثال (٢) — ما العـــددان المتواليـــان الزوجيان اللذان حـــاصل ضربهما يساوي ١٥٢٠ ؟

الحل



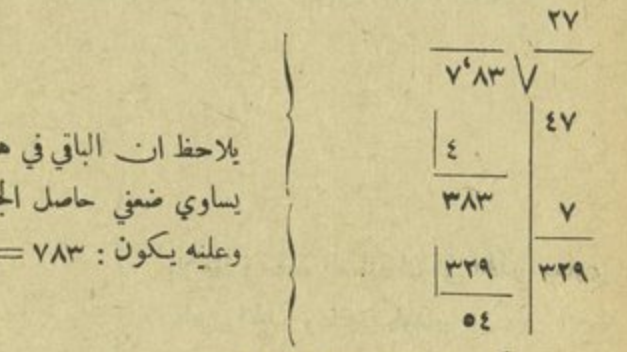
يلاحظ في هذه العملية ان باقي الجذر يساوي مثلي حاصل الجذر وعليه يكون :

$٧٦ = ٣٨ \times ٤٠$

اذاً العددان هما : ٣٨ ، ٤٠

مثال (٣) — ما العددان المتواليان الفرديان اللذان حاصل ضربهما يساوي ٧٨٣؟

الحل



يلاحظ ان الباقي في هذه العملية يساوي ضعفي حاصل الجذر وعليه يكون : $٧٨٣ = ٢٧ \times ٢٩$

اذاً العددان هما : ٢٧ ، ٢٩

١١٥ — استخراج الجذر المربع لعدد ما مقرباً الى وحدة عشرية مفروضة

اذا كان العدد المجذور غير مربع يمكن استخراج جذر مربعه مقرباً الى اي وحدة عشرية مفروضة وذلك بأن يعمل ما يلي :

١ً — نضع فاصلة عشرية امام العدد الصحيح من حاصل الجذر وصفرين امام

الباقي ثم نعيد الاعمال السابقة التي جرت في جذر الاعداد فينتج خانة عشرية واحدة

مثال (١) ← المطلوب حساب جذر مربع العدد ٦١٨ مقرباً الى اقل من ١,٠

العمل

٢٤,٨

٤٨٨	٤٤	√ ٦١٨
٨	٤	٤
٣٩٠٤	١٧٦	٢١٨
		١٧٦
		٤٢٠٠
		٣٩٠٤
		٢٩٦ الباقي

وضع صفرين امام الباقي
وفاصله العشرية امام
حاصل الجذر

اذاً $\sqrt{٦١٨} = ٢٤,٨$ مقرب الى اقل من ١,٠

مثال (٢) — جذر مربع العدد ٢ مقرباً الى اقل من ٠,٠١

العمل

١,٤١

٢٨١	٢٤	√ ٢
١	٤	١
٢٨١	٩٦	١٠٠
		٩٦
		٤٠٠
		٢٨١
		١١٩

وضع صفرين امام الباقي

» » » »

اذاً $\sqrt{٢} = ١,٤١$ مقرب الى اقل من ٠,٠١

جذر مربع الكسور

١١٦ — جذر مربع الاعداد العشرية والكسور العشرية يجري كجذر الاعداد الصحيحة على ان تفرز مراتب الكسور اعتباراً من الفاصلة العشرية ويوضع صفراً امام الكسر اذا كان عدد ارقامه وتراً .

مثال (١) — حساب : $\sqrt{١٠,٥٦٢٥}$ مثال (٢) — حساب : $\sqrt{٠,٣٧٥}$

٣,٢٥		٠,٦١	
٦٤٥	٦٢	٠,٣٧٥٠	١٢١
٥	٢	٣٦	٢
٣٢٢٥	١٢٤	١٥٠	١٢١
		١٢١	
		٢٩	

١٠,٥٦٢٥

٩

١٠٥٦

١٢٤

٣٢٢٥

٣٢٢٥

٠٠٠٠

هنا $\sqrt{١٠,٥٦٢٥} = ٣,٢٥$

هنا $\sqrt{٠,٣٧٥} = ٠,٦١$ تقريباً

١١٧ — جذر مربع الكسور الاعتيادية

جذر مربع الكسر الاعتيادي يساوي حاصل جذر بسطه على جذر مقامه

مثال $\sqrt{\frac{١٦}{٨١}} = \frac{٤}{٩}$ ؛ $\sqrt{\frac{٢٥}{٦٤}} = \frac{٥}{٨}$ ؛ $\frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ح}} = \sqrt{\frac{ب}{ح}}$

ملاحظة — يستحسن اختصار الكسر قبل جذره واذا تبين بعد الاختصار

ان مقامه غير مربع يضرب حديه بعدد يجعل مقامه مربعاً

مثال (١) — $\frac{\sqrt{٧٥}}{\sqrt{١٢}} = \frac{\sqrt{٧٥ \div ٣}}{\sqrt{١٢ \div ٣}} = \frac{\sqrt{٢٥}}{\sqrt{٤}} = \frac{٥}{٢}$

مثال (٢) — $\frac{\sqrt{١٥}}{\sqrt{٣٥}} = \frac{\sqrt{٣}}{\sqrt{٧}} = \frac{\sqrt{٣ \times ٧}}{\sqrt{٧ \times ٧}} = \frac{\sqrt{٢١}}{\sqrt{٤٩}} = \frac{\sqrt{٢١}}{٧}$

مثال (٣) — $\frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{٢ \times ٣}}{\sqrt{٣ \times ٣}} = \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{٦}}{٣}$

خواص الجذور المربعة

١١٨ — جذر مربع حاصل ضرب

جذر مربع حاصل ضرب يساوي حاصل ضرب جذر مربع كل مضروب على حدة

امثلة: $\sqrt{٣٦٠٠} = \sqrt{٣٦ \times ١٠٠} = \sqrt{٣٦} \times \sqrt{١٠٠} = ٦ \times ١٠ = ٦٠$

$\sqrt{١٢} = \sqrt{٣ \times ٤} = \sqrt{٣} \times \sqrt{٤} = ٢ \times \sqrt{٣}$ او $٢\sqrt{٣}$

$\sqrt{٤ س^{٢}} = \sqrt{٤} \times \sqrt{س^{٢}} = ٢ \times$ س او ٢ س

$\sqrt{٣ ب^{٢}} = \sqrt{٣} \times \sqrt{ب^{٢}} = \sqrt{٣} \times$ ب او ب $\sqrt{٣}$

وبصورة عامة : $\sqrt{ب حـ ء} = \sqrt{ب} \times \sqrt{حـ} \times \sqrt{ء}$

وينتج مما سبق ان حاصل ضرب الجذور المربعة لعدة اعداد يساوي جذر مربع جداء نفس الاعداد اي : $\sqrt{٣} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٣ \times ٢} = \sqrt{٦}$

١١٩ — جذر مربع حاصل قسمة

بما ان حاصل قسمة عددين يمكن كتابته بصورة كسر اعتيادي اذن جذر مربع حاصل قسمة عددين يساوي جذر مربع الكسر الدال عليه

١٢٠ – تدريب – مربع المجموعة (ب + ٣) هو :

$(ب + ٣)^{٢} = ب^{٢} + ٦ ب + ٩$

فيتضح ان المجموعة المربعة $ب^{٢} + ٦ ب + ٩$ هي ذات ثلاثة حدود وان حدها الثالث يساوي مربع نصف امثال الحد الثانى .

وبالاستناد على ذلك يمكن حل مسائل هامة في الحساب كما يلي :

مسألة(١)– ما العدد الذي اذا اضيف الى مربعه اربعة امثاله يكون الناتج مساوياً ١١٧ ؟ .

الحل – لنفرض ان العدد المطلوب هو ب فيكون : $ب^{٢} + ٤ ب = ١١٧$

نضيف الى طرفي المساواة العدد ٤ (مربع نصف امثال الحد الثاني) فيصير كل من طرفي المساواة مربعاً تاماً .

$ب^{٢} + ٤ ب + ٤ = ١١٧ + ٤$

ومنه $(ب + ٢)^{٢} = ١٢١$ نأخذ جذر مربع الطرفين .

$\sqrt{(ب + ٢)^{٢}} = \sqrt{١٢١}$

او $ب + ٢ = ١١$ ومنه $ب = ٩$ وهذا العدد المطلوب .

التحقيق : $٩^{٢} + ٤ \times ٩ = ٨١ + ٣٦ = ١١٧$

ملاحظة – المسأله السابقة يمكن حلها بالاستناد على خاصة القواسم

اذ أن المساواة : $ب^{٢} + ٤ ب = ١١٧$

يمكن كتابتها : $ب (ب + ٤) = ١١٧$

وهذه تشعر بان حاصل ضرب عددين ١١٧ واحدهما يزيد عن الثاني ٤

العمل

	١	
١١٧	٣	٣
٣٩	٣	٩
١٣	١٣	١٣، ٣٩، ١١٧
١		

ترتب القواسم المتناظرة

١ ، ٣ ، ٩	العددان هما ٩ ، ١٣ وبما ان العدد الصغير ب
١١٧، ٣٩، ١٣	هو المطلوب اذاً الجواب (٩)

مسألة (٢) — ما العدد الذي حاصل طرح عشرة امثاله من ضعفي مربعه يساوي ١٢ ؟

الحل — لنفرض ان العدد المطلوب « س »

فيكون : ٢ س^{٢} - ١٠ س = ١٢ نقسم طرفي المساواة على ٢ يصير :

س^{٢} - ٥ س = ٦

نضيف الى الطرفين ٦,٢٥ (مربع نصف امثال الحد الثاني)

يصير : س^{٢} - ٥ س + ٦,٢٥ = ٦ + ٦,٢٥

او (س - ٢,٥)^{٢} = ١٢,٢٥

ومنه $\sqrt{\text{(س - ٢,٥)}^{٢}} = \sqrt{١٢,٢٥}$

او س - ٢,٥ = ٣,٥

او س = ٣,٥ + ٢,٥ = ٦

﴿ تمارين ومسائل ﴾

المطلوب

١ً — ايجاد الجذر المربع لكل من الاعداد الآتية بواسطة التفريق الى

المضاريب الاولية وبالطريقة العامة .

٧٨٤ ، ١٠٢٤ ، ١٧٦٤ ، ١٠٨٩ ، ٢٣٠٤

١٢٣٢١ ، ١٢٥٤٤ ، ٣٠٢٥ ، ٧٠٥٦ ، ٩٨٠١

٢ــ ايجاد الجذر المربع لكل من الاعداد الآتية مقرباً الى اقل من ٠,١

١١٣٢١ ، ١٢٣٦,٦ ، ٨٩٥٣ ، ٢٥٣٩ ، ١٤٣٧,٥

٣ــ ايجاد الجذر المربع لكل من الاعداد الآتية مقرباً الى اقل من ٠,٠١

١٤٦٨ ، ٣٧٥,٤ ، ٨٤٣٥٧ ، ٧٣٨,٤ ، ٢ ، ٣ ، ٥

٤ــ حساب الجذور الآتية :

$$\overline{\sqrt{}}\ 784 \quad \overline{\sqrt{}}\ 1024 \quad \overline{\sqrt{}}\ 576 \quad \overline{\sqrt{}}\ 192 \quad \overline{\sqrt{}}\ 125$$

$$\sqrt{841}\,،\ \sqrt{1225}\,،\ \sqrt{625}\,،\ \sqrt{243}\,،\ \sqrt{320}$$

$$\sqrt{5}\times\sqrt{20}\ ؛\ \sqrt{18}\times\sqrt{50}\ ؛\ \sqrt{2}\times\sqrt{98}\ ؛$$

$$\sqrt{6}\times\sqrt{7}\times\sqrt{3}\,،\ 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{5}\times\sqrt{32}$$

$$\sqrt{75}+\sqrt{48}\ ؛\ \sqrt{50}+\sqrt{98}\ ؛\ \sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{18}$$

$$\sqrt{300}-\sqrt{75}\ ؛\ \sqrt{7}-\sqrt{2}-\sqrt{18}\ ؛\ \sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{20}-\sqrt{70}$$

٥ــ حل المسائل الآتية :

١ــ ما العددان المتواليان اللذان حاصل ضربهما يساوي ٧٠٢

٢ــ « الوتران المتعاقبان اللذان جداهما يساوي ١٤٤٣

٣ــ « الشفعان « « « « ١٧٦٨٨

٤ــ « المتعاقبان اللذان حاصل طرح مكعبيهما ١٢٦١

٥ــ ما العددان اللذان حاصل ضربهما ١٥٣٦ واحدهما يساوي $\frac{2}{3}$ الثاني ؟

٦ــ ما العدد الذي اذا اضيف اليه مربعه يكون الحاصل مساوياً ١٨٠٦ ؟

٧ — اذا اضيف خمسة امثال عدد الى مربعه يكون الناتج مساوياً ٢١٥٦ فما ذلك العـــدد ؟

٨ — ما العدد الذي ينقص عن مربعه ٤٢ ؟

٩ — عدد مربع ذو اربعة ارقام اذا اضيف الى كل من ارقامه واحداً فالعدد الناتج يكون مربعاً فما هو ذلك العدد ؟

١٠ — ارض مستطيلة الشكل طولها يساوي ضعفي عرضها مساحتها ٣ هكتار ؛ ٣٧ آر احيطت بسياج من التيل المانع ثمن الديكامتر منه ٣,٢٥ فرنكاً فما ثمن التيل اللازم لهذه الارض .

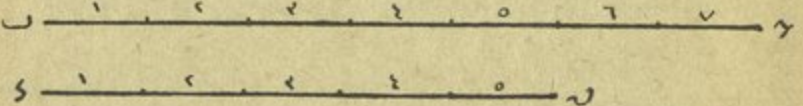
الفصل الرابع

﴿ في الاعداد المتناسبة وتطبيقاتها ﴾

١ — النسبة

١٢١ — **النسبة** : هي عبارة عن مقارنة كميتين ذات قياس مشترك ببعضهما لمعرفة ان الاولى كم تحتوي على الثانية او هي كم جزء منها .

مثال — ليكن : ب حـ ، ء ق قطعتين مستقيمتين وان ب حـ منقسمة الى ٧ اجزاء متساوية ء ق تحتوي على خمسة من تلك الاجزاء (شكل ١١)



فالنسبة بين القطعتين هي : (شكل ١١)

$\frac{٧}{٥}$ او $\frac{٥}{٧}$

يقال ان طول القطعة ب حـ بالنسبة الى ء ق هو: $\frac{٧}{٥}$

وبالعكس ان طول القطعة ء ق بالنسبة الى ب حـ هو $\frac{٥}{٧}$

وينتج من المثال السابق ان :

نسبة قطعتين مستقيمتين الى بعضهما هي عبارة عن حاصل قسمة طوليهما

اي : $\frac{\text{ب حـ}}{\text{ء ق}} = \frac{٧}{٥}$ ، $\frac{\text{ء ق}}{\text{ب حـ}} = \frac{٥}{٧}$

وبصورة عامة تفاد النسبة بالكسر $\frac{ب}{حـ}$

وبما ان النسبة بين عددين هي عبارة عن الكسر الدال على حاصل قسمتهما اذن النسبة تقبل جميع الاعمال والخواص المتعلقة بالكسور .

فالمقداران ب ، حـ في النسبة $\frac{ب}{حـ}$ يسميان (**حدى النسبة**) ويقال للمقدار (ب) مقدم النسبة وللمقدار (حـ) تالي النسبة .

ملاحظة — اذا كان حاصل ضرب نسبتين مساوياً الواحد الصحيح يقال انهما

(نسبتان متعاكستان)

مثلاً : $\frac{٧}{٥} \times \frac{٥}{٧} = ١$ اذاً النسبتان $\frac{٧}{٥}$ ، $\frac{٥}{٧}$ هما متعاكستان

ويتضح من ذلك انه لايجاد نسبة معاكسة لنسبة مفروضة نقسم الواحد

الصحيح على النسبة المفروضة .

مثلاً — النسبة المتعاكسة مع $\frac{٣}{٤}$ هي $١ \div \frac{٣}{٤} = ١ \times \frac{٤}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١٢٢ — **نظرية** — النسبة بين مقدارين لا تتغير فيما اذا ضربا بعدد واحد او قسما على عدد واحد .

مثلاً — لتكن النسبة $\frac{ب}{حـ}$ ولنضرب حديها في ء ونقسمهما كذلك على ء

فالمطلوب ان : $\frac{ب}{حـ} = \frac{ب \times ء}{حـ \times ء} = \frac{\frac{ب}{ء}}{\frac{حـ}{ء}}$

البرهان — نفرض ان قيمة النسبة $\frac{ب}{حـ}$ هي س

فيكون : $\frac{ب}{حـ} = س$ ومنه $ب = حـ \times س$ ..... (١)

١ً — نضرب طرفي المساواة (١) في ء فيكون الناتجان متساويين :

$ب \times ء = حـ \times س \times ء$ او $ب \times ء = (حـ \times ء) \times س$ ....(٢)

وبتقسيم طرفي المساواة (٢) على $(حـ \times ء)$ يصير :

$$\frac{ب \times ء}{حـ \times ء} = \frac{(حـ \times ء) \times س}{(حـ \times ء)}$$ ومنه $\frac{ب \times ء}{حـ \times ء} = س$ او $\frac{ب}{حـ} = \frac{ب \times ء}{حـ \times ء}$

٢ً — نقسم طرفي المساواة (١) على ء فيكون الناتجان متساويين .

$$ب \div ك = حـ \times س \div ك \text{ او } ب \times \frac{١}{ك} = حـ \times س \times \frac{١}{ك}$$

$$\text{او } \frac{ب}{ك} = \frac{حـ}{ك} \times س \ldots\ldots (٣)$$

وبتقسيم طرفي المساواة (٣) على $\frac{حـ}{ك}$ ينتج:

$$\frac{\frac{ب}{ك}}{\frac{حـ}{ك}} = \frac{\frac{حـ}{ك} \times س}{\frac{حـ}{ك}} \quad \text{ومنه} \quad \frac{\frac{ب}{ك}}{\frac{حـ}{ك}} = س \text{ او } \frac{\frac{ب}{ك}}{\frac{حـ}{ك}} = \frac{ب}{حـ}$$

مثال — النسبة $\frac{٧}{٥}$ قيمتها ١,٤

لنضرب حديها في ٣ يصير : $\frac{٣ \times ٧}{٣ \times ٥} = \frac{٢١}{١٥} = ١,٤$

ولنقسم « على ٢ « $\frac{٧ \div ٢}{٥ \div ٢} = \frac{٣,٥}{٢,٥} = ١,٤$

٢ — التناسب

١٢٣ — **التناسب** : هو عبارة عن التساوي بين نسبتين

مثلاً — النسبة : $\frac{١٢,٥}{٥}$ تساوي ١٢,٥ ÷ ٥ = ٢,٥

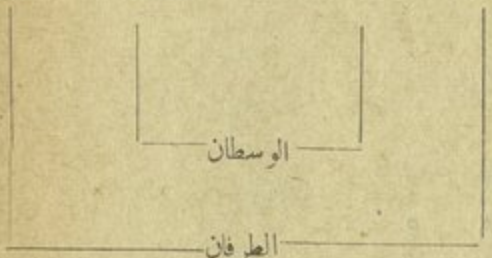
« : $\frac{٧}{٢,٨}$ « ٧ ÷ ٢,٨ = ٢,٥

اذاً : $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨}$ وهذه المساواة يقال لها (تناسب)

وبصورة عامة : يقال ان الاعداد الاربعة ب ، حـ ، ء ، ق تؤلف تناسباً فيما اذا كان حاصل قسمة الاول على الثاني مساوياً حاصل قسمة الثالث على الرابع .

اي : $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق}$

الاعداد ب ، حـ ، ء ، ق هي الحدود الاربعة للتناسب



ويقال للعددين ب ، ق (الاول والرابع) «طرفين»

ويقال للعددين حـ ، ء (الثاني والثالث)« وسطين »

١٢٤ — نظرية اساسية

أ — في كل تناسب حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين

مثلاً في التناسب : $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق}$ يجب ان يكون : ب × ق = حـ × ء

البرهان — نضرب حدي كل نسبة بتالي النسبة الاخرى يحدث :

$$\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق} \text{ او } \frac{ب \times ق}{حـ \times ق} = \frac{ء \times حـ}{ق \times حـ}$$

(ق) (حـ)

واذا ضرب طرفي المساواة الاخيرة بالمقام المشترك حـ × ق ينتج :

ب × ق = ء × حـ وهو المطلوب

٢ — اذا كان حاصل ضرب عددين مساوياً حاصل ضرب عددين آخرين فالاعداد الاربعة المذكورة تؤلف تناسباً .

اذ في الحقيقة لو قسمنا طرفي المساواة : ب × ق = ء × حـ

على ق × حـ (حاصل ضرب عددين كل منهما من طرف) يصير :

$\frac{ب \times ق}{ق \times حـ} = \frac{ء \times حـ}{ق \times حـ}$ وبحذف الاعداد المشتركة ينتج $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق}$ وهو المطلوب

ويتضح مما سبق ان المساواتين :

[$\frac{ب}{ق} = \frac{ء}{حـ}$] ؛ [ب × ق = ء × حـ] ينتج احداهما من الاخرى

مثال (١) : في التناسب : $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨}$ يشاهد ان :

١٢,٥ × ٢,٨ = ٣٥ و ٥ × ٧ = ٣٥

مثال (٢) — ليكن : ٤ × ٩ = ٣ × ١٢ فمن الاعداد ٤ ، ٩ ، ٣ ، ١٢ يتألف تناسب وذلك بتقسيم طرفي المساواة على (٩ × ١٢) بالفرض

$\frac{٤ \times ٩}{١٢ \times ٩} = \frac{٣ \times ١٢}{١٢ \times ٩}$ او $\frac{٤}{١٢} = \frac{٣}{٩}$

١٢٥ — تطبيقات — نقل حدود التناسب

مثال (١) — ليكن التناسب $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق}$ او $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨}$ ....(١)

١ً — نبادل الطرفين فيصير: $\frac{ق}{ح} = \frac{ك}{ب}$

$$\frac{٧}{١٢,٥} = \frac{٢,٨}{٥} \quad \ldots\ldots (٢)$$

٢ً — « الوسطين « $\frac{ب}{ك} = \frac{ح}{ق}$

$$\frac{٥}{٢,٨} = \frac{١٢,٥}{٧} \quad \ldots\ldots (٣)$$

٣ً — نقلب النسبتين « $\frac{ح}{ب} = \frac{ق}{ك}$

$$\frac{٢,٨}{٧} = \frac{٥}{١٢,٥} \quad \ldots\ldots (٤)$$

في كل وضع من اوضاع التناسب يلاحظ ان :

$$ب \times ق = ك \times ح \quad ؛ \quad ١٢,٥ \times ٢,٨ = ٥ \times ٧$$

وينتج من ذلك ان كل تناسب يمكن كتابته في اربعة صور .

١٢٦ — **خاصة** — في كل تناسب نسبة مجموع او فضل حدي النسبة الاولى الى تاليها كنسبة مجموع او فضل حدي النسبة الثانية الى تاليها .

فمثلاً من التناسب $\frac{ب}{ح} = \frac{ك}{ق}$ يمكن ان يكتب :

$$\frac{ب + ح}{ح} = \frac{ك + ق}{ق} \quad \text{او} \quad \frac{ب - ح}{ح} = \frac{ك - ق}{ق}$$

حيث : ١ً — نضيف لطرفي التناسب (واحداً) يصير :

$$\frac{ب}{ح} + ١ = \frac{ك}{ق} + ١ \quad \text{او} \quad \frac{ب}{ح} + \frac{ح}{ح} = \frac{ك}{ق} + \frac{ق}{ق} \quad \text{ومنه} \quad \frac{ب + ح}{ح} = \frac{ك + ق}{ق}$$

٢ً — نطرح من طرفي التناسب واحداً يصير :

$$\frac{ب}{ح} - ١ = \frac{ك}{ق} - ١ \quad \text{او} \quad \frac{ب}{ح} - \frac{ح}{ح} = \frac{ك}{ق} - \frac{ق}{ق} \quad \text{ومنه} \quad \frac{ب - ح}{ح} = \frac{ك - ق}{ق}$$

فمن التناسب : $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨}$ ينتج :

$$\frac{٥ + ١٢,٥}{٥} = \frac{٢,٨ + ٧}{٢,٨} \text{ او } \frac{١٧,٥}{٥} = \frac{٩,٨}{٢,٨}$$

ومنه : ٤٩ = ٤٩

$$\frac{٥ - ١٢,٥}{٥} = \frac{٢,٨ - ٧}{٢,٨} \text{ او } \frac{٧,٥}{٥} = \frac{٤,٢}{٢,٨}$$

ومنه : ٢١ = ٢١

١٢٧ — **خاصة** — في كل تناسب ، نسبة مجموع حدي النسبة الاولى الى فضلهما كنسبة مجموع حدي النسبة الثانية الى فضلهما

مثال — ليكن التناسب: $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق}$ فالمطلوب ان: $\frac{ب + حـ}{ب - حـ} = \frac{ء + ق}{ء - ق}$

علمنا من الخاصة الثانية ان : $\frac{ب + حـ}{حـ} = \frac{ء + ق}{ق}$ ؛ $\frac{ب - حـ}{حـ} = \frac{ء - ق}{ق}$

فنقسم المساواتين على بعضهما :

$$\frac{\frac{ب + حـ}{حـ}}{\frac{ب - حـ}{حـ}} = \frac{\frac{ء + ق}{ق}}{\frac{ء - ق}{ق}}$$

ومنه : $\frac{ب + حـ}{حـ} \times \frac{حـ}{ب - حـ} = \frac{ء + ق}{ق} \times \frac{ق}{ء - ق}$

او $\frac{ب + حـ}{ب - حـ} = \frac{ء + ق}{ء - ق}$ وهو المطلوب

فمن التناسب : $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨}$ ينتج :

$$\frac{٥ + ١٢,٥}{٥ - ١٢,٥} = \frac{٢,٨ + ٧}{٢,٨ - ٧} \text{ او } \frac{١٧,٥}{٧,٥} = \frac{٩,٨}{٤,٢} \text{ ومنه } ٧٣,٥ = ٧٣,٥$$

الرابع المتناسب والوسط المتناسب

الرابع المتناسب

١٢٨ — يقال للعدد الذي يؤلف مع الاعداد الثلاثة ب ، حـ ، ء تناسباً (الرابع المتناسب)

واذا رمز للرابع المتناسب بالحرف (س) يكون: $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{س}$

حساب الرابع المتناسب

بالاستناد على الخاصة الاساسية في التناسب يمكننا حساب العدد (س)

مثلاً — من التناسب : $\frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{س}$

(حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

نكتب : $ب \times س = حـ \times ء$ (نقسم طرفي المساواة على امثال س)

ومنه : $س = \frac{حـ \times ء}{ب}$

مثال (١) : ماقيمة س في التناسب : $\frac{١٢}{٤} = \frac{٢١}{س}$

نقول : ١٢ × س = ٤ × ٢١ ومنه س = $\frac{٤ \times ٢١}{١٢}$ = ٧

مثال (٢) — حساب قيمة س في التناسب $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{س}{٢,٨}$

نقول : ٥ × س = ١٢,٥ × ٢,٨ ومنه س = $\frac{١٢,٥ \times ٢,٨}{٥}$ = ٧

الوسط المتناسب

١٢٩ — يقال للعدد (س) انه وسط متناسب بين العددين ب ، حـ فيما اذا الف معهما تناسباً واشغل محل الوسطين فيه مثل التناسب $\frac{ب}{س} = \frac{س}{حـ}$

حساب الوسط المتناسب

من التناسب $\frac{ب}{س} = \frac{س}{حـ}$ ينتج : س × س = ب × حـ

او $س^{٢}$ = ب × حـ ومنه س = $\sqrt{ب \times حـ}$

ويتضح من ذلك ان الوسط المتناسب لعددين يساوي جذر مربع جداءهما

مثال — حساب الوسط المتناسب في التناسب : $\frac{٩}{س} = \frac{س}{٦}$

نقول : $س^{٢}$ = ٩ × ٦ ومنه س = $\sqrt{٣٦}$ = ٦

﴿ الاعداد المتناسبة ﴾

١٣٠ — **تعريف** — يقال لسلسلتين من الاعداد انهما ذات مقادير متناسبة فيما اذا كان حاصل قسمة اي عدد من السلسلة الاولى على نظيره في السلسلة الثانية (ثابتاً) .

اي اذاً كان نسبة كل عددين متناظرين في السلسلتين ذات قيمة واحدة .

مثال — لنكتب السلسلتين الآتيتين :

أ — ٣ ، ١,٥ ، ٠,٧٥ ، ٩ ، ٤,٢ ... س

ب — ٤ ، ١٠٢ ، ١٢ ، ٥,٦ .... ع

فنشاهد ان $\frac{س}{ع} = \frac{٣}{٤} = \frac{١.٥}{٢} = \frac{٠,٧٥}{١} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٤,٢}{٥,٦} = ٠.٧٥$

ويلاحظ في هذا المثال :

أ — ان كل عدد من السلسلة الاولى يساوي حاصل ضرب نظيره من السلسلة الثانية في عدد ثابت (قيمة النسبة)

مثلاً : ٣ = ٤ × ٠,٧٥ ؛ ٤,٢ = ٥,٦ × ٠,٧٥ ؛ س = ع × ٠,٧٥

ب — نسبة اي عددين من السلسلة الاولى لبعضهما يساوي نسبة نظيريهما في السلسلة الثانية .

مثلاً : نسبة العددين ٣ ، ٩ في السلسلة الاولى لبعضهما يساوي نسبة نظيريهما ٤ ، ١٢ في الثانية .

اي $\frac{٣}{٩} = \frac{٤}{١٢}$ وهذه تنتج من تبديل وسطي النسبتين : $\frac{٣}{٤} = \frac{٩}{١٢}$

٣ً ـ لنجمع ثلاثة اعداد (لاعلى التعيين) من السلسلة الاولى :

$٣ + ٠٫٧٥ + ٤٫٢ = ٧٫٩٥$

ونجمع نظائر هذه الاعداد :

$٤ + ١ + ٥٫٦ = ١٠٫٦$

ونقسم المجموع الاول على المجموع الثاني يصير :

$٧٫٩٥ \div ١٠٫٦ = ٠٫٧٥$ (قيمة النسبة) .

ونستنتج من الملاحظة السابقة النظرية الآتية :

١٣١ ـ **نظرية** ـ اذا تساوي عدة نسب مع بعضها يكون نسبة مجموع مقدماتها الى مجموع تواليها مساوية الى قيمة احدى النسب .

مثلا ـ ليكن النسب : $\frac{ب}{ح} = \frac{د}{ق} = \frac{هـ}{ك}$ ولنفرض ان قيمة كل من هذه النسب هي (س)

فيكون : $\frac{ب}{ح} = س$ ومنه : $ب = ح \times س$ ،

$\frac{د}{ق} = س$ « : $د = ق \times س$

$\frac{هـ}{ك} = س$ « : $هـ = ك \times س$

ويجمع المتساويات طرفاً مع طرف يحدث : $ب + د + هـ = ح \times س + ق \times س + ك \times س$

نضع المضروب المشترك (س) خارج قوس : ب + ء + هـ = س × (حـ + ق + ك)

نقسم طرفي المساواة على امثال س : $\frac{ب + ء + هـ}{حـ + ق + ك} = س$

وبما أن س تساوي قيمة كل من النسب الاصلية اذن :

$\frac{ب + ء + هـ}{حـ + ق + ك} = \frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق} = \frac{هـ}{ك}$ وهذا هو المطلوب .

ملاحظة — يمكننا طرح مقدم احدى النسب بدلاً من اضافته بشرط ان نطرح ايضاً تاليها .

اي يمكننا ان نكتب : $\frac{ب + ء - هـ}{حـ + ق - ك} = \frac{ب}{حـ} = \frac{ء}{ق} = \frac{هـ}{ك}$

فمثلاً من النسب: $\frac{٣}{٤} = \frac{١,٥}{٢} = \frac{٤,٢}{٥,٦}$ يمكن ان يكتب: $\frac{٣ - ١,٥ + ٤,٢}{٤ - ٢ + ٥,٦}$

ونحسب كلاً من حدي النسبة الحادثة فيكون : $\frac{٥,٧}{٧,٦}$ وهذه تساوي ٠,٧٥ ايضاً

١٣٢ — تطبيقات على النظرية السابقة

مسألة (١) — المطلوب ايجاد عددين حاصل جمعهما ٦,٨ وخارج قسمتهما ٠,٧ .

الحل — ليكن العددان هما س ، ع

فيكون $\begin{cases} س + ع = ٦,٨ \\ \frac{س}{ع} = \frac{٧}{١٠} \end{cases}$ نبدل وسطي التناسب يصير

$$\frac{س}{٧}=\frac{ع}{١٠} \text{ ومنه ينتج: } \frac{س+ع}{١٠+٧}=\frac{س}{٧}=\frac{ع}{١٠}$$

نعوض مجموع العددين (س + ع) بالمقدار المفروض ٦,٨

$$\text{يصير: } \frac{٦,٨}{١٧}=\frac{س}{٧}=\frac{ع}{١٠}$$

$$\text{ومنه: } س=\frac{٦,٨\times٧}{١٧}=٢,٨$$

$$ع=\frac{٦,٨\times١٠}{١٧}=٤$$

هما العددان المطلوبان

التحقيق: ١ً — ٢,٨ + ٤ = ٦,٨

٢ً — $\frac{٢,٨}{٤}=\frac{٢٨}{٤٠}=\frac{٧}{١٠}$

يوافقان شروط المسألة

مسألة (٢) — المطلوب إيجاد عددين فضلهما ١٠ وحاصل قسمتهما ١,٢٥

الحل — ليكن العددان هما س ، ع

فيكون $س-ع=١٠$ و $\frac{س}{ع}=١,٢٥$ او $\frac{س}{ع}=\frac{١٢٥}{١٠٠}$ نبدل الوسطين

$$\text{يصير: } \frac{س}{١٢٥}=\frac{ع}{١٠٠} \text{ ومنه ينتج: } \frac{س-ع}{١٢٥-١٠٠}=\frac{س}{١٢٥}=\frac{ع}{١٠٠}$$

نعوض (س — ع) بمساواتها ١٠

يصير : $\frac{١٠}{٢٥} = \frac{س}{١٢٥} = \frac{ع}{١٠٠}$

ومنه : $س = \frac{١٠ \times ١٢٥}{٢٥} = ٥٠$

، : $ع = \frac{١٠ \times ١٠٠}{٢٥} = ٤٠$

هما العددان المطلوبان

التحقيق : $٥٠ - ٤٠ = ١٠$ ؛ $\frac{٥٠}{٤٠} = ١,٢٥$

مسألة (٣) — المطلوب تقسيم ٣٩٠ فرنكاً بين ثلاثة اشخاص على ان تتناسب حصصهم مع الاعداد ٣ ، ٤,٨ ، ٥,٢

الحل — لتكن الحصص هي س ، ع ، ص

فيكون { $س + ع + ص = ٣٩٠$ الفرض الاول
{ $\frac{س}{٣} = \frac{ع}{٤,٨} = \frac{ص}{٥,٢}$ « الثاني

فمن الفرض الثاني ينتج : $\frac{س}{٣} = \frac{ع}{٤,٨} = \frac{ص}{٥,٢} = \frac{س + ع + ص}{٣ + ٤,٨ + ٥,٢}$

او $\frac{س}{٣} = \frac{ع}{٤,٨} = \frac{ص}{٥,٢} = \frac{٣٩٠}{١٣}$:

ومنه : $س = ٣ \times \frac{٣٩٠}{١٣} = ٩٠$ فرنكاً حصة الاول

ع = ٤,٨ × $\frac{٣٩٠}{١٣}$ = ١٤٤ فرنكاً حصة الثاني

ص = ٥,٢ × $\frac{٣٩٠}{١٣}$ = ١٥٦ « « الثالث

التحقيق : ٩٠ + ١٤٤ + ١٥٦ = ٣٩٠ اصل المبلغ

و : $\frac{٩٠}{٣}$ = $\frac{١٤٤}{٤,٨}$ = $\frac{١٥٦}{٥,٢}$ = ٣٠ مقدار الاجزاء المتساوية

﴿ المقادير المتناسبة طرداً او عكساً ﴾

١٣٣ — المقادير المتناسبة طرداً

تعريف — يقال للمقدارين انهما متناسبان طرداً فيما اذا ضرب احدهما بعددٍ ما (صحيحاً او كسراً) يضرب الثاني بذلك العدد

مثال — في التجارة طول قطعة قماش وثمنها هما مقداران متناسبان طرداً حيث لو فرضنا رجلين اشتريا قطعتين من قماش وكان طول قطعة الاول تعادل ٣ امثال طول الثانية فالقيمة التي يدفعها الاول بالطبع تساوي ٣ امثال القيمة التي يدفعها الثاني

كما وانه لو كانت القطعة الاولى تعادل $\frac{٣}{٤}$ الثانية لكانت القيمة التي يدفعها الاول تساوي $\frac{٣}{٤}$ المبلغ الذي يدفعه الثاني

ويتضح من المثال السابق ان نسبة طول القطعة الاولى الى الثانية هي ٣ وكذلك نسبة المبلغ الاول الى الثاني هو ٣ ايضاً

وفي المثال الثاني ؛ نسبة القطعة الاولى الى الثانية $\frac{٣}{٤}$ كذلك نسبة القيمة التي يدفعها الاول الى القيمة التي يدفعها الثاني هي $\frac{٣}{٤}$ وينتج من ذلك :

ان نسبة طولين من القماش يساوي نسبة قيمتيهما بالتقابل

ملاحظة — ليكن ب ، حـ ، ء من الامتار اطوال ٣ قطع من القماش ، بَ ، حَ ، ءَ من الفرنكات اثمان القطع المذكورة

فيكون : $\frac{بَ}{ب} = \frac{حَ}{حـ} = \frac{ءَ}{ء}$ (اثمان قطع القماش تتناسب طرداً مع اطوالها)

حيث في الحقيقة ان النسبة $\frac{بَ}{ب}$ هي عبارة عن ثمن المتر الواحد من القماش

كذلك تكون كل من النسب: $\frac{حَ}{حـ} = \frac{ءَ}{ء}$ تساوي قيمة المتر الواحد من القماش

بعض امثلة على المقادير المتناسبة طرداً

مقدار الشيء وثمنه؛ طول او مساحة الشيء وثمنه، مقدار العمل مع عدد العمال والزمن؛ الربح مع رأس المال والزمن؛ المسافة مع السرعة والزمن هي مقادير متناسبة طرداً

١٣٤ — المقادير المتناسبة عكساً

تعريف — يقال للكميتين انهما متناسبتان عكساً فيما اذا ضربت احداهما بعددٍ ما (صحيحاً او كسراً) تضرب الثانية بعكس ذلك العدد

مثال — الزمن اللازم لقطع مسافة محدودة يتناسب عكساً مع سرعة المتحرك.

١ً — لنفرض ان بين مدينتين ب ، حـ يسير قطاران سرعة الاول تعادل مثلي سرعة الثاني فالزمن اللازم للاول كي يقطع المسافة الكائنة بين ب ، حـ يساوي ولاشك نصف الزمن اللازم للثاني ليقطع هذه المسافة .

٢ً — اذا كانت سرعة الاول تعادل $\frac{٣}{٥}$ سرعة الثاني فالاول يحتاج الى زمن يساوي $\frac{٥}{٣}$ زمن الثاني

ويتضح من المثال السابق ان نسبة سرعة القطار الاول الى سرعة القطار الثاني تساوي ٢ ولكن نسبة الزمن اللازم للاول تساوي $\frac{١}{٢}$ الزمن اللازم للثاني

وفي المثال الثاني ؛ نسبة سرعة الاول تساوي $\frac{٣}{٥}$ سرعة الثاني ولكن نسبة زمن الاول تساوي $\frac{٥}{٣}$ زمن الثاني وينتج من ذلك :

ان نسبة سرعتي جسمين متحركين لبعضهما تساوي عكس نسبة زمنيهما .

ملاحظة — ليكن : ب ، حـ ، ء مقادير من الكيلو مترات سرعة ثلاثة قطارات (في الساعة)

وليكن : بَ ، حَ ، ءَ مقادير من الساعات الزمن اللازم للقطارات الثلاثة لكي يقطعوا مسافة واحدة .

فيكون نسبة سرعة الاول الى سرعة الثاني $\frac{ب}{حـ}$

ونسبة زمن الاول الى زمن الثاني $\frac{ب}{ح}$

ومن حيث ان السرعة تتناسب عكساً مع الزمن اذاً النسبتان $\frac{ب}{ح}$ ، $\frac{ب'}{ح'}$ متعاكستان وعليه يكون $\frac{ب}{ح} \times \frac{ب'}{ح'} = ١$ ومنه ينتج : ب ب' = ح ح'

وكذلك من سرعة الثاني والثالث ينتج : ح ح' = ء ء' اذاً :

ب ب' = ح ح' = ء ء'

اي ان مقادير السرعة لعدة اجسام متحركه تتناسب عكساً مع ازمانها .

وبما ان الكمية ب ب' (مقدار السرعة في الساعة × عدد الساعات) تشعر طول المسافة .

كذلك ح ح' ، ء ء' كل منهما يدل على طول نفس المسافة

بعض امثلة على المقادير المتناسبة عكساً .

سرعة الجسم المتحرك مع الزمن اللازم له لقطع مفروضة ، سعر الشيء مع مقداره (بثمن محدود) ، عدد العمال مع الزمن (في عمل ما) ، رأس المال مع الزمن (في ربح مقدار مفروض) هي مقادير متناسبة عكساً .

﴿ القاعدة الثلاثة ﴾

١٣٥ — **تعاريف** — القاعدة الثلاثية هي مسألة حسابية تتألف من عدة مقادير متناسبه مع بعضها طرداً او عكساً .

فاذا تألفت من اربعة مقادير وكان احدها مجهولاً سميت بالقاعدة الثلاثية البسيطة

واذا تألفت من ستة مقادير فاكثر وكان احدها مجهولاً سميت بالقاعدة الثلاثية المركبة

ويتضح من التعريف السابق ان القاعدة الثلاثية هي تناسب يحتوي على سلسلتين من الاعداد المتناسبة احد حدودها الواحدة منها مجهول يطلب حسابه .

ويقال للقاعدة الثلاثية انها (**طردية**) اذا كانت العلاقة بين نسبتيهما طردية

مثال — ماقيمة ٩ كيلو غرامات من السكر فيما اذا كانت قيمة ١٥ كيلو غراماً منه ١٥٧,٥ قرشاً سورياً .

الحل —

قرش	ك غ	
س	٩	
١٥٧,٥	١٥	
	طر	

ومنه :

$$س = \frac{٩}{١٥} \times ١٥٧,٥ = ٩٤,٥ \text{ قرشاً}$$

ويلاحظ ان التناسب يمكن كتابته على الصورة الآتية :

$$\frac{س}{٩} = \frac{١٥٧,٥}{١٥}$$ وقيمة كل من النسبتين تدل على ثمن الكيلو غرام الواحد.

ويقال للقاعدة الثلاثية انها (**عكسية**) اذا كانت العلاقة بين نسبتيهما عكسية

مثال — ماعدد الساعات اللازمة الى ٢٧ عاملاً حتى يتموا عملاً فيما اذا كان ١٢ عاملاً ينهونه في ٣٠٦ ساعات .

الحل —

ساعة	عامل	
س	٢٧	الوقتان اللازمان لاتمام عمل واحد
٣٠٦	١٢	يتناسبان عكساً مع عدد العمال
	عك	

وعليه يكون : س × ٢٧ = ٣٠٦ × ١٢ ومنه س = $\frac{١٢ \times ٣٠٦}{٢٧}$

او س = ٣٠٦ × $\frac{١٢}{٢٧}$ = ١٣٦ ساعة وهذا العدد المطلوب

ويتضح من المثالين السابقين انه :

١ً — اذا كانت مقادير القاعدة الثلاثية متناسبة طرداً يكون المجهول فيها مساوياً حاصل ضرب نظيره بالنسبة الثانية .

٢ً — اذا كانت مقادير القاعدة الثلاثية متناسبة عكساً يكون المجهول فيها مساوياً حاصل ضرب نظيره بعكس النسبة الثانية .

تطبيق على القاعدة الثلاثية المركبة .

مثال — ماعدد العمال اللازمة لتعبيد طريق طوله ٤٩٥ متر في ١٥ يوماً ويشتغلون في اليوم ١١ ساعة فيما اذا كان ٢٥ عاملا يعبدون طريقاً طوله ٣٠٠ متر في ١٢ يوماً ويشتغلون في اليوم ٩ ساعات .

الحل :

عمال	طول	يوم	ساعات الشغل في اليوم	
س	٤٩٥	١٥	١١	العمل يتناسب طرداً مع عدد العمال
٣٥	٣٠٠	١٢	٩	الزمن « عكساً « « «
	طر	عك	عك	

وعليه فنسبة العمال تساوي عكس نسبة الايام وعكس نسبة الساعات اي :

عمال	طول	ايام	ساعات

$$\frac{س}{٣٥} = \frac{٤٩٥}{٣٠٠} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٩}{١١}$$

ومنه : س = ٢٥ × $\frac{٤٩٥}{٣٠٠}$ × $\frac{١٢}{١٥}$ × $\frac{٩}{١١}$ = ١٧ يوماً العدد المطلوب.

وبتدقيق التناسب الاخير نلاحظ ان المجهول صار مساوياً لحاصل ضرب نظيره في النسب الطردية وعكس النسب العكسية .

ومن الامثلة السابقة نستنتج (القاعدة العامة) لحل مسائل التناسب .

١٣٦ — **قاعدة** — لحل مسألة التناسب (القاعدة الثلاثية) يعمل مايلي:

١ً — تكتب سلسلتا الاعداد بنفس الترتيب المفهوم من افادة المسألة على ان توضع السلسلة ذات المجهول فوق سلسلة المعلومات وان تقع الاعداد ذات النوع الواحد تحت بعضها .

٢ً — تناقش كل من النسب مع النسبة ذات المجهول وتفرق النسب الطردية من النسب العكسية وذلك بدلالة العلاقات الطردية اوالعكسية الموجودة بين كمياتها ويوضع شارة (طر) تحت النسبة الطردية وشارة (عك) تحت النسبة العكسية .

٣ً — يحسب قيمة المجهول (س) من قانون التناسب العام وهو :

المجهول (س) ؛ يساوي حاصل ضرب العدد المناظر له بالنسب الطردية ومقلوب النسب العكسية .

مثال — ما عدد الايام اللازمة الى ٢٠ عاملاً لينسجوا ٣٨٠ متراً من القماش اذا اشتغلوا في اليوم ٨ ساعات مع العلم ان ١٥ عاملاً يمكنهم ان ينسجوا ٤٥٠ متراً في ١٢ يوماً اذا اشتغلوا في اليوم ٦ ساعات .

الحل :

	يوم	عامل	امتار	ساعات العمل
	س	٢٠	٤٨٠	٨
	١٢	١٥	٤٥٠	٦
	عك		طر	عك

ومنه : س = ١٢ × $\frac{١٥}{٢٠}$ × $\frac{٤٨٠}{٤٥٠}$ × $\frac{٦}{٨}$ = ٧ $\frac{١}{٥}$ يوماً العدد المطلوب

ملاحظة — اذا كانت سلسلة المعلومات مكتوبة فوق سلسلة ذات المجهول فحينئذٍ يكون الحل معاكساً للحل السابق .

اي المجهول يساوي حاصل ضرب نظيره في النسب العكسية ومقلوب النسب الطردية .

مثلاً : لو كانت اعداد المسألة السابقة مرتبة كما يلي :

يوم	عامل	متر	ساعات
١٢	١٥	٤٥٠	٦
س	٢٠	٤٨٠	٨
عك		طر	عك

يكون: س = ١٢ × $\frac{١٥}{٢٠}$ × $\frac{٤٨٠}{٤٥٠}$ × $\frac{٦}{٨}$ = ٧ $\frac{١}{٥}$

تطبيقات القاعدة الثلاثية

القاعدة الثلاثية هي اساس لحل جميع المسائل ذات الاعداد المتناسبة وهذه تشمل انواع مسائل التناسب والنسبة المئوية والربح والخسارة والعمولة والخصم والحطيطة (اسقونطو) ومسائل الفائدة .

تمارين

١ـ المطلوب حساب قيمة س في التناسبات الآتية :

$$\frac{٣,٤}{٥} = \frac{٨}{س} \qquad \frac{\frac{٢٢}{٧}}{س} = \frac{س}{٧} \qquad \frac{\frac{١,٩}{٣}}{١١} = \frac{س}{١٠,٥}$$

$$\frac{س}{٢ - \sqrt{٥}} = \frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢} \qquad \frac{س}{\sqrt{٣}} = \frac{\sqrt{١٢}}{٨} \qquad \frac{س}{\sqrt{٥}} = \frac{٤ - \sqrt{٥}}{٤}$$

٢ـ حساب الوسط المتناسب مقرباً الى اقل من ٠,١ للاعداد الآتية :

٣,٧ و ٣٦ ؛ $٢\frac{٣}{٤}$ و $٦\frac{٧}{٩}$ ؛ ٠,٢٥ و ٠,٧٥

٣ـ حساب الاعداد المفروض فيها ما يلي :

مجموع عددين ١٧ وحاصل قسمتهما ٢,٦	فضل عددين ٢٩ وحاصل قسمتهما ٣,٧
« « ٢٠ « « ٢,٣	« « ٥٤ « « ٢,٥٧
« « ٣٧,٨ « « $\frac{٧}{٩}$	« « ٢٣,٤ « « ٢,٦٣

٤ـ تقسيم الاعداد الآتية بنسبة المقادير المحررة في جانب كل منها

٥٢٨ بنسبة : ٢ ، ٣ ، ٦

٢٤٠ « : ٧ ، ١٣,٥ ، ١١,٥

١٣٣٥ « : $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣}{٤}$

﴿مسائل عامة على الاعداد المتناسبة﴾

في التناسب

١ — ٢٤ عاملاً يحصدون ارضاً مساحتها ٣٠ هكتار في ٤٥ يوماً ويشتغلون في اليوم ١٠ ساعات فكم يوماً يلزم الى ٣٠ عاملاً ليحصدوا ارضاً مساحتها ٤٨ هكتار اذا اشتغلوا في اليوم ٨ ساعات

٢ — فئة من العمال قدرها ١٥ عاملاً انهوا ثلث عمل في ٨ ايام ثم تخلف منهم ٣ عمال فكم يوماً يلزم للعمال الباقين حتى يكملوا باقي العمل (٢٠ يوماً)

٣ — فيئتان من العمال الاولى تتم عملاً في ١٢ يوماً والثانية تتم نفس العمل في ١٦ يوماً فاذا اشتغل $\frac{١}{٣}$ الفيئة الاولى مع $\frac{٤}{٧}$ الفيئة الثانية فكم يوماً يتمموا ذلك العمل ؟ (١٥,٧٥ يوماً)

٤ — خرجت فرقة من الجنود عددها ٣٠٠٠ جندياً لعمل تمارين عسكرية تطول مدة ١٥ يوماً واخذت الدقيق الكافي لها باعتبار ان استحقاق الجندي في اليوم ٠,٩ كيلو غراماً ولكن بعد خروجها بخمسة ايام سرق من الدقيق ٣٠ كيساً وزن كل منهم كنتالاً فما المقدار اللازم تنزيله من استحقاق كل جندي حتى يكفيهم الدقيق الباقي لنهاية المدة ؟

٥ — ١٠٠ كيلو غرام قمح تعطى ٨٥ كيلو غراماً من الدقيق و ١٠٠ كيلو غرام دقيق تعطى ١٣٥ كيلو غراماً خبز فما مقدار الخبز الممكن استحصاله من ١٧٥ كيلو غرام قمح !

في الفائدة البسيطة .

٦ — ماالمدة مبلغ ١٢٠٠٠ فرنكاً وضع بسعر ٤,٥٪ لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور ؟.

٧ — ماهو المبلغ الذي ربح ٥٦٠ فرنكاً في مدة ٢ سنة و ٤ شهور بسعر ٦٪ ؟

٨ — ماالسعر الذي وضع به مبلغ ٨٠٠٠ فرنكاً لمدة ٣ سنوات ، ٥ شهور، ١٢ يوما فكان ربحه ١٩٣٢ فرنكاً

٩ — ماالزمن اللازم لمبلغ ٥٧٥٠ قرشاً ليربح ١٧٢,٥ قرشاً بسعر ٤,٥٪

١٠ — رجل يملك ٥٧٢٠ ليرة سورية وضع منها ٢٥٠٠ ليرة في مصرف بسعر ٤٪ لمدة ٥ سنوات والباقي وضعه بسعر ٥٪ للمدة عينها ثم قبض المبلغ وارباحه واشترى بذلك ارضاً ثمن الهكتار منها ٨٧ ليرة فالمطلوب حساب مساحة الارض

١١ — ماهو المبلغ الذي تصير جملته ٨٦١٧٢,٤٠ فرنكا بمدة ٥ شهور و ١٨ يوما اذا وضع بسعر ٤,٥٪

١٢ — شخص وضع باسم ولديه مبلغين مختلفين في مصرف بسعر ٥٪ واشترط الا يأخذا مايخصهما حتى يبلغ كل منهما سن العشرين وكان سن الاكبر وقتئذ ١٢ سنة والاصغر ٨ سنوات فما هما المبلغان المذكوران مع العلم ان كلا منهما اخذ عند بلوغه سن العشرين ٢٨٠٠ ليرة من المصرف .

١٣ — شخص عنده مبلغ وضع ثلثه بسعر ٥٪ وثمنه بسعر ٦٪ والباقي بسعر ٤٪ لمدة ٥ سنوات وبعد هذا الزمن استرد المبلغ وربحه فكان ذلك ٥٩٠٠ ليرة فما المبلغ ومامقدار كل جزء منه مع ربحه ؟

في الحطيطة

١٤ — ماالقيمة الحالية لسند قيمته الاسمية ٧٩٥٠ فرنكاً، حسم في ٣ نوفمبر

سنة ١٩٣٦ بسعر ٥٪ يستحق الدفع في ١٥ مارس ١٩٣٧

١٥ — ماالقيمة الاسمية لسند يستحق الدفع في ٣١ مارس ١٩٣٧ حسم في ١٥ يناير ١٩٣٧ بسعر ٣٪ فكانت حطيطته ٤٥ فرنكاً

١٦ — ماالسعر الذي حسبت به حطيطة سند واجب التأدية بعد ٧٣ يوماً فكانت ١٤ فرنكاً مع العلم ان قيمته الاسمية ٣٥٠٠ فرنكاً

١٧ - مايوم تاريخ تحويل سند قيمته الاسمية ١٩٠٠ فرنكا واجب التأدية في ٢٩ نيسان ١٩٣٧ حسم بسعر ٢,٥٪ مع العلم ان حطيطته الخارجية ٩,٥ فرنكا في النسبة المئوية

١٨ - رجل باع ارضاً بمبلغ ٢٦٠ ليرة سورية فخسر فيها ٣٥٪ من ثمن شرائها فما هو ثمن شراء الارض ؟

١٩ - الحليب يعطي ١٥٪ من وزنه قشطة والقشطة تعطي ٢٠٪ من وزنها سمناً فكم كيلو غرام سمن يمكن استحصاله من ١٥٠ ليتر حليب مع العلم ان كثافة الحليب (١,٠٣٤)

٢٠ - شخص اذا باع حصاناً بمبلغ ٣٢,٥ ديناراً يخسر ٢,٥٪ من ثمن شرائه فاذا باعه بمبلغ ٤٥ دينار كم يكون مقدار ربحه اوخسارته في المائة ؟

٢١ - شخص عنده عربة اذا باعها بمبلغ ٦٠ ديناراً يربح ٥٪ فبكم يبيعها لو اراد ان يربح ١٥٪ وما ثمن شرائها ؟

٢٢ - رجل باع دراجة بمبلغ ٢٤ ليرة سورية فخسر ٢٥٪ من رأسمالها فبكم يبيعها ليربح ٥٪ ؟

٢٣ - شخص اشترى مقداراً من التفاح كل ٥ بقرش واشترى مقداراً اخر

يساوي الاول كل ٧ بقرش فاذا خلط النوعين وباع كل ٦ تفاحات بقرش فهل يربح او يخسر وما مقدار ذلك في المائة ؟

٢٤ ـ تاجر اشترى بضاعة وباعها فربح فيها ١٥٪ من ثمن شرائها ثم اشترى بالمبلغ المتحصل بضاعة اخرى وباعها بمبلغ ٣٤٢٠ فرنكاً فكانت خسارته فيها ٨٪ من ثمن شرائها فالمطلوب حساب رأسمال البضاعة الاولى .

الفصل الخامس

﴿ المعادلة وحل مسائل على الابحاث السابقة في المعادلة ﴾

١٣٧ ـ المعادلة ـ هي عبارة عن مساواة تحتوي على حرف يدل على عدد مجهول

مثلاً ـ المساواة : ٢ س ـ ١٠ = $\frac{٣}{٥}$ س + ١٨ ..... (١) هي معادلة

خواص المعادلة :

١٣٨ ـ خاصة (١) يمكن اضافة عدد واحد الى طرفي المعادلة او طرح عدد واحد منهما .

مثلاً ـ المعادلة (١) نضيف الى طرفيها العدد (١٠) يصير :

$$٢ س ـ ١٠ + ١٠ = \frac{٣}{٥} س + ١٨ + ١٠$$

او : $٢ س = \frac{٣}{٥} س + ١٨ + ١٠$ ..... (٢)

وكذلك نطرح من طرفي المعادلة (١) العدد $\frac{٣}{٥}$ س يصير :

$$٢س - ١٠ - \frac{٣}{٥}س = \frac{٣}{٥}س + ١٨ - \frac{٣}{٥}س$$

$$او ٢س - \frac{٣}{٥}س - ١٠ = ١٨ \quad \ldots\ldots (٣)$$

ويلاحظ ان العدد (١٠) كان في الطرف الاول من المعادلة (١) ناقصاً صار في الطرف الثاني من المعادلة (٢) زائداً .

وكذلك العدد $\frac{٣}{٥}س$ كان في الطرف الثاني من المعادلة (١) زائداً اصبح في الطرف الاول من المعادلة (٣) ناقصاً وينتج من ذلك القاعدة الآتية :

١٣٩ - قاعدة - كل حد في المعادلة يمكن نقله من طرف الى آخر بعكس اشارته .

١٤٠ - خاصة (٢) - يمكن ضرب طرفي المعادلة بعدد واحد او تقسيمهما على عدد واحد (غير الصفر)

مثلاً المعادلة : $\frac{٣}{٤}س = ٢٤$ نضرب طرفيها في ٤ يصير :

$$٤ \times \frac{٣}{٤}س = ٢٤ \times ٤ \text{ ومنه : } ٣س = ٩٦$$

وكذلك المعادلة : $٣س = ٩٦$ نقسم طرفيها على ٣ يصير :

$$\frac{٣س}{٣} = \frac{٩٦}{٣} \text{ ومنه : } س = ٣٢$$

ملاحظة ـ بما ان التقسيم هو عملية معاكسة للضرب اذن لتقسيم مقدار على عددٍ ما (صحيحاً او كسراً) يضرب ذلك المقدار بمعكوس العدد

وعليه لتخليص الحرف المجهول (س) من امثالها $\frac{٣}{٤}$ نضرب طرفي المعادلة بمعكوس الامثال اي نضربهما في $\frac{٤}{٣}$ يصير :

$$\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} س = ٢٤ \times \frac{٤}{٣} \text{ ومنه } س = ٣٢$$

ويتضح من المثال السابق ان قيمة (س) ظهرت بعملية واحدة .

١٤١ ـ قاعدة ـ لحذف امثال العدد المجهول (س) نضرب طرفي المعادلة بعكس الامثال .

١٤٢ ـ نتيجة ـ اذ وجد في طرفي المعادلة عددان متساويان بالقيمة والاشارة يمكن حذفهما .

١٤٣ ـ حل المعادله ـ هو عبارة عن اجراء العمليات المقتضية لأستخراج قيمة الحرف التي بها تتحق قيمة المساواة .

كيفية حل المعادلة ـ لحل معادلةٍ ما يعمل مايلي :

١ً ـ تحذف الاقواس (اذا وجدت) ثم تنقل الحدود التي تشمل على الحرف المجهول في المعادلة الى الطرف الاول والحدود المعلومة (الاعداد) الى الطرف الثاني .

٢ً ـ تصلح حدود كل من طرفي المعادلة حتى ينتج من كل منهما حدٍ واحد فقط .

٣ً — تستحصل قيمة المجهول (س) وذلك بضرب طرفي المعادله بمعكوس امثال المجهول او بتجريده من المقام بالضرب ومن الامثال بالتقسيم .

لنفرض ان معادلة اصبحت بعد نقل الحدود واصلاح طرفيها كالشكل الآتي :

ب × س = حـ (بفرض ان ب ، حـ عددان معلومان)

يكون : $س = \frac{حـ}{ب}$

١٤٤ — تحقيق المعادلة — بعد استخراج قيمة المجهول (س) تعوض محلها في المعادلة وتحل فاذا نتج في الطرفين عددان متساويان كانت المعادلة محققة وقيمة المجهول صحيحة .

مثال (١) — المطلوب حل المعادلة : ٣ (س+٧) = س + ٣٧ يحل القوس اولا

يصير : ٣ س + ٢١ = س + ٣٧ تنقل الحدود

يصير : ٣ س — س = ٣٧ - ٢١ يصلح الطرفان

يصير : ٢ س = ١٦ يقسم الطرفان على (٢) امثال المجهول

ينتج : س = ٨

مثال (٢) — المطلوب حل المعادلة : $س - ٩ = \frac{١}{٢} س + \frac{٢}{٧} س$

تنقل الحدود فيصير : $س - \frac{١}{٢} س - \frac{٢}{٧} س = ٩$

نصلح الطرفين : $س(١ - \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٧}) = ٩$

(١٤) (٧) (٢)

او $س(\frac{١٤}{١٤} - \frac{٧}{١٤} - \frac{٤}{١٤}) = ٩$ ومنه: $س \times \frac{٣}{١٤} = ٩$

يضرب الطرفان في $\frac{١٤}{٣}$ يصير : $س \times \frac{٣}{١٤} \times \frac{١٤}{٣} = ٩ \times \frac{١٤}{٣}$ او $س = ٤٢$

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية :

$٣س + ١٥ = ٢س + ١٨$

$٣س - ٤ = س + ١٦$

$٢س - ٣ = ٣س - ٧$

$٣س + ٤ = ٥(س - ٢)$

$٢س + ٣ = ١٦ - (٢س - ٣)$

$٢(س - ٢) = ٢(٦ - س) + ٢$

$٥س + ٣ = ١٥ - س$

$٢س + ١٥ = ٢٧ - ٤س$

$١٥ - ٥س = ٢٤ - ٨س$

$٧(٢٥ - س) - ٢س = ٢(٣س - ٢٥)$

$(س + ٥)^{٢} = (س - ١)^{٢} + ٦٠$

$س^{٢} - (س + ٣)^{٢} = س + ٤$

$٢س(س + ٢) = س(س + ٤) + ٢٥$

$(٣س + ١)(٢س - ٧) = ٦(س - ٣)^{٢} + ٧$

$(٢س + ٣)(٢س - ٣) = ٧$

$\frac{س}{٤} + \frac{س - ٥}{٣} = ١٠$

$\frac{س - ٥}{١٠} + \frac{س + ٥}{٥} = ٥$

$\frac{س - ٢}{٦} + \frac{س + ١٠}{٩} = ٥$

$\frac{س + ١٩}{٥} = ٣ + \frac{س}{٤}$

$\frac{س - ٤}{٧} = \frac{س - ١٠}{٥}$

$\frac{س - ١}{٨} - ١ = \frac{س + ١}{١٨}$

$\frac{س + ٢٠}{٩} + \frac{٣س}{٧} = ٦$

$\frac{س - ٨}{٧} + \frac{س - ٣}{٣} + \frac{٥}{٢١} = ٠$

$\frac{٤ - ٥س}{٦} - \frac{١ - ٢س}{٣} = \frac{١٣}{٤٢}$

$\frac{٥(س + ٥)}{٨} - \frac{٢(س - ٣)}{٧} = \frac{١٥٩}{٢٨}$

﴿ القوانين وتبدلاتها ﴾

القواعد العامة والثابتة في الحساب والهندسة تفاد بالقوانين (الدساتير)

١٤٥ — القانون (الدستور) — هو عبارة عن مساواة حرفية تساعد على استخراج قيمة الحرف (المسمى مجهولا) اذا علمت مقادير الحروف الأخر .

مثال (١) — قانون مساحة المستطيل هو س = ق × ع .....(١)

« « « المثلث « : س = $\frac{١}{٢}$ ق × ع.....(١)

فاذا علم قيمة حرفين من الحروف س ، ق ، ع يمكن حساب قيمة الحرف الثالث في كل من القانونين (١) ، (٢)

مثال (٢) — في مسائل الحركه المنتظمة طول المسافة يساوي حاصل ضرب سرعة الجسم المتحرك في الزمن الذي يمضي لقطع تلك المسافة .

فاذا فرضنا ان المسافه (م) والسرعة (س) والزمن (ن)

فطول المسافة تساوي : م = س × ن

مقدار السرعة « : س = $\frac{م}{ن}$

« « « : ن = $\frac{م}{س}$

} هذه هي قوانين الحركه المنتظمة

فمتى علم قيمة حرفين من الحروف الثلاثة (م ، س ، ن) يمكن حساب قيمة الحرف الثالث .

ويلاحظ ان القوانين السابقة ينتج بعضها من بعض .

مثال (٣) — في مسائل الفائدة يفرض ان :

المبلغ « رأس المال » هو : م
الربح « الفائدة » « : ر
الزمن « : ن
السعر « : ع

فقانون الفائدة يكون :

$$ر = م \times ن \times \frac{ع}{١٠٠} \quad \ldots\ldots (١)$$

فاذا علمت قيمة ثلاثة حروف من الحروف الاربعة ر ، م ، ن ، ع (بفرض ان ن عدد السنين) يمكن حساب قيمة الحرف الرابع بواسطة قانون الفائدة

فمثلاً من القانون (١) في المثال الثالث ينتج : $١٠٠ \times ر = م \times ن \times ع$

وبقسمة طرفي المعادلة على $ن \times ع$ يحدث : $م = \frac{١٠٠ \times ر}{ن \times ع}$ ... (قانون رأس المال)

« « « « « « « : $ن = \frac{١٠٠ \times ر}{م \times ع}$ ... (قانون الزمن)

« « « « « « « : $ع = \frac{١٠٠ \times ر}{م \times ن}$ ... (قانون السعر)

ويتضح مما سبق ان القوانين الأربعة ينتج بعضها من بعض

ملاحظة — اذا اضيف الربح الناتج من اي مبلغ الى رأس المال فالحاصل يسمى « بالغاً »

واذا رمزنا الى البالغ بالرمز « با » يصير : با = م + ر

وبتعويض « ر » بمساواتها $م \times ن \times \frac{ع}{١٠٠}$ في المعادلة السابقة يصير :

با = م + م × ن × ع ٠,٠ ومنه ينتج :

با = [١ + ن × ع ٠,٠] ..... قانون البالغ

ومنه : م = $\frac{\text{با}}{١ + \text{ن} \times \text{ع}\ ٠,٠}$ ..... قانون رأس المال [المبلغ]

ومن المعادلة : با = م + م × ن × ع ٠,٠

يمكننا ان نكتب : با - م = م × ن × ع ٠,٠

فاذاقسم طرفا المعادلة على [م × ع ٠,٠] يحدث ن = $\frac{\text{با} - \text{م}}{\text{م} \times \text{ع}\ ٠,٠}$ [قانون الزمن]

« « « « [م × ن] « : ع ٠,٠ = $\frac{\text{با} - \text{م}}{\text{م} \times \text{ن}}$

او : ع = $\frac{١٠٠ [\text{با} - \text{م}]}{\text{م} \times \text{ن}}$ ..... [قانون السعر]

حل مسائل على الابحاث السابقة في المعادلة

مسألة [١] - مساحة مثلث ٤٩٠ متراً مربعـــاً وطول قاعدته ٣٥ متراً فما طول ارتفاعه ؟

الحل - قانون مساحة المثلث هو : س = $\frac{١}{٢}$ ق × ع

نعوض الحروف المعلومة باعدادها يصير : ٤٩٠ = $\frac{١}{٢}$ × ٣٥ × ع

او : $\frac{٣٥}{٢} \times ع = ٤٩٠$

ومنه : $ع = \frac{٢}{٣٥} \times ٤٩٠ = ٢٨$ متراً طول ارتفاع المثلث المطلوب

مسألة [٢] ـ ما فائدة مبلغ قدره [٢٥٠٠] فرنكاً وضع بسعر ٤ ٪ لمدة سنة و ٣ شهور ؟

الحل ـ قانون الفائدة هو : $ر = م \times ؟ \times \frac{ع}{١٠٠}$

نعوض الحروف المعلومة باعدادها : $ر = ٢٥٠٠ \times ٢,٢٥ \times ٠,٠٤ = ٣٠٠$ فرنكاً الفائدة المطلوبة

مسألة [٣] ـ ما السعر لمبلغ ٢٠٠٠ فرنكاً وضع بالفائدة البسيطة لمدة ٣ سنوات فصار بالغه ٢٣٠٠ فرنكاً ؟

الحل ـ قانون السعر في مسائل البالغ هو : $ع = \frac{١٠٠ [با - ر]}{م \times ؟}$

نعوض الحروف المعلومة باعدادها يصير : $ع = \frac{١٠٠ [٢٣٠٠ - ٢٠٠٠]}{٣ \times ٢٠٠٠}$

ومنه : $ع = \frac{١٠٠ \times ٣٠٠}{٣ \times ٢٠٠٠} = ٥$ مقدار السعر المطلوب

مسألة [٤] ـ مبلغان احدهما يساوي $\frac{٥}{٧}$ الثاني وضعا بالفائدة البسيطة ، الاول لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور بسعر ٥ ٪ والثاني لمدة ٢ سنة و ٣ شهور بسعر

٤,٥ ٪ فكان ربح الاول زائداً عن ربح المبلغ الثـــاني بمقدار ٨٠,٥٠ فرنكاً فالمطلوب حساب كل من المبلغين .

الحل - يفرض المبلغ الثاني [س] فيكون المبلغ الاول [$\frac{٥}{٨}$ س]

وفائدة المبلغ الاول : $\frac{٥}{٨}$ س × ٣ $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٥}{١٠٠}$ او $\frac{٥}{٨}$ س × $\frac{١٠}{٣}$ × $\frac{٥}{١٠٠}$

« « الثاني : س × ٣ $\frac{١}{٤}$ × $\frac{٤,٥}{١٠٠}$ او س × $\frac{٩}{٤}$ × $\frac{٤,٥}{١٠٠}$

ومعادلة المسألة تكون :

$$\frac{٥}{٨} \text{س} \times \frac{١٠}{٣} \times \frac{٥}{١٠٠} - \text{س} \times \frac{٩}{٤} \times \frac{٤,٥}{١٠٠} = ٨٠,٥$$

ومنه : $$\frac{٢٥ \text{ س}}{٢٤٠} - \frac{٨١ \text{ س}}{٨٠٠} = ٨٠,٥$$

او : $$\text{س} \left(\frac{٢٥}{٢٤٠} - \frac{٨١}{٨٠٠} \right) = ٨٠,٥$$

(١٠) (٣)

، : $$\text{س} \left(\frac{٢٥٠}{٢٤٠٠} - \frac{٢٤٣}{٢٤٠٠} \right) = ٨٠,٥$$

، : $$\text{س} \times \frac{٧}{٢٤٠٠} = ٨٠,٥$$

$$\left\{\begin{array}{l} س = ٨٠,٥ \times \frac{٢٤٠٠}{٧} = ٢٧٦٠٠ \text{ فرنكاً المبلغ الثاني} \\ و \quad ٢٧٦٠٠ \times \frac{٥}{٧} = ٧٢٥٠ \quad \text{« « الاول} \end{array}\right. \quad \text{وهما العددان المطلوبان}$$

مسألة (٥) — رجل عمره الآن ٣٥ سنة وله ولد عمره ١٢ سنة فبعد كم من السنين يصير عمر الاب ضعف عمر الولد ؟

الحل — يفرض ان عدد السنوات اللازمة لتحقيق المسألة هو (س)

عمر الاب الآن : ٣٥ سنة ويصير عمر الاب بعد (س) من السنوات: ٣٥ + س

« الولد « : ١٢ « « عمره « (س) « « : ١٢ + س

ومعادلة المسألة تكون :

$$٣٥ + س = ٢ (١٢ + س)$$

وبالحل : $٣٥ + س = ٢٤ + ٢ س$

$$س - ٢ س = ٢٤ - ٣٥$$

او $- س = - ١١$ ومنه $س = ١١$ سنة الزمن اللازم لتحقيق المسألة

مسألة (٦) — شخص عنده ٥٨ قطعه نقود منها ذوات خمس وعشرين قرشاً ومنها ذوات عشرة قروش وقيمتها جميعاً تعادل ١١٣٥ قرشاً فما عدد كل نوع من القطع ؟

الحل — يفرض عدد قطع الخمس وعشرين هو (س) فالقطع ذوات العشرة قروش تكون : (٥٨ - س)

وعليه فمعادلة المسألة تصير : ٢٥ × س + ١٠ × (٥٨ - س) = ١١٣٥

وبالحل : ٢٥ س + ٥٨٠ - ١٠ س = ١١٣٥

، : ٢٥ س - ١٠ س = ١١٣٥ - ٥٨٠

، : ١٥ س = ٥٥٥

ومنه : $س = \frac{٥٥٥}{١٥} = ٣٧$ عدد قطع ذوات ٢٥ قرشاً

، : ٥٨ - ٣٧ = ٢١ » » » » ١٠ قرشاً

مسألة (٧) - توجهت عربة من نقطة ب قاصدة نقطة حـ بسرعة ٦ كيلومتراً في الساعة وبعد حركتها بمدة ثلاث ساعات خرجت دراجة من ب على نفس الطريق بسرعة ١٦ كيلو متراً في الساعة وتعقبت العربة ففي اي وقت تلحق الدراجة العربة؟

الحل - يفرض ان الزمن الذي سارت فيه العربة هو « ن » فيكون الزمن اللازم للدراجة حتى تلحق العربة هو « ن - ٣ »

وتكون معادلة المسألة هي : ٦ ن = ١٦ (ن - ٣)

وبالحل : ٦ ن = ١٦ ن - ٤٨

، : ٦ ن - ١٦ ن = - ٤٨

، : - ١٠ ن = - ٤٨

ومنه : $ن = \frac{-٤٨}{-١٠} = ٤,٨$ ساعة الزمن اللازم للدراجة حتى تلحق العربة .

﴿ مسائل على المعادلة ﴾

١ — ما العددان اللذان مجموعهما ٢٤ وفضلهما ٦ ؟

٢ — الفرق بين عددين ١٢ واذا اضيف الى اكبرهما ٣ يصير الناتج مساوياً ضعف الصغير فما هما العددان ؟

٣ — عمر أب ٣٩ سنة وعمر ابنه ٧ سنوات في اي سنة يصير عمر الأب ثلاثة اضعاف عمر الابن ؟

٤ — عمر أب اربعة امثال عمر ابنه وبعد ٢٤ سنة يصير عمر الأب ضعف عمر الابن فما عمر كل منهما الآن ؟

٥ — مجموع عمري رجل وولده ٦٢ سنة ومنذ ٧ سنوات كان عمر الأب ثلاثة امثال عمر الابن فما عمر كل منهما الآن ؟

٦ — مجموع اعمار ثلاثة اشخاص ١٠٠ سنة ؛ عمر الكبير يساوي مجموع عمري الآخرين وعمر الصغير ينقص عن عمر المتوسط ١٠ سنوات فما عمر كل منهم ؟

٧ — صراف عنده علبة تحتوي على ٤٠ قطعة نقود من ذوات الخمس وعشرين قرشاً وذوات الخمس قروش ، فاذا كان قيمة النقود جميعها ٥٠٠ قرشاً فما عدد كل نوع منها ؟

٨ — قيمة ٣٦ بطاقة ٦٧٥ قرشاً ؛ قسم منها بسعر البطاقة ١٠ قروش والآخر بسعر البطاقة ٢٥ قرشاً فما عدد كل من النوعين ؟

٩ — تشكيل خليطة من القهوة قدرها ١٠٠ كيلوغرام وثمنها ٩٢٦ فرنكاً

من نوعين من القهوة سعر الكيلوغرام من الاولى ١١,٥ فرنكاً وسعر الكيلوغرام من الثانية ٨ فرنكات فما مقدار ما يؤخذ من النوعين ؟

١٠ — سبيكة ذهبية وزنها ١٢٠ غراماً وعيارها ٠,٩٠٠ فكم غراماً من النحاس يجب اضافته على هذه السبيكة ليصير عيارها ٠,٨٢٥ ؟

١١ — صائغ يريد عمل آنية فضية وزنها ٣٠٠ غراماً وعيارها ٠,٨٣٥ من سبيكتين فضيتين عيار الاولى ٠,٩٥٠ وعيار الثانية ٠,٨٠٠ فالمطلوب حساب المقدار اللازم اخذه من كلا السبيكتين ؟

١٢ — شخص يملك ٨٠٠٠٠ قرشاً وضع قسماً منها في مصرف بسعر ٥٪ ووضع الباقي في مصرف آخر بسعر ٤٪ فاذا اخذ من المصرفين معاً ربحاً سنوياً قدره ٣٦٥٤ قرشاً فما مقدار ما وضعه في كل من المصرفين ؟ «٤٥٤٠٠، ٣٤٦٠٠»

١٣ — مبلغان نسبة الاول الى الثاني $\frac{٣}{٤}$ وضع الاول في مصرف لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور بسعر ٥٪ والثاني وضع لمدة ٢ سنة و ٣ شهور بسعر ٤,٥٪ فكان ربح الاول يزيد ٤٧٥ فرنكاً عن الثاني فالمطلوب حساب كل من المبلغين .

«١٥٠٠٠، ٢٠٠٠٠»

١٤ — شخص وضع $\frac{٣}{٧}$ مبلغ في مصرف بسعر ٨٪ ووضع الباقي منه في مصرف آخر بسعر ٦٪ ولكنه لو عكس الامر ووضع الاول بسعر ٦٪ والثاني بسعر ٨٪ يزيد ربحه ٢٠٠ فرنكاً فما هو المبلغ ؟

١٥ — رجل وضع مبلغاً بسعر ٥٠٪ لمدة ٣,٥ سنة ثم وضع البالغ من ذلك بسعر ٦٪ فكان ربحه السنوي ٤٧٩٤ قرشاً فما هو اصل المبلغ ؟

١٦ — المطلوب ايجاد عددين فضلهما ٥٠ ويتناسبان عكساً مع العددين ٩،٧

١٧ — ما هو الكسر الذي قيمته تساوي $\frac{١٥}{١٩}$ والفرق بين حديه ٢٤ ؟

١٨ — عددان مجموعهما ٤٦ واذا اضيف $\frac{١}{٧}$ الاول الى $\frac{١}{٣}$ الثاني ينتج ١٠ فما هما العددان ؟

١٩ — ما العددان المتتاليان اللذان يزيد خمس اكبرهما على سبع الاصغر ٣ ؟

٢٠ — مستطيل طوله يزيد على عرضه ٣ امتار ولو زاد الطول ٣ امتار ونقص العرض مترين لما تغير سطح المستطيل فالمطلوب حساب بعدي المستطيل « ١٢،١٥ م »

٢١ — غرفة مستطيلة الشكل عرضها يعادل $\frac{٢}{٣}$ طولها فاذازاد العرض متراً ونقص الطول متراً تصير مربعة فما طول بعدي هذه الغرفة ؟

٢٢ — شبه منحرف مساحته ٩ هكتار ، ٦ آر ، ١ سانتيار ؛ ارتفاعه يساوي قاعدته الوسطى وقاعدته الصغرى تعادل $\frac{٢}{٥}$ قاعدته الكبرى فالمطلوب حساب طول ارتفاعه وكل من قاعدتيه ؟ (١٧٢،٤٣٠،٣٠١)

٢٣ — ما العدد اللازم اضافته الى حدي الكسر $\frac{٢٣}{٤٠}$ ليصبح مساوياً $\frac{٢}{٣}$ ؟

٢٤ — حوض مملوء زيتاً سعته ٢٩٤٠ ليترة اخذ منه مقدار $\frac{٤}{٣}$ ما ترك فيه فكم ليترة اخذ منه ؟

٢٥ — اناء آن ملاء آن زيت ؛ وهما يحتويان ٣٥٧ ليتراً فاذا اخذ من الاول ١٥ ليترة ومن الثاني ١٠٨ ليتراً لكان ما بقي في الاول مساوياً ما بقي في الثاني فما سعة كل منهما ؟

٢٦ — قام رجل من نقطة (ب) متوجهاً نحو (ح) ماشياً بسرعة ٤ كيلومترات في الساعة وبعد قيامه بمقدار ٥ ساعات قام رجل آخر من (ب) راكباً دراجة تسير بسرعة ١٦ كيلومتراً في الساعة ومتعقباً الاول فالمطلوب حساب الزمن اللازم للثاني حتى يلحق الاول ($١\frac{٢}{٣}$ ساعة)

٢٧ — ركب رجل عربة من نقطة (ب) لاجل النزهة سرعتها ١٢ كم في الساعه وقطع مسافة ثم نزل من العربة ورجع ماشياً بسرعة ٤ كم في الساعة فاستغرق زمن ذهابه ورجوعه ٥ ساعات فالمطلوب حساب طول المسافة التي قطعها راكباً . « ١٥ كم »

٢٨ — عربة تقطع ٨٠ متراً في الدقيقة ودراجة تسير ١٥ كم في الساعة تحركتا من قرية واحدة وتلاقيا في بلدة واحدة على طريقهما فما هي المسافة بين القرية والبلدة

مع العلم ان العربة تحركت قبل الدراجة بمدة ساعة و ٢٥ دقيقة «١٠كم»

٢٩ — المسافة بين دمشق وبيروت ١٧٠ ك م ، خرجت سيارة من بيروت في الساعة٦صباحاًقاصدةدمشق بسرعة ٤٥ كيلو متراً في الساعة وخرجت سيارة من دمشق في الساعة ٦ والدقيقة ٤٠ صباحاً قاصدة بيروت بسرعة ٦٠ كيلو متراً في الساعة فالمطلوب حساب زمن تلاقيهما وعلى اي بعد من دمشق تتلاقيان «الساعة ٨ ، مسافة ٨٠ ك م»

٣٠ — قريتان ب ، حـ المسافة بينهما ٥٢٠ كيلو متراً اذا خرجت منهما سيارتان في وقت واحد واتجهتا نحو بعضهما يتلاقيان بعد ٤ ساعات من خروجهما واذا سارتا على اتجاه واحد من نحو حـ تتلاقيان بعد ١٣ساعة من خروجهما فالمطلوب حساب سرعة كل منهما . «٨٥ ، ٤٥»

انتهى

الفهرس

البحث	الصحيفة
﴿ الفصل الاول ﴾	
في الاعداد الصحيحة	
حاصل الجمع وخواصه	٢
حاصل الطرح (الفضل) وخواصه	٤
المساواة وخواصها	٧
الجداء وخواصه	٩
حاصل القسمة وخواصها	١١
قابلية القسمة	١٩
القوى وخواصها	٢٩
الاعداد الاولية وخواصها	٣٢
القواسم وخواصها	٤٢
القاسم المشترك الاعظم	٤٦
المضاعف المشترك الاصغر	٤٩
مسائل محلولة على الابحاث السابقة	٥٣
« للحل « « «	٥٧
﴿ الفصل الثاني ﴾	
في الكسور	
معلومات اولية في الكسور	٦٠
القياس المشترك بين مقدارين	٦٢
التحري على القاسم المشترك الاعظم لمقدارين مفروضين	٦٣
الكسور الاعتيادية وخواصها	٦٨
اعمال الكسور	٧٤
تمارين عامة على الكسور	٨٠
الكسور العشرية وخواصها واعمالها	٨٢
تحويل الكسور الاعتيادية الى عشرية	٨٥
حاصل القسمة التقريبي	٨٦
عمليات حرفية في الكسور	٨٧
مسائل عامة على المقاييس والكسور	٨٩
﴿ الفصل الثالث ﴾	
في المربع والجذر المربع	
الاعداد المربعة وخواصها	٩٥
الفضل بين مربعي عددين متواليين	٩٦
مربع جداء عدة اعداد	٩٧
مربع مجموع عددين	٩٩
مربع فضل عددين	١٠٢

تابع الفهرس

البحث	الصحيفة
تمارين ومسائل على الاعداد المربعة	١٠٤
الجذر المربع	١٠٥
جذر مربع الاعداد الصحيحة	١٠٦
خاصة الباقي في الجذر المربع	١٠٩
الجذر المربع التقريبي	١١٢
جذر مربع الكسور	١١٤
جذر مربع جداء	١١٥
تمارين ومسائل على الجذر المربع	١١٧
الفصل الرابع	
في الاعداد المتناسبة	
النسبة بين مقدارين وخواصها	١١٩
التناسب وخواصه	١٢٢
الرابع المتناسب والوسط المتناسب	١٢٧
الاعداد المتناسبة	١٢٩
تطبيقات على الاعداد المتناسبة	١٣١
المقادير المتناسبة طرداً او عكساً	١٣٤
القاعدة الثلاثية	١٣٧
حل القاعدة الثلاثية بطريقة السلسلة	١٤٠
تمارين ومسائل على الاعداد المتناسبة	١٤٢
الفصل الخامس	
في المعادلات من الدرجة الاولى	
المعادلة وخواصها	١٤٦
كيفية حل المعادلة	١٤٨
القوانين الحسابية والهندسية	١٥١
قوانين الحركة المنتظمة	١٥١
« الفائدة البسيطة	١٥٢
« البالغ بالفائدة البسيطة	١٥٣
مسائل محلولة في المعادلة	١٥٦
مسائل للحل في المعادلة	١٥٨

511:K23kiA:c.1
فازان ،محمد نشأة
الحساب لتلاميذ المدارس الثانوية. دروس
AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES
01026605

American University of Beirut

511
K23kiA

General Library

511
K23kiA