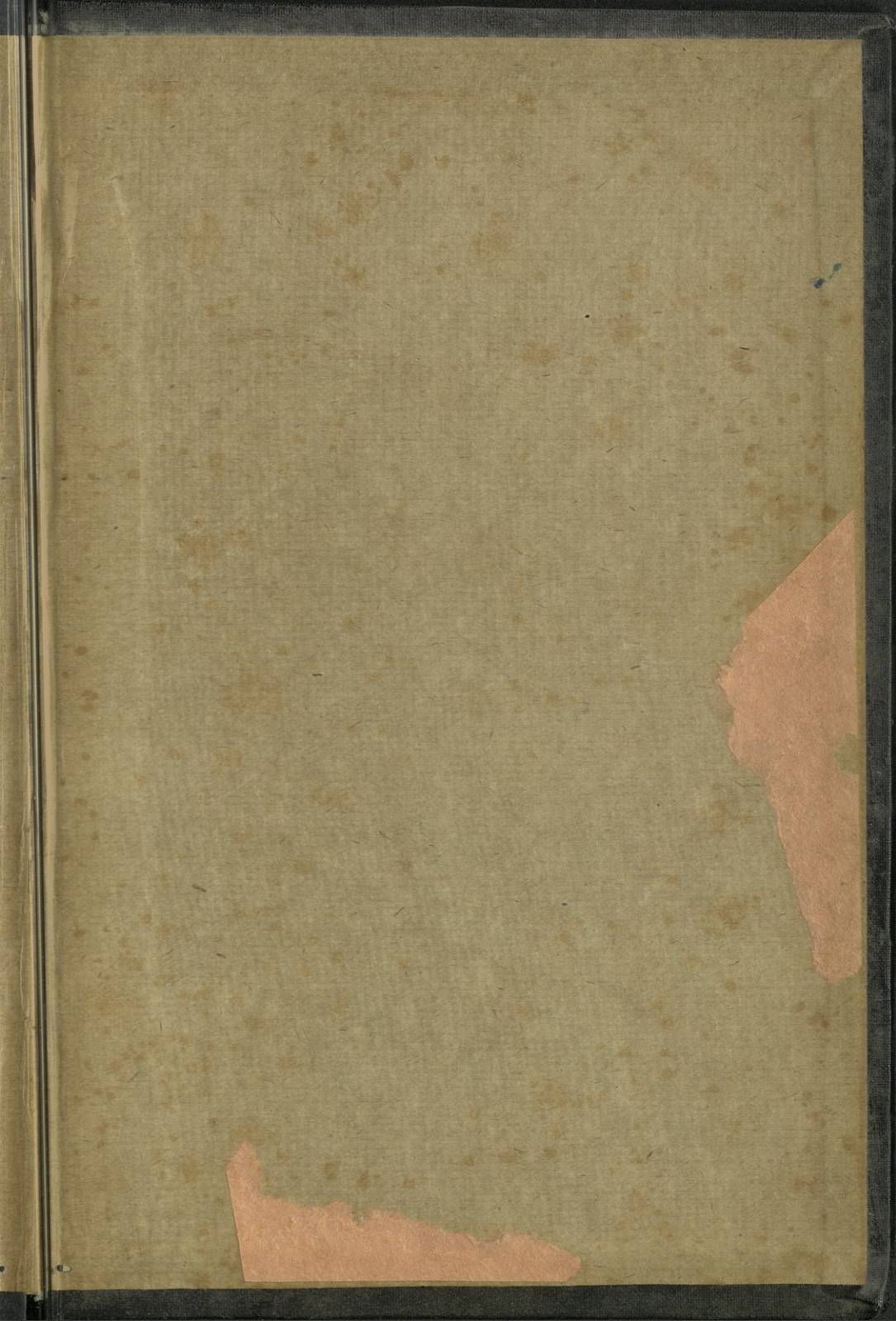




511: K23kiA

قازان - محدثه

كتاب الحساب لتلاميذ المدرس الثانوية

DEC 7

X233

APR 21 A369

511

K23kiA

DE 21 '53

~~5 54~~

OC 31

~~18 NOV 1972~~

A

Oct 2nd 1947

29

كِتَاب

511

K2361A
c.1

الحِساب

لتلاميذ المدارس الثانوية

دروس عملية ونظرية

مقرر الصف الرابع

بإرفاق منهاج وزارة معارف الجمهورية السورية

تأليف

محمد النشأة

استاذ الرياضيات في مدرسة تجهيز البنات بحلب

١٩٤٢

— الطبعة الثانية —

١٣٦١

67498

حقوق الطبع محفوظة

مكتبة المعارف بدمشق

طلواحي وهاشمي

Cat. Nov. 1947

الفصل الاول



في الاعداد المسمومة

البحث الاول - في خواص الاعمال الاربعة

حاصل الجمع

١ - لنفرض ان مدرسة تحتوي على ثلاث فصول، عدد تلاميذ الفصل الاول منها هو (ب) وعدد تلاميذ الفصل الثاني (ح) والثالث (د) .

فعدد التلاميذ الذين تحتويهم هذه المدرسة هو حاصل جمع ب ، ح ، د ويفاد بالوضع (ب + ح + د) .

والاعداد ب ، ح ، د يقال لها حدود حاصل الجمع .

ولما كان عدد تلاميذ المدرسة لا يتغير فيما اذا بدأنا بعد التلاميذ من الفصل الاول فالثاني فالثالث او من الفصل الثالث فالاول فالثاني اذن يمكننا ان نكتب :

$$ب + ح + د = د + ح + ب$$

وينتج من ذلك الخاصة الآتية :

خاصة (١) - حاصل جمع عدة اعداد لا يتغير فيما اذا اضيفت هذه

الاعداد الى بعضها في اي ترتيب كان

٢ - لنفرض في المثال السابق ان تلاميذ الفصل الثاني جلسوا مع تلاميذ

الفصل الثالث في غرفة واحدة فعندئذ يكون عدد تلاميذ المدرسة وزع على غرفتين

احدها تحتوي على تلاميذ الفصل الاول وعددهم ب والثانية تحتوي على تلاميذ الفصلين الثاني والثالث وعددهم (ب + د)

ومن حيث ان حاصل جمع التلاميذ لا يتبدل فيما اذا جلس تلاميذ كل فصل منهم في غرفة او اتحدت تلاميذ بعض الفصول مع اخرى عليه يمكننا ان نكتب :

$$ب + د + ب = د + ب + [ب + د]$$

وهذه المساواة تقاد بالخاصة الآتية :

خاصة (٢) — حاصل جمع عدة اعداد لا يتغير اذا عوض طائفة منها بحاصل جمعها .

٣ — اذا بدلنا طرفي المساواة ، ب + د + ب = د + ب + [ب + د] كلا بالآخر يصير :

$$ب + د + ب = [ب + د] + ب$$

وهذه المساواة تسمى بالخاصة الآتية :

خاصة (٣) — حاصل جمع عدة اعداد لا يتغير اذا عوض احدها بمجموعة اعداد تساويه .

$$\text{مثلاً : } ٨ + ١٢ = ٨ + [٥ + ٧]$$

٤ — من الخاصة السابقة ينتج :

١ — لاضافة مجموعة اعداد الى عدد ما ، يضاف كل من حدودها على التعاقب الى ذلك العدد

مثلاً — ليكن ؛ م = ب + د

فيمكننا ان نكتب : م + ب = ب + م + [ب + د]

$$ا + ب + ج = م$$

٢ - لاضافة مجموعة اعداد الى مجموعة ثانية ، يضاف حدود كل من المجموعتين الى بعضها

$$\text{مثلاً - ليكن : } ب = ق + ك ، م = ا + ب + ج$$

$$\text{فنكتب : } ب + م = [ق + ك] + [ا + ب + ج]$$

$$\text{او : } ب + م = ق + ك + ا + ب + ج$$

ملاحظة - الطريقة المتبعة في جمع الاعداد هي عبارة عن تطبيقات الخواص السابقة .

$$\text{فمثلاً : } ٥٢ + ٤٣٧ = [٥٠ + ٢] + [٤٠٠ + ٣٠ + ٧]$$

تضاف الاعداد ذات الرتب المتساوية الى بعضها

$$\text{يصير : } ٥٢ + ٤٣٧ = [٢ + ٧] + [٥٠ + ٣٠] + ٤٠٠$$

$$٥٢ + ٤٣٧ = ٩ + ٨٠ + ٤٠٠ = ٤٨٩$$

فصل الطرح - الفصل

٣ - الفضل بين عددين ب : $ا$ [بفرض ان $ا < ب$] هو عدد ثالث

مثل [ل] اذا اضيف الى [$ا$] ينتج العدد [ب]

ويضاف بالوضع : $ل = ب - ا$ او $ل + ا = ب$

فالعددان ب ، $ا$ يسميان [حدي الفضل]

خاصة (١) - الفضل بين عددين لا يتغير اذا اضيف الى حديه عدد واحد

او طرح منهما عدد واحد .

اذ في الحقيقة لو فرضنا ان عدد تلاميذ الفصل الاول في احدي المدارس [٤٠]

وعدد تلاميذ الفصل الثاني منها [٣٠] لكان الفضل بين تلاميذ الفصلين [١٠]

$$\text{اي } ٤٠ - ٣٠ = ١٠$$

فاذا دخل الى كل من الفصلين ٥ تلاميذ او خرج من كل منهما ٥ تلاميذ فالفضل بينهما لا يتغير

$$\text{اي: } ١٠ = [٥ + ٣٠] - [٥ + ٤٠]$$

$$\text{او: } ١٠ = [٥ - ٣٠] - [٥ - ٤٠]$$

$$\text{وبصورة عامة يكون: } ل = [ا + ب] - [ا + ج]$$

$$\text{او: } ل = [ا - ب] - [ا - ج]$$

٦ - قاعدة (٢) - لاضافة فضل عددين الى عدد ما يضاف الحد الاول

من الفضل ويطرح الثاني

$$\text{مثلاً: } ٣٧٠ = [٧ - ١٢] + ٣٧٠$$

اذ في الحقيقة لو فرضنا ان قرية عدد نفوسها ٣٧٠ نسمة وكان في احد الشهور عدد المواليد فيها ١٢ وعدد الوفيات ٧ ، فعدد نفوسها في نهاية ذلك الشهر يبلغ :

$$٣٧٥ = ٣٧٠ + ٥ \text{ او } ٣٧٥ = ٣٧٠ + ٧ - ١٢$$

$$\text{وعليه: } ب + [ا - ج] = ا - ج + ب$$

ويتضح مما سبق :

ان القوس المسبوقة باشارة زائد [+] يمكن حذفها مع ابقاء اشارات حدودها .

٧ - قاعدة (٣) لاطرح فضل عددين من عدد يضاف الحد الثاني من

الفضل ويطرح الاول

$$\text{اي : } ٣٧٠ - [٧ - ١٢] = ٣٧٠ + ٧ - ١٢$$

حيث لو فرضنا في المثال السابق [مادة - ٦] ان عدد الوفيات في القرية ١٢ وعدد المواليد ٧ لكان عدد نفوسها في نهاية الشهر: بالغا :

$$٣٧٠ - ٣٧٠ = ٠ \text{ او } ٣٧٠ + ٧ - ١٢ = ٣٦٥$$

$$\text{وعليه : } ب - [د - ح] = د - ح + ب$$

وينتج من هذه الخاصة :

ان القوس المسبوقـة بإشارة ناقص [-] يمكن حذفها مع عكس
شارات حدودها .

٨ - خاصـة (٤) - لطرح مجموعة اعداد من عددٍ ما بطرح كل من
حدود المجموعة على التعاقب من ذلك العدد .

$$\text{مثال : } ٢٧ - [٥ + ٧] = ٢٧ - ٥ - ٧$$

في الحقيقة لو فرضنا ان تلميذاً يملك ٢٧ فرنكاً، اشترى كتاباً بمبلغ ٧ فرنكات
ودفعراً بمبلغ ٥ فرنكات فيكون الباقي عنده بعد ذلك هو :

$$٢٧ - ١٢ = ١٥ \text{ او } ٢٧ - ٥ - ٧ = ١٥$$

٩ - قاعدة - لاصلاح طائفة اعداد بعضها مسبوق بإشارة زائد
وبعض الآخر مسبوق بإشارة ناقص ؛ يجمع كل نوع من الاعداد على حدة
ويطرح الناتجان من بعضهما .

$$\text{مثلاً : } ١٥ + ٨ - ٩ - ٣ + ٦ = [٦ + ٨] - [٣ + ٩]$$

$$١٥ + ٨ - ٩ - ٣ + ٦ = [١٥ + ٨] - [٩ + ٣]$$

تمارين

١- المطلوب اصلاح التراكيب الآتية بعد حذف اقواسها :

$[\text{ب} + \text{د} + \text{ج}] + \text{ب}$ $[\text{ب} - \text{ج}] + \text{ب}$ $[\text{ب} + \text{ج}] - \text{ب}$ $[\text{ب} + \text{د} - \text{ج}] - \text{ب}$ $[\text{ب} \text{ د} - \text{ج}] - [\text{د} \text{ ج} - \text{ب}] + \text{ب}$	$[٥ + ٨ + ٧] + ٢٥$ $[٣٧ - ٢٥] + ٤٨$ $[١١ + ١٥] - ٣٩$ $[٣ + ٩ - ١٢] - ٢٤$ $[١٠ - ٥ + ٨] - [١١ + ٣ - ٧] + ٨$
--	--

٢- وضع ثلاثة اعداد متعاقبة من الاعداد الآتية ضمن قوس مسبوقة باشارة زائد والثلاثة الاخرى ضمن قوس مسبوقة باشارة ناقص .

$\text{ب} - ٢ + \text{د} - ٣ + \text{ج} - ٥ + \text{ب} - ٥$ $١٢ + \text{ب} - ٣ + ٥ - \text{د} + ٧ - \text{ج} - ٤ + ٣$ $٨ + \text{ب} + ٧ + \text{د} - ٦ - ٥ - \text{ج} - ٤ - ٣$ $٧ - \text{ب} - ٤ + ٥ - \text{د} - ٣ - \text{ج} - ٢$ $٢ + \text{ب} + ٣ + \text{د} - ٤ - \text{ج} - ٢ - ٣$	$١٥ - ٨ + ١٢ - ١٣ - ٢٤ - ٤٨$ $٢٢ + ١٧ - ١١ + ١٤ - ١٢ + ٢٥$ $١٢ - ٨ - ٩ + ١١ + ١٥ + ٢٤$ $١٥ - ٢٥ + ١٤ - ٨ - ١٠ - ١٧$ $١٦ - ١١ - ٩ - ٢٤ + ١٨ + ١٢$
--	--

المساواة

١٠ - المساواة - يقال للمقدارين ب، ج انهما متساويان فيما اذا كان

مجموع الوحدات الدال عليها العدوب مساوياً بمجموع وحدات ج

ونكتب : $\text{ب} = \text{ج}$

مثلاً — ليكن $١٢ = ٥ + ٨$ فرضاً

$$٦ + ٤ - ٧ = ٣،$$

$$٦ + ٤ - ٧ = ٨ - ٥ + ١٢ :$$

يشاهد ان كلا من طرفي المساواة يساوي ٩

١١ — قاعدة (١) — يمكن ان يضاف الى كل من طرفي المساواة عدد

واحد او يطرح منها عدد واحد

١ — لنضيف فرضاً العدد «٧» الى طرفي المساواة ،

$$١٢ - ٧ = ٥ + ٧ \text{ «١»}$$

$$\text{فيصير ، } ١٢ - ٧ = ٧ + ٥$$

$$\text{او ، } ١٢ = ٧ + ٥ \text{ «٢»}$$

فلاحظ ان العدد ٧ كان في الطرف الاول من المساواة «١» مسبوقاً

بإشارة ناقص اصبح في الطرف الثاني من المساواة «٢» مسبوقاً بإشارة زائد

٢ — لنطرح فرضاً العدد ٥ من طرفي المساواة ،

$$٢٤ = ٥ + ٢٩ \text{ «١»}$$

$$\text{فيصير : } ٢٤ = ٥ - ٢٩$$

$$\text{او : } ٢٤ = ٥ - ٢٩ \text{ [٢]}$$

فلاحظ ان العدد ٥ كان في الطرف الاول من المساواة [١] مسبوقاً بإشارة

زائد اصبح في الطرف الثاني من المساواة [٢] مسبوقاً بإشارة ناقص

وينتج من القاعدة السابقة :

نتيجة — يمكن ان ينقل احد حدود المساواة من طرف لآخر مع تبديل

إشارته .

١٢ - قاعدة (٢) - يمكن ان تضاف المساويات الى بعضها طرفاً الى طرف او تطرح من بعضها طرفاً من طرف .

مثلاً - ليكن لدينا المساويات الآتية :

$$٥ - ٩ = ٤ \qquad ٦ + ٤ - ٧ = ٨ - ٥ + ١٢$$

١ - نضيف المساويتين الى بعضها فيحدث

$$٦ + ٤ - ٧ = ٨ - ٥ + ١٢$$

$$٥ - ٩ = ٤$$

$$٥ - ٩ + ٦ + ٤ - ٧ = ٤ + ٨ - ٥ + ١٢$$

وباصلاح طرفي المساواة الاخيرة ينتج ان كلاّ منهما يساوي ١٣

٢ - نطرح المساويتين السابقتين طرفاً من طرف يصير :

$$٦ + ٤ - ٧ = ٨ - ٥ + ١٢$$

$$٥ - ٩ = ٤$$

$$(٥ - ٩) - ٦ + ٤ - ٧ = ٤ - ٨ - ٥ + ١٢$$

$$٥ + ٩ - ٦ + ٤ - ٧ = ٤ - ٨ - ٥ + ١٢$$

وباصلاح طرفي المساواة ينتج ان كلاّ منهما يساوي ٥

ماصل الضرب (الجاء)

١٣ - الضرب - هو عملية مختصرة لجمع الاعداد المتساوية :

مثلاً : $٥ + ٥ + ٥$ يمكن كتابته $٥ \times ٣ = ١٥$

فالعدد ٥ يسمى مضروباً والعدد ٣ يسمى مضروب فيه والناتج (١٥)

يسمى جداء

وحاصل ضرب العددين ب، ٥ يكتب : ب $\times$ ٥ او ب $\times$

ملاحظة :

١ - اذا كان المضروب واحداً فحاصل الضرب يساوي المضروب فيه

$$\text{اي : } ٤ = ٤ \times ١$$

$$\text{اذن : } ٤ \times ١ = ١ + ١ + ١ + ١ = ٤$$

٢ - اذا كان المضروب صفراً فحاصل الضرب يساوي الصفر

(لأنه)

$$\text{مثلاً : } ٤ \times ٠ = ٠$$

$$\text{لان : } ٤ \times ٠ = ٠ + ٠ + ٠ + ٠ = ٠$$

خواص الجداء

١٤ - خاصية (١) جداء عدة اعداد لا يتغير اذا تبدلت مواقع الاعداد

$$\text{مثلاً : } ٥ \times ٣ = ٣ \times ٥$$

$$\text{اذ في الحقيقة : } ٣ \times ٥ = ٥ + ٥ + ٥ = ١٥$$

$$\text{، : } ٥ \times ٣ = ٣ + ٣ + ٣ + ٣ + ٣ = ١٥$$

وبصورة عامة ب $\times$ ٥ = ٥ $\times$ ب

وعندما يكون احد المضروبين رقماً يكتب في الطرف الايمن من الجداء

$$\text{مثلاً : } ٥ \times ٥ = ٥ \text{ (يقراً خمسة ب)}$$

ويسمى الرقم المكتوب على يمين الحرف مباشرة (مثلاً) وهو يشعر احد مضاعفات الحرف الذي بجانبه .

مضاعفات عمره ما

١٥ — مضاعفات عددا هي عبارة عن حاصل ضربها بالاعداد :

..... 6 3 6 2 6 2 6 1

.....، 3×7 ، 2×7 ، 1×7 هي مضاعفات 7 هي:

او: ۷ ۱۴ ۲۱

وكذلك مضاعفات ب هي ب، ب ٢، ب ٣،١

والمراد — من التعريف السابق ينتج :

ان مضاعفات العدد ليس لها نهاية وان اصغر مضاعف لعدوما هو نفسه .

ما حصل القصة

١٦ — القسمة هي عملية معا كسة للضرب . فإذا علم جداء عددين واحدما،

يمكن بواسطة القسمة ان يعلم الثاني .

مثلاً — جداء عدوين ٢٠ وأحدهما ٥ فما الثاني؟

نفرض ان العدد الثاني هو (س) فيكون :

$$5 \times 4 = 20$$

فالمعدد ٢٠ يسمى مقسوماً ، ٥ مقسوم عليه ، س هو حاصل القسمة

وحاصل القسمة س يفاد بالوضع : $س = ٢٠ \div ٥$

وعليه فالمساواتان : $\left\{ \begin{array}{l} 20 = 5 \times س \\ 5 = 20 \div س \end{array} \right.$ هما بمعنى واحد وتستخرج
احدهما من الثانية

وبصورة عامة : $ب = س \times ٥$

$$اوس = \frac{ب}{٥}$$

ملاحظة — لاجل ان يكون حاصل القسمة (س) عدداً صحيحاً

يجب ان يكون المقسوم احد مضاعفات المقسوم عليه . وفي هذه الحالة يقال للمقسوم
عليه (قابلاً)

وعليه فالمدد ٥ هو قاسم ٢٠ لان ٢٠ من مضاعفات ٥

قواسم عدد ما

١٧ — يمكن ان يكون للعدد عدة قواسم . فمثلا العدد ١٨ هو مضاعف

لكل من الاعداد : ١٨٠٩٠٦٠٣٠٢٠١

وعليه فالاعداد : ١٨٠٩٠٦٠٣٠٢٠١ هي قواسم ١٨

وينتج من ذلك ان قواسم كل عدد محدودة اصغرها (واحد) واعظمها

العدد نفسه .

ملاحظة — بما ان كل عدد هو مضاعف نفسه وقاسمها بأن واحد اذن

كل عدد يقبل القسمة على نفسه والواحد .

قواسم المضاعفات والقواسم

١٨ — فائدة — لضرب مجموعة اعداد بعدد ما يمكن ان تضرب حدود

المجموعة على التعاقب بذلك العدد وتضاف الحواصل الى بعضها .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل ضرب المجموعة (٥ + ٨ + ١٢) بالعدد ٣ فيكون :

$$٣ \times ٥ + ٣ \times ٨ + ٣ \times ١٢ = ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢)$$

$$+ ١٢) + (٥ + ٨ + ١٢) = ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢) : \text{حيث}$$

$$(٥ + ٨ + ١٢) + (٥ + ٨$$

$$+ ٨ + ١٢ + ٥ + ٨ + ١٢ = ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢) : \text{او}$$

$$٥ + ٨ + ١٢ + ٥$$

$$٨) + (١٢ + ١٢ + ١٢) = ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢) : \text{ومنه}$$

$$(٥ + ٥ + ٥) + (٨ + ٨ +$$

$$٣ \times ٥ + ٣ \times ٨ + ٣ \times ١٢ = ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢) : \text{او}$$

وبصورة عامة :

$$(٥ + ٨ + ١٢) \times ٣ = ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢)$$

$$\text{وبالعكس : } ٣ \times (٥ + ٨ + ١٢) = (٥ + ٨ + ١٢) \times ٣$$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

١٩ — نتيجة — حاصل جمع عدة مضاعفات لعدد ما هو مضاعف نفس

العدد .

تطبيقات

$$\text{حساب المجموعة : } ٥ \times ٢٧ + ٥ \times ١٢ + ٥ \times ٨$$

يلاحظ ان كلا من حدود هذه المجموعة هو من مضاعفات ٥

فبالاستناد على الخاصة السابقة يمكننا ان نكتب :

$$(27 + 12 + 8) \times 5 = 5 \times 27 + 5 \times 12 + 5 \times 8$$

$$47 \times 5 = 5 \times 27 + 5 \times 12 + 5 \times 8 \text{ أو}$$

[يشاهد ان حاصل الجمع هو من مضاعفات ٥]

$$\text{وكذلك: } (1 + 4 + 7) \times 7 = 7 + 7 \times 4 + 7 \times 7$$

$$\text{أو: } 12 = 7 + 7 \times 4 + 7 \times 7$$

ويتضح من المثال السابق انه اذا اشتركت عدة حدود بمضروب واحد يمكن وضع المضروب المشترك خارج قوس تحصر بقية المضارب مع شاراتها .

٢٠ — خاصية — لقسمة مجموعة اعداد على عدد ما يقسم كل من تلك

الاعداد [ان امكن] على ذلك العدد وتضاف الحواصل الى بعضها .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل قسمة المجموعة (٣٥ + ٢١ + ١٤)

على ٧

$$\text{فيكون: } [35 + 21 + 14] : 7 = 5 + 3 + 2$$

$$\text{اذ في الحقيقة: } (35 + 21 + 14) : 7 = (5 + 3 + 2)$$

$$\text{وبصورة عامة: } (a + b + c) : d = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

٢١ — نتيجة — اذا قسم عدد طائفة اعداد فهو يقسم حاصل جمعها .

٢٢ — خاصية — لضرب فضل عددين بملدما يمكن ان يضرب حدا

الفضل على التماثل بذلك العدد ويطرح الحاصلان من بعضهما .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل ضرب الفضل (١٩ - ٢٤)

في العدد ٣

$$\text{قول : } ٣ \times ١٩ - ٣ \times ٢٤ = ٣ \times (١٩ - ٢٤)$$

$$\text{حيث : } (١٩ - ٢٤) + (١٩ - ٢٤) = ٣ \times (١٩ - ٢٤)$$

$$(١٩ - ٢٤)$$

$$\text{او : } ١٩ - ٢٤ + ١٩ - ٢٤ + ١٩ - ٢٤ = ٣ \times (١٩ - ٢٤)$$

$$\text{ومنه : } (١٩ - ٢٤) = ٣ \times (١٩ - ٢٤) - (٢٤ + ٢٤ + ٢٤) + ١٩$$

$$(١٩ + ١٩$$

$$\text{او : } ٣ \times ١٩ - ٣ \times ٢٤ = ٣ \times (١٩ - ٢٤)$$

وبصورة عامة :

$$٥ - ٥ ب = ٥ \times (ب - ب)$$

$$\text{وبالعكس : } ٥ ب - ٥ ب = ٥ \times (ب - ب)$$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

٢٣ — نتيجة — الفضل بين مضاعفي عدد ما هو مضاعف العدد نفسه

$$\text{تطبيق — لحساب فضل الجداين : } ٧ \times ٢٥ - ٧ \times ٣٧$$

نضع المضروب المشترك ٧ خارج قوس تحصر بقية المضارب مع شاراتها

$$\text{اي : } ٧ \times ٢٥ - ٧ \times ٣٧ = ٧ \times (٢٥ - ٣٧)$$

$$\text{او : } ١٢ \times ٧ = ٧ \times ٢٥ - ٧ \times ٣٧$$

وهذا يشعر بان الفضل بين مضاعفي العدد ٧ هو مضاعف ٧ ايضاً

$$\text{وكذلك } ٨ - ٥ = ٣ = ٥ - ٢$$

٢٤- **قاعدة** — لقسمة فضل عددين على عدد يقسم كل من حدي الفضل

(ان امكن) على ذلك العدد ويطرح الحاصلان من بعضهما .

مثلاً — ليكن المطلوب حساب حاصل قسمة الفضل (٢٨ - ٢٠) على ٤

$$\text{نقول : } (٢٨ - ٢٠) \div ٤ = ٨ - ٥$$

$$\text{حيث : } (٨ - ٥) \times ٤ = ٢٨ - ٢٠$$

$$\text{وبصورة عامة : } (٨ - ٥) \div ٤ = ٨ - ٥$$

٢٥- **نقطة** — إذا قسم عدد عددين آخرين فهو يقسم فضلهما .

٢٦- **قاعدة** — لضرب جداء عدة اعداد بعدد ما يمكن ان يضرب احد

مضاريب الجداء بذلك العدد

مثلاً — لضرب الجداء : $٧ \times ٢ \times ١٣$ في ٥

$$٧ \times ٢ \times ١٣ \times ٥ = ١٣ \times (٥ \times ٢) \times ٧ = ٥ \times (١٣ \times ٢ \times ٧)$$

$$\text{وبصورة عامة : } ٥ \times ٧ \times ٢ \times ١٣ = ٥ \times (٢ \times ١٣) \times ٧$$

وينتج من هذه الخاصية :

٢٧- **نقطة** — إذا كان احد مضاريب جداء مضاعفاً لعدد ما فالجداء

نفسه يكون مضاعفاً لذلك العدد .

مثلاً — في الجداء : $١٧ \times ٣٥ \times ٢$

العدد ٣٥ مضاعف ٧ إذاً ح هو مضاعف ٧ ايضاً .

ملاحظة — الضرب جدائين ببعضهما يقرب مضارب احدهما: مضارب الثاني.

$$\text{مثلاً} - 3 \times 5 \times 13 \times 2 \times 7 = (3 \times 5) \times (13 \times 2 \times 7)$$

٢٨ — **خاصة** — لقسمة جداء عدة اعداد على عدد ما يكفي ان يقسم احد

مضارب الجداء [ان امكن] على ذلك العدد

$$\text{مثلاً} - 13 \times 2 \times 7 = 13 \times \frac{1}{10} \times 7 = 5 \div [13 \times 10 \times 7]$$

$$\text{حيث : } 5 \times [13 \times 2 \times 7] = 13 \times 10 \times 7$$

$$\text{وعليه : } ب \div م \times م \times م = م \div م \times م \times م$$

وينتج من هذه الخاصة :

٢٩ — **نتيجة** — إذا قسم عدد احد مضارب جداء فهو يقسم الجداء نفسه

مثلاً — ليكن العدد ٤ قاسماً ١٢ في الجداء :

$$ج = 15 \times 12 \times 7 \text{ اذاً هو قاسم ح ايضاً .}$$

تمارين

١ — المطلوب حل التمارين الآتية :

$$ب \times [٥ - ٣ + ١]$$

$$ك \times [١ + ٣ + ٥]$$

$$م \div [٥ + ٣ + ١]$$

$$م \div [٣ - ١]$$

$$ب \div ٥ \times ٣ \times ١$$

$$٦ \times [١٢ - ٧ + ١٥]$$

$$م \times [٤ + ٥ + ٦]$$

$$٤ \div [١٢ + ١٦ + ٢٤]$$

$$٣ \div [١٨ - ٢٧]$$

$$٥ \div ٧ \times ٤ \times ١٥$$

٢ - وضع المجموعات الآتية بصورة مضارب

$ب + ح + د + هـ$ $م + م + و + م + ي$ $ب + ب + ٣ + ب + ٢$ $٨ + ٨ + ٤ + ٤ + ٢ + ٢$ $ب - ١٥ - ١٠ - ٥$	$١٢٥ + ١٢٥ \times ٢ + ١٢٥ \times ٧$ $٣٢٤ \times ٣ - ٣٢٤ \times ٤ + ٣٢٤ \times ٩$ $٥ + ١٥ + ١٥$ $١٨ + ٣٦ - ٢٧$ $٣٥ - ١٤ + ٤٢$
--	--

٣ - حل مجموعة مؤلفة من حدود ذات نوع واحد من الحروف

مثال - لتكن المجموعة : $م = ب + ٧ + ٥ + ٩$

نشاهد ان حدود المجموعة تشترك في الحرف ب وعليه نضع ب المضروب المشترك خارج قوس فيصير :

$$٢١ \times ب = [٩ + ٧ + ٥] ب = ب٩ + ب٧ + ب٥ = م$$

او ٢١ ب

ومن المثال السابق نستنتج القاعدة الآتية :

قاعدة - لجمع عدة حدود ذات نوع واحد من الحروف تضاف امثال الحروف الى بعضها ويجعل الناتج مثلاً للحرف المشترك

مثال (١) - $م = ب + ٣ + ٤ + ٧ = ب(٣ + ٤ + ٧) = ١٤ ب$

مثال (٢) - $م = ب \frac{٢}{٥} + ب \frac{٢}{٥} = ب(\frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٥}) = ب \frac{٤}{٥} = ك$

مثال (٣) - $م = ب \frac{٢}{٤} + ب \frac{٢}{٥} = ب(\frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٥})$

(٥) (٤)

$$ب \frac{٢٣}{٢٠} = ب(\frac{٨}{٢٠} + \frac{١٥}{٢٠}) =$$

وبتضح من الامثلة السابقة :

ان مجموعة الحدود المتساوية بالحرف هي عبارة عن حد واحد .

تمارين

المطلوب حل المجموعات الآتية :

$3b + 5b + 7b$	$5س + 7س + 13س$
$7س - 12س + 13س$	$9س + 12س - 10س$
$25ب - 12ب - 8ب$	$24س - 7س - 11س$
$\frac{1}{2}ب + \frac{3}{5}ب - \frac{5}{6}ب$	$\frac{2}{5}س + \frac{3}{4}س + \frac{1}{2}س$
$\frac{3}{4}س - \frac{2}{5}س + \frac{2}{2}س$	$\frac{2}{3}ب - \frac{4}{5}ب + \frac{1}{4}ب$

* البحث الثاني — قابلية القسمة *

٣١ — تعريف — يقال للعدد انه قابل القسمة على عدد آخر اذا لم يبق

باق من قسمته عليه . اي اذا كان العدد الاول من مضاعفات العدد الثاني .

مثلاً — العدد ٢٤ يقبل القسمة على ٦ لان ٢٤ من مضاعفات ٦

$$4 = 24 \div 6$$

قابلية القسمة على ١٠، ٢٠، ٥٠

٣٢ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ١٠ يلزم ويكفي ان

يكون منتهياً بصفر .

مثال — العددان ٧٠ ، ٥٤٠ كل منهما يقبل القسمة على ١٠

$$\text{حيث : } ٧٠ = ٧ \times ١٠ ; ٥٤٠ = ٥٤ \times ١٠$$

ولما كان العددان ٧٠ ، ٥٤٠ هما من مضاعفات ١٠ اذن يقبلان القسمة على ١٠

بقي قسم عدد ما على ١٠

مثال — ما هو باقي قسمة ٣٥٧ على ١٠ ؟

$$\text{العدد : } ٣٥٧ = ٣٥٠ + ٧ = \text{مضاعف } ١٠ + ٧$$

ومن حيث ان العدد ٧ لا يقبل القسمة على ١٠ اذن الباقي من قسمة

٣٥٧ على ١٠ هو ٧ وينتج من ذلك ان باقي قسمة عدد ما على ١٠ يساوي رقم احاده

ملاحظة — يتضح من المثال السابق ان كل عدد هو من مضاعفات ١٠ زائد

رقم آحاده .

٣٣ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٢ او ٥ يلزم ويكفي

ان يكون رقم آحاده قابلاً للقسمة على ٢ او ٥ واما ان يكون صفراً

حيث علمنا من القاعدة السابقة ان كل عدد هو من مضاعفات ١٠ زائد

رقم آحاده

وبما ان $١٠ = ٢ \times ٥$ اذن كل عدد هو من مضاعفات ٢ او ٥ مضافاً

اليه رقم آحاده

$$\text{مثلاً — العدد : } ٣٥٧ = \text{مضا } ١٠ + ٧ = \text{مضا } ٢ + ٧$$

$$٣٥٧ : \text{ مضا } ١٠ + ٧ = \text{مضا } ٥ + ٧$$

وهذا يشعر بان باقي قسمة عددا على ٢ او ٥ يساوي باقي قسمة رقم آحاده

على ٢ او ٥

وينتج من ذلك ان العدد يقبل القسمة على ٢ او ٥ اذا كان رقم آحاده قابلا

القسمة على ٢ او ٥ (من مضاعفات ٢ او ٥)

$$\text{امثلة : } ٨٥٦ = \text{مضا } ٢ + ٦ = \text{مضا } ٢$$

$$٤٧٣٥ = \text{مضا } ٥ + ٥ = \text{مضا } ٥$$

قابلية القسمة على ١٠٠، ٢٥٤

٣٤ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ١٠٠ يلزم ويكفي ان

يكون متتيا بصفرين .

مثال — العددان : ٦٠٠، ٢٥٤٠٠ كل منهما يقبل القسمة على ١٠٠

$$\text{حيث : } ٦٠٠ = ٦ \times ١٠٠ = ٢٥٤٠٠ = ٢٥٤ \times ١٠٠$$

ولما كان العددان ٦٠٠، ٢٥٤٠٠ هما من مضاعفات ١٠٠ اذن يقبلان

القسمة على ١٠٠

باقي قسمة عددا على ١٠٠

مثال — ماهو باقي قسمة ٨٣٧٩ على ١٠٠ ؟

$$\text{العدد : } ٨٣٧٩ = ٨٣٠٠ + ٧٩ = \text{مضا } ١٠٠ + ٧٩$$

ومن حيث ان العدد ٧٩ لا يقبل القسمة على ١٠٠ اذن الباقي من قسمة

٨٣٧٩ على ١٠٠ هو ٧٩

وينتج من ذلك :

ان باقي قسمة عددا على ١٠٠ يساوي العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته.

ملاحظة — يتضح من المثال السابق ان كل عدد هو من مضاعفات

١٠٠ زائد العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته .

٣٥ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٤ او ٢٥ يلزم ويكفي

ان يكون العدد المؤلف من رقمي آحاده وعشراته قابلا للقسمة على ٤ او ٢٥ واما ان يكون صفرين .

حيث علمنا من القاعدة السابقة ان كل عدد هو على مضاعفات ١٠٠ زائد

العدد المؤلف من آحاده وعشراته . وبما ان $100 = 4 \times 25$

اذن كل عدد هو من مضاعفات ٤ او ٢٥ زائد عدد آحاده وعشراته

مثلاً — العدد : ٨٣٧٩ = مضا ١٠٠ + ٧٩ = مضا ٤ + ٧٩

، : ٨٣٧٩ = مضا ١٠٠ + ٧٩ = مضا ٢٥ + ٧٩

وهذا يشعر ان باقي قسمة عددا على ٤ او ٢٥ يساوي باقي قسمة العدد

المؤلف من رقمي آحاده وعشراته على ٤ او ٢٥

وينتج من ذلك ان كل عدد يقبل القسمة على ٤ او ٢٥ اذا كان العدد

المؤلف من رقمي آحاده وعشراته يقبل القسمة على ٤ او ٢٥ (من مضاعفات ٤ او ٢٥)

$$\text{امثلة : } ٧٥٦ = \text{مضا } ٤ + ٥٦ = \text{مضا } ٤$$

$$٣٨٧٥ = \text{مضا } ٢٥ + ٧٥ = \text{مضا } ٢٥$$

قابلية القسمة على ٩ ، ٣

$$٣٦ - \text{نمرير} - \text{يلاحظ ان : } ١٠ = ٩ + ١$$

$$: ١٠٠ = ٩٩ + ١$$

$$: ١٠٠٠ = ٩٩٩ + ١$$

وان الاعداد : ٩ ، ٩٩ ، ٩٩٩ ، ... هي من مضاعفات ٩ اذن يمكننا ان

نكتب المساويات السابقة بالصورة الآتية :

$$١٠ = \text{مضا } ٩ + ١$$

$$١٠٠ = \text{مضا } ٩ + ١$$

$$١٠٠٠ = \text{مضا } ٩ + ١$$

ولنضرب طرفي هذه المساويات فرضاً بالاعداد ٥ ، ٧ ، ٨ على الترتيب

فيحدث :

$$٥ \times (١ + \text{مضا } ٩) = ٥ \times ١٠ \text{ او } ٥٠ = \text{مضا } ٩ + ٥$$

$$٧ \times (١ + \text{مضا } ٩) = ٧ \times ١٠٠ \text{ » } ٧٠٠ = \text{مضا } ٩ + ٧$$

$$٨ \times (١ + \text{مضا } ٩) = ٨ \times ١٠٠٠ \text{ » } ٨٠٠٠ = \text{مضا } ٩ + ٨$$

ويتضح مما سبق ان العدد المؤلف من رقم متبوع باصفار هو من مضاعفات

٩ زائد ذلك الرقم .

٣٧ — نظرية — كل عدد هو من مضاعفات ٩ زائد مجموع ارقامه .

مثلاً — ليكن العدد هو : ٨٧٢٥ فال المطلوب ان :

$$٨٧٢٥ = ٩ \text{ مضا} + (٨ + ٧ + ٢ + ٥)$$

في الحقيقة — العدد ٨٧٢٥ يمكن كتابته : $٨٧٢٥ = ٥ + ٢٠ + ٧٠٠ + ٨٠٠٠$

$$\left. \begin{array}{l} \text{وان : } ٨٠٠٠ = ٩ \text{ مضا} + ٨ \\ \text{، : } ٧٠٠ = ٩ \text{ مضا} + ٧ \\ \text{، : } ٢٠ = ٩ \text{ مضا} + ٢ \\ \text{، : } ٥ = ٩ \text{ مضا} + ٥ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{وبجمع هذه المساويات} \\ \text{طرفاً الى طرف} \end{array}$$

$$\text{يحدث : } ٨٧٢٥ = ٩ \text{ مضا} + (٥ + ٢ + ٧ + ٨)$$

$$\text{او : } ٨٧٢٥ = ٩ \text{ مضا} + ٢٢$$

ولما كان العدد ٢٢ هو عبارة عن مجموع ارقام العدد ٨٧٢٥ اذن ثبت المطلوب

وينتج من النظرية السابقة القاعدة الآتية :

٣٨ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٩ يلزم ويكفي ان

يكون مجموع ارقامه قابلاً للقسمة على ٩

$$\text{مثال — (١) — العدد : } ٨٧٢٥ = ٩ \text{ مضا} + ٢٢ = ٩ \text{ مضا} + ٤$$

وعليه فالعدد ٨٧٢٥ لا يقبل القسمة على ٩ والباقي من قسمته على ٩ يساوي ٤

وينتج من هذه القاعدة ان باقي قسمة عددا على ٩ يساوي باقي قسمة مجموع

ارقامه على ٩

$$\text{مثال — (٢) — العدد : } ٤٥٦٣ = ٩ \text{ مضا} + ١٨ = ٩ \text{ مضا}$$

وعليه فالعدد ٤٥٦٣ يقبل القسمة على ٩

٣٩ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ٣ يلزم ويكفي ان يكون

مجموع ارقامه قابلاً للقسمة على ٣ حيث في الحقيقة ان ٩ هو من مضاعفات ٣ وعليه
فكل عدد يكون مساوياً لمضاعف ٣ زائد مجموع ارقامه .

مثال (١) — العدد : ٨٧٢٥ = مضاعف ٣ + ٢٢ = مضاعف ٣ + ١

إذا العدد : ٨٧٢٥ لا يقبل القسمة على ٣ والباقي من قسمته على

٣ يساوي ١

وينتج من المثال السابق ان باقي قسمة عدداً على ٣ يساوي باقي قسمة

مجموع ارقامه على ٣

مثال (٢) — العدد : ٣٤٦٢ = مضاعف ٣ + ١٥ = مضاعف ٣

قابلية القسمة على ١١

٤٠ — تمرير — يلاحظ ان : ١٠ = مضاعف ١١ - ١

١٠٠ : = مضاعف ١١ + ١

١٠٠٠ : = مضاعف ١١ - ١

١٠٠٠٠ : = مضاعف ١١ + ١

وبضرب طرفي المساويات فرضاً بالأعداد : ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٩ بالترتيب

يحدث : $٣ \times ١٠ = (٣ - ١١) \times ٣٠$ او $٣ \times ١٠ = ٣٠ - ٣٣$

$٥ \times ١٠٠ = (٥ + ١١) \times ٥٠٠$ او $٥ \times ١٠٠ = ٥٠٠ + ٥٥٠$

$$٦ - ١١ \text{ مضاعف} = ٦٠٠٠ \gg ٦ \times (١ - ١١ \text{ مضاعف}) = ٦ \times ١٠٠٠$$

$$٩ + ١١ \text{ مضاعف} = ٩٠٠٠٠ \gg ٩ \times (١ + ١١ \text{ مضاعف}) = ٩ \times ١٠٠٠٠$$

ويشخص من ذلك ان العدد المؤلف من رقم متبوع بأصفار فردية يساوي مضاعف ١١ ناقص ذلك الرقم والمتبوع بأصفار زوجية يساوي مضاعف ١١ زائد ذلك الرقم .

٤١ — نظرية — كل عدد يساوي مضاعف ١١ زائد الفرق بين مجموعي

ارقامه الفردية الرتبة والزوجية الرتبة

مثلاً — ليكن العدد هو : ٧٩٤٦ فال المطلوب ان :

$$٧٩٤٦ = ١١ \text{ مضاعف} + (٦ + ٩) - (٤ + ٧)$$

البرهان — العدد ٧٩٤٦ يكتب ٧٠٠٠ + ٩٠٠ + ٤٠ + ٦

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{وان : } ٧ - ١١ \text{ مضاعف} = ٧٠٠٠ \\ \text{، } ٩ + ١١ \text{ مضاعف} = ٩٠٠ \\ \text{، } ٤ - ١١ \text{ مضاعف} = ٤٠ \\ \text{، } ٦ + ٠ = ٦ \end{array} \right. \text{ وجمع المساويات طرفاً الى طرف}$$

$$\text{يحدث : } ٧٩٤٦ = ١١ \text{ مضاعف} + (٦ + ٩) - (٤ + ٧)$$

$$\text{، } ٧٩٤٦ = ١١ \text{ مضاعف} + (١١ - ١٥)$$

$$\text{ومنه : } ٧٩٤٦ = ١١ \text{ مضاعف} + ٤$$

ولما كان العدد ٤ هو الفرق بين مجموعي الارقام الفردية الرتبة والزوجية الرتبة للعدد ٧٩٤٦ اذاً ثبت المطلوب .

٤٢ — قاعدة — لاجل ان يقبل عدد القسمة على ١١ يلزم يكفي ان يكون الفرق بين مجموعي ارقامه الفردية الرتبة والزوجية الرتبة مساوياً للصفر او عدداً من مضاعفات ١١

امثلة : العدد ٧٥٦٨ يقبل القسمة على ١١ حيث $(٧ + ٦) - (٥ + ٨) = ٠$

٢٩٤٨ ، « « « « $(٢ + ٤) - (٩ + ٨) = ١١$

٤٥٦٧٨٦ لا يقبل « « « « $(٥ + ٧) - (٤ + ٦ + ٨) = ٦$

نتيجة — الباقي من قسمة عدد ما على ١١ يساوي الفضل الكائن بين مجموعي ارقامه الفردية الرتبة والزوجية الرتبة .

٤٣ — ملاحظة — اذا استعرضنا سلسلة الاعداد الطبيعية :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ،

نرى ان : ١ — احد كل عددين متعاقبين يقبل القسمة على ٢

٢ — « « « « ثلاثة اعداد متعاقبة » » ٣

٣ — « « « « عددين شفيعين متعاقبين يقبل القسمة على ٤ ومن

الملاحظة السابقة ينتج الخواص الآتية :

قاعدة (١) — حاصل ضرب كل عددين متعاقبين يقبل القسمة على ٢

مثلاً — ليكن العددين المتعاقبان هما : ب ، ب + ١

فالمطلوب ان : ب (ب + ١) = مضاعف ٢

في الحقيقة ان الجداء : ب (ب + ١) هو من مضاعفات ٢ لان احيد

مضاربه عدد زوجي يقبل القسمة على ٢

خاصة (٢) — حاصل ضرب كل ثلاثة اعداد متعاقبة يقبل القسمة على ٦

مثال — لتكن الاعداد المتعاقبة هي : $٦، ١ + ٦، ٢ + ٦$

فالمطلوب ان $٦ (١ + ٦) (٢ + ٦) = ٦$ مضاعفات

في الحقيقة الجداء $٦ (١ + ٦) (٢ + ٦)$ هو من مضاعفات ٦ لان

احد مضاربيه يقبل القسمة على ٦

واحداهما يقبل على ٣ وعليه فالجداء هو من مضاعفات ٢، ٣ في آن واحد

اذن يقبل القسمة على ٦ وهو المطلوب .

$$\text{مثلاً} - ح = ٦ \times ٨ \times ٩ = ٥٠٤ = ٦ \text{ مضاعفات}$$

خاصة (٣) — حاصل ضرب كل عددين شفيعيين متعاقبين يقبل القسمة على ٨

مثلاً — ليكن العددين الشفيعيان المتعاقبان هما : $٢، ٢ + ٢$

وجدهما [ح]

فالمطلوب ان : $ح = ٢ (٢ + ٢) = ٨$ مضاعفات

حيث باصلاح الطرف الثاني من المساواة يحدث :

$$ح = ٢ + ٢ = ٤ [\text{يوضع المضروب المشترك } ٤ \text{ خارج قوس}]$$

$$\text{يصير : } ح = ٤ (١ + ٢)$$

نقول ان الجداء ح يقبل القسمة على ٤ لان احد مضاربيه ٤

وكذلك ح ٢ » » » ٢ » » يقبل على ٢ باعتبار

ان مضروبين من مضاربيه عددان متواليان .

وبما ان ح يقبل القسمة على ٤، ٢ في وقت واحد اذن هو من مضاعفات

٨ وهذا المطلوب .

تمارين

- ١- ماهي بواقى قسمة الاعداد : ٤٨٥٧ ، ١٣٥٢٩ ، ٧٩٥٨ ، على ٩ ، ١١
- ٢- كتابة ٥ اعداد ذات رتب مختلفة تقبل القسمة على ٩ وكذلك خمسة اعداد تقبل على ١١
- ٣- كتابة ٥ اعداد ذات رتب مختلفة تقبل القسمة على ٩ ، ١١ في آن واحد .
- ٤- بأي الارقام يعوض (س) في العدد (٧ س ٣٩) ليكون الباقي من قسمة العدد الناتج على ٩ مساوياً ٣ ، ٢
- ٥- بأي الارقام يعوض (س) في العدد (٧ س ٣٩) ليكون العدد الناتج ١ - قابلاً القسمة على ١١
٢ - ليكون الباقي من قسمته على ١١ مساوياً ٣

القوى وخواصها

تعريف

- ٤٤ - **قوة العدد** - هي عبارة عن حاصل ضربيه بنفسه عدة مرات .
فمثلاً - القوة الثالثة للعدد ٥ هي $٥ \times ٥ \times ٥$ وتكتب $٥^٣$
ويقال للعدد ٣ الدال على درجة القوة (اساً)
وكذلك فالقوة الرابعة للعدد (ب) هي $ب \times ب \times ب \times ب$ وتكتب $ب^٤$
- ملاحظة** - القوة الثانية للعدد يقال لها (مربعاً) والقوة الثالثة يقال لها (مكعباً)

وعليه : ٢٥ يقرأ مربع خمسة ، ٢٤ يقرأ مكعب أربعة

القوة الاولى للعدد ٥ هي : ٥

والقوى المتعاقبة للعدد ٥ هي : ٥ ، ٢٥ = ٥ ، ١٢٥ = ٥

..... ، ٦٢٥ = ٥

وكذلك القوى المتعاقبة للعدد ١٠ هي ١٠ ، ١٠٠ = ١٠ ، ١٠٠٠ = ١٠

٣١٠ = ١٠٠٠ ، ٤١٠ = ١٠٠٠٠ ...

ويتضح بان قوة العدد المؤلف من واحد متبوع باصفار تساوي ١ متبوع باصفار بقدر وحدات درجة القوة .

٤٥ — قاعدة — لرفع جداء عدة اعداد لقوة ما يمكن ان يرفع كل من

مضارب الجداء الى تلك القوة وتضرب التوائج ببعضها .

مثال (١) — $27 \times 24 = 2(7 \times 4)$

اذ في الحقيقة : $(7 \times 4) \times (7 \times 4) = 2(7 \times 4)$

او : $7 \times 4 \times 7 \times 4 = 2(7 \times 4)$

او : $27 \times 24 = 7 \times 7 \times 4 \times 4 = 2(7 \times 4)$

مثال (٢) — $3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3(2 \times 3 \times 4)$

وبصورة عامة : $3^2 \times 3^3 \times 3^4 = 3(2 \times 3 \times 4)$

القوى المختلفة لعدد ما

٤٦ — خاصة (١) — حاصل ضرب عدة قوى مختلفة لعدد ما يساوي قوة نفس

العدد بدرجة تعادل مجموع درجات قوى المضارب

مثلاً : $27 \times 27 = 27^2$

حيث في الحقيقة : $٧ \times ٧ = ٢٧$ وبضرب المساواتين طرفاً مع طرف

$$\left\{ \begin{array}{l} ٧ \times ٧ = ٢٧ \\ ٧ \times ٧ \times ٧ = ٢٧ : \end{array} \right.$$

$$ينتج : ٧^٥ = [٧ \times ٧ \times ٧] \times (٧ \times ٧) = ٢٧ \times ٢٧$$

$$\text{وكذلك : } ٦ = ٢ \times ٣ \times ٢$$

٤٧- خاصة (٢)- حاصل قسمة قوتين مختلفتين لعدداً يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل فضل درجتي القوتين .

$$\text{مثلاً : } ٣٧ = ٢٧ \div ٥٧$$

$$\text{اذ ان : } ٥٧ = ٢٧ \times ٣٧$$

$$\text{وكذلك : } ٦ = ٢ \div ٤$$

$$\text{ملاحظة : } ٢٦ \div ٢٦ = ١ \text{ لان المقسوم والمقسوم عليه متساويان .}$$

وبناء على قاعدة قسمة القوتين يكون :

$$٢٦ \div ٢٦ = ١ \text{ اذن } ٠٦ = ١$$

وينتج من ذلك ان كل عدد بقوة صفر يساوي الواحد اي : $٠ = ١$

٤٨- خاصة (٣)- حاصل رفع قوة عدد من درجة ما يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل جداء درجتي الرفع مع المرفوع

$$\text{مثلاً : } ٦٥ = ٣ \times ٢٥ = ٣(٢٥)$$

$$\text{اذ في الحقيقة : } ٦٥ = ٢٥ \times ٢٥ \times ٢٥ = ٣(٢٥)$$

$$\text{وكذلك : } ١٠ = ٢ \times ٥ = ٢(٥)$$

٤٩- خاصة (٤)- حاصل جذر قوة عدد ما يساوي قوة نفس العدد بدرجة تعادل قسمة أس العدد الاصيل على دليل الجذر .

مثلاً : $\sqrt[4]{٥} = \sqrt[٢]{٥} = ٥$ اذ في الحقيقة لو ربعنا الطرفين يحدث :

$$^2(\sqrt[4]{٥}) = ^2(\sqrt[٢]{٥})$$

ومنه : $٥ = ٥$ وهو المطلوب

$$\sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٥} ، \sqrt[٤]{٥} = \sqrt[٤]{٥} ، \sqrt[٥]{٥} = \sqrt[٥]{٥}$$

ملاحظة — من الخاصة السابقة يتضح بان العدد قد يكون أسه كسراً
وحيث أن يكون ذلك العدد ناتجاً عن جذر قوة أسها بسط الكسر ودليل جذرها
مقام الكسر .

$$\sqrt[٥]{٥} = \sqrt[٥]{٥} ، \sqrt[٢]{٥} = \sqrt[٢]{٥} ، \sqrt[٣]{٥} = \sqrt[٣]{٥} ، \sqrt[٤]{٥} = \sqrt[٤]{٥} ، \sqrt[٥]{٥} = \sqrt[٥]{٥}$$

* البحث الثالث — الاعداد الاولية *

٥٠ — **تعريف** — يقال للعدد (اولياً) اذا لم يكن له قاسماً سوى نفسه والواحد

مثلاً — العدد : ٢٩ اولي لانه لا يقبل القسمة الا على نفسه والواحد

» : ٣٥ تالي (غير اولي) لانه يقبل القسمة على ٥ ، ٧

ملاحظة — الاعداد الشفعية جميعها (ما عدا ٢) تالية لانها من مضاعفات ٢

اما الاعداد الوترية فمنها ما يكون اولياً ومنها تالياً

ويتضح من هذه الملاحظة ان الاعداد الاولية جميعها وترية ما عدا (٢)

٥١ — نظرية — اذا كان العدد تالياً لـ ٦ ان يكون له قاسماً اولياً على الاقل

مثلاً — العدد ٢٤ تالي وهو $24 = 6 \times 4$

٦ ، لان $6 = 2 \times 3$ (هنا ٣ عدد اولي)

إذا : $24 = 4 \times 2 \times 3$ اي ان العدد ٢٤ يقبل قاسماً اولياً ٣
وينتج من هذه النظرية ان كل عدد غير اولي يتألف من حاصل ضرب عدة
اعداد اولية

٥٢ — انشاء جدول الاعداد الأولية التي هي اقل من ٥٠

فلاجل انشاء جدول الاعداد الأولية التي هي اقل من ٥٠ نكتب جميع
الاعداد المتعاقبة من ١ الى ٥٠ (شكل — ١)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠
٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠
٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠

ونشط بعد ذلك الاعداد التالية الموجودة بينها على الصورة الآتية :

١ — نشطب مضاعفات (٢) اعتباراً من العدد الذي يلي ٢ وهي الاعداد
الواقعة في المرتبة الثانية لكل عددين متوالين .

اي : $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, \dots$

٢ — نشطب مضاعفات (٣) اعتباراً من العدد الذي يلي ٣ وهي الاعداد
الواقعة في المرتبة الثالثة لكل ثلاثة اعداد متتابة .

اي $3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, \dots$

٣ — نشطب مضاعفات (٥) اعتباراً من العدد الذي يلي ٥ وهي الاعداد الواقعة في المرتبة الخامسة لكل خمسة اعداد متعاقبة

$$\text{اي: } ٥ \times ٢, ٥ \times ٣, ٥ \times ٤, \dots$$

٤ — نشطب مضاعفات (٧) اعتباراً من العدد الذي يلي ٧ وهي الاعداد الواقعة في المرتبة السابعة لكل سبعة اعداد متوالية .

$$\text{اي: } ٧ \times ٢, ٧ \times ٣, ٧ \times ٤, \dots$$

فلا اعداد الباقية في الجدول بدون شطب وهي :

$$١, ٢, ٣, ٥, ٧, ١١, ١٣, ١٧, ١٩, ٢٣, ٢٩, ٣١, ٣٧,$$

٤١, ٤٣, ٤٧, اعداد اولية

ملاحظة — يلاحظ في الاعمال السابقة :

١ — انا بشطب مضاعفات ٢ نكون شطبنا جميع الاعداد الشفعية التي

هي من مضاعفات ٤, ٦ ايضاً

٢ — عندما بدأنا بشطب مضاعفات ٥ وجدنا في الجدول طائفة من

مضاعفاتها مشطوبة

فمثلاً : ٥×٢ شطبنا باعتبارها من مضاعفات ٢

$$٥ \times ٣ \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad ٣$$

$$٥ \times ٤ \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \quad ٢$$

ولذلك ابتدأ الشطب بصورة عملية اعتباراً من $٥ \times ٥ = ٢٥ = ٢٥$

وهكذا في مضاعفات ٧ فقد ابتدأنا بشطبها اعتباراً من $٧ \times ٧ = ٤٩$

٣ — بعد مضاعفات ٧ يجب المباشرة (استناداً على الملاحظة السابقة)

بشطب مضاعفات ١١ اعتباراً من ٢١١ = ١٢١ ثم مضاعفات ١٣ ابتداءً من ٢١٣ = ١٦٩ وهكذا بقية المضاعفات . ولكن بما ان العدد الاخير في الجدول السابق خمسين وهو اصغر من ١٢١ فعليه اكتفينا بشطب مضاعفات الاعداد الاولية : ٢، ٣، ٥، ٧ فقط لان مضاعفات الاعداد الاولية التي تلي ٧ والموجودة في الجدول المذكور شطبت في الاعمال المتقدمة .

ذكرى — الطريقة التي اتبعناها لايجاد الاعداد الاولية تسمى (غربال نراتوستين) نسبة لمخترعها نراتوستين وهو فيلسوف رياضي يوناني جاء في القرن الثاني قبل الميلاد.

٥٣ — نظرية — العدد يكون اولياً اذا لم يقبل القسمة على احد الاعداد الاولية التي مربعاتها اصغر منه

مثلاً — العدد : ٢٧١ هل هو اولي ؟

لذلك نقسمه على الاعداد الاولية : ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣ الذي مربع كل منها اصغر من ٢٧١ بصورة متتابة .

فترى ان ٢٧١ لا يقبل القسمة على ٢ لان آحاده ليس عدداً شفعاً او صفراً .

» » » ٣ » مجموع ارقامه ليس من مضاعفات ٣

» » » ٥ » آحاده ليس ٥ او صفراً

ثم لنجرب ونقسمه على ٧، ١١، ١٣

$$\begin{array}{r|l} 271 & 13 \\ \hline 11 & 20 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r|l} 271 & 11 \\ \hline 51 & 24 \\ 7 & \end{array} \right. \quad \begin{array}{r|l} 271 & 7 \\ \hline 61 & 38 \\ 5 & \end{array}$$

بما ان العدد ٢٧١ لم يقبل القسمة على ٧، ١١، ١٣ اذن هو اولي .

إذ في الحقيقة لو تابعنا عمليات التقسيم على الأعداد الأولية التي تلي ١٣ وفرضنا أن ٢٧١ قبل القسمة على ١٧ فعندئذ خارج القسمة يجب أن يكون :
 أولاً — اصغر من ١٧ لأن $17 \times 17 = 289$ وهذا أكبر من ٢٧١ أي
 $271 < 17^2$

ثانياً — حاصل القسمة المفروض أما أن يكون أولياً أو غير أولي فإذا كان أولياً لا بد أن يكون مساوياً أحد الأعداد السابقة ٢، ٣، ٥، ٧، ١١، ١٣ والحال وجدنا بالعمل أن هذه الأعداد لا تقسم ٢٧١ وعليه فالحاصل المفروض غير أولي وإذا كان غير أولي يقتضي أن يقبل القسمة على الأعداد الأولية التي هي اصغر من ١٧ وعندئذ يكون مضاعفه ٢٧١ قابلاً للقسمة عليه أيضاً ولكن تحقق لدينا بالعمل أنه لا يوجد عدد أولي اصغر من ١٧ يقسم ٢٧١ إذن العدد ٢٧١ لا يقبل القسمة على ١٧ ولا على أي عدد أولي اصغر من ١٧ وعليه فهو عدد أولي وثبت المطلوب .

٥٤ — فاعلم — لمعرفة عدد هل هو أولي أو غير أولي يقسم على الأعداد الأولية ٢، ٣، ٥، بالتتابع إلى أن ينتج حاصل قسمة اصغر من المقسوم عليه أو مساويه فإذا لم يقبل القسمة في إحدى العمليات المذكورة كان العدد أولياً .

مثال (١) — العدد : ٢٢١ لا يقبل القسمة على ٢، ٣، ٥، ٧، ١١

$$\begin{array}{r} 221 \overline{) 13} \\ 91 \quad 17 \\ \dots \end{array}$$

من حيث أن العدد ٢٢١ قبل القسمة على ١٣ إذن هو غير أولي لأن

$$17 \times 13 = 221$$

مثال (٢) — العدد : ٢٢٩ لا يقبل القسمة على ٢، ٣، ٥، ٧، ١١

فلنقسمه على الأعداد الأولية التي تلي ١١ وهي : ١٣، ١٧،

$$\left\{ \begin{array}{r|l} 229 & 17 \\ 59 & 13 \\ 8 & \end{array} \right.$$

ثم

$$\left\{ \begin{array}{r|l} 229 & 13 \\ 99 & 17 \\ 8 & \end{array} \right.$$

اي

هنا حاصل القسمة اصغر من المقسوم عليه

هنا حاصل القسمة اكبر من المقسوم عليه

إذا العدد ٢٢٩ اولى لانه في القسمة الاخيرة ظهر حاصل قسمة ١٣ اصغر

من المقسوم عليه ١٧

ويلاحظ ان ٢٢٩ لم يقبل القسمة على احد الاعداد التي مربعاتها اصغر

منه .

٥٥ - خاصة - الباقي من قسمة اي عدد اولى (اكبر من ٣) على ٦ لا

يكون الا (١) او (٥)

مثلاً - ليكن العدد ب اولياً

فالمطلوب ان : ب = مضا ٦ + ١ او ب = مضا ٦ - ١

في الحقيقة ان باقي قسمة اي عدد على ٦ هو احد الاعداد :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

اولاً - ان ب لا يمكن ان يكون مضاعفاً للعدد ٦ لانه ليس شفعاً

ثانياً - لا يمكن ان يكون الباقي من قسمة ب على ٦ مساوياً ٢ او ٤

حيث لو كان ب = مضا ٦ + ٢ ، او ب = مضا ٦ + ٤

لكان العدد ب شفعاً وهذا مخالف للفرض

ثالثاً - لا يمكن ان يكون الباقي من قسمة ب على ٦ مساوياً ٣

اذ لو كان ب = مضا ٦ + ٣ لكان العدد ب من مضاعفات ٣ وهذا

غير اولى

إذاً لا يمكن ان يكون الباقي من قسمة ب على ٦ الا ٥ او ٥ وهذا
المطلوب

تمارين

المطلوب بيان الاعداد الاولى وغير الاولى من الاعداد الآتية

٥٥١ ، ٣١٣ ، ٢٩١ ، ١٥٧ ، ٢٧٣

١٥١٩ ، ١٥٠٧ ، ١٤٢١ ، ١٠٠١ ، ٥٧٧

تقريب عدد الى مضاربه الاولى

٥٦ — تفريق عدد الى مضاربه الاولى هو عبارة عن وضعه بصورة حاصل
ضرب مضاربه اولية

مثال (١) — لتفريق العدد ٩١٨ الى مضاربه الاولى .

نقول : ٩١٨ يقبل القسمة على ٢ ، اي $٩١٨ = ٤٥٩ \times ٢$

، ٤٥٩ : » » » ٣ ، » $٤٥٩ = ١٥٣ \times ٣$

إذاً : $٩١٨ = ١٥٣ \times ٣ \times ٢$

وكذلك : ١٥٣ يقبل القسمة على ٣ ، اي $١٥٣ = ٥١ \times ٣$

إذاً : $٩١٨ = ٥١ \times ٣ \times ٣ \times ٢$

وكذلك : ٥١ يقبل القسمة على ٣ ، اي $٥١ = ١٧ \times ٣$

وعليه : $٩١٨ = ١٧ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٢$

وبصورة عملية يجري التفريق على الوجه الآتي :

$$\begin{array}{r|l}
 ٩١٨ & ٢ \\
 ٤٥٩ & ٣ \\
 ١٥٣ & ٣ \\
 ٥١ & ٣ \\
 ١٧ & ١٧ \\
 ١ &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{ويكتب :} \\
 ١٧ \times ٣ \times ٢ = ٩١٨
 \end{array} \right\}$$

٥٧- فاعرة - لتفريق عدد الى مضاربيه الاولى ترسم بحذاء العدد مستقيماً

رأسياً ونضع في الجهة الثانية منه اصغر قاسم اولي للعدد المفروض ، ثم نقسم العدد على القاسم الاول ونضع الناتج تحت العدد المفروض وكذلك نضع امام الناتج اصغر قاسم اولي له ونقسم الناتج عليه ونضع الحاصل تحت الناتج الاول وهكذا نكرر العمل حتى ينتهي التقسيم ويظهر الناتج الاخير مساوياً (الواحد)

فالاعداد الاولى الموضوعه في حذاء المستقيم هي المضارب الاولى التي جدناها يساوي العدد المفروض

مثال (٢) - العدد ٣٦٠ يفرق الى مضاربيه كما يلي :

$$\begin{array}{r|l}
 ٣٦٠ & ٢ \\
 ١٨٠ & ٢ \\
 ٩٠ & ٢ \\
 ٤٥ & ٣ \\
 ١٥ & ٣ \\
 ٥ & ٥ \\
 ١ &
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \text{ويكتب :} \\
 ٥ \times ٣ \times ٢ = ٣٦٠
 \end{array} \right\}$$

مثال (٣) - تفريق العدد ٣٥٠٠٠ الى مضاربيه الاولى

نقول : $٣١٠ \times ٧ \times ٥ = ١٠٠٠ \times ٣٥ = ٣٥٠٠٠$
 او : $٧ \times ٤٥ \times ٣٢ = ٣٢ \times ٣٥ \times ٧ \times ٥ = ٣٥٠٠٠$

تمارين

المطلوب تفريق الاعداد الآتية الى مضاريبها الاولى :

$٣٣١٢ ، ٢٥٢٠ ، ١٨٠٠ ، ١٣٣٢ ، ٥٨٨$
 $٣٦٠٠٠ ، ٣٥ \times ٢٠ \times ٣١٢ ، ١١١١١١ ، ٣٠٣٢٤ ، ١٦٨٠٨$

جداء عددين بواسطة مضاريبها الاولى

٥٨ — قاعدة — لايجاد حاصل ضرب عددين بواسطة مضاريبها الاولى
 تجمع اسس كل من المضاريب الاولى المشتركة ويجعل الناتج اسأ للمضروب المشترك
 وتؤخذ المضاريب غير المشتركة بنفسها .

مثال العدد : $٥ \times ٢٣ \times ٣٢ = ٣٦٠ ، ١٧ \times ٣٣ \times ٢ = ٩١٨$
 فالجداء : $(٥ \times ٢٣ \times ٣٢) \times (١٧ \times ٣٣ \times ٢) = ٣٦٠ \times ٩١٨$
 او : $٥ \times ٢٣ \times ٣٢ \times ١٧ \times ٣٣ \times ٢ = ٣٦٠ \times ٩١٨$
 ومنه : $٥ \times ١٧ \times ٣ \times ٢ = ٢٣٠٤٨٠$

قسمة عددين بواسطة مضاريبها الاولى

٥٩ — قاعدة — لايجاد حاصل قسمة عددين بواسطة مضاريبها الاولى
 تطرح اسس مضاريب المقسوم عليه من اسس نفس المضاريب الموجودة في المقسوم
 ويجعل الناتج اسأ للمضروب المشترك وتؤخذ المضاريب غير المشتركة بذاتها .

مثال — العدد : $٣٣٠٠٤٨٠ = ٢ \times ٣ \times ١٧ \times ٥$

$$١٧ \times ٣ \times ٢ = ٩١٨$$

فمحصّل القسمة : $٣٣٠٠٤٨٠ \div ٩١٨$

$$(١٧ \times ٣ \times ٢) \div (٥ \times ١٧ \times ٣ \times ٢)$$

$$\begin{array}{r} ٣٣٠٠٤٨٠ : ٥ \times ١٧ \times ٣ \times ٢ \\ \hline ١٧ \times ٣ \times ٢ \quad ٩١٨ \end{array}$$

$$٥ \times ٣ \times ٢ = ٣٦٠ : \text{ومنه}$$

٦٠ — نظرية — لأجل أن يقبل عدد القسمة على عدد آخر يلزم ويمكن أن

يحتوي الأول على جميع المضارب الأولية الموجودة في الثاني بقوة تساوي قوى نظائرهما على الأقل.

$$\text{مثال (١) — ليكن : } ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ = ٢١٠ ; ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧ = ٢١٠$$

فنقول إن العدد ٢١٠ يقبل القسمة على ٢١٠؛ حيث إن المضارب الأولية التي تؤلف المقسوم عليه توجد بين مضارب المقسوم وهي بقوة تساوي أو أقل من نظائرها.

$$\text{وعليه يكون : } ٢١٠ \div ٢١٠ = ١$$

$$\text{أو } ١ \times ٥ \times ٢ = \frac{٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧}{٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧} = ١$$

$$\text{مثال (٢) ليكن : } ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠ ; ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$$

فالمدرج في هذا المثال لا يقبل القسمة على ٣٠ حيث ٣٠ يحتوي على مضروب

أولي (٧) لا يوجد بين مضارب ٣٠ أي أن ٧ ليس مضروب مشترك.

$$\text{مثال (٣) — ليكن : } ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠ ; ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$$

كذلك العدد s هنا غير قابل القسمة على s لأن المضروب المشترك (٥) قوتها في المقسوم اقل منها في المقسوم عليه .

قواسم العدد وكيفية إيجادها

٦١ — قواسم عدد ما هي جميع الاعداد التي تقسم ذلك العدد

مثال — ما هي قواسم ٤٨

الحل — نفرق العدد ٤٨ الى مضاربيه الاولى فيكون: $٤٨ = ٢ \times ٣$
وبالاستناد على النظرية السابقة نقول ان ٤٨ يقبل القسمة على :

$$١، ٢، ٣، ٤، ٦، ٨، ١٢، ١٦، ٢٤، ٣٢، ٤٨$$

او : $١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ٣٢، ٤٨$ ، $٣، ٦، ١٢، ٢٤، ٤٨$

اي ان قواسم العدد ٤٨ هي الاعداد المدرجة اعلاه لانها تحتوي على مضاريب من نوع المضاريب المؤلف منها ٤٨ وبقوة لا تزيد عن نظائرها في المقسوم وتستخرج القواسم السابقة بصورة عملية كما يلي :

١	1	٤٨
٢	2	٢٤
٤	2	١٢
٨	2	٦
١٦	2	٣
٤٨، ٢٤، ١٢، ٦، ٣	3	١

شرح العمل — نفرق العدد ٤٨ الى مضاربيه الاولى ويرسم مستقيماً رأسياً بجذاء المضاريب المذكورة ثم نضع (١) في الطرف الاعلى باعتبار ان كل عدد يقبل القسمة على (١) ونضرب ٢ في ١ ونضع الحاصل بجذاء المستقيم امام العدد (٢)

ونضرب بعد ذلك كلاً من المضارب الاولى بالنواتج الحاصلة بصورة متعاقبة هذا اذا كانت المضارب متساوية اما اذا كان احد المضارب يختلف عن سابقه يقتضي ان يضرب بجميع النواتج الحاصلة على التوالي .

مثال (٢) — قواسم العدد ٢١٠ هي :

١	1	
2	2	٢١٠
3	3	١٠٥
٥	٥	٣٥
٦	٦	
١٠	١٠	٧
١٥	١٥	
٢١	٢١	١
٣٥	٣٥	
٤٢	٤٢	
٧٠	٧٠	
١٠٥	١٠٥	
٢١٠	٢١٠	

ملاحظة — عدد قواسم عدد ما يساوي حاصل ضرب اسس مضاربه

الاولية بعد اضافة الواحد لكل منها ففي المثال الاول، العدد $٤٨ = ٣ \times ٢^٣$ وحاصل ضرب اسس مضاربه الاولية بعد اضافة الواحد لكل منها هي:

$$(١ + ٤) \times (١ + ١) = ٥ \times ٢ = ١٠ \text{ اي عدد قواسم } ٤٨ \text{ هو } ١٠$$

$$\text{وفي المثال الثاني ، العدد : } ٢١٠ = ٢ \times ٣ \times ٥ \times ٧$$

وحاصل ضرب اسس مضاربه الاولية بعد اضافة واحد لكل منها

$$١٦ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = (١ + ١) \times (١ + ١) \times (١ + ١) \times (١ + ١)$$

وعليه فالعدد ٢١٠ له ١٦ قاسماً

٦٢ — فاصلة — اذا كتبت قواسم عدد ما على الترتيب فحاصل ضرب

كل قاسمين متناظرين منها يساوي ذلك العدد .

مثلاً — قواسم ٤٨ ترتب على الوجه الآتي :

٤٨	٢٤	١٢	٦	٣		١٦	٨	٤	٢	١
١	٢	٤	٨	١٦		٣	٦	١٢	٢٤	٤٨

فالقاسمان المتناظران : ١ ، ٤٨ حاصل ضربهما ١ × ٤٨ = ٤٨

» » ٤ : ١٢ ، » » ٤ × ١٢ = ٤٨

» » ٣ : ١٦ ، » » ٣ × ١٦ = ٤٨

وكذلك لو كتبت قواسم ٢١٠ بحسب ترتيبها كما يلي :

نشاهدان	٣٠	١٥	١٠	٥	٦	٣	٢	١
	٧	١٤	٢١	٤٢	٣٥	٧٠	١٠٥	٢١٠

حاصل ضرب العددين المتناظرين ١ ، ٢١٠ هو ١ × ٢١٠ = ٢١٠

» » ٣ : ٧٠ ، » » ٣ × ٧٠ = ٢١٠

» » ١٥ : ١٤ ، » » ١٥ × ١٤ = ٢١٠

ملاحظة — إذا كان عددا القواسم وترأ فالقاسم الذي يقع في الوسط يكون

متناظراً مع نفسه .

مثلاً — عدد قواسم ٣٦ هو ٩

فاذا كتبت بحسب ترتيبها :

٣٦	١٨	١٢	٩		٦		٤	٣	٢	١
١	٢	٣	٤		٦		٩	١٢	١٨	٣٦

يشاهد ان القاسم (٦) يناظر نفسه و ٦ × ٦ = ٣٦

٢ — المطلوب إيجاد قواسم الاعداد الآتية :

٦ ، ٢٨ ، ٤٩٦ ، ٢٢٠ ، ٢٨٤

٤٠٠ ، ١١٨٤ ، ١٢١٠ ، ٤٩٠٠ ، ١٨٩٠٠

٣ — ما العددين اللذان حاصل ضربهما ١٦٨ وحاصل جمعا ٣٤ ؟

٤ — » » » » ٥٨٨ » طرحها ٢٨ ؟

٥ — » » » » ١٤٤ » قسمتها ٤ ؟

* البحث الرابع *

القاسم المشترك الاعظم والمضاعف المشترك الاصغر لعدة اعداد

١ — القاسم المشترك الاعظم

٦٣ — تعريف — يقال للعدد انه قاسم مشترك لعدة اعداد فيما اذا قسم

كلًا من تلك الاعداد .

مثال — قواسم الاعداد : ٣٦ ، ٦٠ ، ٨٤ على الترتيب هي :

٣٦	١٨	١٢	٩	٦	٤	٣	٢	١	٣٦
٦٠	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦	٥	٤	٦٠
٨٤	٤٢	٢٨	٢١	١٤	١٢	٧	٦	٤	٨٤

فلاحظ في الجدول السابق ان القواسم المشتركة بين الاعداد: ٣٦، ٦٠، ٨٤ هي:

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢

تعريف — يقال لأكبر قاسم مشترك بين عدة اعداد (قاسم مشترك اعظم)

مثال — الاعداد : ٣٦ ، ٦٠ ، ٤٨ قاسمها المشترك الأعظم هو (١٢)

ملاحظة — قواسم العدد ١٢ هي ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢

وعليه فالقواسم المشتركة بين الاعداد ٣٦ ، ٦٠ ، ٨٤ هي بنفس الوقت قواسم القاسم المشترك الأعظم لها .

٦٤ — نظرية — القواسم المشتركة لعدة اعداد هي بنفس الوقت قواسم القاسم المشترك الأعظم لتلك الاعداد .

نتيجة — لمعرفة القواسم المشتركة لعدة اعداد يجب :

١ — حساب القاسم المشترك الأعظم لتلك الاعداد .

٢ — يفتش على قواسم القاسم المشترك الأعظم

إيجاد القاسم المشترك الأعظم

٦٥ — قاعدة — لإيجاد القاسم المشترك الأعظم لعدة اعداد يعمل مايلي :

اولاً — تفرق الاعداد المفروضة الي مضاربها الاولى

ثانياً — تضرب المضارب الاولى المشتركة ذات اصغر قوة فحاصل الضرب

هو القاسم المشترك الأعظم

مثال — ليكن المطلوب إيجاد القاسم المشترك الأعظم للاعداد :

٣٦٠ ، ١٤٤ ، ٣٧٨

المعمل

٣٧٨	٢	١٤٤	٢	٣٦٠	٢
١٨٩	٣	٧٢	٢	١٨٠	٢
٦٣	٣	٣٦	٢	٩٠	٢
٢١	٣	١٨	٢	٤٥	٣
٧	٧	٩	٣	١٥	٣
١		٣	٣	٥	٥
		١		١	

اي ان : $٧ \times ٢ \times ٣ = ٣٧٨$ ، $٢ \times ٢ \times ٣٦ = ١٤٤$ ، $٥ \times ٢ \times ٣٦ = ٣٦٠$:
والقاسم المشترك الاعظم للاعداد : ٣٧٨ ، ١٤٤ ، ٣٦٠ هو : $١٨ = ٢ \times ٣$

ملاحظة — القواسم المشتركة للاعداد : ٣٧٨ ، ١٤٤ ، ٣٦٠ هي نفس قواسم ١٨

وهي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٨

٦٦ — **تعريف** — يقال للعددين انهما متوافقان اذا وجد بينهما قاسم مشترك مثل العددين : ٤ ، ٦ والعددين ١٥ ، ٩ ويقال للعددين انهما اوليان معاً (متباينان) فيما اذا لم يكن بينهما قاسم مشترك غير الواحد .
مثل العددين : ٥ ، ٩ والعددين : ٣ ، ٨

٦٧ — **خاصة** — إذا قسم عدداً على قاسمها المشترك الأعظم فالحاصلان

يكونان عددين متباينين

مثلاً — ليكن العددا ٣٦٠ ، ٣٧٨

$$٧ \times ٢ \times ٣ = ٣٧٨ \quad ; \quad ٥ \times ٢ \times ٣٦ = ٣٦٠$$

فالقاسم المشترك الاعظم للعددين ٣٦٠ ، ٣٧٨ هو $١٨ = ٢ \times ٣$

ويشاهد ان : $٢٠ = ٣٦٠ \div ١٨$ ، $٢١ = ٣٧٨ \div ١٨$

فيتضح من تدقيق حاصلي القسمة ٢١،٢٠ انه ليس بينهما قاسم مشترك سوى (١)
وعليه فهما اوليان معاً (متباينان)

٢ - المضاعف المشترك الاصغر

٦٨ - تعريف - يقال للعدد انه مضاعف مشترك لعدة اعداد فيما اذا كان مضاعفاً لكل منها على حدة

مثال - مضاعفات الاعداد : ١٤ ، ١٠ ، ٣٥ على الترتيب هي :

١٤	١٤ ، ٢٨ ، ٤٢ ، ٥٦ ، ٧٠ ، ٨٤ ، ٩٨ ، ١١٢ ، ١٢٦ ، ١٤٠ ، ١٥٤ ، ...
١٠	١٠ ، ٢٠ ، ٣٠ ، ٤٠ ، ٥٠ ، ٦٠ ، ٧٠ ، ٨٠ ، ٩٠ ، ١٠٠ ، ١١٠ ، ١٢٠ ، ١٣٠ ، ١٤٠ ، ...
٣٥	٣٥ ، ٧٠ ، ١٠٥ ، ١٤٠ ، ١٧٥ ، ٢١٠ ، ...

فالاعداد : ١٤ ، ١٠ ، ٣٥ في المثال السابق هي مضاعفات مشتركة للاعداد
١٤ ، ١٠ ، ٣٥

تعريف - يقال لاصغر مضاعف مشترك بين عدة اعداد : مضاعف مشترك اصغر .

مثلاً - المضاعف المشترك الاصغر للاعداد ١٤ ، ١٠ ، ٣٥ في المثال
السابق هو ٧٠

ملاحظة - مضاعفات العدد ٧٠ هي : ٧٠ ، ١٤٠ ، ٢١٠ ... وهذه

المضاعفات هي بنفس الوقت مضاعفات ١٤ ، ١٠ ، ٣٥

٦٩ - نظرية - كل مضاعف مشترك لعدة اعداد هو بنفس الوقت

مضاعف لمضاعفها الاصغر

نتيجة - لايجاد المضاعفات المشتركة لعدة اعداد يجب :

٧١ — خاصة — اذ قسم مضاعف مشترك اصغر لعدة اعداد على كل منها فالخواصل تكون اعداداً متباينة .

مثلاً — الاعداد ١٢ ، ١٥ ، ٢٠ مضاعفها المشترك الاصغر هو : ٦٠

$$\text{فيشاهد ان : } \left\{ \begin{array}{l} ٥ = ١٢ \div ٦٠ \\ ٤ = ١٥ \div ٦٠ \\ ٣ = ٢٠ \div ٦٠ \end{array} \right. \text{ اعداد متباينة}$$

٧٢ — نظرية — لأجل ان يقبل عدد القسمة على عدة اعداد يلزم ويسفي ان يكون قابلاً القسمة على مضاعفها المشترك الاصغر .

مثلاً — كل عدد يقبل القسمة على ٩ ، ٥ لا بد ان يقبل القسمة على ٤٥

اذ في الحقيقة كل عدد يقبل القسمة على ٩ يكون مضاعف ٩

» » » » » » » »

ولأجل ان يقبل على كل من العددين ٩ ، ٥ يجب ان يكون :

مضاعف ومضاعف بأن واحد وعليه فهو مضاعف ٤٥

٧٣ — خاصة — اذا ضرب عددين بثالث او قسما على ثالث فكل من قاسمهما

المشترك الاعظم ومضاعفهما المشترك الاصغر يضرب او يقسم على ذلك العدد

مثال — ليكن العددين ١٢ ، ٢٨

$$١٢ = ٢٢ \times ٣ \text{ قاسمها المشترك الاعظم هو : } ٢٢ = ٤$$

$$٢٨ = ٢٢ \times ٧ \text{ مضاعفها المشترك الاصغر هو : } ٢٨ = ٧ \times ٣ \times ٢٢$$

١ — لنضرب كلا من العددين ١٢ ، ٢٨ في ٢ فرضاً فالخاصلان

يكونان : ٢٤ ، ٥٦

$$\text{و } ٢٤ = ٣ \times ٢٢ = ٨ \text{ قاسمها المشترك الاعظم هو : } ٨ = ٢٢$$

$$٥٦ = ٧ \times ٢٢ = ١٦٨ \text{ مضاعفها المشترك الاصغر هو : } ١٦٨ = ٧ \times ٣ \times ٢٢$$

ولشاهد ان $8 = 4 \times 2 = 168 : 2 \times 84$
 2 — لنقسم كلا من العددين 12 ، 28 على 2 فالناتجان يكون 6 ، 14

و $6 = 2 \times 3$ قاسمها المشترك الاعظم هو : 2
 $14 = 2 \times 7$ مضاعفها المشترك الاصغر هو : $2 \times 3 \times 7 = 42$

ويلاحظ ان $2 = 4 \div 2$ ، $42 = 84 \div 2$

74 — **قاعدة** — اذا ضرب المضاعف المشترك الاصغر لعددين بقاسمهما

المشترك الاعظم فاصل الضرب يساوي جداء العددين

مثال — ليكن — العددا هما : 12 ، 28

$12 = 2 \times 3$ مضاعفها المشترك الاصغر : $2 \times 3 \times 7 = 84$
 $28 = 2 \times 7$ قاسمها المشترك الاعظم : 2

فلاحظ ان : $84 = 12 \times 7 = 4 \times 28$

تمارين

١ — المطلوب حساب القاسم المشترك الاعظم للاعداد الآتية :

٢٦٤ ، ٢٥٢ ، ١٨٠	٦٣٩ ، ٣٠٩
١٣٢ ، ١٢٦ ، ٩٠	٥٤٠ ، ٤٦٨
٣٩٦ ، ٣٧٨ ، ٢٧٠	١٣٤٤ ، ٦٢٤
٢١١٢ ، ١٩٨٠ ، ١٥٨٤	٥٦٠٤ ، ٢٤٨٠
٣٩٣١٢٠ ، ٣٥٦٤٠٠ ، ١٩١٢٥	٥٥٤٤ ، ٩٣٦

٢ — حساب المضاعف المشترك الاصغر للاعداد الآتية :

٢٧٠ ، ١٢٠ ، ٤٥	١٤٤ ، ١٠٨
٤٠٥ ، ٢٢٥ ، ١٣٥	٣٠ ، ٢٤

٤٢٠ ، ٢٥٢ ، ١٣٢	٨٤ ، ٣٦
٣٢٥ ، ٢١٦ ، ١٨٠	٧٢ ، ٥٤
٢١٠ ، ١٢٦ ، ٩٦	١٠٠٨ ، ٣٦٠

٣ — ما هما العددا اللذان قاسمهما المشترك الاعظم ١٢٠ ومضاعفهما المشترك الاصغر ٢٠

٤ — ما العددا اللذان جدائهما ١٠٥٨٤ ومضاعفهما المشترك الاصغر ٥٠٤

٥ — » » » ٤٣٢ وقاسمهما المشترك الاعظم ١٢

تدريبات — مسائل محلولة على الابحاث السابقة

(١) — ما هو اصغر عدد اذا قسم على ١١، ٧، ٥ يكون الباقي منه في كل حالة (٣) ؟

الحل — لنفرض ان العدد المطلوب هو (ب)

$$\begin{array}{l}
 \text{فيكون : ب = مضاعف ٥} + ٣ \\
 \text{ب = مضاعف ٧} + ٣ \quad \text{التحقق :} \\
 \text{ب = مضاعف ١١} + ٣ \\
 \text{او : ب = مضاعف } ٥ \times ٧ \times ١١ + ٣ \\
 \text{ومنه : ب = مضاعف ٣٨٥} + ٣ \\
 \text{وبما ان اصغر مضاعف لعدد ما هو نفسه اذن :} \\
 \text{ب = ٣٨٥} + ٣ = ٣٨٨ \\
 \text{وهذا العدد المطلوب}
 \end{array}$$

٢ — محسن يريد توزيع مبلغ من المال يقرب من ٥٠٠ قرشاً على محتاجين فاذا وزعه على (٥) اشخاص او (٧) اشخاص يزيد منه ٤ قروش واذا وزعه على (٩) اشخاص لا يزيد منه شيء فالمطلوب حساب مقدار المبلغ وما يصيب كل من المحتاجين

في كل حالة ؟

الحل — لنفرض ان العدد هو (ب)

$$\text{فيكون : ب} = \text{مضا } ٥ + ٤$$

$$\text{، : ب} = \text{مضا } ٧ + ٤$$

$$\text{، : ب} = \text{مضا } ٩$$

$$\text{او : ب} = \text{مضا } ٣٥ + ٤ = \text{مضا } ٩$$

فلنجاد العدد المطلوب نفتش على احدى مضاعفات العدد (٣٥) المحصور بين

٤٠٠ - ٥٠٠ بصورة اذا اضيف اليه ٤ يكون الناتج مساوياً مضا ٩

$$\text{فنقول : مضا } ٣٥ \times ١٠ + ٤ = ٣٥٠ + ٤ = ٣٥٤ \text{ لا يقبل القسمة على } ٩$$

$$\text{مضا } ٣٥ \times ١١ + ٤ = ٣٨٥ + ٤ = ٣٨٩ \text{ لا يقبل القسمة على } ٩$$

$$\text{مضا } ٣٥ \times ١٢ + ٤ = ٤٢٠ + ٤ = ٤٢٤ \text{ لا يقبل القسمة على } ٩$$

$$\text{مضا } ٣٥ \times ١٣ + ٤ = ٤٥٥ + ٤ = ٤٥٩ \text{ يقبل القسمة على } ٩$$

اذن العدد ٤٥٩ هو المطلوب .

٣ — معلم اذا وزع ^{٥٧}(٣٥) قلماً على تلاميذه بصورة متساوية يزيد عنده (٥)

اقلام واذا وزع (٧٥) قلماً على نفس التلاميذ بصورة متساوية يزيد عنده (٣) اقلام فالمطلوب حساب عدد التلاميذ .

الحل — لنفرض عدد التلاميذ

فيكون :

$$\text{اولاً - مضا } ٥٣ = \text{مضا } ٥ + \text{ومنه : مضا } ٥٣ - ٥ = \text{مضا } ٤٨ = \text{مضا } ٣$$

ثانياً - ٧٥ = مضارب + ٣ ومنه : ٧٥ - ٣ = مضارب او ٧٢ = مضارب
فيلاحظ هنا ان العددين ٤٨ ، ٧٢ هما مضاعفان مشتركان للعدد (ب) فنفتش
على قاسمهما المشترك الاعظم .

ان : $٤٨ = ٣ \times ١٦$ وقاسمهما المشترك الاعظم هو :
 $٧٢ = ٣ \times ٢٤$ ، وهذا العدد المطلوب
 التحقيق : $٥٣ \div ٢٤ = ٢$ والباقي ٥ ، $٧٥ \div ٢٤ = ٣$ والباقي ٣

ملاحظة — بما ان العدد ٢٤ هو مضاعف الاعداد :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ١٢ ،

اذن عدد التلاميذ يحتمل ان يكون ٢٤ او احد قواسمها .
 ولما كان اكبر باقي في المسألة هو (٥) عليه يمكن ان يكون عدد التلاميذ
 اما ٢٤ او ١٢ او ٦

ويتضح مما سبق ان المسألة المدرجة اعلاه لها ٣ حالات ويعتبر عادة العدد
 المعادل للقاسم المشترك الاعظم هو الحل اذا لم يطلب حالات مختلفة للمسألة
 ٤ — المطلوب ايجاد عدد ما يكون له ١٢ قاسماً

الحل — بما ان مقدار قواسم عدد ما يساوي حاصل ضرب اسس مضاربيها
 الاولى بعد اضافة الواحد لكل منها .

$$\text{وان : } ١٢ = ٣ \times ٢ \times ٢ = ٦ \times ٢ = ٣ \times ٤$$

اذن العدد المطلوب ايجاده اما ان يكون ناتجاً من ٣ مضارب اولية او من
 مضروبين اوليين فقط .

فاذا كانت مضاربيه ثلاثة فاسمها يقتضي ان تكون : ١ ، ١ ، ٢

واذا كانت مضاربيه اثنين فأسسها يقتضي ان تكون: ٣، ٢، ١، ٥

مثلاً — $ح = ب \times د \times ٢$ وبالفرض $ح = ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$

$ح = ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$ $ح = ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$

$ح = ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$ $ح = ٢ \times ٣ \times ٥ = ٣٠$

ملاحظة — يمكننا اعتباراي اعداد اولية هي المضارب

٥ — المطلوب اثبات ان حاصل ضرب ٣ اعداد شفعية متعاقبة يقبل
القسمة على ٤٨

الحل — لتكن الاعداد المفروضة هي ٢، ٣، ٢، ٢، ٢، ٤

فالمطلوب ان $ح = ٢ \times (٢ + ٢) \times (٢ \times ٢) = ٤٨$ مضاً

البرهان من المساواة: $ح = ٢ \times (٢ + ٢) \times (٢ + ٢) \times (٢ + ٢)$

يمكننا ان نكتب: $ح = ٢ \times ٢ \times (١ + ٢) \times ٢ \times (٢ + ٢)$

(اخرج العدد المشترك في كل مضروب لخارج القوس)

او: $ح = ٢ \times ٢ \times ٢ \times (١ + ٢) \times (٢ + ٢)$

(بدلت مواقع المضارب)

او: $ح = ٨ \times (١ + ٢) \times (٢ + ٢)$

فلاحظ ان المساواة الاخيرة تقبل القسمة على ٨ لان احد مضايها ٨

وكذلك » » » ٦ لان ٣ مضارب منها متوالية

وبما ان ح تقبل على ٨، ٦ بأن واحد اذن تقبل على ٤٨

وعليه فالعدد ح = مضاً ٤٨ وهذا المطلوب

﴿ مسائل على الابحاث السابقة ﴾

١ — ما اصغر عدد اذا قسم بصورة متعاقبة على ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ يكون الباقي في كل قسمة (١)

٢ — محسن يريد توزيع مبلغ من المال يقرب من ٧٠٠ فرنسكا بين عدد من الفقراء فاذا وزعه على ٨ او ١٠ او ١٢ او ١٥ شخصاً بالتساوي يزيد عنده (٥) فرنسكات واذا وزعه على ١١ شخصاً لا يزيد عنده شيء فالمطلوب حساب مقدار المبلغ وما يصيب كل من الفقراء في كل حالة (٦٠٥)

٣ — ماهي اصغر سعة لبرميل مملوء بالخل ، اذا وزع في زجاجات سعة الواحدة ٤ لترات او ٥ لترات لايبقى فيه شيء واذا فرغ في زجاجات سعة الواحدة ٧ لترات يبقى فيه ٣ لترات ، وما عدد الزجاجات الممكن املأها من كل نوع ؟

٤ — عدد من التلاميذ اذا جلس كل ٧ او ٨ منهم على رحلة في احد الفصول لا يزيد محل شاغر على تلك الرحلات ولكن اذا جلس كل ٩ منهم على رحلة يزيد ٤ محلات شاغرة فالمطلوب حساب عدد الرحلات مع عدد التلاميذ . (٣٩٢ تلميذ)

٥ — ما اقل عدد من الجنود يمكن اصطفاؤهم خمسة خمسة او سبعة سبعة ولكن اذا اصطفوا تسعة تسعة يزيد منهم ٦ جنود . (١٠٥)

٦ — اوض بشكل مثلث اضلاعه ، ١٥٦ ، ٢٠٤ ، ٢٧٦ متراً يراد غرس اشجار على محيطها بابعاد متساوية وبصورة ان يقع في كل رأس منها شجرة فما هي اعظم مسافة ممكن جعلها بين كل شجرتين ؟ (١٢)

٧ — بستاني اشترى ارضاً مستطيلة الشكل طول بعديها ١٥٠ ، ٢١٠ امتار يريد ان يغرس اشجاراً في اطرافها على ابعاد متساوية يقع في كل رأس منها شجرة وان لا تقل المسافة بين الاشجار المتجاورة عن ٥ امتار فالمطلوب حساب الابعاد

الممكنة بين كل شجرتين وعدد الاشجار اللازمة في كل حالة .

٨ — ماالعددان اللذان حاصل جمعهما ١٦٨ وقاسمها المشترك الاعظم ٢٤ ؟

٩ — حاصل ضربهما ٢٥٣٥ » » » ١٣ ؟

١٠ — ماعدد الارقام اللازمة لترقيم كتاب عدد صفحاته (٣٧٥) ؟

١١ — ماعدد صفحات كتاب استعمل لأجل ترقيمها (٦٢٤) رقماً ؟

١٢ — ماعدد الارقام اللازمة لكتابة الاعداد من ١ حق ٣٢٥ ؟

١٣ — » » » » » ٣٥٧ الى ٨٣٧

١٤ — ماهي الاعداد ذوات الثلاث مراتب وتقبل القسمة على ٢ ، ٣ ،

٤ ، ٥ ، ٦

١٥ — من رثنين مفروضين يمكن تشكيل عددين فقط فالمطلوب بيان :

١ — ان الفرق بين العددين المذكورين هو احد مضاعفات ٩

٢ — اذا كان الفرق بين العددين هو ٥٤ فما هما الرقمان ؟ (في الحالات

المختلفة) (١٠٧ ، ٨٤ ، ٢٠٩ ، ٣٠٩)

١٦ — اذا قسم اي عددين مفروضين على فضلهاما فالباقيان من قسمتهما

يتساوان

١٧ — المطلوب اثبات ان في كل قسمة ممكنة يجب ان يكون المقسوم اعظم

من ضعف الباقي .

١٨ — المطلوب ايجاد الاعداد المحصورة بين (٥٠٠ - ٢٠٠٠) والتي اذا

قسمت على ١٨ ، ٣٠ ، ٤٢ يكون الباقي منها في كل حالة ١٣ (١٩٠٣ ، ١٢٧٣ ، ٦٤٣)

١٩ — قسم العددان ٣١٥ ، ٢٥٧ كل منهما على عدد فكان حاصل

قسمتهما متساويين والباقيان هما على الترتيب ٥ ، ٧ فما المقسوم عليهما ؟ [٩٠١١]

٢٠ — قسم العددين ١٣٨٢٧ ، ١٦٨٢٤٣ على عدد واحد فكان الباقيان من قسمتهما على الترتيب هما ٤٧ ، ٢٣ فالمطلوب حساب المقسوم عليه في الحالات المختلفة .
(٢٦ ، ١٣٠ ، ٦٥ ، ٥٢)

٢١ — مدرسة رغبت ان توزع ١٠٠٠ صفحة ورق على تلاميذ احد فصولها فاذا اعطت كلاً منهم مقداراً متساوياً يزيد عندها ١١ صفحة واذا وزعت ٩٠٠ صفحة على نفس التلاميذ بصورة متساوية ايضاً يزيد عندها ٣ صفحات فالمطلوب حساب عدد التلاميذ ؟
(٢٣ تلميذ)

٢٢ — شخصان كل منهما راكب على دراجة يسيران في نزهة حول دائرة ؛ الاول يقطع محيط الدائرة في ١٢ ثانية والثاني يقطعه في ٨ ثوان في اي وقت يتلاقى الشخصان لأول مرة فيما إذا خرجا من نقطة واحدة وسارا على اتجاه واحد . ومتى يتلاقيان إذا سارا على اتجاه معاكس .

٢٣ — ثلاثة تلاميذ اشتركوا في الركض حول دائرة فاذا خرج الثلاثة بأن واحد من نقطة على الدائرة وكان الاول يكمل دوره في ٢٤ ثانية والثاني في ٢٨ ثانية والثالث في ٣٦ ثانية فبعد كم من الزمن يمكن ان يتلاقوا معاً في النقطة التي خرجوا منها ؟
(٢٥٢ ثانية)

٢٤ — مجموع ارقام عدة اعداد يزيد دائماً عن ارقام حاصل جمع تلك الاعداد بقدر احد مضاعفات ٩

٢٥ — حاصل طرح اي عدد من عدد آخر بنفس رتبة وارقامه يساوي احد مضاعفات ٩

٢٦ — رقم عشرات حاصل طرح اي عدد ذي ثلاثة ارقام من معكوس وضعه يساوي ٩ وكذلك مجموع رقيه الآخرين يساوي ٩

٢٧ - تلميذ كتب رفيقه العدد ١٩٩٩٨ باعتبار انه حاصل جمع وكلفه ان يكتب فوقه عددين ذوي اربعة ارقام ثم كتب هو عددين آخرين بصورة سريعة فكان مجموع الاعداد الاربعة مساوياً ١٩٩٩٨ فالمطلوب معرفة كيف فكر التلميذ بكتابة العددين .

٢٨ - معلم كتب تلميذه العدد ٢٩٩٩٩٧ باعتبار انه حاصل جمع وكلفه ان يكتب فوقه ثلاثة اعداد ذات خمسة مراتب ثم اراد ان يكتب هو ثلاثة اعداد ايضاً بصورة ملو جمعت الاعداد الستة يكون مساوياً ٢٩٩٩٩٧ فكيف يكتب المعلم اعدادة؟

٢٩ - إذا جمع اي عدد ذي مراتب زوجية مع معكوس وضعه (تبديل مواقع ارقامه) فالحاصل المجموع يكون مساوياً مضاعف ١١

٣٠ - حاصل طرح اي عدد ذي مراتب فردية من معكوس وضعه يساوي احد مضاعفات ١١

الفصل الثاني

* بحث الكسور *

معلومات اولية

٧٥ - حاصل جمع مقاربن من نوع واحد

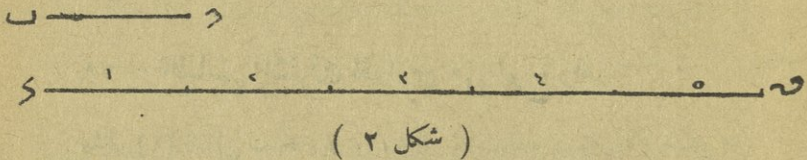
مثال (١) - حاصل جمع قطعتين مستقيمتين هو قطعة مستقيمة تحدث من وضع احدي القطعتين بجانب الثانية بحيث يتحد مبدأ احدهما مع نهاية الاخرى وهكذا فالحاصل جمع عدة قطع مستقيمة يحدث من وضع تلك القطع بجانب بعضها على التتابع .

مثال (٢) - حاصل جمع زاويتين هو زاوية ثالثة تحدث من وضع احدي

الزاويتين بجانب الثانية على ان يتحدا في ضلع مشترك وتقع كل منهما على طرف منه وكذلك حاصل جمع عدة زوايا ينتج من وضع تلك الزوايا بجانب بعضها بصورة متتابعة .

٧٦ - مضاعفات وقواسم مقرر ما

مثال (١) - ليكن $b > c$ ، و c قطعتين مستقيمتين وان طول c يساوي خمس مرات من طول $b > c$ (شكل ٢)



فيقال ان c مضاعف $b > c$ (و c تساوي b امثال $b > c$)

ويكتب : $c = 5 \times b > c$

وبالعكس فطول القطعة $b > c$ يساوي حاصل قسمة c على 5

[$b > c$ يساوي خمس c]

ويكتب $b > c = \frac{1}{5} c$ او $b > c = c \div 5$

وبصورة عامة ، ضرب مقدار ما في 5 [فرضاً] هو عبارة عن جمع ذلك

المقدار خمس مرات متوالية ويقال لحاصل الجمع انه (مضاعف) ذلك المقدار

وكذلك يمكن تقسيم مقدار ما الى عدة اجزاء متساوية يقال لكل منها (قاسم)

ذلك المقدار .

ملاحظة - يمكن اعتبار كل مقدار انه مضاعف نفسه وقاسمها في آن واحد

٧٧ - وحدة القياس للمقدار

في المثال السابق [مادة - ٧٢] كانت القطعة و ق تساوي خمس مرات ب - اي ان طول القطعة و ق علم بالنسبة الى طول ب - و عليه فالقطعة ب - اصبحت وحدة قياس للطول و ق .
ويمكن اعتبار اي طول كان وحدة لقياس الاطوال ولكن بصورة عامة يعتبر المتر مع اجزائه واضعافه وحدات قياسية لتقدير الاطوال .

٧٨ - القياس المشترك لقيارين من نوع واحد

مثال (١) لتكن ب - ، و ق ، هـ ك ثلاث قطع مستقيمة (شكل ٣)

ك

هـ ————— ك

ب ————— ب

و ————— و

(شكل ٣)

وان طول ب - يساوي ٣ مرات هـ ك

» و ق » ٤ »

فيكتب ب - = ٣ × هـ ك

و ق = ٤ × هـ ك

وبالمقابل فان القطعة هـ ك تعادل ثلث ب - او ربع و ق

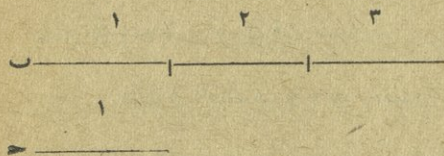
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ويكتب: هـ ك} = \frac{1}{3} \text{ ب ح} \\ \text{هـ ك} = \frac{1}{4} \text{ و ق} \end{array} \right. \quad \text{ومنه } \frac{1}{3} \text{ ب ح} = \frac{1}{4} \text{ و ق}$$

ويتضح من المثال السابق ان القطعتين ب ح ، و ق هما ذاتا قياس مشترك لان كلاهما مضاعف هـ ك ويقال للقطعة هـ ك انها القياس المشترك (القاسم المشترك) للقطعتين ب ح ، و ق لانها قسمت الاثنتين الى اقسام متساوية .

ومن الواضح ان القياس المشترك (القاسم المشترك) لا يكون الا بين مقدارين من جنس واحد ، طولين ، سمتين ، زاويتين ، ثقلتين ، ...

٧٩ — النحرى على القاسم المشترك الاعظم لمقدارين مفروضين

مثال — ليكن ب ، ح هما طولا قطعتين مستقيمتين وان ب < ح (شكل ٤)



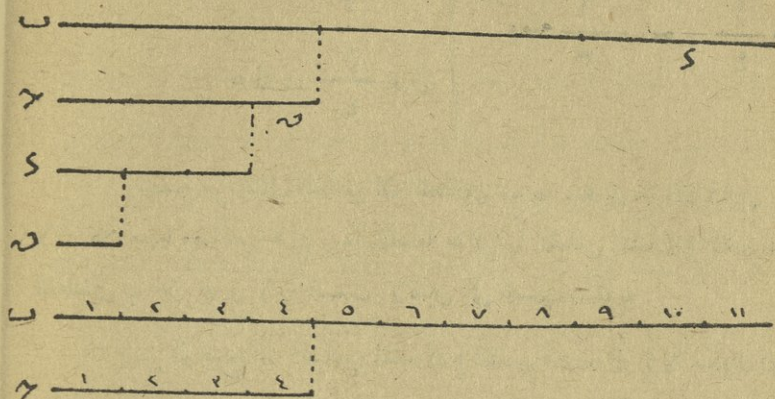
(شكل ٤)

١ — لنفرض ان طول القطعة ب يحتوي على طول القطعة ح ثلاث مرات صحيحة فتكون عندئذ ح قاسماً مشتركاً للقطعتين ب ، ح

حيث ان ح هي قاسم نفسها وقاسم ب في آن واحد ولذلك فهي القاسم المشترك الاعظم المطلوب .

٢ — لنفرض ان طول ب لا يحتوي على طول ح مرات صحيحة بل ان (ب)

تحتوي على ح مرتين ويزيد منها قسم طوله (و) (شكل ٥)



(شكل ٥)

فحينئذ لا تكون القطعة ح قاسماً مشتركاً للقطعتين ب ، لان ح لا تقسم ب
تقسيماً متساوياً ، ولذلك نقس على القاسم المشترك بين و ، اذ ان القاسم الذي
يقسم و ، ح يقسم في الوقت نفسه ب

فنقارن القطعتين و ، ح ببعضهما لئرى هل ان و تقسم ح فنشاهد في الشكل
ان طول ح يحتوي على طول و مرة واحدة ويزيد منه الطول ق اذا و لا يقسم ح
تقسيماً تاماً وعليه فالقطعة و ليست قاسماً مشتركاً بين القطعتين و ، ح .

وبنفس الطريقة نقس على القاسم المشترك للقطعتين ق ، و فنقارن ق مع و
ونرى ان ق تقسم و تقسيمياً تاماً حيث ان و تحتوي على ق ثلاث مرات صحيحة وعليه :

فالطول ق هو القاسم المشترك الاعظم للقطعتين ق ، و

وكذلك هو قاسم مشترك اعظم للقطعتين و ، ح

وايضاً هو قاسم مشترك اعظم للقطعتين ح ، ب

وإذا فالقاسم المشترك الاعظم للقطعتين ب ، ح هو الطول ق ولدى مقارنة
 ب ، ح بالقاسم المشترك الاعظم ق نرى ان ق تقسم ب الى ١١ جزءاً صحيحاً كما
 تقسم ح الى ٤ اجزاء صحيحة من نفس اجزاء ب .

ملاحظة — القواسم المشتركة للقطعتين ب ، ح هي نفس القواسم المشتركة
 للقطعتين د ، ق واكبر هذه القواسم المشتركة هو القاسم ق

مثال (٢) — ليكن م ، ن هما مجموعتان من الكرات وان $m < n$

١ — لنفرض ان مقداري المجموعتين هما ١٦ ، ٦٤ كرة

في هذه الحالة يرى ان مقدار المجموعة الاولى يحتوي على المجموعة الثانية و

مرات صحيحة

إذا المقدار ١٦ هو القاسم المشترك الاعظم للمجموعتين ١٦ ، ٦٤

حيث ان العدد ١٦ يقسم نفسه ويقسم ٦٤ في آن واحد .

٢ — لنفرض ان مقداري المجموعتين هما ١٩٨ ، ٧٢ كرة

في هذه الحالة يرى ان العدد ٧٢ لا يقسم ١٩٨ تقسيماً تاماً بل يزيد منه ٥٤

اذ : $١٩٨ = ٧٢ \times ٢ + ٥٤$ (الاولى تحتوي على مرتين من الثانية

وزيادة ٥٤ كرة)

وكذلك : $٧٢ = ١٨ + ١ \times ٥٤$ (الثانية تحتوي على الباقي مرة واحدة

وزيادة ١٨ كرة)

، $٥٤ = ٣ \times ١٨$ (الباقي الاول يحتوي على الباقي الثاني ٣

مرات بدون زيادة)

وعليه فالعدد ١٨ هو اكبر مقدار تحتوي عليه المجموعتان ١٩٨ ، ٧٢ في آن

واحد إذا العدد ١٨ هو القاسم المشترك الاعظم للعددين ١٩٨ ، ٧٢
وهذه الطريقة هي الحالة الثانية لاستحصا القاسم المشترك الاعظم لعددين
مفروضين وتطبق عادة عندما تكون الاعداد كبيرة. وتسمى (طريقة التقسيم المتوالي)
والقاعدة العملية فيها هي : ان يقسم العدد الكبير على الصغير ثم الصغير على
الباقى ثم الباقي الاول على الباقي الثانى وهكذا يتابع تقسيم البواقي الى ان ينتهى التقسيم
فالمقسوم عليه الاخير يكون هو القاسم المشترك الاعظم .

طريقة العمل

مثال - (٢)					مثال - (١)				
	٧٢	١	١	٢		٢	١	٣	
٣٣.٣٣	٤٥٥	٢٧٣	١٨٢	٩١	١٩٨	٧٢	٥٤	١٨	
١١٨٣	١٨٢	٩١	٠		٥٤	١٨	٠		
٢٧٣									

القاسم المشترك الاعظم للعددين :

٣٣.٣٣ ، ٤٥٥ هو ٩١

القاسم المشترك الاعظم للعددين :

١٩٨ ، ٧٢ هو ١٨

تمارين

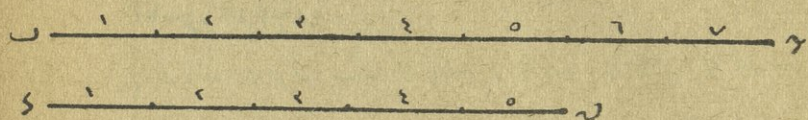
المطلوب ايجاد القاسم المشترك الاعظم لسكل من الاعداد الآتية بطريقة التقسيم المتوالي .

٩٧٠٢ ، ١٤٧٠٦	١١٥٩٢ ، ١٧٤٨	(١٠٣)	٨١٣٨ ، ٤٤٢٩
١٩٠٨٧ ، ٨٣٨٤٩	١٠٢٠٤ ، ٦٠٩١	(٢٢٧)	٤١٠٨٧ ، ١٦٥٧١
٣١١٦٦ ، ١٢٤١٢٠	٢٥١٧٥ ، ١٠٩٢٥	(٣٤٧)	٣٥٠٤٧ ، ٢١١٦٧

٨٠ - كسر مفرار ما

مثال (١) - لتكن $\succ$ ، و ق قطعتين مستقيمتين وان $\succ$ منقسمة الى

٧ اجزاء متساوية والقطعة و ق تحتوي على ٥ من تلك الاجزاء (شكل ٦)



[شكل ٦]

فيقال ان و ق تعادل خمسة اسباع $\succ$ ويكتب :

$$\text{و ق} = \frac{٥}{٧} \succ \succ \text{وبالعكس} \succ \frac{٧}{٥} \text{ و ق}$$

فالمقدار $\frac{٥}{٧}$ هو كسر (بسطه ٥ ومقامه ٧)

$$\frac{٧}{٥} \succ \succ \text{معا كس للكسر الاول}$$

ملاحظة - الافادة : و ق $= \frac{٥}{٧} \succ$ تدل على ان المقدارين $\succ$ ، و ق

بينهما قاسم مشترك اعظم يحتوي عليه $\succ$ (المقام) ٧ مرات كما يحتوي عليه و ق (البسط) ٥ مرات

مثال (٢) - لنفرض ان القطعة و ق تعادل ربع $\succ$ فنكتب

$$\text{و ق} = \frac{١}{٤} \succ \succ \text{و منه يحدث :} \succ = ٤ \times \text{و ق}$$

إذا العدد الصحيح ٤ والكسر $\frac{1}{4}$ هما عددان متعاكسان .

﴿مراجعة على القواعد المتعلقة بحسابات الكسور﴾

الكسور الاعتيادية

كما ان العدد ٧ فرضاً يمكنه ان يشعر ٧ تلاميذ ، ٧ اقلام ، ٧ شجرات

كذلك الكسر $\frac{3}{4}$ (بالفرض) يمكنه ان يدل على $\frac{3}{4}$ ساعة قنينة ، $\frac{3}{4}$ مساحة ارض ،

$\frac{3}{4}$ طول قطعة قماش

٨١ — الكسور المتساوية

تعريف — يقال للكسرين انهما متساويان فيما اذا كانت قيمة كل منهما تساوي مقداراً واحداً .

مثلاً — مقدار الساعة بالدقائق هو ٦٠ وربع الساعة هو ١٥ دقيقة

إذاً الكسر ان $\frac{15}{60}$ ، $\frac{1}{4}$ من الساعة يشعران زمناً واحداً وعليه فهما متساويان

$$\text{اي : } \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

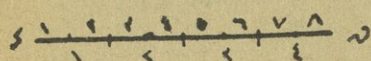
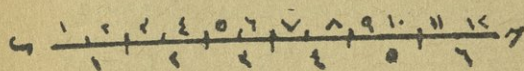
في خواص الكسور

٨٢ — خاصية (١) — اذا ضرب حدا كسر بعدد واحد او قسماً على

عدد واحد فقيمة الكسر لا تتغير (هذه هي الخاصية الاساسية للكسور) .

مثلاً — ليكن لدينا القطعتان ب ح ، و ق ولنفرض ان ب ح منقسمة

الى ٦ اجزاء متساوية والقطعة و ق تحتوي على ٤ من هذه الاجزاء [شكل ٧]



[شكل ٧]

فيكون القياس المشترك بين القطعتين ب ح ، و ق هو $\frac{1}{6}$

وعندئذ يمكننا ان نكتب : و ق = $\frac{4}{6}$ ب ح

فاذا قسم كل جزء من القطعتين المفروضتين الى قسمين متساويين يصبح

القياس المشترك بينهما هو $\frac{1}{12}$ ويصير و ق = $\frac{8}{12}$ ب ح

وبما ان طولي القطعتين ب ح ، و ق ثابتان اذاً قياس و ق بالنسبة الى ب ح

لم يتبدل بعملية التقسيم وعليه يكتب و ق = $\frac{4}{6}$ ب ح = $\frac{8}{12}$ ب ح

ومنه ينتج ان : $\frac{8}{12} = \frac{4}{6}$

ويلاحظ ان كلا من حدي الكسر الثاني هو ضعف نظيره في الكسر الاول

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \times 4}{2 \times 6} \text{ اي :}$$

كما ان كلاً من حدي الكسر الاول هو نصف نظيره في الكسر الثاني اي:

$$\frac{4}{6} = \frac{2 \div 8}{2 \div 12}$$

وبصورة عامة: $\frac{a \div b}{c \div d} = \frac{a \times b}{c \times d} = \frac{a}{c}$

ملاحظة — الخاصة السابقة هي اساس لعمليات الاختصار وتوحيد المقامات

الاختصار

٨٣ — اختصار الكسر هو عبارة عن شطب المضارب المشتركة بين حديه

للحصول على اوسط وضع له . ويقال للكسر انه (مختصر) فيما اذا كان

حداه عددين متباينين .

قاعدة — لأجل اختصار كسر يقسم حداه على قاسمهما المشترك الاعظم

مثال — المطلوب اختصار الكسر: $\frac{200}{720}$

٧٢٠ ، ٢٥٥ للعددين المشترك الاعظم $\left\{ \begin{array}{l} 17 \times 5 \times 3 = 255 \\ 10 \times 23 \times 3 = 720 \end{array} \right.$ القاسم المشترك الاعظم للعددين ١٥ هو : $15 = 5 \times 3$

إذا $\frac{17}{48} = \frac{255^{(15)}}{710}$

توحيد المقامات

٨٤ — توحيد مقامات الكسور هو عبارة عن إيجاد كسور تساوي الاولى

بالقيمة وتساوي فيما بينها بالمقام وتستند عملية توحيد المقامات على الخاصة الاساسية للكسور وهي :

إذا ضرب حدا الكسر بعدد ما فقيمة الكسر لا تتبدل .

فمثلاً — الكسر الاخصر : $\frac{3}{7}$ يمكن إيجاد عدة كسور تساويه بالقيمة

وذلك بضرب حديه بالاعداد المتوالية : ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ،

$$\frac{12}{28} = \frac{9}{21} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \text{ اي}$$

(٤) (٣) (٢)

ويلاحظ في الكسور الحادثة : $\frac{6}{14}$ ، $\frac{9}{21}$ ، $\frac{12}{28}$ ان حدي كل منهما من

مضاعفات الكسر $\frac{3}{7}$ على التقابل وعليه فالمقام المشترك للكسور التي تحصل بعد عملية التوحيد يجب ان يكون مضاعفاً لكل من مقامات الكسور المفروضة وللاختصار يرجح ان يكون المقام المشترك للكسور هو المضاعف المشترك البسيط لمقاماتها

٨٥ — قاعدة — لتوحيد مقامات الكسر بعمل مايلي :

١ — تختصر الكسور اذا امكن الاختصار

٢ — يفتش على المضاعف المشترك الاصغر لمقاماتها

٣ — يقسم المضاعف المشترك الاصغر على كل من مقامات الكسور ويضرب حدا كل منها بحاصل القسمة .

مثال (١) — المطلوب توحيد مقامات الكسور : $\frac{21}{28}$ ، $\frac{70}{120}$ ، $\frac{50}{100}$ ، $\frac{8}{15}$

بعد الاختصار تصبح الكسور : $\frac{3}{4}$ ، $\frac{17}{12}$ ، $\frac{11}{20}$ ، $\frac{8}{15}$

نفتش على المضاعف المشترك الاصغر لمقامات الكسور المختصرة :

$$٥ \times ٣ = ١٥ ؛ ٥ \times ٢٢ = ٢٠ ؛ ٣ \times ٢٢ = ١٢ ؛ ٢٢ = ٤$$

المضاعف المشترك الاصغر هو : $٢٢ \times ٣ \times ٥ = ٦٠$ اذاً هذا هو المقام المشترك الاصغر للكسور المفروضة فنقسم المضاعف المشترك الاصغر على مقام كل من الكسور ونضرب حديه بحاصل القسمة :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{٨}{١٥} ، \frac{١١}{٢٠} ، \frac{٧}{١٢} ، \frac{٣}{٤} \\ (٤) \quad (٣) \quad (٥) \quad (١٥) \\ \frac{٣٢}{٦٠} ، \frac{٣٣}{٦٠} ، \frac{٣٥}{٦٠} ، \frac{٤٥}{٦٠} \text{ او } \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١٥ = ٤ \div ٦٠ \\ ٥ = ١٢ \div ٦٠ \\ ٣ = ٢٠ \div ٦٠ \\ ٤ = ١٥ \div ٦٠ \end{array}$$

ملحوظة — لايجاد حاصل قسمة المقام المشترك على مقام كل من الكسور

يستحسن شطب الاعداد الاولية المشتركة بين المقامين المذكورين

مثلاً : $٥ = \underline{٣ \times ٢٢} \div \underline{٥ \times ٣ \times ٢٢} = ١٢ \div ٦٠$

مثال (٢) — المطلوب توحيد مقامي الكسرين : $\frac{٦٥}{٤٢٩} ، \frac{٣٢٩}{٤٢٠}$

$$\frac{٥}{٣٣} = \frac{(١٣)٦٥}{٤٢٩} ؛ \frac{٤٧}{٦٠} = \frac{(٧)٣٢٩}{٤٢٠}$$

نفتش على المضاعف المشترك الاصغر لمقامي الكسرين : $\frac{٥}{٣٣} ، \frac{٤٧}{٦٠}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{المضاعف المشترك الاصغر :} \\ ٦٦٠ = ١١ \times ٥ \times ٣ \times ٢٢ \end{array} \right\} \begin{array}{l} ٥ \times ٣ \times ٢٢ = ٦٠ \\ ١١ \times ٣ = ٣٣ \end{array}$$

$$\frac{١٠٠}{٦٦٠} ، \frac{٥١٧}{٦٦٠} \text{ او } \frac{٥}{٣٣} ، \frac{٤٧}{٦٠} \text{ وعليه :}$$

(٢٠) (١١)

٨٦ — **خاصة (٢)** — اذا اضيف الى حدي كسر ما عدد واحد فقيمة الكسر تكبر اذا كان بسيطاً وتصغر اذا كان مركباً .

مثلاً — لنأخذ أولاً : الكسر البسيط $\frac{٣}{٥}$ ونضيف الى حديه العدد (٢)

$$\text{يصير : } \frac{٥}{٧} = \frac{٢+٣}{٢+٥} \text{ فال المطلوب ان : } \frac{٥}{٧} < \frac{٣}{٥} \quad (٥) \quad (٧)$$

في الحقيقة اذا وجدنا مقامي الكسرين المذكورين يحدث : $\frac{٢١}{٣٥} ، \frac{٢٥}{٣٥}$

ويتضح من ذلك ان الكسر الاول اكبر من الثاني اذا $\frac{٥}{٧} < \frac{٣}{٥}$ وهو المطلوب

لنأخذ ثانياً الكسر المركب $\frac{٧}{٥}$ ونضيف الى حديه (٣) يصير :

$$\frac{١٠}{٨} = \frac{٣+٧}{٣+٥} \text{ فال المطلوب ان } \frac{١٠}{٨} > \frac{٧}{٥} \text{ وتوحيد مقاميهما ينتج : } \frac{٥٠}{٤٠} ، \frac{٥٦}{٤٠}$$

اي ان الاول اصغر من الثاني وعليه $\frac{١٠}{٨} > \frac{٥}{٧}$ وهو المطلوب .

٨٧ — **خاصة (٣)** — اذا طرح من حدي الكسر عدد ما فقيمة الكسر تصغر اذا كان بسيطاً وتكبر اذا كان مركباً .

مثلاً - لنأخذ أولاً الكسر البسيط $\frac{3}{5}$ ونطرح من حديه (٢) يصير :

$$\frac{3}{5} = \frac{2-3}{2-5} \text{ وهو اصغر من } \frac{3}{5} \text{ اي } \frac{3}{5} > \frac{1}{3}$$

ولنأخذ ثانياً الكسر المركب $\frac{8}{5}$ ونطرح من حديه (٣) يصير :

$$\frac{8}{5} = \frac{3-8}{3-5} \text{ وهذا بالبداهة اكبر من } \frac{8}{5} \text{ اي } \frac{8}{5} < \frac{5}{2} \text{ وهو المطلوب}$$

الجمع والطرح

٨٨ - قاعدة - لجمع او طرح الكسور الاعتيادية ، توحد أولاً باصغر مقام مشترك ثم تجمع البسوط او تطرح من بعضها ويجعل الناتج بسطاً لكسر مقامه نفس المقام المشترك .

مثال (١) - المطلوب جمع الكسور : $\frac{8}{15}$ ، $\frac{55}{100}$ ، $\frac{70}{120}$ ، $\frac{21}{28}$

العمل - تختصر : $\frac{8}{15} + \frac{(5)55}{100} + \frac{(10)70}{120} + \frac{(7)21}{28}$

توحد في (٦٠) : $\frac{8}{15} + \frac{11}{20} + \frac{7}{12} + \frac{3}{4}$

(٤) (٣) (٥) (١٥)

تصير : $\frac{29}{12} = \frac{(5)145}{60} = \frac{32}{60} + \frac{33}{60} + \frac{35}{60} + \frac{45}{60}$

مثال (٢) - المطلوب طرح الكسور : $\frac{65}{429}$ ، $\frac{329}{420}$

تختصر : $\frac{(13)65}{429} - \frac{(7)329}{420}$

$$\frac{139}{220} = \frac{(2)417}{660} = \frac{100}{660} - \frac{517}{660} = \frac{5}{33} - \frac{47}{60} : (660) \text{ توحد في}$$

(٢٠) (١١)

ملاحظة - اذا وجد اعداد صحيحة مع الكسور يعامل كل من الاعداد الصحيحة والكسور مع بعضها .

$$\left(\frac{5}{6} + 9\right) + \left(\frac{3}{4} + 7\right) + \left(\frac{2}{3} + 5\right) = م - (١) \text{ مثال}$$

$$\left(\frac{5}{6} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3}\right) + (9 + 7 + 5) = م$$

$$(٢) \quad (٣) \quad (٤)$$

$$\left(\frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \frac{8}{12}\right) + 21 = م$$

$$\frac{1}{4} + 23 = \frac{3}{12} + 2 + 21 = \frac{27}{12} + 21 = م$$

$$\left(\frac{7}{18} + 4\right) - \left(\frac{3}{4} + 6\right) = ل - (٢) \text{ مثال}$$

(٢) \quad (٩)

$$= \left(\frac{14}{36} + 4\right) - \left(\frac{27}{36} + 6\right) = ل$$

$$\frac{13}{36} + 2 = \left(\frac{14}{36} - \frac{27}{36}\right) + (4 - 6)$$

$$\text{مثال (٣) - } \left(\frac{٥}{٦} + ٧ \right) - \left(\frac{١}{١٥} + ١٤ \right) = ٧ - (٣)$$

(٥) (٢)

$$\left[\frac{٢٥}{٣٠} + ٧ \right] - \left[\frac{٢}{٣٠} + ١٤ \right] = ٧$$

$$\frac{٧}{٣٠} + ٦ = \left[\frac{٢٥}{٣٠} + ٧ \right] - \left[\frac{٣٢}{٣٠} + ١٣ \right] = ٧$$

الضرب

٨٩ - في ضرب الكسور يوجد حالتان :

الحالة الاولى : (ضرب الكسر بعدد صحيح) - في هذه الحالة يضرب بسط

الكسر بالعدد الصحيح ويجعل الناتج بسطاً لكسر مقامه نفس مقام الكسر

$$\text{مثال: } ٥ \times \frac{١}{٥} = \frac{٢٦}{٥} = \frac{٢ \times ١٣}{٥} = \frac{١٨ \times ١٣}{٤٥} = ١٨ \times \frac{١٣}{٤٥}$$

ملاحظة - اذا كان مقام الكسر قابلاً للقسمة على العدد الصحيح يترك

البسط على حاله ويجعل حاصل القسمة مقاماً له .

$$\text{مثال: } \frac{٤}{٥} = \frac{٤}{٧ \div ٣٥} = ٧ \times \frac{٤}{٣٥}$$

الحالة الثانية - (ضرب الكسر بكسر) - في هذه الحالة تضرب البسوط

فيها بينها وكذلك تضرب المقامات .

$$\frac{5}{12} = \frac{5}{3 \times 4} = \frac{5 \times 3}{9 \times 4} = \frac{5}{9} \times \frac{3}{4} : \text{مثال [١]}$$

$$\frac{13}{6} = \frac{13 \times 12 \times 5}{4 \times 10 \times 6} = \frac{13}{4} \times \frac{12}{10} \times \frac{5}{6} : \text{مثال [٢]}$$

$$\frac{39}{4} = \frac{13 \times 3}{4} = \frac{13 \times 3 \times 7 \times 10}{21 \times 20} = \frac{13}{21} \times 3 \times \frac{7}{20} \times 10 : \text{مثال [٣]}$$

ملاحظة — إذا كانت المضارب اعداد صحيحة مع الكسور تصرف الاعداد الصحيحة للكسور المرافقة لها اولاً ثم يجري الضرب وفقاً للحالة السابقة .

$$\frac{17}{6} = \frac{5 \times 17}{6 \times 5} = \frac{5}{6} \times \frac{17}{5} = \frac{5}{6} \times 3 \frac{2}{5} : \text{مثال [١]}$$

$$= \frac{23 \times 16}{4 \times 5} = \frac{23}{4} \times \frac{16}{5} = 5 \frac{3}{4} \times 3 \frac{1}{5} : \text{مثال [٢]}$$

$$18 \frac{2}{5} = \frac{92}{5} = \frac{23 \times 4}{5}$$

حالة خاصة — إذا ضرب الكسر بنفسه ينتج احدى قواه

$$\frac{23}{25} = \frac{3 \times 3}{5 \times 5} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} : \text{مثلاً}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{2} : \text{او}$$

ونستخلص من ذلك انه لرفع كسر الى قوة ما يرفع كل من حديه الى تلك القوة .

التقسيم

٩٠ - في تقسيم الكسور يوجد حالتان :

الحالة الاولى - (قسمة كسر على عدد صحيح) - في هذه الحالة يضرب مقام الكسر بالعدد الصحيح ويترك البسط على حاله

$$\text{مثال (١): } \frac{27}{31} \div 3 = \frac{27}{18 \times 31} = \frac{3}{2 \times 31} = \frac{3}{62}$$

ملاحظة - اذا كان بسط الكسر مضاعفاً للعدد الصحيح يقسم عليه ويترك المقام على حاله .

$$\text{مثال : } \frac{54}{73} \div 9 = \frac{9 \div 54}{73} = \frac{6}{73}$$

الحالة الثانية - (قسمة كسر على كسر) - في هذه الحالة يضرب المقسوم بعكس المقسوم عليه .

$$\text{مثال (١): } \frac{7}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{4 \times 7}{3 \times 8} = \frac{7}{6}$$

$$\text{مثال (٢): } 9 \div \frac{6}{13} = \frac{6}{13} \times \frac{13}{6} = \frac{13 \times 9}{6} = \frac{39}{2}$$

ملاحظة - اذا كان المقسوم والمقسوم عليه او كلاهما اعداد صحيحة مع كسور تصرف الاعداد الصحيحة للكسور ثم يجري التقسيم وفقاً للحالات السابقة .

$$\frac{3}{5} = \frac{4 \div 12}{5} = \frac{12}{5} = 4 \div 2 \frac{2}{5} \text{ مثال (١)}$$

$$\frac{18}{13} = \frac{4 \times 9}{13 \times 2} = \frac{4}{13} \times \frac{9}{2} = \frac{13 \div 9}{4 \div 2} = 3 \frac{1}{4} \div 2 \frac{1}{2} \text{ مثال (٢)}$$

٩١ - حاصل القسمة - ليكن ب، ح عددين (صحيحين او كسرين)

$$\text{فحاصل قسمتهما يفاد بالوضع } \frac{ب}{ح} = ب \div ح$$

امثلة

$$\frac{5}{42} = \frac{5}{7 \times 6} = 5 \div \frac{5}{6} = \frac{5}{7} \text{ على } \frac{5}{6} \text{ هي } \frac{5}{7}$$

$$\frac{33}{11} = \frac{11 \times 9}{3} = 3 \div 9 = \frac{9}{3} \text{ على } \frac{9}{11} \text{ هي } \frac{9}{3}$$

$$\frac{35}{24} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{5}{3} \div \frac{7}{8} = \frac{8}{3} \text{ على } \frac{7}{8} \text{ هي } \frac{8}{3}$$

ومن الامثلة السابقة يتضح ان حاصل قسمة اي مقدارين يمكن كتابتها بصورة كسر دائماً

ملاحظة - إذا فرضنا ان ب، ح، د، م اعداد صحيحة يمكننا كتابة

حاصل القسمة بصورة عامة بالقوانين الآتية :

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5+3+2}{2} \quad ١$$

حاصل قسمة مجموعة على عدد يساوي مجموع حاصل قسمة كل من حدودها على ذلك العدد .

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3-2}{2} \quad ٢$$

حاصل قسمة فضل على عدد يساوي فضل حاصل قسمة كل من حدوده على ذلك العدد .

$$5 \times \frac{3}{2} \times 2 = \frac{5 \times 3 \times 2}{2} \quad ٣$$

حاصل قسمة جداء اعداد على عدد يساوي جداء حاصل قسمة احد المضارب على ذلك العدد بالمضارب الآخر .

تمارين

١ - المطلوب اختصار الكسور الآتية :

$$\frac{792}{2420}, \frac{1785}{2295}, \frac{5130}{9576}, \frac{924}{2156}, \frac{132}{4590}, \frac{75}{100}$$

$$\frac{1078}{1386}, \frac{7812}{9198}, \frac{6552}{15912}, \frac{344}{645}, \frac{228}{285}, \frac{308}{588}$$

٢ - اصلاح الاعمال الآتية :

$$\left(\frac{3}{11} + 1\right) + \left(\frac{0}{7} + 2\right)$$

$$\frac{72}{280} + \frac{29}{73} - \frac{102}{080}$$

$$\frac{1103}{1202} + \frac{03}{968} + \frac{329}{922}$$

$$\frac{90}{370} - \frac{31}{132} + \frac{70}{126}$$

$$\left(\frac{19}{20} + 187\right) - \left(\frac{7}{12} + 320\right)$$

$$\left(\frac{1}{9} + 29\right) \div \left(\frac{11}{10} + 1\right)$$

$$\frac{7}{23} \div \left(\frac{3}{2} - 3\right)$$

$$\left(\frac{2}{0} + \frac{3}{2}\right) \div 1$$

$$\frac{13}{30} + \frac{30}{220} + \frac{11}{18}$$

$$\frac{8}{36} + \frac{17}{06} + \frac{00}{180}$$

$$\frac{11}{10} + \frac{3}{28} + \frac{17}{21}$$

$$\frac{3}{70} + 0\frac{1}{3} + 3\frac{3}{2}$$

$$2 - \frac{7}{8} + 3\frac{2}{0}$$

$$3\frac{2}{3} - 7\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2} - 2\frac{3}{0}$$

$$\frac{10}{73} \times \frac{06}{00}, \frac{12}{9} \times \frac{12}{30}$$

$$\left(\frac{0}{11} + 2\right) \times \frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{2}{13} + 32\right) \times \left(\frac{11}{12} + \frac{3}{28} + \frac{17}{10}\right)$$

$$\left(\frac{8}{10} + 3\right) + \left(\frac{11}{10} + 7\right) + \left(\frac{2}{3} + 7\right)$$

$$\frac{190}{176} \div \frac{78}{77}, \frac{99}{20} \div \frac{22}{30}$$

$$\frac{200}{396} \div \left(\frac{80}{540} + \frac{20}{484} + \frac{73}{132} \right)$$

الكسور العشرية والاعداد العشرية

٩٢ - تعريف - يقال للكسر انه عشري اذا كان مقامه ١٠، ١٠٠، ١٠٠٠،

١٠٠٠ (من قوى العشرة)

$$\text{امثلة: } \frac{7}{10} ; \frac{53}{100} \text{ او } \frac{53}{100} ; \frac{14735}{1000} \text{ او } \frac{14735}{1000} ; \frac{14735}{310} ; \frac{327}{10000} \text{ او } \frac{327}{410}$$

افادة الكسر العشري بعدد عشري

لا فائدة كسر عشري بعدد عشري ؛ يكتب بسطه فقط ويفرز اعتباراً من آحاده خانات بقدر اصفار مقامه واذا كانت خانات البسط اقل عدداً من اصفار المقام يوضع على يساره اصفار بقدر الزيادة .

$$\text{امثلة: } \frac{7}{10} = 0,7 ; \frac{53}{100} = 0,53 ; \frac{18725}{1000} = 18,725 ; \frac{254}{10000} = 0,0254$$

افادة العدد العشري بكسر عشري

لا فائدة عدد عشري بكسر عشري تؤخذ ارقام العدد وتجعل بسطاً لكسر مقامه واحد متبوع باصفار بقدر خانات الجزء العشري .

$$\text{امثلة: } \frac{145}{10} = 14,5 ; \frac{75}{100} = 0,75 ; \frac{28}{1000} = 0,028$$

٩٣ - خواص الاعداد العشرية

١ - اذا وضع على يمين العدد العشري عدة اصفار او حذف عدة اصفار فقيمة العدد العشري لا تتغير .

$$\text{امثلة : } ٠,٧ = ٠,٧٠ = ٠,٧٠٠ ; ٢,٥ = ٢,٥٠٠$$

$$\text{حيث : } ٧ : ٧٠ = \frac{٧}{١٠٠} \text{ و } ٧٠ : ٧ = \frac{٧٠}{١٠٠} \text{ وهنا يشاهد ان : } \frac{٧٠}{١٠٠} = \frac{٧}{١٠}$$

$$\text{« } \frac{٢٥٠٠}{١٠٠٠} = \frac{٢٥}{١٠} \text{ , , } \frac{٢٥٠٠}{١٠٠٠} = ٢,٥٠٠ \text{ و } \frac{٢٥}{١٠} = ٢,٥ \text{ »}$$

٢ - اذا نقل الفارز في العدد العشري الى اليمين خاة او خاتين او ثلاثة فالعدد يكبر ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ مرة واذا نقل الفارز الى الجهة اليسرى فالعدد يصغر .

امثلة : ٧,٢٥ ، ٧٢,٥ هنا ٧٢,٥ اكبر من ٧,٢٥ عشر مرات كما يتضح من افادتهما بالكسرين :

$$\frac{٧٢٥}{١٠} \text{ ، } \frac{٧٢٥}{١٠٠}$$

١٢,٥ ، ١٢٥ ، ١,٢٥ هنا ١,٢٥ اصغر من ١٢,٥ مائة مرة كما يشاهد في الكسرين :

$$\frac{١٢٥}{١٠٠٠} \text{ ، } \frac{١٢٥}{١٠}$$

وينتج من الخاصة السابقة :

اولاً - لضرب عدد عشري في ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... تنقل الفارز

الى اليمين خانات بقدر الاصفار واذا كانت خانات العدد اقل من الاصفار يوضع على يمينه اصفار بقدر الزيادة .

$$\text{مثلاً : } 37,5 = 10 \times 3,75 ; 750 = 100 \times 7,5$$

ثانياً — لقسمة عدد عشري على ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... تنقل الفارز الى اليسار خانات بقدر الاصفار واذا كانت خانات العدد اقل من الاصفار يوضع على يساره اصفار بقدر الزيادة .

$$7,85 = 10 \div 78,5 ; 25 = 100 \div 2,5$$

٩٤ — اعمال الاعداد العشرية

الجمع والطرح يجريان وفقاً للاعداد الصحيحة بعد توحيد خانات الجزء العشري في كل منها .

$$\text{امثلة : } 3,75 + 2,5 = 3,75 + 2,50 = 6,25$$

$$7,25 + 12,5 + 0,375 = 7,25 + 12,50 + 0,375 = 20,125$$

$$3,75 - 1,25 = 3,75 - 1,25 = 2,50$$

$$4,125 - 0,85 = 4,125 - 0,850 = 3,275$$

الضرب — الاعداد العشرية تضرب ببعضها كالأعداد الصحيحة ويفرز

اعتباراً من آحاد حاصل الضرب خانات بقدر الخانات العشرية الموجودة في الاعداد

$$\text{امثلة : } 2,5 \times 0,5 = 1,25 \text{ حيث } \frac{25}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{125}{100} = 1,25$$

$$1,25 \times 0,25 = 3,125 \text{ » } \frac{125}{100} \times \frac{25}{100} = \frac{3125}{10000} = 3,125$$

$0.0005 = 0.0002 \times 0.0025$

القسمة — لقسمة عشرين عشريين على بعضهما تطبق قاعدة التقسيم في الاعداد الصحيحة بعد ان توحد الخانات العشرية في المقسوم والمقسوم عليه ويحذف الفارز من كليهما .

مثلة: $0 = 0 \div 20 = 0, 0 \div 2, 0$

$$\xi \cdot = \gamma \div 28 \cdot = \cdot, \cdot \gamma = 2, 8 \cdot = \cdot, \cdot \gamma \div 2, 8$$

$$\bullet, \gamma = 0. \div 30 = 0,0. \div 0,30 = 0,0 \div 0,30$$

٩٥ — تحويل الكسور الاعتيادية الى عشرية

مثال - نلاحظ في الكسر العشري $\frac{38}{100}$ ان مقامه لا يحتوي الاعلى

الاعداد الاولية ٢ ، ٥

ای ان : $100 = 22 \times 50$

وبالاختصار يصبح الكسر $\frac{19}{20 \times 2} = \frac{19}{40} = \frac{38}{80}$

إذاً عندما يكون الكسر الاعتيادي مساوياً كسراً عشرياً يكون مقامه

محتويًا على الأعداد الأولية ٢ ، ٥ فقط

مثال - ليكن الكسر: $\frac{9}{5 \times 32} = \frac{9}{160}$ ولنضرب حديه في ٥٢ يحدث

$$\frac{225}{1000} = \frac{225}{310} = \frac{25 \times 9}{35 \times 32} = \frac{25 \times 9}{25 \times 5 \times 32} = \frac{9}{40}$$

ومن الامثلة السابقة ينتج القاعدة الآتية :

٩٦ - قاعدة لاجل ان يكون الكسر الاعتيادي (الاخضر) مساوياً كسراً عشرياً يلزم ويكفي ان يكون مقامه مؤلفاً من الاعداد الاولى ٢ ، ٥ فقط
اما اذا احتوى مقام الكسر على اعداد غير ٢ ، ٥ فهو لايساوي كسراً عشرياً البتة . وعندئذ لايمكن تقسيم بسطه على مقامه بصورة نهائية ويقال لناتج القسمة في هذه الحالة (كسراً وورياً) حيث يتكرر بعض ارقامه على الدوام

٩٧ - ماصل القسمة التقريبي

اذا قسم عدد على آخر ولم تنته القسمة فالمقدار المأخوذ من ناتج القسمة يسمى (الحاصل التقريبي)

$$\text{مثال : } 392 \div 12 = \frac{392}{12 \times 10} = 12 \div \frac{392}{10}$$

ان الكسر $\frac{392}{120}$ لايعطى ناتجاً حقيقياً ولكن يعطي المقدار ٣,٢٦٦ مع استمرار الرقم ٦ فاذا اخذنا من الناتج المقدار ٣,٢٦ او ٣,٢٧ نكون اخذنا الحاصل التقريبي لقيمة الكسر $\frac{392}{120}$ اذ ان القيمة الحقيقية للكسر المذكور محصورة

بين ٣,٢٦ ، ٣,٢٧

$$\text{اي : } 3,26 < \frac{392}{120} < 3,27$$

ويقال للعدد ٢,٢٦ انه مقرب الى اقل من ٠,٠٠١ كما يقال للعدد ٣,٢٧ انه مقرب الى اكثر من ٠,٠٠١ اي ان مقدار الخطأ في الحالتين هو اقل من ٠,٠٠١

ملاحظة — ان خانات الناتج كلما ازدادت ينقص مقدار الخطأ في التقريب

$$\text{مثلاً: } \frac{2}{3} = ٠,٦ = \text{هنا مقدار الخطأ اقل من } ٠,٠١$$

$$\frac{2}{3} = ٠,٦٦ = \text{» » » » » » » » » » } ٠,٠٠١$$

$$\frac{2}{3} = ٠,٦٦٦ = \text{» » » » » » » » » » } ٠,٠٠٠١$$

تمارين

- المطلوب ١ — تفريق الكسور التي تساوي كسوراً عشرية وتحولها
٢ — استحصال القيمة التقريبية للكسور غير العشرية بخطأ اقل من ٠,٠٠١

$$\frac{17}{64}, \frac{12}{125}, \frac{9}{75}, \frac{3}{5}, \frac{19}{80}, \frac{28}{50}, \frac{7}{20}$$

$$\frac{11}{15}, \frac{27}{81}, \frac{14}{60}, \frac{36}{72}, \frac{24}{60}, \frac{11}{20}, \frac{31}{512}$$

$$\frac{29}{110}, \frac{49}{2 \times 5 \times 7}, \frac{12}{2 \times 25 \times 3}, \frac{512}{40}, \frac{39}{225}, \frac{42}{45}$$

٩٨ — تطبيقات وعمليات مرفقة في الكسور

(عمليات الحروف في الكسور كعمليات الارقام)

١- توحيد مقامات الكسور مع جمعها وطرحها

$\frac{3-2}{2} = \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \frac{3}{2} - 1$	$\frac{5+2}{2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2} + 1$
$\frac{5-3}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} - 1\frac{1}{2}$	$\frac{7+2}{7} = \frac{7}{7} + \frac{2}{7} = 1 + \frac{2}{7}$
$\frac{8-7}{8} = \frac{8}{8} - \frac{7}{8} = 1 - \frac{7}{8}$	$\frac{6+2}{2} = \frac{6}{2} + \frac{2}{2} = 3 + 1$
$\frac{ق-ق}{حق} = \frac{ق}{حق} - \frac{ق}{حق} = \frac{ق}{حق} - 1$	$\frac{ق+ق}{حق} = \frac{ق}{حق} + \frac{ق}{حق} = \frac{ق}{حق} + 1$

٢- ضرب الكسور وتقسيمها

$\frac{16}{2} = \frac{2}{2} \times 8 = \frac{2}{2} \div 8$	$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 5}{7 \times 5} = \frac{5}{7} \times 5$
$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{6}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{2} \div 2$	$\frac{20}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{5}{2} \times 4$
$\frac{ق}{2} = \frac{ق}{2} \div \frac{ق}{ق}$	$\frac{ق}{ق} = ق \times \frac{ق}{ق}$
$\frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق} \times \frac{ق}{ق} = \frac{ق}{ق} \div \frac{ق}{ق}$	$\frac{ق}{ق} = \frac{ق \times ق}{ق \times ق} = \frac{ق}{ق} \times \frac{ق}{ق}$

تمارين عامة على اعمال الكسور الحرفية

المطلوب اصلاح الكسور الآتية :

$$\frac{5}{32} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 7, \frac{8}{1} + \frac{1}{2}, \frac{6}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{3} + \frac{5}{1} + \frac{2}{5}, \frac{1}{8} + \frac{2}{4} + \frac{6}{1}, \frac{5}{2} + \frac{2}{1} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{5}{1}\right) - \frac{1}{2}, \frac{14}{5} - 8 + \frac{7}{2}, \frac{5}{2} + \frac{5}{1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{1} - \frac{2}{8} + \frac{1}{8}, \frac{5}{2} - \frac{10}{2} + \frac{5}{1}, \frac{5}{15} - \frac{2}{10} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \times \frac{15}{2} \times \frac{1}{5}, \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} \times \frac{6}{1}, \frac{2}{10} \times \frac{5}{1}$$

$$2 \times \frac{3}{4} + \frac{1}{9}, \frac{23}{4} \times \frac{1}{2}, \frac{23}{8} \times \frac{1}{9}$$

$$\frac{3}{2} \div \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}, \frac{9}{8} \div \frac{3}{4}, \frac{2}{1} \div \frac{1}{2}, \frac{2}{2} \div \frac{1}{2}$$

مسائل على مراجعة الكسور والمقاييس

- ١ - ارض مستطيلة الشكل طول احد بعديها ٤٧٥ متراً ، قسمت بواسطة عمود على هذا البعد الى قسمين وبيعت بسعر الهكتار ١٥٠٠ فرنكاً فبلغ ثمنها ٧١٢٥ فرنكاً وكان ثمن احدهما يزيد عن ثمن الثانية ٢٦٢٥ فرنكاً فالمطلوب حساب مساحة وبعدي كل من القسمين .

- ٢ - رجل اشترى ارض مستطيلة الشكل بمبلغ ٨٦٤,٢٠ ليرة ، طولها

يزيد ١٢ متراً عن عرضها فعمل لها سياجاً من التيل بسعر المتر ١,٧٥ فرنكاً بلغت كلفته ٣٢٩ فرنكاً فما طول بعدي الارض وثمان شراء الآر منها ؟

٣ — شبه منحرف ارتفاعه ١٢٤ متراً ومساحته ٩٨,٥٨ آر ، احد قطريه يقسمه الى مثلثين مساحة احدهما تساوي ضعف مساحة الثاني فما طول قاعدتيه ؟

٤ — قطعة من الشمع مستطيلة الشكل محيطها ١٦ متراً وطولها يزيد مترين عن عرضها ، قسم من طرفيها قطعتين بواسطة مستقيمين يوازيان طولها فصار محيط المقسم الباقي ١٤,٨٠ متراً فالمطلوب مساحة كل من القسمين المفرزين .

٥ — فلاح عنده ارض فرزها الى ثلاثة اقسام الاول يعادل $\frac{5}{9}$ الارض والثاني

يعادل $\frac{3}{4}$ الباقي والثالث كان بشكل مثلث قاعدته ٨,٥ ديكامتر وارتفاعه ٦٣ متراً فاذا كان صاحب الارض اشتراها بسعر الآر ١٥٠ فرنكاً فكم يربح اذا باعها بسعر المتر المربع ١,٩٥ فرنكاً ؟

٦ — هرم صغير من المرمر ارتفاعه ١٢ سم : قاعدته مربع ضلعه ٦٥ مم موضوع على قاعدة مكعبة الشكل طول ضلعها ٩٠ مم ثقلها معاً يساوي ٢٠,٦٥ كيلوغراماً فالمطلوب حساب حجم هذا الجسم وكثافة المرمر .

٧ — تاجر اشترى ٤٥ متراً من قماش بمبلغ ١٩١٢,٥ فرنكاً ، باع $\frac{1}{3}$ القماش

بسرر المتر $\frac{1}{4}$ ٤٧ فرنكاً وباع $\frac{2}{5}$ القماش بسرر المتر $\frac{1}{3}$ ٤٩ فرنكاً والباقي باعه بسرر المتر

٤٨ فرنكاً فكم ربح في الجميع وكم كان ربحه في المائة . $(\frac{1}{4} \times ٢٦٣,٥ \div \frac{13}{17})$

٨ - مقامر خسر في اول مرة من لعبه $\frac{2}{5}$ دراهمه ثم ربح في ثاني لعبه $\frac{1}{3}$

ما كان عنده بعد اول لعبة فصار جملة ما عنده (٤٢) فرنكاً فكم كانت دراهمه حين دخوله اللعب (٥٢٥)

٩ - خرجت عربة ودراجة من نقطة واحدة الى جهة واحدة في نزهة حول دائرة في الساعة ١٠ والدقيقة ٥٣ صباحاً، العربة تقطع المسافة جميعها بمدة ساعة واحدة و٥ دقائق والدراجة تسير بسرعة تعادل اربعة اضعاف سرعة العربة ففي اي

ساعة يتلاقيان في المرة الاولى وكذلك في الثانية (١١ و $\frac{2}{3}$ ، ١٤، ١١ و $\frac{1}{3}$)

١٠ - ما اصغر عدد صحيح يقسم على الكسرين $\frac{7}{8}$ ، $\frac{5}{12}$ فيكون حاصله

القسمة عددين صحيحين ؟ (٣٥)

١١ - ما اصغر كسر يقسم على الكسرين $\frac{7}{8}$ ، $\frac{5}{12}$ فيكون حاصله

القسمة عددين صحيحين ؟

١٢ - ما اصغر كسر يقسم عليه الكسران : $\frac{7}{8}$ ، $\frac{5}{12}$ فيكون حاصله

القسمة عددين صحيحين ؟

١٣ - طار دكلب ثعلباً يمدعنه ١٢٠ خطوة وكان الثعلب يخطو (٥) خطوات في

الوقت الذي يخطو فيه الكلب ٣ خطوات فالمطلوب معرفة كم خطوة يخطوها الكلب حتى يلحق الثعلب مع العلم ان خطوة الكلب تعادل خطوتين من خطوات الثعلب .
(٣٦٠)

١٤ - نظر كلب ثعلباً عن بعد فطارده حتى لحقه وخطى اثناء ذلك ٢٩٠ خطوة بينما الثعلب خطى ٣٨٥ خطوة فالمطلوب حساب البعد الذي كان بينهما مع العلم ان خطوتين من الكلب تعادل ٣ خطوات من الثعلب .

١٥ - حوض عليه ثلاث حنفيات ، الاولى والثانية تملئانه معاً في $\frac{1}{7}$ يوماً

والثانية والثالثة تملئانه معاً في $\frac{2}{9}$ يوماً والاولى مع الثالثة تملئانه في $\frac{7}{8}$ يوماً
فالمطلوب حساب :

١ - الزمن الذي تملئ فيه الحنفيات الثلاث الحوض .

٢ - « « « « كل من الحنفيات الثلاث الحوض .

١٦ - اناء فيه ١٠ لترات حليب ، ٥ لترات ماء وانا آخر فيه ٨ لترات

حليب ، ٦ لترات ماء اخذ ٧ لترات من المزيج الاول ووضع في الاناء الثاني ثم اخذ ٧ لترات مما صار في الاناء الثاني من المزيج ووضع في الاناء الاول فالمطلوب حساب كمية الحليب والماء التي صارت بعد ذلك في كل من الانائين .

١٧ - اوصى رجل عند وفاته ان يوزع ماله البالغ ٣٩٦٠٠ فرنكاً بين زوجته

وولديه وبناته على الصورة الآتية : الولد الكبير يأخذ $\frac{5}{12}$ من المال والصغير $\frac{4}{19}$ من

المال والزوجة تأخذ $\frac{2}{11}$ من المال الباقي من الولدين والبنات تأخذان الباقي الاخير بالتساوي فالملطوب حساب حصة كل منهم .

١٨- تاجر فتح تجارة بمبلغ ما ، في نهاية السنة الاولى كان صافي ارباحه

يعادل $\frac{2}{17}$ من رأسماله فاضافه الى الرأس المال وفي نهاية السنة الثانية كان صافي ارباحه

يعادل $\frac{6}{11}$ من رأسماله في تلك السنة فاضافه الى الرأس المال وفي نهاية السنة الثالثة

كان صافي ارباحه يعادل $\frac{1}{1}$ من رأسماله في تلك السنة فاضافه الى الرأس المال حيث

بلغ ٢٨٥٠٠٠ فرنكاً فكم كان رأسماله في ابتداء السنة الاولى ؟

١٩- برميل وزن ٢٤٦ كيلوغراماً عندما يكون ملأً من الماء ويزن ٢٣٠

كيلوغراماً اذ كان ملأً من زيتاً فالملطوب حساب وزن البرميل عندما يكون فارغاً

ومقدار سعته مع العلم ان كثافة الزيت (١,٩٢) (٤٦كغ، ٢٠٠ل)

٢٠- وزع مبلغ بين ثلاثة اشخاص فأخذ الاول ١٠٠٠ فرنكاً و $\frac{1}{4}$ الباقي

من المبلغ واخذ الثاني بعده ٢٠٠٠ فرنكاً و $\frac{1}{4}$ الباقي منه واخذ الثالث الباقي

الاخير فكانت حصصهم متساوية فما هو المبلغ الاصلي . (٩٠٠٠)

٢١- عطار خلط مقدارين من القهوة ببعضهما ، الاول يعادل $\frac{3}{7}$ الخليط

اشترى الكيلوغرام منه بمبلغ ٨,٥٠ فرنكاً والباقي من الخليط اشتراه بسعر الكيلو

غرام ٩,٢٠ فرنكاً ثم باع الخليط جميعه بسعر الكيلوغرام ١٤ فرنكاً فكان ربحه في الجميع ٧١٤ فرنكاً فما مقدار القهوة (٦٠, ٨٠ كغ)

٢٢- سمان اشترى مقداراً من البيض كل اثنين بمبلغ ٠,٧٥ فرنكاً، باع نصفه بسعر الواحدة ٠,٥٠ فرنكاً و $\frac{1}{3}$ البيض باعه بسعر الاثني عشرية ٦,٧٥ فرنكاً وباع الباقي من البيض بسعر الاثني عشرية ٧,٥ فرنكاً فكان ربحه في البيض جميعه ٤٨ فرنكاً فما عدد البيض ؟ (٢٨٨)

٢٣- رجل فتح تجارة فكان ربحه في نهاية السنة الاولى $\frac{3}{4}$ من رأسماله وبيع في السنة الثانية $\frac{4}{3}$ ما ربحه في السنة الاولى وخسر في السنة الثالثة مبلغاً قدره (٢٥٠٠) فرنكاً ثم وجد ان ارباحه بلغت في نهاية السنة الثالثة (٣٩٥٠٠) فرنكاً فكم كان رأسماله ؟

٢٤- ارض مستطيلة الشكل طولها ١٢٠ متراً ، عرضها يساوي $\frac{3}{5}$ طولها يراد ان تحاط بصفيين من الاشجار احدهما يغرس في محيط الارض والثاني في داخله بشرط ان تكون المسافة بين كل شجرتين مترين فما عدد الاشجار اللازمة لذلك ؟ (٣٧٦)

٢٥- قضيب من الحديد مقطعه مربع فاذا كان طولهُ ٢,٤٠ متراً ووزنه ٢٦٩,٥٦٨ كغ فكم يكون طول ضلع مقطعه مع العلم ان كثافة الحديد (٧,٨)

الفصل الثالث

في المربع والمجزر المربع

﴿ البحث الاول - المربع ﴾

٩٩ - تعريف - مربع عدد هو عبارة عن حاصل ضربه بنفسه

امثلة - مربع العدد ٥ هو $٥ \times ٥ = ٢٥$ ويكتب $٢٥ = ٥^٢$

» » $٦,٥ \times ٦,٥ = ٤٢,٢٥$ ويكتب $٤٢,٢٥ = ٦,٥^٢$

» » $٠,٢٥ \times ٠,٢٥ = ٠,٠٦٢٥$ » $٠,٢٥^٢ = ٠,٠٦٢٥$

» » $\frac{٢}{٥} \times \frac{٢}{٥} = \frac{٤}{٢٥}$ ويكتب $\frac{٤}{٢٥} = (\frac{٢}{٥})^٢$

وبصورة عامة : مربع العدد ٢ يكتب ٢ وكذلك مربع الكسر $\frac{٢}{٥}$ يكتب $\frac{٢}{٥}$

ملاحظة - من الامثلة السابقة يتضح :

١ - ان مربع الكسر الاعتيادي يساوي حاصل قسمة مربع بسطه على مربع مقامه .

٢ - ان مربع الكسر هو كسر آخر اصغر منه .

فواص عامة على المربعات

١٠٠ - لرسم جدولاً يحتوي على ثلاثة اعمدة (شكل-٧) ونكتب في احدها اعداداً صحيحة متوالية اعتباراً من الصفر ونكتب في العمود الثاني مربعات هذه

الاعداد	مربعاتها	الفضل
٠	٠	١
١	١	٣
٢	٤	٥
٣	٩	٧
٤	١٦	٩
٥	٢٥	١١
٦	٣٦	١٣
٧	٤٩	

الاعداد بالتعاقب ثم نكتب في العمود الثالث الفرق بين المربعات المتوالية وبتدقيق الاعداد المرقمة في الجدول المذكور نلاحظ :

١ - الفرق بين مربعات الاعداد المتوالية هي اعداد فردية متوالية .

٢ - مربع عددا يساوي حاصل جمع الاعداد الفردية المتوالية الاولى التي عددها يساوي وحدات هذا العدد .

$$٢٢ = ١ + ٣ + ٥$$

$$٢٤ = ١ + ٣ + ٥ + ٧$$

٣ - الفرق بين مربعي عددين متوالياين يساوي حاصل جمع نفس العددين .

$$٢٣ - ٢٢ = ١ + ٣ ; ٢٤ - ٢٣ = ٣ + ٤$$

$$٢٥ - ٢٤ = ٤ + ٥$$

١٠١ - خاصّة - الفضل بين مربعي عددين

متوالياين هو عدد فردي يساوي حاصل جمع نفس العددين (شكل ٧)

وبالاستناد على هذه الخاصّة ، يمكننا معرفة عددين متتابعين اذا علم الفضل بين مربعيهما وكذلك يمكننا معرفة الفضل بين مربعي عددين متتابعين مفروضين .

مثال (١) - الفضل بين مربعي عددين متتابعين ٧ فما هما العددان ؟

$$\text{الحل - بما ان : } ٧ = ٤ + ٣ \text{ اذن العددان هما : } ٤ , ٣$$

$$\text{التحقيق : } ٢٤ - ٢٣ = ١٦ = ٩ - ٧$$

مثال (٢ — ماهو الفضل بين مربعي العددين المتوالين ٦٠٧ ، ٦٠٨ ؟

الحل — ان : $٦٠٨ = ٦٠٧ + ١$ وهو الفضل بين مربعي ٦٠٧ ، ٦٠٨

التحقيق : $٦٠٨^2 - ٦٠٧^2 = ١٢١٢١ - ٣٦٨٤٩ = ١٢١$

تطبيقات

الخاصة السابقة تسهل علينا حل مسائل حسابية هامة من نوع المسألة الآتية :

مسألة — معلم اذا صف تلاميذه صفوفاً منتظمة بشكل مربع يزيد منهم ١٦

تلميذ واذا اضاف لكل من الصفوف تلميذاً واحداً ينقصه ٧ ليكمل المربع الثاني

فما عدد التلاميذ ؟

الحل — الفرق بين المربعين في هذه المسألة هو :

$١٦^2 - ٧^2 = ٢٦١$ وبما ان $٢٣ = ١١ + ١٢$ اذن عدد التلاميذ هو :

$١٦^2 - ٧^2 = ٢٦١$ تلميذ

او $١٢^2 - ٧^2 = ١٢١$ تلميذ

ويتضح من الحل السابق ان الجواب الناتج من احدى الحالتين يحقق

الجواب الناتج من الحالة الثانية .

مربع حاصل ضرب

١٠٢ — خاصية — مربع جداء عدة اعداد يساوي جداء مربعاتها .

مثلاً : $(٣ \times ٤ \times ٥)^2 = ٣^2 \times ٤^2 \times ٥^2$

حيث : $(٣ \times ٤ \times ٥)(٣ \times ٤ \times ٥) = ٣^2 \times ٤^2 \times ٥^2$

$٣ \times ٤ \times ٥ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = \dots$

$$\text{او: } 3 \times 3 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 = {}^2(3 \times 4 \times 5)$$

$$\text{ومنه } {}^2_3 \times {}^2_4 \times {}^2_5 = {}^2(3 \times 4 \times 5)$$

$$\text{وبصورة عامة: } (5 \times 3 \times 2) = {}^2_5 \times {}^2_3 \times {}^2_2$$

ومن الخاصة السابقة ينتج :

١٠٣ - نتيجة (١) - العدد المربع اساس مضاربه الاوليه تكون زوجيه حتما

وعليه لمعرفة عددهما كونه مربعاً او غير مربع يفرق الى مضاربه الاوليه

ثم ينظر في اساسها فاذا كانت زوجيه كان العدد مربعاً والا فهو غير مربع .

امثلة : العدد ٣٦ مربع لأن $36 = {}^2_3 \times {}^2_2 = 24$ غير مربع حيث : $3 \times {}^2_2 = 24$

$$: 900 \gg 900 = {}^2_5 \times {}^2_3 \times {}^2_2$$

$$45 \text{ غير مربع حيث : } 5 \times {}^2_3 = 45$$

١٠٤ - نتيجة (٢) - العدد المنتهى باصفار مربعه ينتهي بضعف تلك الاصفار

$$\text{مثلاً : } 270 = {}^2(10 \times 7) = {}^2_{10} \times {}^2_7 = 210 \times 49 = 100 \times 49 = 4900$$

$$: 1200 = {}^2(100 \times 12) = {}^2_{100} \times {}^2_{12} = 10000 \times 144 = 1440000$$

يتضح مما سبق ان العدد المربع اذا كان منتهياً باصفار، يجب ان يكون عددها شفعاً .

تدريب (١) - ما اصغر عدد يضرب في ٣٢٥ ليكون الناتج عدداً مربعاً؟

الحل - ان $325 = 13 \times {}^2_5$ وبما ان المضروب ١٣ اسه واحد اذن يجب

ان يضرب ٣٢٥ في ١٣ ليصير اس ١٣ شفعاً اي : $13 \times 325 = {}^2_{13} \times {}^2_5$

تدريب (٢) - ما اصغر عدد يقسم ٣٦٠٠٠ ليكون الناتج عدداً مربعاً؟

الحل - ان $36000 = {}^2_3 \times {}^2_3 \times {}^2_{10} \times {}^2_2$ ومن حيث ان المضروب ١٠ اسه ٣

اذن يجب ان يقسم العدد على ١٠ فيصير اس ١٠ شفعاً والعدد الناتج يكون مربعاً

$$210 \times 23 \times 22 = 10 \div 36 \dots$$



المطلوب : ١ - تقريق المربعات من غير المربعات من الاعداد الآتية:

٢ - ماهو اصغر عدد يمكن ضربه في كل من الاعداد غير

المربعة ليكون الناتج مربعاً .

20. 231.2, 1.22, 10720, 0720

112.081, 322, 1176, 0.8, 1750

مربع مجموع عددین

١٠٥ — مربع مجموع عددين يساوي : مربع الاول زائد ضعف حاصل

ضرب الاول بالثاني زائد مربع الثاني .

$$٦٤ = ٩ + ٣٠ + ٢٥ = ٢٣ + ٣ \times ٥ \times ٢ + ٢٥ = ٢(٣ + ٥) : \text{مثلاً}$$

حيث: $3 \times 3 \times 0 \times 3 + 3 \times 0 + 0 \times 0 = (3+0)(3+0) = 2(3+0)$

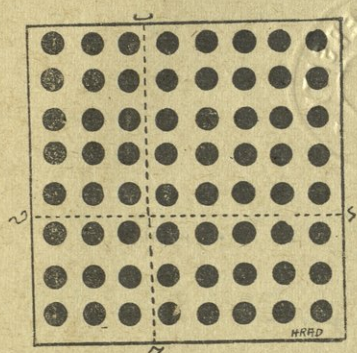
$$r_m + m \times 0 \times r + r_0 = r(m + 0) : \text{ومنه}$$

وبصورة عامة: ${}^2u + {}^2u + {}^2u = {}^2(u + u)$

والشكل (٨) يوضح لنا هذه القاعدة .

نشاهد ان المربع الكبير

يحتوي على ٦٤ كرة مرتبة في ٨ صفوف وهو في الوقت نفسه مؤلف من مربعين ومستطيلين ، احدهما مربعين يحتوي على ٢٥ كرة في خمسة صفوف والثاني يحتوي على ٩ كرات في ثلاثة صفوف ، وكل من المستطيلين يحتوي على ١٥ كرة مرتبة في خمسة صفوف يتألف كل منها من ثلاث كرات .



(شكل ٨)

١٠٦ - حساب مربع عدد اكبر من ١٠

بما ان كل عدد اكبر من ١٠ يمكن اعتباره مجموعة مؤلفة من آحاده وعشراته اذن مربعه يكون مساوياً ، الى مربع عشراته زائد ضعف حاصل ضرب عشراته بآحاده زائد مربع آحاده .

$$\text{مثال (١) : } ١٢^2 = (٢ + ١٠)^2 = ٢^2 + ٢ \times ١٠ \times ٢ + ١٠^2 = ٤ + ٤٠ + ١٠٠ = ١٤٤$$

$$١٤٤ = ٤ + ٤٠ + ١٠٠ =$$

$$\text{مثال (٢) : } ٢٥^2 = (٥ + ٢٠)^2 = ٥^2 + ٥ \times ٢٠ \times ٢ + ٢٠^2 = ٢٥ + ٢٠٠ + ٤٠٠ = ٦٢٥$$

$$٦٢٥ = ٢٥ + ٢٠٠ + ٤٠٠ =$$

ومن مطالعة الاجزاء الثلاثة التي يتألف منها مربع العدد نرى أن الجزئين الأولين لا يحتويان على آحاد بسيطة وعليه فمربع العدد الصحيح ينتهي بنفس الرقم الذي ينتهي به مربع آحاده .

اي أن آحاد ٢٤٧ هو ٩ ؛ آحاد ٢١٥٨ هو ٨

ولما كانت الآحاد البسيطة هي : ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

فربعاتها تنتهي بالارقام : ١ ، ٤ ، ٩ ، ٦ ، ٥

ملاحظة — بما ان العدد المربع ينتهي حتماً باحد الارقام : ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩

اذن فكل عدد ينتهي باحد الارقام : ٢ ، ٣ ، ٧ ، ٨ هو غير مربع كما انه ليس

ضرورياً ان يكون العدد مربعاً اذا انتهى بالارقام ١ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٩

١٠٧ — حساب مربع عدد منتهى بالرقم (٥)

مثال — العدد ٧٥ يمكن كتابته $٧٠ + ٥$ ١٢٥٥ يمكن كتابته $١٢٠ + ٥$

وبصورة عامة كل عدد ينتهي بالرقم ٥ يمكن كتابته $(١٠ + ب)$ باعتبار

ب هو رقم عشراته .

$$\text{وعليه : } (١٠ + ب)^2 = ١٠٠ + ٢٠ب + ٢٥$$

$$\text{ومنه : } (١٠ + ب)^2 = ١٠٠ + ٢٠(١ + ب) + ٢٥$$

ويتضح من المثال السابق ان مربع العدد المنتهي برقم «٥» يساوي مائة ضعف

من حاصل ضرب عدد عشراته بالذي يليه مضافاً اليه ٢٥ .

$$\text{مثلاً : } ٢٧٥^2 = ٧ \times ٨ \times ١٠٠ + ٢٥ = ٥٦٠٠ + ٢٥ = ٥٦٢٥$$

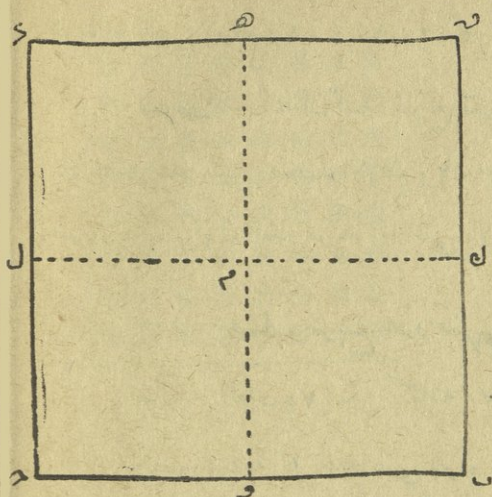
$$٢١٢٥^2 = ١٢ \times ١٣ \times ١٠٠ + ٢٥ = ١٥٦٠٠ + ٢٥ = ١٥٦٢٥$$

١٠٨ — خاصة — مربع كل عدد يساوي اربعة امثال مربع نصفه .

$$\text{مثلاً — ليكن ب عدداً ما فيمكننا ان نكتب } ب = \frac{ب}{٢} \times ٢$$

$$\text{وبتربيع الطرفين يحدث : } ب^2 = ٢ \left(\frac{ب}{٢} \times ٢ \right) = \frac{ب}{٢} \times ٤ = ٤ \left(\frac{ب}{٢} \right)^2$$

والرسم في (شكل ٩) يوضح لنا هذه الخاصة بجلاء



يشاهد ان المربع المنشأ على
المستقيم ب هـ هو ب ح و ق والمربع
المنشأ على المستقيم و ح (نصف ب ح)
هو و ح ل م وان المربع ب ح و ق
يساوي اربعة امثال و ح ل م

اي ان مربع ب ح : يساوي

$$٤ \text{ اضعاف مربع } \frac{ب}{٢}$$

(شكل ٩)

ملاحظة -

بالاستناد على الخاصة السابقة يمكن حساب مربعات بعض الاعداد بصورة سريعة

$$\text{مثلاً : } ١٩٦ = ٤٩ \times ٤ = ٢٧ \times ٤ = ٢١٤$$

$$١,٩٦ = ٠,٤٩ \times ٤ = ٢٠,٧ \times ٤ = ٢١,٤$$

$$٣٢٤ = ٨١ \times ٤ = ٢٩ \times ٤ = ٢١٨$$

$$٣,٢٤ = ٠,٨١ \times ٤ = ٢٠,٩ \times ٤ = ٢١,٨$$

مربع فضل عددين

١٠٩ - مربع فضل عددين يساوي مربع الاول ناقص ضعف حاصل ضرب

الاول بالثاني زائد مربع الثاني .

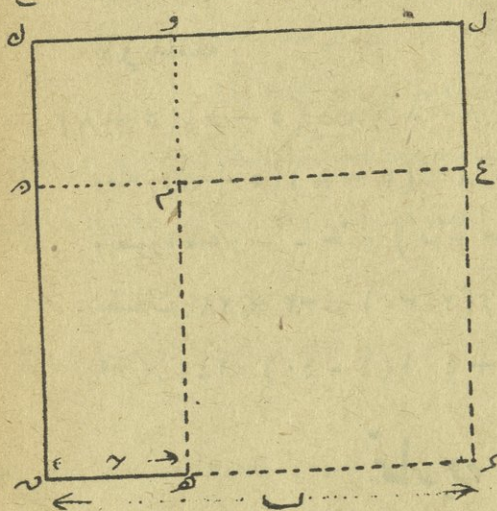
$$\text{مثلاً : } ٤ = ٩ + ٣٠ - ٢٥ = ٢٣ + ٣ \times ٥ \times ٢ - ٢٥ = ٢(٣ - ٥)$$

$$\text{حيث : } ٣ \times ٣ + ٥ \times ٣ - ٣ \times ٥ - ٥ \times ٥ = (٣ - ٥)(٣ - ٥) = ٢(٣ - ٥)$$

ومنه : $(٣ - ٥) = ٢ = ٢٥ - ٢ \times ٥ \times ٣ + ٣$

وبصورة عامة : $(٢ - ٢) = ٢ = ٢ - ٢ \times ٢ + ٢$

والرسم في شكل (١٠) يوضح لنا الخاصة السابقة اذ نشاهد ان المربع



عم هـ والمنشأ على هـ (وق-هـ ق)

يكافي المربع الكبير ل ك ق و

المنشأ على وق زائد المربع الصغير

وك م المنشأ على م ن او (هـ ق)

ناقض المستطيلان وك ق هـ، ل ك ج ع

الليزان بعداهما و ق ، هـ ق فاذا

فرضنا ان وق = ب ، هـ ق = ح

يكون :

$(٢ - ٢) = ٢ = ٢ - ٢ \times ٢ + ٢$ (شكل ١٠)

تطبيقات

قاعدة — مربع مجموع عددين ومربع فضل عددين تفيدان لحساب مربعات الاعداد القريبة من عدد مدور بالزيادة او بالنقص .

مثلاً — العدد ٤١ = ٤٠ + ١ مربعه يساوي ١٦٠٠ + ٨٠ + ١ = ١٦٨١

٢٧٠٤ = ٤ + ٢٠٠ + ٢٥٠٠ » » ٢ + ٥٠ = ٥٢ ،

يضاف الى مربع الاول مربع الثاني وضعف جداء الاول بالثاني

٧٨٤ = ١٢٠ - ٤ + ٩٠٠ مربعه يساوي ٣٠ - ٢ = ٢٨ ،

١٥٢١ = ٨٠ - ١ + ١٦٠٠ » » ١ - ٤٠ = ٣٩ ،

يضاف الى مربع الاول مربع الثاني وي طرح ضعف جداء الاول بالثاني

١١٠ - فاصلة - الفضل بين مربعي عددین يساوي حاصل ضرب

مجموعہ فیضیہ .

$$(o - \lambda)(o + \lambda) = {}^2o - {}^2\lambda: \text{ای}$$

اذ في الحقيقة :

$$0 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times 1 - 1 \times 1 = (0 - 1)(0 + 1)$$

$$r_0 - r_\lambda = (0 - \lambda)(0 + \lambda) : \text{dim } \mathfrak{g}$$

وبصورة عامة: $(x - u)(x + u) = x^2 - u^2$

تطبيقات: $196 = 4 - 900 = (2 + 30)(2 - 30) = 32 \times 28$

$$1099 = 1 - 1700 = (1 + 20)(1 - 20) = 21 \times 39$$

تماری

المطلوب :

١ - حساب مربعات الاعداد الآتية بصورة سريعة

1.3.1.2, 1.1.8, 03, 32, 21

70, 30, 10, 99, 07, 38, 39

$11,0 \text{ } ^\circ \text{ } 1,0 \text{ } ^\circ \text{ } 8,0 \text{ } ^\circ \text{ } 7,0 \text{ } ^\circ \text{ } 2,0 \text{ } ^\circ \text{ } 1,0 \text{ } ^\circ \text{ } 9,0$

27, 2, 28, 2, 22, 1, 7, 1, 7

مثلاً — جذر مربع ٢٥ هو ٥ حيث $٥^2 = ٢٥$
 » » ٠,٣٦ هو ٠,٦ حيث $٠,٦^2 = ٠,٣٦$;

$$\frac{١٦}{٤٩} = \left(\frac{٤}{٧} \right)^2 \gg \frac{٤}{٧} \text{ هو } \frac{١٦}{٤٩} \gg$$

وبصورة عامة : يقال ان جذر مربع ب هو (س) فيما اذا كان : ب = س^٢
 ويرمز للجذر المربع بالاشارة ($\sqrt{\quad}$) التي توضع عادة على العدد المطلوب
 جذر مربعه وتسمى « شارة الجذر »

مثلاً : الوضع $\sqrt{٤٩}$ هو جذر مربع ٤٩ ويكون $\sqrt{٤٩} = ٧$
 فالعدد ٤٩ يسمى المجذور والعدد ٧ هو حاصل الجذر .

ملاحظة — كل عدد مربع له جذر مربع حقيقي :

$$\text{امثلة : } \sqrt{٢٥} = ٥ ; \sqrt{٦٤} = \frac{٨}{٧} ; \sqrt{٠,٨١} = ٠,٩$$

وكل عدد غير مربع له جذر تقريبي .

مثلاً — $\sqrt{٦٩}$ هو عدد محصور بين ٨ ، ٩ اي ان جذر مربع العدد ٦٩
 هو اصغر من ٩ واكبر من ٨ ويؤخذ عادة العدد (٨) ويقال له الجذر المربع المقرب
 الى اقل من واحد : (اي ان مقدار الخطأ فيه اصغر من واحد)
 وكذلك $\sqrt{٣٣}$ هو ٤ تقريباً

١١٢ — كيفية استخراج جذر مربع عدد

اولاً اذا كان العدد المفروض مؤلفاً من خانتين فأقل يستخرج جذر مربعه
 من جدول المربعات الآتي :

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	الاحاد البسطة
٨١	٦٤	٤٩	٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	١	مربعاتها

ثانياً — اذا كان العدد مؤلفاً من ثلاث خانات فاكثر يتبع القاعدة الآتية:

قاعدة — لاستخراج جذر مربع عدداً يعمل مايلي :

١ — يفرق العدد الى مراتب ثنائية (ذات خاتين) اعتباراً من احاده.

٢ — يؤخذ الجذر المربع للمرتبة الاخيرة ويوضع الناتج على المستقيم الافقي المرسوم امام اشارة الجذر :

٣ — يطرح مربع الجذر الناتج من المرتبة الاخيرة وينزل امام حاصل الطرح مرتبة واحدة من المراتب المتوالية على اليمين .

٤ — يقسم العدد الحادث (الباقي) على ضعف عشرات حاصل الجذر ويوضع الرقم الناتج من هذه القسمة امام العدد الموجود في حاصل الجذر

٥ — يؤخذ حاصل جمع مربع العدد الناتج من القسمة السابقة مع جدائه بضعفي عشرات حاصل الجذر ويطرح من المقسوم فاذا انتهت مراتب المجذور كان العدد الموضوع على يمين المجذور هو حاصل الجذر المطلوب واذا لم تنته مراتب العدد تنزل مرتبة اخرى ويعاد العمل المشروح في البنود السابقة الى ان تنتهي المراتب

مثال (١) — حساب جذر مربع العدد : ٦٢٥

صورة العمل

[illegible]

۲۳۵		۲۳۵	
۵'۵۲'۲۵	۷	۵'۵۲'۲۵	۷
۴		۴	
۱۵۲		۱۵۲	
۱۲۹		۱۲۹	
۲۳ ۲۵		۲۳ ۲۵	
۲۳ ۲۵		۲۳ ۲۵	
....			

}

قسم علی ۴۰

او

قسم علی ۴۶۰

۲۳۵		۲۳۵	
۴۰ = ۲۰ × ۲		۴۰ = ۲۰ × ۲	
۱۲۰ = ۴۰ × ۳		۱۲۰ = ۴۰ × ۳	
۹ = ۲۳		۹ = ۲۳	
۱۲۹		۱۲۹	
۴۶۰ = ۲۳۰ × ۲		۴۶۰ = ۲۳۰ × ۲	
۲۳۰۰ = ۴۶۰ × ۵		۲۳۰۰ = ۴۶۰ × ۵	
۲۵ =		۲۵ =	
۲۳۲۵		۲۳۲۵	
....			

مثال (٣) حساب جذر مربع العدد : ٧٥٩٤

$ \begin{array}{r} \begin{array}{r} ٧٥٩٤ \sqrt{167} \\ \underline{64} \\ 1194 \\ \underline{1169} \\ 0025 \end{array} \end{array} $	$\left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 87 \\ 7 \\ 1169 \end{array} \right\} \right\} \text{أو} \left\{ \right\}$	$ \begin{array}{r} \begin{array}{r} ٧٥٩٤ \sqrt{87} \\ \underline{64} \\ 1194 \\ \underline{1169} \end{array} \end{array} $	$\left. \begin{array}{l} 160 = 80 \times 2 \\ 1120 = 160 \times 7 \\ 49 = 7^2 \\ 1169 \end{array} \right\}$
٠٠٢٥ باقي الجذر			

هنا الجذر تقريبي

ملاحظة — اذا انتهت عملية الجذر بدون باقي كان المجذور عدداً مربعاً كالمدين ٦٢٥ ، ٥٥٢٢٥ في المثالين الاول والثاني واذا خرج باق من عملية الجذر كان المجذور غير مربع كالعدد ٧٥٩٤ في المثال الثالث .

١١٣ — الباقي في الجذر المربع

علمنا سابقاً ان الفرق بين مربعي عددين متواليين يساوي حاصل جمعهما مثلاً — ليكن العددان المتواليان هما : (ب + ١) ، (ب) ولنحسب الفرق بين مربعيهما

$$(ب + ١)^2 - ب^2 = ب + ١ + ب^2$$

يلاحظ هنا ان حاصل الطرح ب + ١ عبارة عن ضعفي العدد الصغير زائد واحد .

وينتج من ذلك :

ان الباقي في الجذر المربع يجب ان لا يزيد عن ضعفي حاصل الجذر .
في الحقيقة لو زاد الباقي عن ضعفي حاصل الجذر واحد على الاقل لكان حاصل الجذر الحقيقي اكبر من الحاصل السابق بواحد .

مثلاً — ليكن العدد المجهول (>) وحاصل الجذر التقريبي (ب)

فيكون : $\text{ب} = \text{ب}^2 + ٢ \text{ب}$ ومنه ينتج : $\text{ب} = (٢ + \text{ب})$

إذاً العدد > يساوي حاصل ضرب العددين ب ، $\text{ب} + ٢$ وهما متتابعان

زوجيان او فرديان اصغرهما حاصل الجذر «د»

ومن الملاحظات السابقة ينتج القاعدة الآتية :

١١٤ — قاعدة — اذا علم حاصل ضرب اي عددين متتابعين او عددين

متتابعين فرديين كانا ام زوجيين يمكن ايجادها بطريقة الجذر المربع وذلك بان يحسب جذر مربع حاصل الضرب فالناتج يكون اصغر العددين .

مثال (١) — ما العددين المتواليان اللذان حاصل ضربهما يساوي ٦٥٠ ؟

العمل

}	٢٥	٦٥٠ √
	٤٥	٤
	٥	٢٥٠
	٢٢٥	٢٢٥
	٢٥	

يلاحظ في هذه العملية ان باق الجذر يساوي حاصل الجذر وعليه يكون:

$٢٦ \times ٢٥ = ٦٥٠$

إذاً العددان هما : ٢٥ ، ٢٦

مثال (٢) — ما العددين المتواليان الزوجيان اللذان حاصل ضربهما

يساوي ١٥٢٠ ؟

الحل

	٣٨
١٥٠٢٠	٧
٩	٦٨
٦٢٠	٨
٥٤٤	٥٤٤
٧٦	

يلاحظ في هذه العملية ان باقي الجذر يساوي
مثلي حاصل الجذر وعليه يكون :
 $٤٠ \times ٣٨ = ٧٦$

إذا العدان هما : ٣٨ ، ٤٠

مثال (٣) — ما العدان المتواليان الفرديان اللذان حاصل ضربهما يساوي ٧٨٣؟

الحل

	٢٧
٧٠٨٣	٧
٤	٤٧
٣٨٣	٧
٣٢٩	٣٢٩
٥٤	

يلاحظ ان الباقي في هذه العملية
يساوي ضعفي حاصل الجذر
وعليه يكون : $٢٩ \times ٢٧ = ٧٨٣$

إذا العدان هما : ٢٧ ، ٢٩

١١٥ — استخراج الجذر المربع لعدد ما مقرباً الى وحدة عشرية مفروضة

اذا كان العدد المجذور غير مربع يمكن استخراج جذر مربعه مقرباً الى اي وحدة
عشرية مفروضة وذلك بأن يعمل ما يلي :

١ — نضع فاصلة عشرية امام العدد الصحيح من حاصل الجذر وصفرين امام

الباقى ثم نعيد الاعمال السابقة التي جرت في جذر الاعداد فينتج خانة عشرية واحدة
مثال (١) → المطلوب حساب جذر مربع العدد ٦١٨ مقرباً الى اقل من ١,٠.
العمل

		٢٤,٨	
	٦١٨	√	٤٤
	٤		٤٨٨
	٤		٤
	٢١٨		٨
	١٧٦		١٧٦
	٤٢٠٠		٣٩٠٤
	٣٩٠٤		
	٢٩٦		
	الباقى		

وضع صفرين امام الباقي
وفصله العشرية امام
حاصل الجذر

إذاً $\sqrt{618} = 24,8$ مقرب الى اقل من ١,٠

مثال (٢) — جذر مربع العدد ٢ مقرباً الى اقل من ٠,٠١.
العمل

		١,٤١	
	٢	√	٢٤
	١		٢٨١
	١٠٠		٤
	٩٦		١
	٤٠٠		٩٦
	٢٨١		٢٨١
	١١٩		

وضع صفرين امام الباقي

» » » »

ان مقامه غير مربع يضرب حديه بعدد يجعل مقامه مربعاً

$$\frac{5}{2} = \frac{25}{4} \sqrt{\quad} = \frac{3 \div 75}{3 \div 12} \sqrt{\quad} = \frac{75}{12} \sqrt{\quad} \quad \text{مثال (١) -}$$

$$\frac{21}{7} \sqrt{\quad} = \frac{21}{49} \sqrt{\quad} = \frac{7 \times 3}{7 \times 7} \sqrt{\quad} = \frac{3}{7} \sqrt{\quad} = \frac{15}{35} \sqrt{\quad} \quad \text{مثال (٢) -}$$

$$\frac{6}{3} \sqrt{\quad} = \frac{6}{9} \sqrt{\quad} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} \sqrt{\quad} = \frac{2}{3} \sqrt{\quad} \quad \text{مثال (٣) -}$$

خواص الجذور المربعة

١١٨ - جذر مربع حاصل ضرب

جذر مربع حاصل ضرب يساوي حاصل ضرب جذر مربع كل مضروب على حدة

$$\text{امثلة: } 60 = 6 \times 10 = \sqrt{36} \sqrt{100} = \sqrt{36} \times \sqrt{100} = \sqrt{3600}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{2} \text{ او } \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \sqrt{4} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{2} \text{ او } \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \sqrt{4} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$$

$$\sqrt{3} \sqrt{2} \text{ او } \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \sqrt{3} \sqrt{4} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$$

$$\text{وبصورة عامة: } \sqrt{a} \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$$

وينتج مما سبق ان حاصل ضرب الجذور المربعة لعدة اعداد يساوي جذر مربع

$$\text{جداً نفس الاعداد اي: } \sqrt{6} \sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

١١٩ - جذر مربع حاصل قسمة

بما ان حاصل قسمة عددين يمكن كتابته بصورة كسر اعتيادي اذن جذر

مربع حاصل قسمة عددين يساوي جذر مربع الكسر الدال عليه

١٢٠ - تدريب - مربع المجموعة (ب + ٣) هو :

$$(ب + ٣)^2 = ٩ + ٦ب + ٩$$

فيتضح ان المجموعة المربعة ب + ٦ + ٩ هي ذات ثلاثة حدود وان
حدها الثالث يساوي مربع نصف امثال الحد الثاني .

وبالاستناد على ذلك يمكن حل مسائل هامة في الحساب كما يلي :

مسألة (١) - ما العدد الذي اذا اضيف الى مربعه اربعة امثاله يكون الناتج
مساوياً ١١٧ ؟ .

الحل - لنفرض ان العدد المطلوب هو ب فيكون : $٩ + ٦ب + ٩ = ١١٧$
نضيف الى طرفي المساواة العدد ٤ (مربع نصف امثال الحد الثاني) فيصير
كل من طرفي المساواة مربعاً تاماً .

$$٩ + ٦ب + ٩ = ٤ + ٦ب + ١١٧$$

ومنه (ب + ٢) $١٢١ = ٢(ب + ٢)$ نأخذ جذر مربع الطرفين .

$$\sqrt{١٢١} = \sqrt{٢(ب + ٢)}$$

او ب + ٢ = ١١ ومنه ب = ٩ وهذا العدد المطلوب .

$$التحقيق : ٩ + ٦ \times ٩ + ٩ = ١١٧$$

ملاحظة - المسألة السابقة يمكن حلها بالاستناد على خاصية القواسم

$$اذ أن المساواة : ب + ٦ + ٩ = ١١٧$$

$$يمكن كتابتها : ب(ب + ٦) = ١١٧$$

وهذه تشعر بان حاصل ضرب عددين ١١٧ واحدهما يزيد عن الثاني ٤

العمل

ترتب القواسم المتناظرة	}	١		
		٣	٣	١١٧
		٩	٣	٣٩
		١١٧، ٣٩، ١٣	١٣	١٣
				١

المعدان هما ٩، ١٣ وبما ان العدد الصغير
هو المطلوب اذاً الجواب (٩)

مسألة (٢) — ما العدد الذي حاصل طرح عشرة امثاله من ضعفه
يساوي ١٢ ؟

الحل — لنفرض ان العدد المطلوب « س »

فيكون : ٢ س - ١٠ س = ١٢ نقسم طرفي المساواة على ٢ يصير :

$$٢ س - ٥ س = ٦$$

نضيف الى الطرفين ٦، ٢٥ (مربع نصف امثال الحد الثاني)

$$٦، ٢٥ + ٦ = ٦، ٢٥ + ٥ س - ٢ س$$

$$١٢، ٢٥ = (٢، ٥ - س)$$

$$\sqrt{١٢، ٢٥} = \sqrt{(٢، ٥ - س)}$$

$$٣، ٥ = ٢، ٥ - س$$

$$٦ = ٢، ٥ + ٣، ٥ = ٥ س$$

✽ تمارين ومسائل ✽

المطلوب

١ — إيجاد الجذر المربع لكل من الاعداد الآتية بواسطة التفريق الى

المضارب الاولى وبالطريقة العامة .

$$٧٨٤ ، ١٠٢٤ ، ١٧٦٤ ، ١٠٨٩ ، ٢٣٠٤$$

$$١٢٣٢١ ، ١٢٥٤٤ ، ٣٠٢٥٠ ، ٧٠٥٦ ، ٩٨٠١$$

٢ — إيجاد الجذر المربع لكل من الاعداد الآتية مقرباً الى اقل من ١،٠

$$١١٣٢١ ، ١٢٣٦٠٦ ، ٨٩٥٣ ، ٢٥٣٩ ، ١٤٣٧٠٥$$

٣ — إيجاد الجذر المربع لكل من الاعداد الآتية مقرباً الى اقل من ٠,١

$$١٤٦٨ ، ٣٧٥٠٤ ، ٨٤٣٥٧ ، ٧٣٨٠٤ ، ٢ ، ٣ ، ٥$$

٤ — حساب الجذور الآتية :

$$\sqrt{١٢٥} ، \sqrt{١٩٢} ، \sqrt{٥٧٦} ، \sqrt{١٠٢٤} ، \sqrt{٧٨٤}$$

$$٣٢٠\sqrt{٧} ، ٢٤٣\sqrt{٧} ، ٦٢٥\sqrt{٧} ، ١٢٢٥\sqrt{٧} ، ٨٤١\sqrt{٧}$$

$$٩٨\sqrt{٧} \times ٢\sqrt{٧} ؛ ٥٠\sqrt{٧} \times ١٨\sqrt{٧} ؛ ٢٠\sqrt{٧} \times ٥\sqrt{٧}$$

$$٣٢\sqrt{٥} \times ٣\sqrt{٢} ، ٣\sqrt{٧} \times ٦\sqrt{٥}$$

$$١٨\sqrt{٧} + ٣\sqrt{٥} ؛ ٩٨\sqrt{٧} + ٥٠\sqrt{٧} ؛ ٤٨\sqrt{٧} + ٧٥\sqrt{٧}$$

$$٧٠\sqrt{٧} - ٢٠\sqrt{٧} + ٥\sqrt{٣} ؛ ١٨\sqrt{٧} - ٢\sqrt{٧} ؛ ٧٥\sqrt{٧} - ٣٠٠\sqrt{٧}$$

٥ حل المسائل الآتية :

١ — ما العدان المتواليان اللذان حاصل ضربهما يساوي ٧٠٢

٢ — » الوتران المتعاقبان اللذان جدأتهما يساوي ١٤٤٣

٣ — » الشفعان » » » » ١٧٦٨٨

٤ — » المتعاقبان اللذان حاصل طرح مكعبيهما ١٢٦١

٥ — ما العدان اللذان حاصل ضربهما ١٥٣٦ واحدهما يساوي $\frac{٢}{٣}$ الثاني ؟

٦ — ما العدد الذي اذا اضيف اليه مربعه يكون الحاصل مساوياً ١٨٠٦

٧ - اذا اضيف خمسة امثال عدد الى مربعه يكون الناتج مساوياً ٢١٥٦ فما ذلك العدد ؟

٨ - ما العدد الذي ينقص عن مربعه ٤٢ ؟

٩ - عدد مربع ذو اربعة ارقام اذا اضيف الى كل من ارقامه واحداً فالعدد الناتج يكون مربعاً فما هو ذلك العدد ؟

١٠ - ارض مستطيلة الشكل طولها يساوي ضعف عرضها مساحتها ٣ هكتار؛ ٣٧ آر احيطت بسياج من التيل المانع ثمن الديكومتر منه ٣,٢٥ فرنكاً فما ثمن التيل اللازم لهذه الارض .

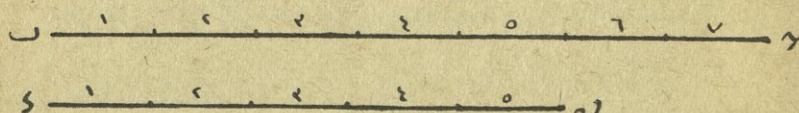
الفصل الرابع

(في الاعداد المتناسبة وتطبيقاتها)

١ - النسبة

١٢١ - **النسبة** هي عبارة عن مقارنة كميتين ذات قياس مشترك ببعضهما لمعرفة ان الاولى كم تحتوي على الثانية او هي كم جزء منها .

مثال - ليكن : ب > ، و ق قطعتين مستقيمتين وان ب > منقسمة الى ٧ اجزاء متساوية و ق تحتوي على خمسة من تلك الاجزاء (شكل ١١)



فالنسبة بين القطعتين هي : (شكل ١١)

$$\frac{5}{7} \text{ او } \frac{7}{5}$$

يقال ان طول القطعة ب > بالنسبة الى و ق هو: $\frac{٧}{٥}$

وبالعكس ان طول القطعة و ق بالنسبة الى ب > هو $\frac{٥}{٧}$

وينتج من المثال السابق ان :

نسبة قطعتين مستقيمتين الى بعضهما هي عبارة عن حاصل قسمة طوليهما

$$\text{اي : } \frac{٧}{٥} = \frac{٧}{٥} \text{ و } \frac{٥}{٧} = \frac{٥}{٧}$$

وبصورة عامة تفاد النسبة بالكسر $\frac{ب}{و}$

وبما ان النسبة بين عددين هي عبارة عن الكسر الدال على حاصل قسمتهما
اذن النسبة تقبل جميع الاعمال والخواص المتعلقة بالكسور .

فالمقداران ب ، و في النسبة $\frac{ب}{و}$ يسميان (**عري النسبة**) ويقال للمقدار (ب)
مقدم النسبة والمقدار (و) تالي النسبة .

ملاحظة — اذا كان حاصل ضرب نسبتيين مساوياً الواحد الصحيح يقال انها
(**نسبتان متما كستان**)

$$\text{مثلاً : } ١ = \frac{٥}{٧} \times \frac{٧}{٥} \text{ اذا النسبتان } \frac{٥}{٧} \text{ ، } \frac{٧}{٥} \text{ هما متما كستان}$$

ويتضح من ذلك انه لايجاد نسبة معا كسة لنسبة مفروضة تقسم الواحد

الصحيح على النسبة المفروضة.

مثلاً — النسبة المتعاكسة مع $\frac{3}{4}$ هي $1 = \frac{3}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3}$

١٢٢ — نظرية — النسبة بين مقدارين لا تتغير فيما اذا ضربا بعدد واحد او قسما على عدد واحد.

مثلاً — لتكن النسبة $\frac{b}{a}$ ولنضرب حديهما في y ونقسمهما كذلك على y

$$\frac{\frac{b}{a}}{y} = \frac{b \times y}{a \times y} = \frac{b}{a} \quad \text{فالمطلوب ان :}$$

البرهان — نفرض ان قيمة النسبة $\frac{b}{a}$ هي s

فيكون : $\frac{b}{a} = s$ ومنه $b = s \times a$ (١)

١ — نضرب طرفي المساواة (١) في y فيكون الناتجان متساويين :

$$b \times y = s \times a \times y \quad \text{او} \quad b \times y = y \times (s \times a) \quad \text{..... (٢)}$$

وبتقسيم طرفي المساواة (٢) على $(y \times a)$ يصير :

$$\frac{b \times y}{a \times y} = \frac{y \times (s \times a)}{(y \times a)} \quad \text{ومنه} \quad \frac{b \times y}{a \times y} = s \quad \text{او} \quad \frac{b}{a} = s$$

٢ — نقسم طرفي المساواة (١) على y فيكون الناتجان متساويين .

$$\frac{1}{5} \times س \times ٥ = \frac{1}{5} \times ٥ \times س = س \div ٥ \times ٥ = س$$

$$\text{او } \frac{س}{٥} \times ٥ = س \dots\dots (٣)$$

وبتقسيم طرفي المساواة (٣) على $\frac{س}{٥}$ ينتج:

$$\frac{\frac{س}{٥}}{\frac{س}{٥}} = \frac{\frac{س}{٥} \times ٥}{\frac{س}{٥} \times ٥} \quad \text{ومنه} \quad \frac{س}{٥} \times ٥ = س$$

مثال - النسبة $\frac{٧}{٥}$ قيمتها ١,٤

$$\text{لنضرب حديها في ٣ يصير: } \frac{٣ \times ٧}{٣ \times ٥} = \frac{٢١}{١٥} = ١,٤$$

$$\text{ولنقسم } \frac{٣,٥}{٢,٥} = \frac{٢ \div ٧}{٢ \div ٥} \text{ على ٢ } \Rightarrow ١,٤$$

٢ - التناسب *prop*

١٢٣ - ١ - تناسب: هو عبارة عن التساوي بين نسبتين

$$\text{مثلاً - النسبة: } \frac{١٢,٥}{٥} \text{ تساوي } ١٢,٥ \div ٥ = ٢,٥$$

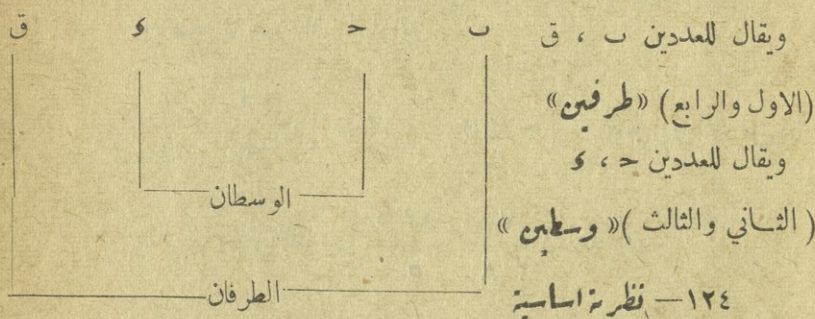
$$\text{, } \frac{٧}{٢,٨} : \text{ } ٧ \div ٢,٨ = ٢,٥$$

إذاً: $\frac{٧}{٢,٨} = \frac{١٢,٥}{٥}$ وهذه المساواة يقال لها (تناسب)

وبصورة عامة: يقال ان الاعداد الاربعة ب، ح، و، ق تؤلف تناسباً فيما اذا كان حاصل قسمة الاول على الثاني مساوياً حاصل قسمة الثالث على الرابع.

اي: $\frac{ب}{ح} = \frac{و}{ق}$

الاعداد ب، ح، و، ق هي الحدود الاربعة للتناسب



١٢٤ - نظرية اساسية

١ - في كل تناسب حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين

مثلاً في التناسب: $\frac{ب}{ح} = \frac{و}{ق}$ يجب ان يكون: $ب \times ق = ح \times و$

البرهان - نضرب حدي كل نسبة بتالي النسبة الاخرى يحدث:

$$\frac{ب}{ح} = \frac{و}{ق} \text{ او } \frac{ب \times ق}{ق \times ح} = \frac{و \times ق}{ق \times ح}$$

(ق) (ح)

واذا ضرب طرفي المساواة الاخيرة بالمقام المشترك $ح \times ق$ ينتج:

ب $\times$ ق = د $\times$ هـ وهو المطلوب

٢- إذا كان حاصل ضرب عددين مساوياً حاصل ضرب عددين آخرين فالاعداد الاربعة المذكورة تؤلف تناسباً.

اذ في الحقيقة لو قسمنا طرفي المساواة : ب $\times$ ق = د $\times$ هـ

على ق $\times$ هـ (حاصل ضرب عددين كل منهما من طرف) يصير :

$$\frac{ب \times ق}{ق \times هـ} = \frac{د \times هـ}{ق \times هـ} \text{ وب حذف الاعداد المشتركة ينتج } \frac{ب}{ق} = \frac{د}{هـ} \text{ وهو المطلوب}$$

ويتضح مما سبق ان المساواتين :

$$\left[\frac{ب}{ق} = \frac{د}{هـ} \right] ; \left[ب \times ق = د \times هـ \right] \text{ ينتج احدهما من الاخرى}$$

$$\text{مثال (١) : في التناسب : } \frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨} \text{ يشاهد ان :}$$

$$٣٥ = ٧ \times ٥ \quad \text{و} \quad ٣٥ = ٢,٨ \times ١٢,٥$$

مثال (٢) - ليكن : $١٢ \times ٣ = ٩ \times ٤$ فمن الاعداد ١٢، ٣، ٩، ٤

يتألف تناسب وذلك بتقسيم طرفي المساواة على (١٢×٩) بالفرض

$$\frac{٣}{٩} = \frac{٤}{١٢} \text{ او } \frac{١٢ \times ٣}{١٢ \times ٩} = \frac{٩ \times ٤}{١٢ \times ٩}$$

١٢٥ - تطبيقات - نقل حدود التناسب

$$\text{مثال (١) - ليكن التناسب } \frac{ب}{ق} = \frac{د}{هـ} \text{ او } \frac{٧}{٢,٨} = \frac{١٢,٥}{٥} \text{ (١)}$$

$(٢) \dots \frac{٧}{١٢,٥} = \frac{٢,٨}{٥}$	$١ - \text{نبادل الطرفين فيصير: } \frac{ق}{ب} = \frac{د}{ح}$
$(٣) \dots \frac{٥}{٢,٨} = \frac{١٢,٥}{٧}$	$٢ - \text{« الوسطين » } \frac{ح}{ق} = \frac{ب}{د}$
$(٤) \dots \frac{٢,٨}{٧} = \frac{٥}{١٢,٥}$	$٣ - \text{تقلب النسبتين » } \frac{ق}{د} = \frac{ح}{ب}$

في كل وضع من اوضاع التناسب يلاحظ ان :

$$٧ \times ٥ = ٢,٨ \times ١٢,٥ \quad ; \quad ح \times د = ق \times ب$$

وينتج من ذلك ان كل تناسب يمكن كتابته في اربعة صور .

١٢٦ - **خاصة** - في كل تناسب نسبة مجموع او فضل حدي النسبة الاولى

الى تاليها كنسبة مجموع او فضل حدي النسبة الثانية الى تاليها .

فمثلاً من التناسب $\frac{ق}{ب} = \frac{د}{ح}$ يمكن ان يكتب :

$$\frac{ب + د}{ق} = \frac{ب}{ق} + \frac{د}{ق} \quad \text{او} \quad \frac{ب - د}{ق} = \frac{ب}{ق} - \frac{د}{ق}$$

حيث : ١ - نضيف لطرفي التناسب (واحداً) يصير :

$$\frac{ب}{ق} + ١ = ١ + \frac{د}{ق} \quad \text{او} \quad \frac{ب}{ق} + \frac{ق}{ق} = \frac{د}{ق} + \frac{ق}{ق} \quad \text{ومنه} \quad \frac{ب + ق}{ق} = \frac{د + ق}{ق}$$

٢ - نطرح من طرفي التناسب واحداً يصير :

$$\frac{ب}{ق} - ١ = ١ - \frac{د}{ق} \quad \text{او} \quad \frac{ب}{ق} - \frac{ق}{ق} = \frac{د}{ق} - \frac{ق}{ق} \quad \text{ومنه} \quad \frac{ب - ق}{ق} = \frac{د - ق}{ق}$$

فمن التناسب: $\frac{12,5}{5} = \frac{7}{2,8}$ ينتج:

$$1 - \frac{12,5}{5} = \frac{7}{2,8} - \frac{12,5}{5} \quad \text{او} \quad \frac{9,8}{2,8} = \frac{17,5}{5}$$

ومنه: $49 = 49$

$$2 - \frac{12,5}{5} = \frac{7}{2,8} - \frac{12,5}{5} \quad \text{او} \quad \frac{4,2}{2,8} = \frac{7,5}{5}$$

ومنه: $21 = 21$

١٢٧ - خاصية - في كل تناسب ، نسبة مجموع حدي النسبة الاولى الى

فضلهما كنسبة مجموع حدي النسبة الثانية الى فضلهما

مثال - ليكون التناسب: $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ فالمطلوب ان: $\frac{b+d}{c+e} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$

عالمنا من الخاصة الثانية ان: $\frac{b+d}{c+e} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ ؛ $\frac{b-d}{c-e} = \frac{b}{c} = \frac{d}{e}$

فنقسم المساواتين على بعضهما:

$$\frac{\frac{b+d}{c+e}}{\frac{b-d}{c-e}} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{d}{e}}$$

ومنه: $\frac{b+d}{c+e} \times \frac{e}{d} = \frac{b}{c} \times \frac{c-e}{b-d}$

او $\frac{ب + ح}{ب - ح} = \frac{و + ق}{و - ق}$ وهو المطلوب

فمن التناسب : $\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٧}{٢,٨}$ ينتج :

$$\frac{١٢,٥}{٥} = \frac{٥ + ١٢,٥}{٥ - ١٢,٥} \text{ او } \frac{٢,٨ + ٧}{٢,٨ - ٧} = \frac{١٧,٥}{٧,٥} = \frac{٩,٨}{٤,٢} \text{ ومنه } ٧٣,٥ = ٧٣,٥$$

الرابع المتناسب والوسط المتناسب

الرابع المتناسب

١٢٨ - يقال للعدد الذي يؤلف مع الاعداد الثلاثة ب ، ح ، و تناسباً

(الرابع المتناسب)

واذا رمز للرابع المتناسب بالحرف (س) يكون : $\frac{و}{س} = \frac{ب}{ح}$

صواب الرابع المتناسب

بالاستناد على الخاصية الاساسية في التناسب يمكننا حساب العدد (س)

مثلاً - من التناسب : $\frac{و}{س} = \frac{ب}{ح}$

(حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين)

نكتب : $ب \times س = ح \times و$ (نقسم طرفي المساواة على امثال س)

ومنه : $س = \frac{و \times ح}{ب}$

مثال (١) : ماقيمة س في التناسب : $\frac{٢١}{س} = \frac{١٢}{٤}$

نقول : $١٢ \times س = ٢١ \times ٤$ ومنه $س = \frac{٢١ \times ٤}{١٢}$

مثال (٢) — حساب قيمة س في التناسب $\frac{س}{٢,٨} = \frac{١٢,٥}{٥}$

نقول : $٥ \times س = ٢,٨ \times ١٢,٥$ ومنه $س = \frac{٢,٨ \times ١٢,٥}{٥}$

الوسط المتناسب

١٢٩ — يقال للعدد (س) انه وسط متناسب بين العددين ب ، ح فيما اذا

الف معهما تناسباً واشغل محل الوسطين فيه مثل التناسب $\frac{س}{ب} = \frac{ب}{ح}$

حساب الوسط المتناسب

من التناسب $\frac{س}{ب} = \frac{ب}{ح}$ ينتج : $س \times ح = ب \times ب$

او $س = \frac{ب \times ب}{ح}$ ومنه $س = \sqrt{ب \times ب}$

ويتضح من ذلك ان الوسط المتناسب لعددين يساوي جذر مربع جداءهما

مثال — حساب الوسط المتناسب في التناسب : $\frac{س}{٦} = \frac{٩}{س}$

نقول : $س = \sqrt{٦ \times ٩}$ ومنه $س = ٣٦$

* الاعداد المتناسبة *

١٣٠ — تعريف — يقال لسلسلتين من الاعداد انهما ذات مقادير متناسبة

فيما اذا كان حاصل قسمة اي عدد من السلسلة الاولى على نظيره في السلسلة الثانية (ثابتاً).

اي اذا كان نسبة كل عددين متناظرين في السلسلتين ذات قيمة واحدة .

مثال — لنكتب السلسلتين الآتيتين :

$$١ - ٣ ، ١،٥ ، ٠،٧٥ ، ٩ ، ٤،٢ ... س$$

$$٢ - ٤ ، ١٠،٢ ، ١٢ ، ٥،٦ ، ... ع$$

$$\text{فنشاهد ان } \frac{س}{ع} = \frac{٣}{٤} = \frac{١،٥}{٢} = \frac{٠،٧٥}{١} = \frac{٩}{١٢} = \frac{٤،٢}{٥،٦} = ٠،٧٥$$

وبلاحظ في هذا المثال :

١ — ان كل عدد من السلسلة الاولى يساوي حاصل ضرب نظيره من

السلسلة الثانية في عدد ثابت (قيمة النسبة)

$$\text{مثلاً : } ٣ = ٠،٧٥ \times ٤ ؛ ٤،٢ = ٠،٧٥ \times ٥،٦ ؛ س = ٠،٧٥ \times ع$$

٢ — نسبة اي عددين من السلسلة الاولى لبعضهما يساوي نسبة نظيريهما في

السلسلة الثانية .

مثلاً : نسبة العددين ٣ ، ٩ في السلسلة الاولى لبعضهما يساوي نسبة

نظيريهما ٤ ، ١٢ في الثانية .

اي $\frac{4}{12} = \frac{3}{9}$ وهذه تنتج من تبديل وسطي النسبتين : $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

٣ - لنجمع ثلاثة اعداد (لاعلى التعمين) من السلسلة الاولى :

$$7,95 = 4,2 + 0,75 + 3$$

ونجمع نظائر هذه الاعداد :

$$10,6 = 5,6 + 1 + 4$$

وتقسم المجموع الاول على المجموع الثاني يصير :

$$7,95 \div 10,6 = 0,75 \text{ (قيمة النسبة) .}$$

ونستنتج من الملاحظة السابقة النظرية الآتية :

١٣١ - نظرية - اذا تساوي عدة نسب مع بعضها يكون نسبة مجموع

مقدماتها الى مجموع تواليها مساوية الى قيمة احدى النسب .

مثلا - ليكن النسب : $\frac{ب}{ا} = \frac{د}{ق} = \frac{هـ}{ك}$ ولنفرض ان قيمة كل من

هذه النسب هي (س)

فيكون : $\frac{ب}{ا} = س$ ومنه : $ب = ا \times س$

$\frac{د}{ق} = س$ » : $د = ق \times س$

$\frac{هـ}{ك} = س$ » : $هـ = ك \times س$

ويجمع المتساويات طرفاً فمطرف يحدث : $ب + د + هـ = ا \times س + ق \times س + ك \times س$

نضع المضروب المشترك (س) خارج قوس : $ب + و + هـ = س \times (ح + ق + ك)$

نقسم طرفي المساواة على امثال س : $\frac{ب + و + هـ}{ح + ق + ك} = س$

وبما أن س تساوي قيمة كل من النسب الاصلية اذن :

$$\frac{ب + و + هـ}{ح + ق + ك} = \frac{ب}{ح} = \frac{و}{ق} = \frac{هـ}{ك} \quad \text{وهذا هو المطلوب .}$$

ملاحظة — يمكننا طرح مقدم احدى النسب بدلاً من اضافته بشرط ان نطرح ايضاً تاليها .

$$\frac{ب - و + هـ}{ح - ق + ك} = \frac{ب}{ح} = \frac{و}{ق} = \frac{هـ}{ك} \quad \text{اي يمكننا ان نكتب :}$$

$$\frac{٤,٢ + ١,٥ - ٣}{٥,٦ + ٢ - ٤} = \frac{٤,٢}{٥,٦} = \frac{١,٥}{٢} = \frac{٣}{٤} \quad \text{فمثلاً من النسب :}$$

ونحسب كلاً من حدي النسبة الحادثة فيكون : $\frac{٥,٧}{٧,٦}$ وهذه تساوي ٠,٧٥ ايضاً

١٣٢ — تطبيقات على النظرية السابقة

مسألة (١) — المطلوب إيجاد عددين حاصل جمعهما ٦,٨ وخارج قسمتهما ٠,٧

الحل — ليكن العددين هما س ، ع

$$\left. \begin{array}{l} س + ع = ٦,٨ \\ س = ٧ \\ ع = ١٠ \end{array} \right\} \text{فيكون}$$

نبدل وسطي التناسب يصير

$$\frac{ع}{١٠} = \frac{س}{٧} = \frac{س + ع}{١٠ + ٧} \text{ ومنه ينتج: } \frac{ع}{١٠} = \frac{س}{٧}$$

نعوض مجموع العددين (س + ع) بالمقدار المفروض ٦,٨

$$\text{يصير: } \frac{ع}{١٠} = \frac{س}{٧} = \frac{٦,٨}{١٧}$$

$$\text{هما العددان المطلوبان} \left\{ \begin{array}{l} \text{ومنه: س} = \frac{٦,٨ \times ٧}{١٧} = ٢,٨ \\ \text{ع} = \frac{٦,٨ \times ١٠}{١٧} = ٤ \end{array} \right.$$

$$\text{التحقيق: } \left\{ \begin{array}{l} ٦,٨ = ٤ + ٢,٨ - ١ \\ \frac{٧}{١٠} = \frac{٢٨}{٤٠} = \frac{٢,٨}{٤} - ٢ \end{array} \right. \text{ يوافقان شروط المسألة}$$

مسألة (٢) — المطلوب إيجاد عددين فضلهما ١٠ وحاصل قسمتهما ١,٢٥

الحل — ليكن العددان هما س، ع

$$\text{فيكون} \left\{ \begin{array}{l} ١٠ = س - ع \\ \frac{١٢٥}{١٠٠} = \frac{س}{ع} \text{ او } ١,٢٥ = \frac{س}{ع} \end{array} \right. \text{ نبدل الوسيطين}$$

$$\text{يصير: } \frac{ع}{١٢٥} = \frac{س}{١٠٠} = \frac{س - ع}{١٠٠ - ١٢٥} \text{ ومنه ينتج: } \frac{ع}{١٢٥} = \frac{س}{١٠٠}$$

نعوض (س - ع) بمساواتها ١٠

$$\text{يصير: } \frac{ع}{١٠٠} = \frac{س}{١٢٥} = \frac{١٠}{٢٥}$$

$$\text{هما العيدان المطلوبان} \left\{ \begin{array}{l} \text{ومنه : س} = \frac{١٠ \times ١٢٥}{٢٥} = ٥٠ \\ \text{ع : } = \frac{١٠ \times ١٠٠}{٢٥} = ٤٠ \end{array} \right.$$

$$\text{التحقيق : } ٥٠ - ٤٠ = ١٠ ; \frac{٥٠}{٤٠} = ١,٢٥$$

مسألة (٣) - المطلوب تقسيم ٣٩٠ فرنكاً بين ثلاثة اشخاص على ان

تناسب حصصهم مع الاعداد ٣ ، ٤,٨ ، ٥,٢

الحل - لتكن الحصص هي س ، ع ، ص

$$\left. \begin{array}{l} | \text{س} + \text{ع} + \text{ص} = ٣٩٠ | \text{الفرض الاول} \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ع}}{٤,٨} = \frac{\text{ص}}{٥,٢} \end{array} \right. \text{فيكون} \\ \text{الثاني} \quad \text{»} \end{array} \right\}$$

$$\text{فمن الفرض الثاني ينتج : } \frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ع}}{٤,٨} = \frac{\text{ص}}{٥,٢} = \frac{\text{س} + \text{ع} + \text{ص}}{٣ + ٤,٨ + ٥,٢}$$

$$\text{او : } \frac{٣٩٠}{١٣} = \frac{\text{ص}}{٥,٢} = \frac{\text{ع}}{٤,٨} = \frac{\text{س}}{٣}$$

$$\text{ومنه : س} = ٣ \times \frac{٣٩٠}{١٣} = ٩٠ \text{ فرنكاً حصة الاول}$$

$$ع = ٤,٨ \times \frac{٣٩٠}{١٣} = ١٤٤ \text{ فرنكاً حصة الثاني}$$

$$ص = ٥,٢ \times \frac{٣٩٠}{١٣} = ١٥٦ \text{ » » الثالث}$$

التحقيق: $٩٠ + ١٤٤ + ١٥٦ = ٣٩٠$ اصل المبلغ

$$و: \frac{٩٠}{٣} = \frac{١٤٤}{٤,٨} = \frac{١٥٦}{٥,٢} = ٣٠ \text{ مقدار الاجزاء المتساوية}$$

﴿ المقادير المتناسبة طرداً او عكساً ﴾

١٣٣ - المقادير المتناسبة طرداً

تعريف — يقال للمقدارين انهما متناسبان طرداً فيما اذا ضرب احدهما بعدد ما (صحيحاً او كسراً) يضرب الثاني بذلك العدد

مثال — في التجارة طول قطعة قماش وثمنها هما مقداران متناسبان طرداً حيث لو فرضنا رجلين اشتريا قطعتين من قماش وكان طول قطعة الاول تعادل ٣ امثال طول الثانية فالقيمة التي يدفعها الاول بالطبع تساوي ٣ امثال القيمة التي يدفعها الثاني

كما وانه لو كانت القطعة الاولى تعادل $\frac{٣}{٤}$ الثانية لكانت القيمة التي يدفعها

الاول تساوي $\frac{٣}{٤}$ المبلغ الذي يدفعه الثاني

ويتضح من المثال السابق ان نسبة طول القطعة الاولى الى الثانية هي ٣ وكذلك نسبة المبلغ الاول الى الثاني هو ٣ ايضاً

وفي المثال الثاني ؛ نسبة القطعة الاولى الى الثانية $\frac{3}{4}$ كذلك نسبة القيمة التي

يدفعها الاول الى القيمة التي يدفعها الثاني هي $\frac{3}{4}$ وينتج من ذلك :

ان نسبة طولين من القماش يساوي نسبة قيمتهما بالتقابل

ملاحظة — ليكن ب ، ح ، د ، من الامتار اطوال ٣ قطع من القماش
ب ، ح ، د ، من الفرنكات اثمان القطع المذكورة

فيكون : $\frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح} = \frac{د}{د}$ (اثمان قطع القماش تتناسب طردياً مع اطوالها)

حيث في الحقيقة ان النسبة $\frac{ب}{ب}$ هي عبارة عن ثمن المتر الواحد من القماش

كذلك تكون كل من النسب : $\frac{ح}{ح} = \frac{د}{د}$ تساوي قيمة المتر الواحد من القماش

بعض امثلة على المقادير المتناسبة طردياً

مقدار الشيء و ثمنه ؛ طول او مساحة الشيء و ثمنه ، مقدار العمل مع عدد العمال

والزمن ؛ الربح مع رأس المال والزمن ؛ المسافة مع السرعة والزمن هي مقادير متناسبة طردياً

١٣٤ — المقادير المتناسبة عكساً

تعريف — يقال للكميتين انهما متناسبتان عكساً فيما اذا ضربت احدهما

بعدد ما (صحيحاً او كسراً) تضرب الثانية بعكس ذلك العدد

مثال — الزمن اللازم لقطع مسافة محدودة يتناسب عكساً مع سرعة المتحرك .

١ — لنفرض ان بين مدينتين ب ، ح يسير قطاران بسرعة الاول
تعادل مثلي سرعة الثاني فالزمن اللازم للاول كي يقطع المسافة الكائنة بين ب ، ح
يساوي ولاشك نصف الزمن اللازم للثاني ليقطع هذه المسافة .

٢ — اذا كانت سرعة الاول تعادل $\frac{3}{5}$ سرعة الثاني فالاول يحتاج الى زمن
يساوي $\frac{5}{3}$ زمن الثاني

ويتضح من المثال السابق ان نسبة سرعة القطار الاول الى سرعة القطار الثاني

تساوي ٢ ولكن نسبة الزمن اللازم للاول تساوي $\frac{1}{2}$ الزمن اللازم للثاني

وفي المثال الثاني ؛ نسبة سرعة الاول تساوي $\frac{3}{5}$ سرعة الثاني ولكن

نسبة زمن الاول تساوي $\frac{5}{3}$ زمن الثاني وينتج من ذلك :

ان نسبة سرعتي جسمين متحركين لبعضهما تساوي عكس نسبة زمنيهما .

ملاحظة — ليكن : ب ، ح ، و مقادير من الكيلو مترات سرعة ثلاثة

قطارات (في الساعة)

وليكن : ب ، ح ، و مقادير من الساعات الزمن اللازم

للقطارات الثلاثة لكي يقطعوا مسافة واحدة .

فيكون نسبة سرعة الاول الى سرعة الثاني $\frac{ب}{ح}$

ونسبة زمن الاول الى زمن الثاني $\frac{ب}{ح}$

ومن حيث ان السرعة تتناسب عكساً مع الزمن اذا النسبتان $\frac{ب}{ح}$ ، $\frac{ا}{ح}$

متعاكستان وعليه يكون $\frac{ب}{ح} \times \frac{ب}{ح} = ١$ ومنه ينتج : $ب = ح$ و $ح = ب$

وكذلك من سرعة الثاني والثالث ينتج : $ح = د$ و $د = ح$ اذا :

$$ب = ح = د = و$$

اي ان مقادير السرعة لعدة اجسام متحركة تتناسب عكساً مع ازمانها .
وبما ان الكمية ب (مقدار السرعة في الساعة $\times$ عدد الساعات) تشير طول المسافة .

كذلك ح ، د ، و كل منهما يدل على طول نفس المسافة
بعض امثلة على المقادير المتناسبة عكساً .

سرعة الجسم المتحرك مع الزمن اللازم له لقطع مفروضة ، سعر الشيء
مع مقداره (بضمن محدود) ، عدد العمال مع الزمن (في عمل ما) ، رأس المال مع
الزمن (في ربح مقدار مفروض) هي مقادير متناسبة عكساً .

✽ القاعدة الثلاثة ✽

١٣٥ — تعاريف — القاعدة الثلاثية هي مسألة حسابية تتألف من عدة

مقادير متناسبة مع بعضها طردياً او عكساً .

فاذا تألفت من اربعة مقادير وكان احدها مجهولاً سميت بالقاعدة الثلاثية البسيطة

واذا تألفت من ستة مقادير فاكثروا كان احدها مجهولاً سميت بالقاعدة الثلاثية المركبة ويتضح من التعريف السابق ان القاعدة الثلاثية هي تناسب يحتوي على سلسلتين من الاعداد المتناسبة احد حدود الواحدة منهما مجهول يطالب بحسابه .

ويقال للقاعدة الثلاثية انها (**طردية**) اذا كانت العلاقة بين نسبتيهما طردية

مثال — ماقيمة ٩ كيلو غرامات من السكر فيما اذا كانت قيمة ١٥ كيلو غراماً منه ١٥٧,٥ قرشاً سورياً .

الحل —

	/	ك غ	قرش
	:	٩	س
$\frac{9}{15} \times 157,5 = 94,5$	}	١٥	١٥٧,٥
		طر	

ويلاحظ ان التناسب يمكن كتابته على الصورة الآتية :

$$\frac{س}{٩} = \frac{١٥٧,٥}{١٥} \text{ وقيمة كل من النسبتين تدل على ثمن الكيلو غرام الواحد.}$$

ويقال للقاعدة الثلاثية انها (**عكسية**) اذا كانت العلاقة بين نسبتيهما عكسية

مثال — ماعدد الساعات اللازمة الى ٢٧ عاملاً حتى يتموا عملاً فيما اذا

كان ١٢ عاملاً ينهونه في ٣٠,٦ ساعات .

	}	ساعة	الحل —
		عامل	
الوقتان اللازمان لتمام عمل واحد	}	٢٧	س
يتناسبان عكساً مع عدد العمال		١٢	٣٠,٦
		عك	

$$\frac{١٢ \times ٣٠٦}{٢٧} = \text{وعليه يكون : س} \times ٢٧ = ٣٠٦ \times ١٢ \text{ ومنه س} = \frac{١٢ \times ٣٠٦}{٢٧}$$

$$\text{او س} = \frac{١٢}{٢٧} \times ٣٠٦ = ١٣٦ \text{ ساعة وهذا العدد المطلوب}$$

ويتضح من المثالين السابقين انه :

١ — اذا كانت مقادير القاعدة الثلاثية متناسبة طرداً يكون المجهول فيها مساوياً حاصل ضرب نظيره بالنسبة الثانية .

٢ — اذا كانت مقادير القاعدة الثلاثية متناسبة عكساً يكون المجهول فيها مساوياً حاصل ضرب نظيره بعكس النسبة الثانية .

تطبيق على القاعدة الثلاثية المركبة .

مثال — ماعدد العمال اللازمة لتعميد طريق طوله ٤٩٥ متر في ١٥ يوماً ويستغلون في اليوم ١١ ساعة فيما اذا كان ٢٥ عاملاً يعبدون طريقاً طوله ٣٠٠ متر في ١٢ يوماً ويستغلون في اليوم ٩ ساعات .

الحل :	عمال	طول	يوم	ساعات الشغل في اليوم
	س	٤٩٥	١٥	١١
	٣٥	٣٠٠	١٢	٩
		طر	عك	عك

وعليه فنسبة العمال تساوي عكس نسبة الايام وعكس نسبة الساعات اي :

$$\frac{\text{عمال}}{\text{س}} = \frac{\text{طول}}{\text{ايام}} = \frac{\text{ساعات}}{\text{طر}} = \frac{١٢}{١٥} = \frac{٤٩٥}{٣٠٠} = \frac{٩}{١١}$$

ومنه : س = $25 \times \frac{495}{300} \times \frac{12}{15} \times \frac{9}{11} = 17$ يوماً العدد المطلوب.

وبتدقيق التناسب الاخير نلاحظ ان المجهول صار مساوياً لحاصل ضرب نظيره في النسب الطردية وعكس النسب العكسية .

ومن الامثلة السابقة نستنتج (القاعدة العامة) لحل مسائل التناسب .

١٣٦- **قاعدة** — لحل مسألة التناسب (القاعدة الثلاثية) يعمل مايلي :

١- تكتب سلسلتا الاعداد بنفس الترتيب المفهوم من افادة المسألة على ان توضع السلسلة ذات المجهول فوق سلسلة المعلومات وان تقع الاعداد ذات النوع الواحد تحت بعضها .

٢- تناقش كل من النسب مع النسبة ذات المجهول وتفرق النسب الطردية من النسب العكسية وذلك بدلالة العلاقات الطردية او العكسية الموجودة بين كمياتها ويوضع شارة (طر) تحت النسبة الطردية وشارة (عك) تحت النسبة العكسية .

٣- يحسب قيمة المجهول (س) من قانون التناسب العام وهو :

المجهول (س) ؛ يساوي حاصل ضرب العدد المناظر له بالنسب الطردية ومقلوب النسب العكسية .

مثال — ما عدد الايام اللازمة الى ٢٠ عاملاً لينسجوا ٣٨٠ متراً من القماش اذا اشتغلوا في اليوم ٨ ساعات مع العلم ان ١٥ عاملاً يمكنهم ان ينسجوا ٤٥٠ متراً في ١٢ يوماً اذا اشتغلوا في اليوم ٦ ساعات .

الحل :	يوم	عامل	امتار	ساعات العمل
	س	٢٠	٤٨٠	٨
	١٢	١٥	٤٥٠	٦
		عك	طر	عك

ومنه : س = $12 \times \frac{15}{20} \times \frac{480}{450} \times \frac{6}{8} = 7$ يوماً العدد المطلوب

ملاحظة — اذا كانت سلسلة المعلومات مكتوبة فوق سلسلة ذات المجهول فينبغي ان يكون الحل معاكساً للحل السابق .

اي المجهول يساوي حاصل ضرب نظيره في النسب العكسية ومقلوب النسب الطردية .

مثلاً : لو كانت اعداد المسألة السابقة مرتبة كما يلي :

يوم	عامل	متر	ساعات
١٢	١٥	٤٥٠	٦
س	٢٠	٤٨٠	٨
	عك	طر	عك

يكون : س = $12 \times \frac{15}{20} \times \frac{480}{450} \times \frac{6}{8} = 7$

تطبيقات القاعدة الثلاثية

القاعدة الثلاثية هي اساس حل جميع المسائل ذات الاعداد المتناسبة وهذه تشمل انواع مسائل التناسب والنسبة المئوية والربح والخسارة والعمولة والخصم والحطيلة (اسقونطو) ومسائل الفائدة .

تمارين

١- المطلوب حساب قيمة س في التناسبات الآتية :

$\frac{1,9}{3} = \frac{س}{10,5}$ $\frac{57-4}{4} = \frac{س}{57}$	$\frac{س}{7} = \frac{22}{7}$ $\frac{127}{8} = \frac{س}{37}$	$\frac{8}{س} = \frac{3,4}{5}$ $\frac{57+3}{2} = \frac{س}{57-2}$
--	---	---

٢- حساب الوسط المتناسب مقرباً الى اقل من ١، للاعداد الآتية :

٠,٧٥ و ٠,٢٥ ؛ $\frac{7}{9}$ و $\frac{3}{4}$ ؛ ٣٦ و ٣,٧

٣- حساب الاعداد المفروض فيها ما يلي :

فضل عددين ٢٩ وحاصل قسمتهما ٣,٧ ٠,٥٧ » » ٥٤ » » ٠,٦٣ » » ٢٣,٤ » »	مجموع عددين ١٧ وحاصل قسمتهما ٢,٦ ٢,٣ » » ٢٠ » » $\frac{7}{9}$ » » ٣٧,٨ » »
---	--

٤- تقسيم الاعداد الآتية بنسبة المقادير المحررة في جانب كل منها

٥٢٨ بنسبة : ٢ ، ٣ ، ٦

٢٤٠ : ٧ ، ١٣,٥ ، ١١,٥

١٣٣٥ : $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{5}$ ، $\frac{3}{4}$

﴿ مسائل عامة على الاعداد المتناسبة ﴾

في التناسب

١ — ٢٤ عاملاً يحصدون ارضاً مساحتها ٣ هكتار في ٤٥ يوماً ويشتغلون في اليوم ١٠ ساعات فكم يوماً يلزم الى ٣٠ عاملاً ليحصدوا ارضاً مساحتها ٤٨ هكتار اذا اشتغلوا في اليوم ٨ ساعات

٢ — فئة من العمال قدرها ١٥ عاملاً انهوا ثلث عمل في ٨ ايام ثم تخلف منهم ٣ عمال فكم يوماً يلزم للعمال الباقين حتى يكملوا باقي العمل (٢٠ يوماً)

٣ — فيئتان من العمال الاولى تم عملاً في ١٢ يوماً والثانية تم نفس العمل

في ١٦ يوماً فاذا اشتغل $\frac{1}{3}$ الفئة الاولى مع $\frac{4}{7}$ الفئة الثانية فكم يوماً يتموا ذلك العمل ؟
(١٥,٧٥ يوماً)

٤ — خرجت فرقة من الجنود عددها ٣٠٠٠ جندياً لعمل تمارين عسكرية تطول مدة ١٥ يوماً واخذت الدقيق الكافي لها باعتبار ان استحقاق الجندي في اليوم ٩,٠ كيلو غراماً ولكن بعد خروجها بخمسة ايام سرق من الدقيق ٣٠ كيساً وزن كل منهم كنتالاً فما المقدار اللازم تنزيله من استحقاق كل جندي حتى يكفيهم الدقيق الباقي لنهاية المدة ؟

٥ — ١٠٠ كيلو غرام قمح تعطى ٨٥ كيلو غراماً من الدقيق و ١٠٠ كيلو غرام دقيق تعطى ١٣٥ كيلو غراماً خبز فما مقدار الخبز الممكن استحصاله من ١٧٥ كيلو غرام قمح !

في الفائدة البسيطة .

٦ - مافائدة مبلغ ١٢٠٠٠ فرنكاً وضع بسعر ٤,٥ ٪ لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور ؟

٧ - ماهو المبلغ الذي ربح ٥٦٠ فرنكاً في مدة ٢ سنة و ٤ شهور بسعر ٦ ٪ ؟

٨ - ماالسعر الذي وضع به مبلغ ٨٠٠٠ فرنكاً لمدة ٣ سنوات ٥ شهور، ١٢ يوما فكان ربحه ١٩٣٢ فرنكاً

٩ - ماالزمن اللازم لمبلغ ٥٧٥٠ قرشاً ليربح ١٧٢,٥ قرشاً بسعر ٤,٥ ٪

١٠ - رجل يملك ٥٧٢٠ ليرة سورية وضع منها ٢٥٠٠ ليرة في مصرف بسعر ٤ ٪ لمدة ٥ سنوات والباقي وضعه بسعر ٥ ٪ للعدة عينها ثم قبض المبلغ وارباحه واشترى بذلك ارضاً ثمن المكتتار منها ٨٧ ليرة فالملطوب حساب مساحة الارض

١١ - ماهو المبلغ الذي تصير جملته ٨٦١٧٢,٤٠ فرنكاً بمدة ٥ شهور و ١٨ يوما اذا وضع بسعر ٤,٥ ٪

١٢ - شخص وضع باسم ولديه مبلغين مختلفين في مصرف بسعر ٥ ٪ واشترط الا يأخذ ما يخصها حتي يبلغ كل منهما سن العشرين وكان سن الاكبر وقتئذ ١٢ سنة والاصغر ٨ سنوات فما هما المبلغان المذكوران مع العلم ان كلاهما اخذ عند بلوغه سن العشرين ٢٨٠٠ ليرة من المصرف .

١٣ - شخص عنده مبلغ وضع ثلثه بسعر ٥ ٪ وثنه بسعر ٦ ٪ والباقي بسعر ٤ ٪ لمدة ٥ سنوات وبعد هذا الزمن استرد المبلغ وربحه فكان ذلك ٥٩٠٠ ليرة فما المبلغ وما مقدار كل جزء منه مع ربحه ؟

في الخطيطة

١٤ - ماالقيمة الحالية لسند قيمته الاسمية ٧٩٥٠ فرنكاً، حسم في ٣ نوفمبر

سنة ١٩٣٦ بسعر ٥٪ يستحق الدفع في ١٥ مارس ١٩٣٧

١٥ - مال القيمة الاسمية لسند يستحق الدفع في ٣١ مارس ١٩٣٧ حسم في ١٥ يناير ١٩٣٧ بسعر ٣٪ فسكانت حطيطته ٤٥ فرنكاً

١٦ - مال السعر الذي حسبته به حطيطه سند واجب التأدية بعد ٧٣ يوماً فسكانت ١٤ فرنكاً مع العلم ان قيمته الاسمية ٣٥٠٠ فرنكاً

١٧ - مايو تاريخ تحويل سند قيمته الاسمية ١٩٠٠ فرنكاً واجب التأدية في ٢٩ نيسان ١٩٣٧ حسم بسعر ٢,٥٪ مع العلم ان حطيطته الخارجية ٩,٥ فرنكاً في النسبة المئوية

١٨ - رجل باع ارضاً بمبلغ ٢٦٠ ليرة سورية فخرس فيها ٣٥٪ من ثمن شرائها فما هو ثمن شراء الارض ؟

١٩ - الحليب يعطي ١٥٪ من وزنه قشطة والقشطة تعطي ٢٠٪ من وزنها سمناً فكم كيلو غرام سمن يمكن استحصاله من ١٥٠ لتر حليب مع العلم ان كثافة الحليب (١,٠٣٤)

٢٠ - شخص اذا باع حصاناً بمبلغ ٣٢,٥ ديناراً فخرس ٢,٥٪ من ثمن شرائه فاذا باعه بمبلغ ٤٥ دينار كم يكون مقدار ربحه او خسارته في المائة ؟

٢١ - شخص عنده عربة اذا باعها بمبلغ ٦٠ ديناراً يربح ٥٪ فبكم يبيعها لو اراد ان يربح ١٥٪ وما ثمن شرائها ؟

٢٢ - رجل باع دراجة بمبلغ ٢٤ ليرة سورية فخرس ٢٥٪ من رأس مالها فبكم يبيعها ليربح ٥٪ ؟

٢٣ - شخص اشترى مقداراً من التفاح كل ٥ بقرش واشترى مقداراً اخر

يساوي الاول كل ٧ بقرش فاذا خلط النوعين وباع كل ٦ تفاحات بقرش فهل يربح او يخسر وما مقدار ذلك في المائة ؟

٢٤ - تاجر اشترى بضاعة وباعها فربح فيها ١٥٪ من ثمن شرائها ثم اشترى بالمبلغ المتحصل بضاعة اخرى وباعها بمبلغ ٣٤٢٠ فرنكاً فسكّنت خسارته فيها ٨٪ من ثمن شرائها فالمطلوب حساب رأسمال البضاعة الاولى .

الفصل الخامس

✽ المعادلة وحل مسائل على الابحاث السابقة في المعادلة ✽

١٣٧ - المعادلة - هي عبارة عن مساواة تحتوي على حرف يدل على عدد مجهول

مثلاً - المساواة : ٢ س - ١٠ = $\frac{٣}{٥}$ س + ١٨ (١) هي معادلة خواص المعادلة :

١٣٨ - خاصة (١) يمكن اضافة عدد واحد الى طرفي المعادلة او طرح عدد واحد منهما .

مثلاً - المعادلة (١) نضيف الى طرفيها العدد (١٠) يصير :

$$٢ س - ١٠ = \frac{٣}{٥} س + ١٨ + ١٠$$

$$٢ س = \frac{٣}{٥} س + ١٨ + ١٠ + ١٠ (٢)$$

وكذلك نطرح من طرفي المعادلة (١) العدد $\frac{٣}{٥}$ س يصير :

$$٢س - ١٠ - \frac{٣}{٥}س = \frac{٣}{٥}س + ١٨ - \frac{٣}{٥}س$$

$$٢س - \frac{٣}{٥}س - ١٠ = ١٨ \dots\dots (٣)$$

ويلاحظ ان العدد (١٠) كان في الطرف الاول من المعادلة (١) ناقصاً صار في الطرف الثاني من المعادلة (٢) زائداً .

وكذلك العدد $\frac{٣}{٥}س$ كان في الطرف الثاني من المعادلة (١) زائداً اصبح في الطرف الاول من المعادلة (٣) ناقصاً وينتج من ذلك القاعدة الآتية :

١٣٩ - قاعدة - كل حد في المعادلة يمكن نقله من طرف الى آخر بعكس اشارته .

١٤٠ - خاصية (٢) - يمكن ضرب طرفي المعادلة بعدد واحد او تقسيمهما على عدد واحد (غير الصفر)

$$\text{مثلاً المعادلة : } \frac{٣}{٤}س = ٢٤ \text{ نضرب طرفيها في ٤ يصير :}$$

$$٤ \times \frac{٣}{٤}س = ٤ \times ٢٤ \text{ ومنه : } ٣س = ٩٦$$

وكذلك المعادلة : $٣س = ٩٦$ نقسم طرفيها على ٣ يصير :

$$\frac{٣س}{٣} = \frac{٩٦}{٣} \text{ ومنه : } ٣س = ٣٢$$

ملاحظة - بما ان التقسيم هو عملية معاكسة للضرب اذن لتقسيم مقسوم
على عدد ما (صحيحاً او كسراً) يضرب ذلك المقدار بمعكوس العدد

وعليه لتخليص الحرف المجهول (س) من امثالها $\frac{3}{4}$ نضرب طرفي المعادلة

بمعكوس الامثال اي نضربهما في $\frac{4}{3}$ يصير :

$$\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = س \times \frac{4}{3} \quad \text{ومنه} \quad س = ٣٢$$

ويتضح من المثال السابق ان قيمة (س) ظهرت بعملية واحدة .

١٤١ - قاعدة - لحذف امثال العدد المجهول (س) نضرب طرفي المعادلة

بمعكوس الامثال .

١٤٢ - نتيجة - اذ وجد في طرفي المعادلة عدوان متساويان بالقيمة والاشارة

يمكن حذفهما .

١٤٣ - حل المعادلة - هو عبارة عن اجراء العمليات المقتضية لاستخراج

قيمة الحرف التي بها تحقق قيمة المساواة .

كيفية حل المعادلة - لحل معادلة ما يعمل مايلي :

١ - تحذف الاقواس (اذا وجدت) ثم تنقل الحدود التي تشمل على الحرف

المجهول في المعادلة الى الطرف الاول والحدود المعلومه (الاعداد) الى الطرف الثاني .

٢ - تصلح حدود كل من طرفي المعادلة حتى ينتج من كل منهما

حيد واحد فقط .

٣ — تستحصل قيمة المجهول (س) وذلك بضرب طرفي المعادلة بمعكوس امثال المجهول او بتجريده من المقام بالضرب ومن الامثال بالتقسيم .

لنفرض ان معادلة اصبحت بعد نقل الحدود واصلاح طرفيها كالشكل الآتي :

$$ب \times س = ح$$

(بفرض ان ب ، ح عدنان معلومان)

$$يكون : س = \frac{ح}{ب}$$

١٤٤ — تحقيق المعادلة — بعد استخراج لقيمة المجهول (س) تموض محلها في المعادلة وتحل فاذا نتج في الطرفين عدنان متساويان كانت المعادلة محققة وقيمة المجهول صحيحة .

مثال (١) — المطلوب حل المعادلة : $٣(س+٧) = س + ٣٧$ يحل القوس اولا

$$يصير : ٣س + ٢١ = س + ٣٧ \quad \text{تنقل الحدود}$$

$$يصير : ٣س - س = ٣٧ - ٢١ \quad \text{يصلح الطرفان}$$

$$يصير : ٢س = ١٦ \quad \text{يقسم الطرفان على (٢) امثال المجهول}$$

$$\text{ينتج : } ٨ = س$$

مثال (٢) — المطلوب حل المعادلة : $٩ - س = س + \frac{١}{٢} + \frac{٢}{٧}$ س

$$\text{تنقل الحدود فيصير : } س - \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٧} = ٩$$

$$\text{نصلح الطرفين : } س(١ - \frac{١}{٢} - \frac{٢}{٧}) = ٩$$

$$(١٤) (٧) (٢)$$

$$س = \frac{٩}{\frac{١٤}{١٤} - \frac{٧}{١٤} - \frac{٢}{١٤}} = ٩ \quad \text{ومنه : } س \times \frac{٣}{١٤} = ٩$$

يفضرب الطرفان في $\frac{١٤}{٣}$ يصير : $س \times \frac{٣}{١٤} \times \frac{١٤}{٣} = ٩ \times \frac{١٤}{٣}$ اوس $٤٢ = ٤٢$

تمارين

المطلوب حل المعادلات الآتية :

$$١٠ = \frac{س - ٥}{٣} + \frac{س}{٤}$$

$$٥ = \frac{س + ٥}{٥} + \frac{س - ٥}{١٠}$$

$$٥ = \frac{س + ١٠}{٩} + \frac{س - ٢}{٦}$$

$$\frac{س}{٤} + ٣ = \frac{س + ١٩}{٥}$$

$$\frac{س - ١٠}{٥} = \frac{س - ٤}{٧}$$

$$\frac{س + ١}{١٨} = ١ - \frac{س - ١}{٨}$$

$$٦ = \frac{س + ٢٠}{٩} + \frac{س - ٣}{٧}$$

$$٥ = \frac{س - ٨}{٧} + \frac{س - ٣}{٣} + \frac{٥}{٢١}$$

$$\frac{١٣}{٤٢} = \frac{س - ٥}{٦} - \frac{١ - ٢س}{٣}$$

$$\frac{١٥٩}{٢٨} = \frac{٥(س + ٥)}{٨} - \frac{٢(س - ٣)}{٧}$$

$$١٨ + س = ١٥ + ٢س$$

$$١٦ + س = ٤ - ٣س$$

$$٧ - ٣س = ٣ - ٢س$$

$$٣س + ٤ = ٥(س - ٢)$$

$$٢س + ٣ = ١٦ - (٢س - ٣)$$

$$٢(س - ٢) = ٢(س - ٦) + ٢$$

$$٥س + ٣ = ١٥ - س$$

$$٢س + ١٥ = ٢٧ - ٤س$$

$$١٥ - ٥س = ٢٤ - ٨س$$

$$٧(س - ٢٥) = ٢س - ٢(٣س - ٢٥)$$

$$٦٠ + ٢(س - ١) = ٢(٥ + س)$$

$$٤ + س = ٢(س + ٣) - ٢س$$

$$٢س(س + ٢) = س(س + ٤) + ٢٥$$

$$٧ + ٢(٣س - ٧) = (١ + ٣س)(٢س - ٧)$$

$$٧ = (٢س + ٣)(٢س - ٣)$$

مثال (٣) - في مسائل الفائدة يفرض ان :

$ر = م \times ج \times \frac{ع}{١٠٠} \dots (١)$	$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$	المبلغ « رأس المال » هو : م
		الربح « الفائدة » : ر
		الزمن : ج
		السعر : ع

فاذا علمت قيمة ثلاثة حروف من الحروف الاربعة ر، م، ج، ع
(يفرض ان ج عدد السنين) يمكن حساب قيمة الحرف الرابع بواسطة قانون الفائدة
مثلاً من القانون (١) في المثال الثالث ينتج : $ر = م \times ج \times ع$

وبقسمة طرفي المعادلة على ج × ع يحدث : م = $\frac{ر \times ١٠٠}{ع \times ج} \dots$ (قانون رأس المال)

« » « م × ع » ج : = $\frac{ر \times ١٠٠}{ع \times م} \dots$ (قانون الزمن)

« » « م × ج » ع : = $\frac{ر \times ١٠٠}{ج \times م} \dots$ (قانون السعر)

ويتضح مما سبق ان القوانين الاربعة ينتج بعضها من بعض

ملاحظة - اذا اضيف الربح الناتج من اي مبلغ الى رأس المال فالحاصل

يسمى « بالفا »

واذا رمزنا الى البالغ بالرمز « با » يصير : با = م + ر

وبتمويض « ر » بمساواتها م × ج × $\frac{ع}{١٠٠}$ في المعادلة السابقة يصير :

$$با = م + م \times ج \times ع \times ٠,٠ \text{ ومنه ينتج :}$$

$$با = [١ + ج \times ع \times ٠,٠] \dots\dots \text{ قانون البالغ}$$

$$\text{ومنه : } م = \frac{با}{١ + ج \times ع \times ٠,٠} \dots\dots \text{ قانون رأس المال [المبلغ]}$$

$$\text{ومن المعادلة : } با = م + م \times ج \times ع \times ٠,٠$$

$$\text{يمكننا ان نكتب : } با - م = م \times ج \times ع \times ٠,٠$$

$$\text{فاذا قسم طرفا المعادلة على [م \times ع \times ٠,٠] يحدث ج = } \frac{با - م}{م \times ع \times ٠,٠} \text{ [قانون الزدين]}$$

$$\frac{با - م}{ج \times م} = ع \times ٠,٠ \text{ » » » » [م \times ن]}$$

$$\text{او : ع = } \frac{١٠٠ [با - م]}{ج \times م} \dots\dots \text{ [قانون السعر]}$$

حل مسائل على الابحاث السابقة في المعادلة

مسألة [١] - مساحة مثلث ٤٩٠ متراً مربعاً وطول قاعدته ٣٥ متراً

فما طول ارتفاعه ؟

$$\text{الحل - قانون مساحة المثلث هو : س = } \frac{١}{٢} \times ق \times ع$$

$$\text{نعوض الحروف المعلومة باعدادها يصير : } ٤٩٠ = \frac{١}{٢} \times ٣٥ \times ع$$

$$\text{او : } ٤٩٠ = \frac{٣٥}{٢} \times \text{ع}$$

$$\text{ومنه : ع} = ٤٩٠ \times \frac{٢}{٣٥} = ٢٨ \text{ متراً طول ارتفاع المثلث المطلوب}$$

مسألة [٢] - ما فائدة مبلغ قدره [٢٥٠٠] فرنكاً وضع بسعر ٤ ٪ لمدة سنة و ٣ شهور ؟

$$\text{الحل - قانون الفائدة هو : } \text{ر} = \text{م} \times \text{ق} \times \frac{\text{ع}}{١٠٠}$$

نعوض الحروف المعلومه باعدادها : $\text{ر} = ٢٥٠٠ \times ٢,٢٥ \times ٠,٠٤ = ٣٠٠$
فرنكاً الفائدة المطلوبة

مسألة [٣] - ما السعر لمبلغ ٢٠٠٠ فرنكاً وضع بالفائدة البسيطة لمدة ٣ سنوات فصار بالغه ٢٣٠٠ فرنكاً ؟

$$\text{الحل - قانون السعر في مسائل البالغ هو : ع} = \frac{[١٠٠ - \text{با} - \text{ر}]}{\text{ق} \times \text{م}}$$

$$\text{نعوض الحروف المعلومه باعدادها يصير : ع} = \frac{[١٠٠ - ٢٣٠٠ - ٢٠٠٠]}{٣ \times ٢٠٠٠}$$

$$\text{ومنه : ع} = \frac{٣٠٠ \times ١٠٠}{٣ \times ٢٠٠٠} = ٥ \text{ مقدار السعر المطلوب}$$

مسألة [٤] - مبلغان احدهما يساوي $\frac{٥}{٧}$ الثاني وضعا بالفائدة البسيطة ،

الاول لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور بسعر ٥ ٪ والثاني لمدة ٢ سنة و ٣ شهور بسعر

٤,٥ ٪ فكان ربح الاول زائداً عن ربح المبلغ الثاني بمقدار ٨٠,٥٠ فرنكاً
فالمطلوب حساب كل من المبلغين .

الحل - بفرض المبلغ الثاني [س] فيكون المبلغ الاول $\left[\frac{٥}{٨} س\right]$

$$\text{وفائدة المبلغ الاول : } \frac{٥}{٨} س \times \frac{١}{٣} \times \frac{١٠٠}{١٠٠} \text{ او } \frac{٥}{٨} س \times \frac{١٠}{٣} \times \frac{١٠٠}{١٠٠}$$

$$\text{» الثاني : } \frac{٤,٥}{١٠٠} \times \frac{١}{٤} \times \frac{١٠٠}{١٠٠} \text{ او } \frac{٤,٥}{١٠٠} \times \frac{٩}{٤} \times \frac{١٠٠}{١٠٠}$$

ومعادلة المسألة تكون :

$$٨٠,٥ = \frac{٤,٥}{١٠٠} \times \frac{٩}{٤} \times س - \frac{٥}{١٠٠} \times \frac{١٠}{٣} \times \frac{٥}{٨} س$$

$$\text{ومنه : } ٨٠,٥ = \frac{٨١}{٨٠٠} س - \frac{٢٥}{٢٤٠} س$$

$$\text{او : } ٨٠,٥ = \left(\frac{٨١}{٨٠٠} - \frac{٢٥}{٢٤٠} \right) س$$

(٣) (١٠)

$$٨٠,٥ = \left(\frac{٢٤٣}{٢٤٠٠} - \frac{٢٥٠}{٢٤٠٠} \right) س$$

$$٨٠,٥ = \frac{٧}{٢٤٠٠} س$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{وهما العددان المطلوبان} \\ \text{س} = ٨٠,٥ \times \frac{٢٤٠٠}{٧} = ٢٧٦٠٠ \text{ فرنكاً المبلغ الثاني} \\ \text{و} \quad ٧٢٥٠ = \frac{٥}{٧} \times ٢٧٦٠٠ \quad \text{» } \text{» } \text{الاول} \end{array} \right.$$

مسألة (٥) - رجل عمره الآن ٣٥ سنة وله ولد عمره ١٢ سنة فبعد كم من السنين يصير عمر الاب ضعف عمر الولد ؟

الحل - يفرض ان عدد السنوات اللازمة لتحقيق المسألة هو (س)
عمر الاب الآن : ٣٥ سنة ويصير عمر الاب بعد (س) من السنوات : ٣٥ + س
» الولد : ١٢ : » » عمره » (س) » : ١٢ + س
ومعادلة المسألة تكون :

$$٣٥ + س = ٢ (١٢ + س)$$

$$\text{وبالحل : } ٣٥ + س = ٢٤ + ٢ س$$

$$س - ٢ س = ٢٤ - ٣٥$$

او - س = ١١ - ومنه س = ١١ سنة الزمن اللازم لتحقيق المسألة

مسألة (٦) - شخص عنده ٥٨ قطعة نقود منها ذوات خمس وعشرين قرشاً ومنها ذوات عشرة قروش وقيمتها جميعاً تعادل ١١٣٥ قرشاً فما عدد كل نوع من القطع ؟

الحل - يفرض عدد قطع الخمس وعشرين هو (س) فالقطع ذوات العشرة قروش تكون : (٥٨ - س)

وعليه فمعادلة المسألة تصير : $٢٥ \times س + ١٠ \times (٥٨ - س) = ١١٣٥$

وبالحل : $٢٥ س + ٥٨٠ - ١٠ س = ١١٣٥$

، $٢٥ س - ١٠ س = ١١٣٥ - ٥٨٠$

، $١٥ س = ٥٥٥$

ومنه : $س = \frac{٥٥٥}{١٥} = ٣٧$ عدد قطع ذوات ٢٥ قرشاً

، : $٥٨ - ٣٧ = ٢١$ » » » ١٠ قرشاً

مسألة (٧) - توجهت عربية من نقطة ب قاصدة نقطة ح بسرعة ٦ كيلومتراً

في الساعة وبعد حركتها بمدة ثلاث ساعات خرجت دراجة من ب على نفس الطريق

بسرعة ١٦ كيلومتراً في الساعة وتعمقت العربية في اي وقت تلحق الدراجة العربية؟

الحل - يفرض ان الزمن الذي سارت فيه العربية هو « ج » فيكون الزمن

اللازم للدراجة حتى تلحق العربية هو « ج - ٣ »

وتكون معادلة المسألة هي : $٦ \times (ج - ٣) = ١٦ \times ج$

وبالحل : $٦ ج - ١٨ = ١٦ ج$

، $٦ ج - ١٦ ج = ١٨$

، $١٠ ج = ١٨$

ومنه : $ج = \frac{١٨}{١٠} = ١,٨$ ساعة الزمن اللازم للدراجة

حتى تلحق العربية .

✽ مسائل على المعادلة ✽

- ١ — ما العددان اللذان مجموعهما ٢٤ وفضلهما ٦ ؟
- ٢ — الفرق بين عددين ١٢ واذا اضيف الى اكبرهما ٣ يصير الناتج مساوياً ضعف الصغير فما هما العددان ؟
- ٣ — عمر أب ٣٩ سنة وعمر ابنه ٧ سنوات ففي اي سنة يصير عمر الأب ثلاثة اضعاف عمر الابن ؟
- ٤ — عمر أب اربعة امثال عمر ابنه وبعد ٢٤ سنة يصير عمر الأب ضعف عمر الابن فما عمر كل منهما الآن ؟
- ٥ — مجموع عمري رجل وولده ٦٢ سنة ومنذ ٧ سنوات كان عمر الأب ثلاثة امثال عمر الابن فما عمر كل منهما الآن ؟
- ٦ — مجموع اعمار ثلاثة اشخاص ١٠٠ سنة ؛ عمر الكبير يساوي مجموع عمري الآخرين وعمر الصغير ينقص عن عمر المتوسط ١٠ سنوات فما عمر كل منهم ؟
- ٧ — صراف عنده علبة تحتوي على ٤٠ قطعة نقود من ذوات الخمس وعشرين قرشاً وذوات الخمس قروش ، فاذا كان قيمة النقود جميعها ٥٠٠ قرشاً فما عدد كل نوع منها ؟
- ٨ — قيمة ٣٦ بطاقة ٦٧٥ قرشاً ؛ قسم منها بسعر البطاقة ١٠ قروش والآخر بسعر البطاقة ٢٥ قرشاً فما عدد كل من النوعين ؟
- ٩ — تشكيل خليطة من القهوة قدرها ١٠٠ كيلو غرام وثمنها ٩٢٦ فرنكاً

من نوعين من القهوة سعر الكيلوغرام من الاولى ١١,٥ فرنكاً وسعر الكيلوغرام من الثانية ٨ فرنكات فما مقدار ما يؤخذ من النوعين ؟

١٠ — سبيكة ذهبية وزنها ١٢٠ غراماً وعيارها ٠,٩٠٠ فكم غراماً من النحاس يجب اضافته على هذه السبيكة ليصير عيارها ٠,٨٢٥ ؟

١١ — صانع يريد عمل آنية فضية وزنها ٣٠٠ غراماً وعيارها ٠,٨٣٥ من سبكتين فضيتين عيار الاولى ٠,٩٥٠ وعيار الثانية ٠,٨٠٠ فالمطلوب حساب المقدار اللازم اخذه من كلا السبكتين ؟

١٢ — شخص يملك ٨٠٠٠٠ قرشاً وضع قسماً منها في مصرف بسعر ٥٪ ووضع الباقي في مصرف آخر بسعر ٤٪ فاذا اخذ من المصرفين معاً ربحاً سنوياً قدره ٣٦٥٤ قرشاً فما مقدار ما وضعه في كل من المصرفين ؟ «٣٤٦٠٠، ٤٥٤٠٠»

١٣ — مبلغان نسبة الاول الى الثاني $\frac{٣}{٤}$ وضع الاول في مصرف لمدة ٣ سنوات و ٤ شهور بسعر ٥٪ والثاني وضع لمدة ٢ سنة و ٣ شهور بسعر ٤,٥٪ فكان ربح الاول يزيد ٤٧٥ فرنكاً عن الثاني فالمطلوب حساب كل من المبلغين . «٢٠٠٠٠، ١٥٠٠٠»

١٤ — شخص وضع $\frac{٣}{٧}$ مبلغ في مصرف بسعر ٨٪ ووضع الباقي منه في مصرف آخر بسعر ٦٪ ولكنه لو عكس الامر ووضع الاول بسعر ٦٪ والثاني بسعر ٨٪ يزيد ربحه ٢٠٠ فرنكاً فما هو المبلغ ؟

١٥ — رجل وضع مبلغاً بسعر ٥٪ لمدة ٣,٥ سنة ثم وضع البالغ من ذلك بسعر ٦٪ فكان ربحه السنوي ٤٧٩٤ قرشاً فما هو اصل المبلغ؟

١٦ — المطلوب إيجاد عددين فضلهما ٥٠ ويتناسبان عكساً مع العددين ٩,٧

١٧ — ما هو الكسر الذي قيمته تساوي $\frac{١٥}{١٩}$ والفرق بين حديه ٢٤؟

١٨ — عدنان مجموعهما ٤٦ وإذا اضيف $\frac{١}{٧}$ الاول الى $\frac{١}{٣}$ الثاني ينتج ١٠

فما هما العددان؟

١٩ — ما العددان المتتاليان اللذان يزيد خمس اكبرهما على سبع الاصغر ٣؟

٢٠ — مستطيل طوله يزيد على عرضه ٣ امتار ولو زاد الطول ٣ امتار

ونقص العرض مترين لما تغير سطح المستطيل فالمطلوب حساب بعدي المستطيل

« ١٢٠١٥ م »

٢١ — غرفة مستطيلة الشكل عرضها يعادل $\frac{٢}{٣}$ طولها فاذا زاد العرض متراً

ونقص الطول متراً تصير مربعة فما طول بعدي هذه الغرفة؟

٢٢ — شبه منحرف مساحته ٩ هكتار ٦ آر ١٠ سانتيار؛ ارتفاعه

يساوي قاعدته الوسطى وقاعدته الصغرى تعادل $\frac{٢}{٥}$ قاعدته الكبرى فالمطلوب حساب

طول ارتفاعه وكل من قاعدتيه؟ (١٧٢، ٤٣٠، ٣٠١)

٢٣ — ما العدد اللازم اضافته الى حدي الكسر $\frac{٢٣}{٤}$ ليصبح مساوياً $\frac{٢}{٣}$ ؟

٢٤ — حوض مملوء زيتاً سعته ٢٩٤٠ ليتره اخذ منه مقدار $\frac{٤}{٣}$ ما ترك فيه

فكم ليتره اخذ منه ؟

٢٥ — اناء آن ملاء آن زيت ؛ وهما يحتويان ٣٥٧ ليترًا فاذا اخذ من الاول

١٥ ليتره ومن الثاني ١٠٨ ليترًا لكان ما بقي في الاول مساوياً ما بقي في الثاني فما سعة كل منهما ؟

٢٦ — قام رجل من نقطة (ب) متوجهاً نحو (ح) ماشياً بسرعة ٤

كيلومترات في الساعة وبعد قيامه بمقدار ٥ ساعات قام رجل آخر من (ب) راكباً دراجة تسير بسرعة ١٦ كيلومتراً في الساعة ومتعقباً الاول فال المطلوب حساب الزمن

اللازم للثاني حتى يلحق الاول $(\frac{٢}{٣} ١ ساعة)$

٢٧ — ركب رجل عربية من نقطة (ب) لاجل التزهة سرعتها ١٢ كم في

الساعة وقطع مسافة ثم نزل من العربية ورجع ماشياً بسرعة ٤ كم في الساعة فاستغرق زمن ذهابه ورجوعه ٥ ساعات فال المطلوب حساب طول المسافة التي قطعها راكباً . « ١٥ كم »

٢٨ — عربية تقطع ٨٠ متراً في الدقيقة ودراجة تسير ١٥ كم في الساعة تحركتا

من قرية واحدة وتلاقيا في بلدة واحدة على طريقهما فما هي المسافة بين القرية والبلدة

مع العلم ان العرب تحركت قبل الدراجة بمدة ساعة و ٢٥ دقيقة « ١٠ كم »

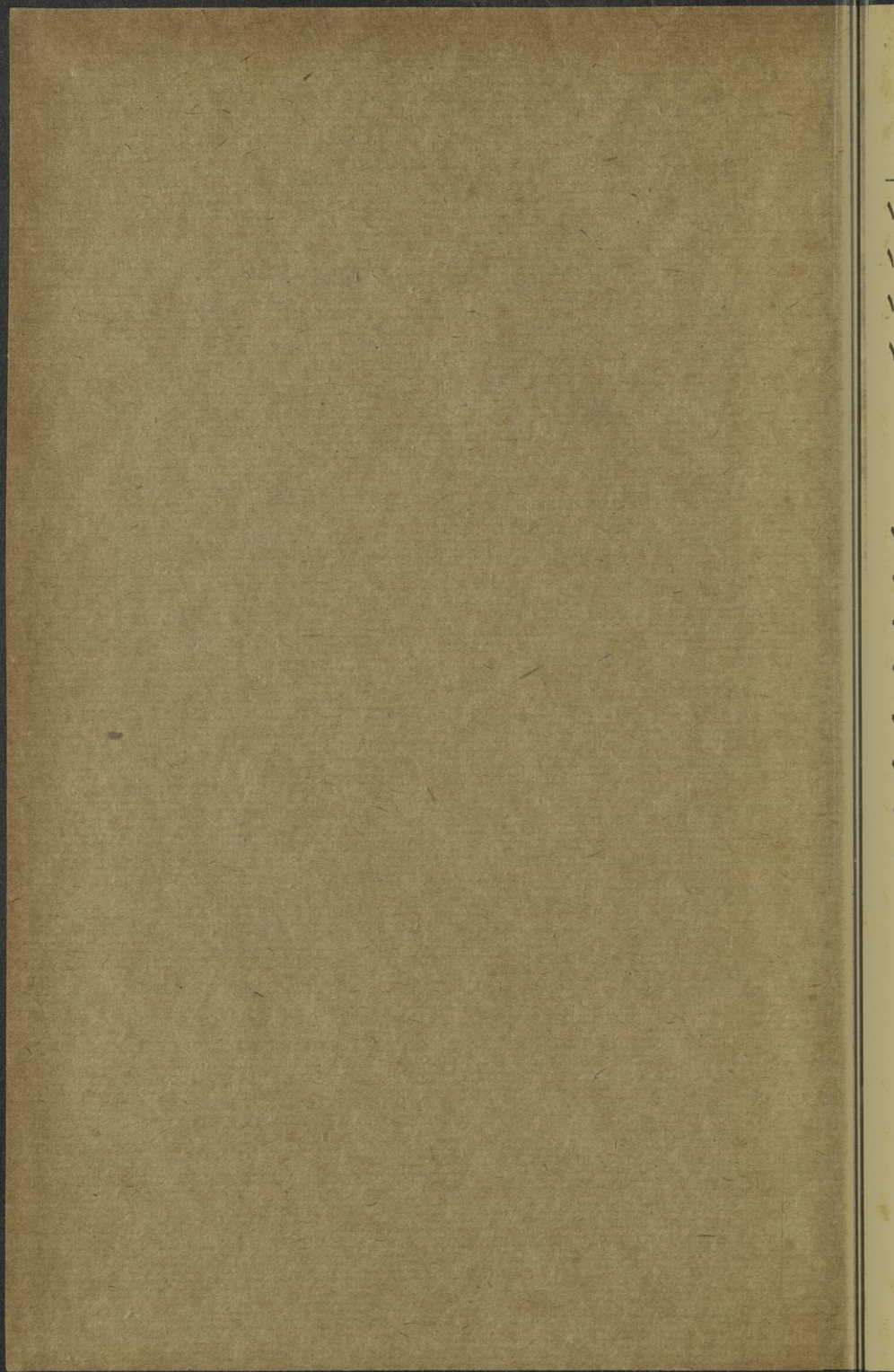
٢٩ — المسافة بين دمشق وبيروت ١٧٠ كم ، خرجت سيارة من بيروت في الساعة ٦ صباحاً قاصدة دمشق بسرعة ٤٥ كيلو متراً في الساعة وخرجت سيارة من دمشق في الساعة ٦ والدقيقة ٤٠ صباحاً قاصدة بيروت بسرعة ٦٠ كيلو متراً في الساعة فالمطلوب حساب زمن تلاقيهما وعلى اي بعد من دمشق تتلاقيان « الساعة ٨ ، مسافة ٨٠ كم »

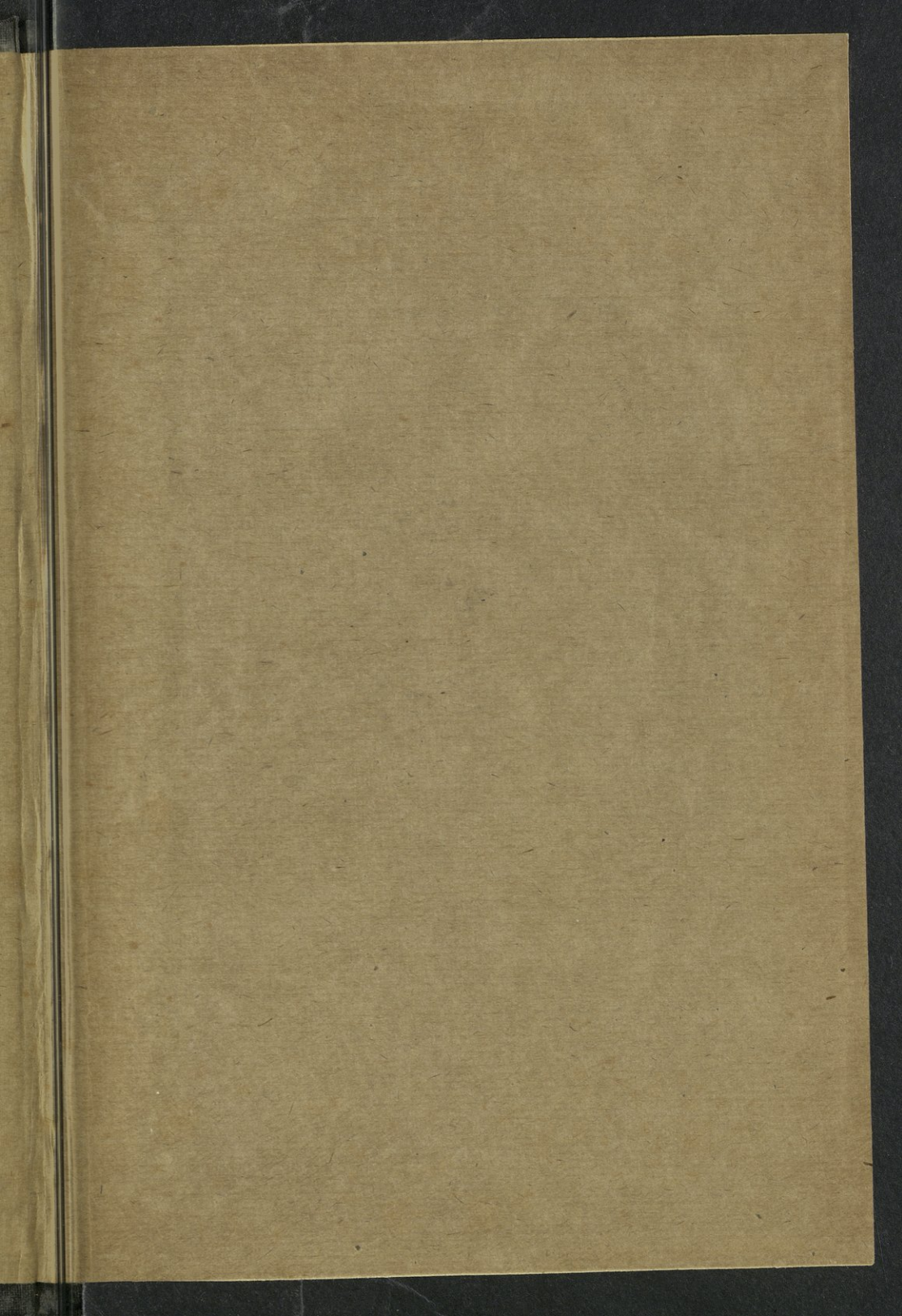
٣٠ — قريتان ب ، ح المسافة بينهما ٥٢٠ كيلو متراً اذا خرجت منهما سيارتان في وقت واحد واتجهتا نحو بعضهما يتلاقيان بعد ٤ ساعات من خروجهما واذا سارتا على اتجاء واحد من نحو ح تتلاقيان بعد ١٣ ساعة من خروجهما فالمطلوب حساب سرعة كل منهما . « ٤٥ ، ٨٥ »

انتهى

الفهرس

البحت	الصحيفة	البحت	الصحيفة
القياس المشترك بين مقدارين	٦٢	الفصل الاول *	
التحري على القاسم المشترك الاعظم	٦٣	في الاعداد الصحيحة	
لمقدارين مفروضين		٢	حاصل الجمع وخواصه
الكسور الاعتيادية وخواصها	٦٨	٤	حاصل الطرح (الفضل) وخواصه
اعمال الكسور	٧٤	٧	المساواة وخواصها
تمارين عامة على الكسور	٨٠	٩	الجداء وخواصه
الكسور العشرية وخواصها واعمالها	٨٢	١١	حاصل القسمة وخواصها
تحويل الكسور الاعتيادية الى عشرية	٨٥	١٩	قابلية القسمة
حاصل القسمة انتقري	٨٦	٢٩	القوى وخواصها
عمليات حرفية في الكسور	٨٧	٣٢	الاعداد الاولية وخواصها
مسائل عامة على المقاييس والكسور	٨٩	٤٢	القواسم وخواصها
		٤٦	القاسم المشترك الاعظم
الفصل الثالث *		٤٩	المضاعف المشترك الاصغر
في المربع والجذر المربع		٥٣	مسائل محلولة على الابحاث السابقة
الاعداد المربعة وخواصها	٩٥	٥٧	= = = للحل
الفضل بين مربعين متواليين	٩٦		
مربع جداء عدة اعداد	٩٧	الفصل الثاني *	
مربع مجموع عددين	٩٩	في الكسور	
مربع فضل عددين	١٠٢	٦٠	معلومات اولية في الكسور





511:K23kiA:c.1

قازان، محمد نشأة

الحساب لتلاميذ المدارس الثانوية. درو

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES



01026605

American University of Beirut



511

K23kiA

General Library

511
K23^hLA