511: J41hA V.1
جوهر - محمد صادق وغيره
الحساب للمدارس الثانوية
165 F. 207 3. 11. 72
To be returned

511: J41hA V.1
MY 5 54
AG 20 54
[illegible]

قررت وزارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب بمدارسها الثانوية

511
J41hA
Y:1
C.1

كتاب الحساب للمدارس الثانوية

وفق المنهج المخفف الذى أقرته وزارة المعارف العمومية

الجزء الأول

تأليف

محمد صادق جوهرباك
الوكيل المساعد
لوزارة المعارف العمومية

محمد امين لطفى
الوكيل المساعد
لوزارة المعارف سابقاً

أحمد محمد
مراقب النشاط المدرسى
بوزارة المعارف العمومية

حقوق الطبع محفوظة

59125

ملتزم طبعه ونشره
مطبعة المعارف ومكتبتها بمصر

بسم الله الرحمن الرحيم

والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

و بعد فمنذ ثلاث سنوات وضعنا كتاباً فى الحساب للمدارس الثانوية بالاشتراك مع زميلنا المغفور له الأستاذ محمد أمين لطفى الوكيل المساعد بوزارة المعارف سابقاً وقد قررت وزارة المعارف استعمال هذا الكتاب بأجزائه الثلاثة بمدارسها .

ونظراً لما أدخل حديثاً من التعديل فى منهج الحساب بالمدارس الثانوية أعلنت الوزارة عن حاجتها إلى كتاب جديد يطابق المنهج الحديث فقمنا بإدخال ما يلزم من التعديل على الكتاب الأول تارة بالزيادة وأخرى بالحذف كما أضفنا كثيراً من التمارين فى بعض الموضوعات وقد شعرنا فى أثناء العمل بالخسارة الكبيرة التى أصابتنا بفقد زميلنا الكريم رحمه الله فقد كان لنا أكبر عون عند وضع الكتاب الأول .

وقد توخينا فى هذا الكتاب — كما فى الكتاب الأول — سهولة العبارة وتبسيط الشروح ، وراعينا استنباط القواعد الضرورية من الأمثلة المحلولة نموذجاً للطلبة كما راعينا أن تكون المسائل متصلة بقدر الإمكان بما يصادفه الطالب فى حياته العملية .

وقد استطردنا من مسائل المتوسط الحسابى إلى المسائل البسيطة فى الخلط والمزج لارتباطها بها من جهة ولأنه يحسن إلمام الطلبة بها من جهة أخرى كما شرحنا فى آخر الكتاب الطريقة العامة لاستخراج الجذر التربيعى لمن يشاء من الطلبة .

ونسأل الله أن يجد الجميع فى كتابنا هذا ما قصدناه من فائدة ونفع إنه السميع المجيب ؟

محمد صادق جوهر أحمد محمد

الباب الأول

التحليل إلى عوامل ومعنى الأس
الجذر التربيعى والجذر التكعيبى بوساطة العوامل

تعـــاريف

١ — قاسم العدد هو عدد آخر يقبل العـدد الأصلى القسمة عليه بدون باق
فمثلا : ٣ قاسم للعدد ١٥ لأن ١٥ ÷ ٣ = ٥ وليس هناك باق
و ٦ قاسم للعدد ٢٤ لأن ٢٤ ÷ ٦ = ٤ وليس هناك باق وهكذا
و يقال للقاسم أيضاً إنه عامل للعدد فتكون ٣ عاملا للعدد ١٥ و ٦ عاملا للعدد ٢٤

٢ — العدد الأولى هو عدد لا قاسم له غير نفسه والواحد الصحيح
فمثلا : ٢ و ٣ و ٥ و ٧ و ١١ و ١٣ أعداد أولية

قبول الأعداد للقسمة

توجد طرق لمعرفة ما إذا كان بعض الأعداد يقبل القسمة على أعداد أخرى نذكر منها ما يأتى :

٣ — قبول عدد القسمة على ١٠
يقبل العدد القسمة على ١٠ إذا كان رقمه الأيمن صفراً
مثلا : ٤٨١٠ يقبل القسمة على ١٠
لأن ٤٨١٠ = ٤٨١ عشرة إذا قدرت بالعشرات

٤ — قبول العدد القسمة على ٢ و ٥

يقبل العدد القسمة على ٢ أو ٥ إذا كان رقمه الأيمن صفراً أو يقبل القسمة على ٢ أو ٥ على التناظر

مثال (١) ٤٨١٠ يقبل القسمة على ٢ وأيضاً على ٥

لأن ٤٨١٠ = ٤٨١ عشرة وكل عشرة منها يمكن تقسيمها إلى خمسة أقسام فى كل منها ٢ كما أنه يمكن تقسيمها أيضاً إلى قسمين فى كل منهما ٥

∴ ٤٨١٠ = ٥ × ٤٨١ من الأقسام ذوات الاثنين

و = ٢ × ٤٨١ من الخمسات

مثال (٢) ٤٨١٦ يقبل القسمة على ٢

لأن ٤٨١٦ = ٤٨١٠ + ٦ وكل من هذين العددين يقبل القسمة على ٢

مثال (٣) ٤٨١٥ يقبل القسمة على ٥

لأن ٤٨١٥ = ٤٨١٠ + ٥ وكل من هذين العددين يقبل القسمة على ٥

تنبيه : لما كانت الأرقام البسيطة التى تقبل القسمة على ٢ هى الأعداد الزوجية ٢ و ٤ و ٦ و ٨ فقط ولا يوجد من الأرقام البسيطة ما يقبل القسمة على ٥ غير ٥ أمكن أن يقال :

يقبل العدد القسمة على ٢ إذا كان رقم آحاده صفراً أو رقماً زوجياً

و يقبل القسمة على ٥ إذا كان رقم آحاده صفراً أو خمسة

نتيجة : باقى قسمة أى عدد على ٢ أو ٥ هو عين باقى قسمة رقم آحاده على ٢ أو ٥ على التناظر

٥ — قبول العدد القسمة على ٤ أو ٢٥

يقبل العدد القسمة على ٤ أو ٢٥ إذا كان منتهياً من جهة اليمين بصفرين

أو إذا كان العدد المكوّن من آحاده وعشراته يقبل القسمة على ٤ أو ٢٥ على التناظر .

مثال (١) ٣٤٧٠٠ يقبل القسمة على ٤ وأيضاً على ٢٥

لأن ٣٤٧٠٠ = ٣٤٧ مائة

وكل مائة منها تساوى ٢٥ أربعة كما أنها تساوى أيضا ٤ أقسام كل منها ٢٥

∴ ٣٤٧٠٠ = ٢٥ × ٣٤٧ من الأربعات

= ٤ × ٣٤٧ قسما كل منها خمسة وعشرون

مثال (٢) ٣٤٧٣٦ يقبل القسمة على ٤

لأن ٣٤٧٣٦ = ٣٤٧٠٠ + ٣٦

= عدداً من الأربعات + ٩ أربعات

= عدداً معيناً من الأربعات

مثال (٣) ٣٤٧٧٥ يقبل القسمة على ٢٥

لأن ٣٤٧٧٥ = ٣٤٧٠٠ + ٧٥

= عدداً من ذوات الخمسة وعشرين + ٣ من ذوات الخمسة وعشرين

= عدداً معيناً من ذوات الخمسة وعشرين

نتيجة : باقى قسمة أى عدد على ٤ أو ٢٥ هو عين باقى قسمة العدد المكون من عشراته وآحاده على ٤ أو ٢٥ على التناظر

٦ — قبول العدد القسمة على ٨ أو ١٢٥

يقبل العدد القسمة على ٨ أو ١٢٥ إذا كان منتهياً من جهة اليمين بثلاثة أصفار . أو إذا كان العدد المكون من مئاته وعشراته وآحاده يقبل القسمة على ٨ أو ١٢٥ على التناظر .

مثال (١) ٤٣٠٠٠ يقبل القسمة على ٨ وأيضاً على ١٢٥

لأن كل ١٠٠٠ = ٨ × ١٢٥

مثال (٢) ٤٣١٣٦ يقبل القسمة على ٨

لأن ٤٣١٣٦ = ٤٣٠٠٠ + ١٣٦

= ٤٣ ألفاً + ١٧ من ذوات الثمانية

مثال (٣) ٤٣٦٢٥ يقبل القسمة على ١٢٥

لأن ٤٣٦٢٥ = ٤٣ ألفاً + ٦٢٥

= ٤٣ ألفاً + ٥ من ذوات المائة وخمسة وعشرين

نتيجة : باقى قسمة العدد على ٨ أو ١٢٥ هو عين باقى قسمة العدد المكوّن من آحاده وعشراته ومئاته على ٨ أو ١٢٥ على التناظر

٧ — قبول العدد القسمة على ٩ أو ٣

يقبل العدد القسمة على ٩ أو ٣ إذا كان مجموع القيم المطلقة لأرقامه يقبل القسمة على ٩ أو ٣ على التناظر

ولبيان ذلك نذكر الخاصة الآتية :

خاصة : الواحد الصحيح المتبوع بأصفار يساوى مكرراً للعدد ٩ مضافاً إليه واحد

فمثلا : ١٠ = ٩ + ١

و ١٠٠ = ٩٩ + ١ = مكرر ٩ + ١

و ١٠٠٠ = ٩٩٩ + ١ = مكرر ٩ + ١

وهكذا :

لنفرض الآن عدداً ما مثل ٥٨٤٧٦

∴ ٥٨٤٧٦ = ٥٠٠٠٠ + ٨٠٠٠ + ٤٠٠ + ٧٠ + ٦

= ٥ × ١٠٠٠٠ + ٨ × ١٠٠٠ + ٤ × ١٠٠ + ٧ × ١٠ + ٦

= ٥ (مكرر ٩ + ١) + ٨ (مكرر ٩ + ١) + ٤ (مكرر ٩ + ١)

+ ٧ (مكرر ٩ + ١) + ٦

$$= \text{مكرر } ٩ + ٥$$
$$+ \text{مكرر } ٩ + ٨$$
$$+ \text{مكرر } ٩ + ٤$$
$$+ \text{مكرر } ٩ + ٧$$
$$+ ٦$$
$$= \text{مكرر } ٩ + (٥ + ٨ + ٤ + ٧ + ٦)$$

وكذلك بمثل ما تقدم من الأعمال يمكننا أن نبين أن كل عدد أكبر من ١٠ مركب من جزءين أحدهما مكرر ٩ والآخر مجموع القيم المطلقة لأرقامه ومن المتساوية نعلم أن قبول العدد المفروض القسمة على ٩ تتوقف على أن يكون الجزء الثانى من الطرف الأيسر قابلاً القسمة على ٩

ولما كانت مكررات العدد ٩ هى أيضاً مكررات العدد ٣ كان كل عدد يساوى مكرراً للعدد ٣ مضافاً إليه مجموع القيم المطلقة لأرقامه

وعلى ذلك يمكن إن نقول أن العدد يقبل القسمة على ٣ إذا كان مجموع القيم المطلقة لأرقامه يقبل القسمة على ٣

مثال (١) ٨١٤٥ يقبل القسمة على ٣ وأيضاً على ٩

لأن $٥ + ٤ + ١ + ٨ = ١٨$

و ١٨ تقبل القسمة على ٣ و ٩

مثال (٢) ٨٧٦ يقبل القسمة على ٣ ولكنه لا يقبل القسمة على ٩

لأن $٦ + ٧ + ٨ = ٢١$

و ٢١ يقبل القسمة على ٣ ولكنه لا يقبل القسمة على ٩

ملاحظتان :

(١) يحسن عند جمع أرقام العدد عدم جمع التسعات إن وجدت وأن نسقط التسعات أولا فأولاً كلما كان حاصل الجمع مساوياً ٩ أو أكبر منه

(٢) باقى قسمة العدد على ٩ أو ٣ هو عين باقى قسمة مجموع القيم المطلقة لأرقامه على ٩ أو ٣ على التناظر .

٨ — يقبل العدد القسمة على ٦ إذا كان منتهياً من جهة اليمين بصفر أو رقم زوجى وكان مجموع أرقامه يقبل القسمة على ٣ لأنه من الشرط الأول يقبل القسمة على ٢ ومن الشرط الثانى يقبل القسمة على ٣ وحينئذ يقبل القسمة على ٢ × ٣ أى ٦

٩ — قبول العدد القسمة على ١١

يقبل العدد القسمة على ١١ إذا كان باقى طرح مجموع القيم المطلقة لأرقامه الزوجية الرتبة من مجموع القيم المطلقة لأرقامه الفردية الرتبة صفراً أو مكرر ١١ ولبيان ذلك نذكر الخواص الآتية :

الخاصة الأولى : الواحد الصحيح المتبوع بأصفار زوجية العدد يساوى مكرر ١١ مضافا إليه ١

لأن ١٠٠ = ٩٩ + ١ = مكرر ١١ + ١

و ١٠٠٠٠ = ٩٩٩٩ + ١٠ = مكرر ١١ + ١

و ١٠٠٠٠٠٠ = ٩٩٩٩٩٩ + ١ = مكرر ١١ + ١

وهكذا

الخاصة الثانية : الواحد الصحيح المتبوع بأصفار فردية العدد يساوى مكرر ١١ مطروحا منه واحد ١

لأن ١٠ = مكرر ١١ — ١

و ١٠٠٠ = ٩٩٠ + ١١ — ١ = مكرر ١١ — ١

و ١٠٠٠٠٠ = ٩٩٩٩٠ + ١١ — ١ = مكرر ١١ — ١

وهكذا

الخاصة الثالثة : كل رقم متبوع بأصفار يساوى مكرر ١١ مطروحا منه أو مضافاً إليه هذا الرقم على حسب كون الأصفار التى على يمينه فردية العدد أو زوجيته

لأن ٣٠٠٠ = ٣ آلاف = ٣ (مكرر ١١ — ١) = مكرر ١١ — ٣

و ٥٠٠ = ٥ مئات = ٥ (مكرر ١١ + ١) = مكرر ١١ + ٥ وهكذا

لنفرض الآن عدداً ما مثل ٧٦٣٤٢٥

∴ ٧٦٣٤٢٥ = ٧٠٠٠٠٠ + ٦٠٠٠ + ٣٠٠٠ + ٤٠٠ + ٢٠ + ٥

= مكرر ١١ — ٧ + مكرر ١١ + ٦ + مكرر ١١ — ٣

+ مكرر ١١ + ٤ + مكرر ١١ — ٢ + ٥

= مكرر ١١ + [(٥ + ٤ + ٦) — (٢ + ٣ + ٧)]

وكذلك بمثل ما تقدم من الأعمال يمكننا أن نبين أن كل عدد أكبر من ١١ مركب من جزءين أحدهما مكرر ١١ والآخر باقى طرح مجموع الأرقام الزوجية الرتبة من مجموع الأرقام الفردية الرتبة

ومن هذا يؤخذ أن العدد يقبل القسمة على ١١ إذا كان الجزء الثانى من الطرف الأيسر من المتساوية صفراً أو عدداً يقبل القسمة على ١١

وهنا العدد المفروض لا يقبل القسمة على ١١ لأن الجزء الثانى يساوى ٣

ملاحظتان : (١) إذا كان مجموع الأرقام الزوجية الرتبة أكبر من مجموع الأرقام الفردية الرتبة فى عدد ما نضيف إلى مجموع الأرقام الفردية الرتبة ١١ أو أحد مكرراتها حتى يمكن الطرح به وهذا العدد الذى نضيفه يؤخذ من مكررات ١١ الموجودة فى العدد الأصلى كما يتضح من المثال المذكور بعد

(٢) باقى قسمة أى عدد على ١١ هو عين باقى قسمة الفرق بين مجموع أرقامه الفردية الرتبة ومجموع أرقامه الزوجية الرتبة على ١١

مثال : أوجد باقى قسمة ٧٥٨٤٩٣ على ١١

٧٥٨٤٩٣ = أحد مكررات ١١ + [(٣ + ٤ + ٥) — (٩ + ٨ + ٧)]

= أحد مكررات ١١ + [١٢ — ٢٤]

= مكرر آخر للعدد ١١ + ٢ × ١١ + ١٢ — ٢٤

= مكرر آخر للعدد ١١ + ٣٤ — ٢٤

= مكرر آخر للعدد ١١ + ١٠

∴ باقى القسمة المطلوب = ١٠

تمارين (١)

تنبيه : تحل جميع هذه التمارين بدون إجراء عمليات القسمة

(١) بين أن كلا من الأعداد الآتية يقبل القسمة على ٣ وأوجد منها ما يقبل القسمة على ٩

٧٨٣ ، ٢٦٤ ، ١٥٢١ ، ٨٩٤٥٤ ، ٨٦٩٥٣٥

(٢) أوجد باقى قسمة كل من الأعداد الآتية على ٣ ثم على ٩

٦٨٢ ، ١٣٦٣ ، ٥٨٩١ ، ٦٧٩٢٥٣

(٣) بين أن كلا من الأعداد الآتية يقبل القسمة على ٤ ثم بين منها ما يقبل القسمة على ٨

٢١٣٦ ، ٦٢٨٣٢ ، ١٦٧٥٦ ، ٨٣٥٦٤٨

(٤) أوجد باقى قسمة كل من الأعداد الآتية على ٤ ثم على ٨

٢٣١٥٤ ، ٨٤٢١٦٢٣ ، ٩٥٢٧٤٢١ ، ١٢٨٥٦٤٦

(٥) بين أن الأعداد الآتية تقبل القسمة على ٦ ثم بين ما يقبل منها القسمة على ١٢

٢٦٥٢ ، ٣١٩١٤ ، ٣٢٩٨٥٦ ، ٦٥١٤٩٨

(٦) بين ما إذا كانت الأعداد الآتية تقبل القسمة على ١١ ثم أوجد باقى القسمة فى حالة عدم قبول القسمة

٨٥٢٥ ، ٣٥١٦ ، ٣٨٢٨ ، ٨٤٩٢ ، ١٩٧٦٥٢ ، ٩١٧٣٨٢

(٧) أوجد الأرقام المحذوفة والمرموز لها بالعلامة * من الأعداد الواردة فى عمليات القسمة الآتية إذا علم أنه ليست هناك بواق لعمليات القسمة

(ا) ٣٠*٤ ÷ ٩

(ب) ٥٧٣*١ ÷ ٩

(حـ) ١٤٨*٣ ÷ ١١

(ء) ٧٨٥٦٣* ÷ ١١

(هـ) ٨٩٢٥٤* ÷ ٨

(٨) ما أصغر عدد يضاف إلى :

(ا) ٨٠٣٦٤٢ (ب) ٨٩٢٩٤ (حـ) ٧٣٠٥٨

ليكون المجموع قابلاً للقسمة على :

أولاً ٩ ثانياً ١١ ثالثاً ٨ رابعاً ٣

(٩) أوجد بواقى قسمة كل من ٣٧١ ، ٣٢٠٥ ، ١٤٥٧٦ ، ٤٨٥٦٩ ، ٥١٦٣١٤ على كل من ٣ ، ٩ ، ١١

(١٠) ضع رقماً على يمين كل من الأعداد الآتية بحيث يجعل العدد الناتج فى كل حالة قابلاً القسمة على ١١

٣١٢٢١ ، ٤٧٥٦٦٥٧ ، ٤٢٦٤٨٦٥

(١١) أوجد باقى قسمة كل من العمليات الآتية :

(ا) ٥٢٥٨ ÷ ٣

(ب) ١٠٢٢٣٨ ÷ ٩

(حـ) ٩٠٧٨ ÷ ٢٥

(ء) ١٣٠٨٣٦ ÷ ١١

(١٢) إذا كان باقى قسمة العدد * ٣٧ * ٨ على ١٢٥ هو ٢ وكان العدد يقبل القسمة على ١١ فما هما الرقمان المرموز لهما بالعلامة *

١٠ — الأعداد الأوليـــة :

لمعرفة ما إذا كان عدد مفروض أولياً أو غير أولى تتبع الطريقة الآتية

مثلا : المطلوب البحث عما إذا كان العددان ٣٢٣ ، ٤٦٧ أوليين أو غير أوليين

لذلك يجب أن تعرف هل لكل منهما قواسم أخرى غير الواحد والعدد نفسه نجرب قسمة كل منهما على التوالى على الأعداد الأولية ٢ ، ٣ ، ٥ . . . وهكذا

العـدد ٣٢٣

٣٢٣ ÷ ٢ = ١٦١ ويبقى منه ١
٣٢٣ ÷ ٣ = ١٠٧ « « ٢
٣٢٣ ÷ ٥ = ٦٤ « « ٣
٣٢٣ ÷ ٧ = ٤٦ « « ١
٣٢٣ ÷ ١١ = ٢٩ « « ٤
٣٢٣ ÷ ١٣ = ٢٤ « « ١١
٣٢٣ ÷ ١٧ = ١٩ « « ٠

∴ ٣٢٣ = ١٧ × ١٩

∴ العدد غير أولى

العـدد ٤٦٧

٤٦٧ ÷ ٢ = ٢٣٣ ويبقى منه ١
٤٦٧ ÷ ٣ = ١٥٥ « « ٢
٤٦٧ ÷ ٥ = ٩٣ « « ٢
٤٦٧ ÷ ٧ = ٦٦ « « ٥
٤٦٧ ÷ ١١ = ٤٢ « « ٥
٤٦٧ ÷ ١٣ = ٣٥ « « ١٢
٤٦٧ ÷ ١٧ = ٢٧ « « ٨
٤٦٧ ÷ ١٩ = ٢٤ « « ١١
٤٦٧ ÷ ٢٣ = ٢٠ « « ٧

∴ خارج قسمة ٤٦٧ على ٢٣ هو ٢٠ وهو أصغر من ٢٣ ولا داعى لتجربة القسمة على عدد أولى أكبر من ٢٣ لأنه لو كان يقبل القسمة عليه لكان الخارج أقل من ٢٣ فيكون لهذا العدد عامل أقل من ٢٣ وقد وجدنا بالتجربة أن هذا غير صحيح

∴ العدد ٤٦٧ أولى

١١ — يؤخذ مما تقدم أنه يمكن معرفة أولية العدد بتجربة قسمته على التوالى على الأعداد الأولية ٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ... الخ إلى أن يحدث خارج قسمة مساو للمقسوم عليه الجارية عليه التجربة أو أصغر منه فإذا لم يقبل القسمة على هذه الأعداد كان العدد المفروض أولياً .

والأعداد الأولية الواقعة بين ١ ، ٢٠٠ هى على الترتيب .

٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣ ، ١٧ ، ١٩ ، ٢٣ ، ٢٩ ، ٣١ ، ٣٧
، ٤١ ، ٤٣ ، ٤٧ ، ٥٣ ، ٥٩ ، ٦١ ، ٦٧ ، ٧١ ، ٧٣ ، ٧٩ ، ٨٣ ، ٨٩
، ٩٧ ، ١٠١ ، ١٠٣ ، ١٠٧ ، ١٠٩ ، ١١٣ ، ١٢٧ ، ١٣١ ، ١٣٧
، ١٣٩ ، ١٤٩ ، ١٥١ ، ١٥٧ ، ١٦٣ ، ١٦٧ ، ١٧٣ ، ١٧٩ ، ١٨١
، ١٩١ ، ١٩٣ ، ١٩٧ ، ١٩٩

تحليل العدد الى عوامله الأولية

١٢ — تحليل العدد إلى عوامله الأولية هو البحث عن جميع الأعداد الأولية التى يكون حاصل ضربها بعضها فى بعض مساوياً ذلك العدد .

مثال : حلل العدد ٥٧٠٢٤٠ إلى عوامله الأولية

العمل		
(١) بقواعد قبول الأعداد القسمة نبحث عن العوامل الأولية وغير الأولية	٥٧٠٢٤٠	١٠ = ٢ × ٥
	٥٧٠٢٤	٨ = ٢ × ٢ × ٢
	٧١٢٨	٨ = ٢ × ٢ × ٢
	٨٩١	٩ = ٣ × ٣
(٢) ثم نحلل ما كان منها غير أولى إلى عوامله الأولية	٩٩	٩ = ٣ × ٣
	١١	١١
(٣) ثم نرتب العمل كما هو مبين	١	

و إذن تكون :

٥٧٠٢٤٠ = ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٢ × ٣ × ٣ × ٣ × ٥ × ١١

تنبيه : يراعى دائما كتابة العوامل الأولية بترتيب تصاعدى بأن يكتب أصغر الأعداد أولا فالذى يليه فى الكبر وهكذا

تمارين (٢)

(١) ميِّز الأعداد الأولية وغير الأولية من الأعداد الآتية ثم استخرج العوامل الأولية التى تقل عن ٢٠ للأعداد غير الأولية منها :

(ا) ٦٧	(ز) ٢٣٧
(ب) ٢٠٣	(ع) ٣٨٧
(حـ) ١١٣	(ط) ٥٥٣
(ء) ٦٧٩	(ى) ٣٨٧١
(هـ) ٩١٧	(ك) ٢٠١
(و) ٧١٢	(ل) ٩٥١

(٢) أوجد العوامل الأولية لكل من الأعداد الآتية :

(ا) ٥٣٨٢	(حـ) ٧٢٤٥
(ب) ٣٣٣٢	(ء) ٦١٢٠

(٣) حلل كلا مما يأتى إلى عوامله الأولية :

(ا) ٢٤٩٩٨٤	(ء) ٤٦٢٤٦٢
(ب) ٢٨٠٢٨	(هـ) ١٥٤٨٣٦
(حـ) ١٣٢٢٨٨	(و) ٣١٨٧٨

معنى الأس

المربع والجذر التربيعى

١٣ — إذا ضرب عدد فى نفسه مرة أو مرتين أو أكثر فحاصل الضرب يسمى قوة لذلك العدد ويوضع فوق العدد مائلاً جهة اليسار الرقم الدال على عدد العوامل .

فتكون ٣ × ٣ القوة الثانية للعدد ٣ وتكتب $٣^{٢}$

ويكون ٣ × ٣ × ٣ القوة الثالثة للعدد ٣ وتكتب $٣^{٣}$

وهكذا

والرقم الدال على قوة أى عدد يسمى (أساً)

فالأس فى $٢^{٤}$ هو ٤ وفى $٣^{٥}$ هو ٥ وهكذا

١٤ — مربع أى عدد هو القوة الثانية للعدد

فمربع ٥ هو $٥^{٢}$ أى ٥ × ٥ = ٢٥

وتقرأ $٥^{٢}$ عادة ٥ تربيع .

١٥ — مكعب أى عدد هو القوة الثالثة للعدد

فمكعب ٥ هو $٥^{٣}$ أى ٥ × ٥ × ٥ = ١٢٥

وتقرأ $٥^{٣}$ عادة ٥ تكعيب

١٦ — $٥^{٤}$ تقرأ ٥ أس أربعة و $٥^{٥}$ تقرأ ٥ أس خمسة

وهكذا

١٧ — نرى مما تقدم أن مربع أى عدد أو مقدار هو حاصل ضربه فى نفسه

فمثلا مربع ٨ هو $٨ \times ٨ = ٨^{٢} = ٦٤$

ومربع $٧^{٢}$ هو $٧^{٢} \times ٧^{٢} = (٧ \times ٧) \times (٧ \times ٧) = ٧^{٤}$

ومربع $٢^{٢} \times ٣$ هو $(٢^{٢} \times ٣) \times (٢^{٢} \times ٣)$

$= (٣ \times ٢ \times ٢) \times (٣ \times ٢ \times ٢)$

$= ٣^{٢} \times ٢^{٤}$

ومربع $\frac{٣^{٢}}{٥}$ هو $\frac{٣^{٢}}{٥} \times \frac{٣^{٢}}{٥} = \frac{٣ \times ٣}{٥} \times \frac{٣ \times ٣}{٥} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٢}}$

وهكذا

١٨ — كل من المقادير ٦٤ ، $٧^{٤}$ ، $٢^{٤} \times ٣^{٢}$ ، $\frac{٣^{٤}}{٥^{٢}}$ يسمى مربعاً كاملا أى أنه يقال للمقدار إنه مربع كامل إذا كان ناتجاً من ضرب مقدار آخر فى نفسه

١٩ — وللمربعات الكاملة بعض خواص يحسن بالطالب أن يلاحظها وهى

أولا : قيمة مربع الكسر الحقيقى أصغر من قيمة الكسر نفسه

فمثلا : $\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

والكسر $\frac{١٦}{٢٥}$ أصغر من الكسر الأصلى $\frac{٤}{٥}$

ثانياً : مربعات الأرقام التسعة هى كما يأتى

الرقم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
مربعه	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١

ومن ذلك نستنتج أن أى مربع كامل لا بد أن ينتهى من جهة اليمين بأحد الأرقام

١ أو ٤ أو ٩ أو ٦ أو ٥ أو بالصفر

وذلك لأن رقم الآحاد فى أى مربع ينتج من تربيع رقم آحاد العدد الأصلى وتربيع أى رقم لا ينتج إلا عدداً مبدوءاً من اليمين بأحد الأرقام ١ ، ٤ ، ٩ ، ٦ ، ٥ كما فى الجدول السابق

أما إذا كان العدد ينتهى بالصفر فمربعه ينتهى بالصفر كذلك وفى هذه الحالة الأخيرة لا بد أن يكون عدد الأصفار التى ينتهى بها المربع زوجياً وذلك لأن المربع المنتهى بالأصفار لا ينتج إلا من تربيع عدد منته بأصفار وعند تربيع مثل هذا العدد فأننا نضاعف عدد أصفاره وتكون الأصفار زوجية العدد

فمثلاً $٥٠^{٢} = ٢٥٠٠$

و $٥٠٠^{٢} = ٢٥٠٠٠٠$

و $٥٠٠٠^{٢} = ٢٥٠٠٠٠٠٠$ وهكذا

٢٠ — ويلخص كل هذا فى أنه

إذا كان آحاد العدد ١ أو ٩ كان رقم آحاد المربع ١

و « « « ٢ أو ٨ « « « ٤

و « « « ٣ أو ٧ « « « ٩

و « « « ٤ أو ٦ « « « ٦

و « « « ٥ « « « ٥

و « « « ٠ « « « ٠

نتيجة : المربع الكامل لا يمكن أن ينتهى من اليمين بأحد الأرقام

٢ أو ٣ أو ٧ أو ٨

تمارين (٣)

(١) أوجد مربعات الأعداد الآتية :

أولاً ٣٢٥	سادساً ٦٥٠
ثانياً ٣٢٥٠	سابعاً ٦٥٠٠
ثالثاً ٣,٢٥	ثامناً ٠,٠٠٦٥
رابعاً ٠,٠٣٢٥	تاسعاً $٤\frac{٢}{٣}$
خامساً $\frac{٥}{٦}$	عاشراً $\frac{٢}{٥} \times ٣^{٢}$

(٢) برهن على أنه إذا كان العدد الزوجي مربعاً كاملاً فلا بد أنه يقبل القسمة على ٤
[لاحظ أنه إذا كان العدد الزوجي مربعا كاملا فأنه لابد أن يكون مربعا لعدد زوجي]

(٣) بين السبب فى أن الأعداد الآتية لا يمكن أن تكون مربعات كاملة

١٩٨ ، ٣٥٢ ، ٤٨٩٧ ، ٨٥٢٤٠٠٠ ، ١٩٥٣

(٤) برهن على أن كل عدد مبدوء من اليمين بعددٍ زوجي من الأصفار وعن يسارها أحد الأرقام ٢ أو ٣ أو ٧ أو ٨ لا يمكن أن يكون مربعا كاملا .

الجذر التربيعى

٢١ — الجذر التربيعى لأى مقدار هو مقدار آخر مربعه يساوى المقدار المعلوم
ومن الأمثلة المذكورة فى مادة ١٧ نرى أن :

الجذر التربيعى للعدد ٦٤ هو ٨

لأن $٨ \times ٨ = ٦٤$

والجذر التربيعى للمقدار $٧^{٤}$ هو $٧^{٢}$

لأن $٧^{٢} \times ٧^{٢} = ٧^{٤}$

والجذر التربيعى للمقدار $٢^{٤} \times ٣^{٢}$ هو $٢^{٢} \times ٣$

لأن $(٢^{٢} \times ٣) \times (٢^{٢} \times ٣) = ٢^{٤} \times ٣^{٢}$

والجذر التربيعى للمقدار $\frac{٣^{٤}}{٥^{٢}}$ هو $\frac{٣^{٢}}{٥}$

لأن $\frac{٣^{٢}}{٥} \times \frac{٣^{٢}}{٥} = \frac{٣^{٤}}{٥^{٢}}$

وهكذا

ويمكننا الآن أن نصوغ الملاحظة التى فى آخر المادة ١٧ فى صيغة أخرى وهى : « أن أسس العوامل فى الجذر التربيعى أنصاف أسس العوامل نفسها فى المقدار الأصلى »

٢٢ — يرمز للجذر التربيعى للمقدار بهذه العلامة $\sqrt{\ }$ موضوعة فوق المقدار
فمثلا الجذر التربيعى للعدد ٦٤ يكتب $\sqrt{٦٤}$ وهو يساوى ٨
والجذر التربيعى للمقدار $٢^{٤} \times ٣^{٢}$ يكتب $\sqrt{٢^{٤} \times ٣^{٢}}$ وهو يساوى $٢^{٢} \times ٣$ وهكذا

استخراج الجذر التربيعى بطريقة التحليل إلى العوامل

٢٣ — لاحظنا فى بند ٢١ أن أسس العوامل فى الجذر التربيعى لمقدار ما هى أنصاف أسس العوامل نفسها فى المقدار الأصلى وعلى ذلك نستنتج القاعدة الآتية لاستخراج الجذر التربيعى للمربع الكامل وهى :

نحلل العدد المفروض إلى عوامله الأولية ثم نضرب العوامل بعضها فى بعض مرفوعة إلى أسس جديدة هى أنصاف الأسس الأولى فيكون الناتج هو الجذر التربيعى المطلوب .

مثال (١) أوجد الجذر التربيعى للمقدار ١٥٨٧٦

العمـــل

∴ العدد ١٥٨٧٦ $= ٢^{٢} \times ٣^{٤} \times ٧^{٢}$

∴ $\sqrt{١٥٨٧٦} = ٢ \times ٣^{٢} \times ٧$

$= ١٢٦$

١٥٨٧٦	$٤ = ٢^{٢}$
٣٩٦٩	$٩ = ٣^{٢}$
٤٤١	$٩ = ٣^{٢}$
٤٩	$٤٩ = ٧^{٢}$
١	

ملاحظة : لكى يأمن الطالب من الخطأ بقدر الإمكان يحسن أن يبحث عن مقدار تقريبى للجواب المطلوب حتى يطمئن إلى الجواب الذى يحصل عليه .

فمثلا فى التمرين السابق نرى أن العدد ١٥٨٧٦ محصور بين المربعين ١٤٤٠٠ (مربع ١٢٠) ، ١٦٩٠٠ (مربع ١٣٠) وعلى ذلك فالجواب يجب أن يكون محصوراً بين ١٢٠ ، ١٣٠ وقد وجدنا أنه ١٢٦

تمارين (٤)

أوجد الجذر التربيعى لكل من الأعداد الآتية بتحليلها إلى عواملها الأولية

(١) ٥٧٦	(٧) ٤٠٩٦	(١٣) ١٢٥٤٤
(٢) ١٧٦٤	(٨) ٢١٠٢٥	(١٤) ٦٧٨٠٦٢٥
(٣) ٧٠٥٦	(٩) ٨٥٣٧٧٦	(١٥) ٢٠٢٥٠٠٠٠
(٤) ٥٣٣٦١	(١٠) ٢٢٥٠٠٠٠	(١٦) ٨٩٣٠٢٥٠٠
(٥) ٧٤٥٢٩	(١١) ٥٩٠٩٧٦١	
(٦) ٩٩٢٢٥	(١٢) ٥٢٧٠٧٦	

مثال (٢) إذا علم أن ٢٦٠١ مربع كامل فأوجد جذره التربيعى بالنظر (بدون تحليل)

العمـــل

٢٦٠١ محصور بين المربعين ٢٥٠٠ ، ٣٦٠٠

∴ $\sqrt{٢٦٠١}$ محصور بين $\sqrt{٢٥٠٠}$ ، $\sqrt{٣٦٠٠}$

أى بين ٥٠ ، ٦٠

∴ رقم العشرات للجذر المطلوب هو ٥

∴ رقم الآحاد فى المربع المعلوم ١

∴ رقم آحاد الجذر المطلوب ١ أو ٩ (بند ١٩)

∴ ٢٦٠١ أقرب كثيراً إلى ٢٥٠٠ منه إلى ٣٦٠٠

∴ رقم الآحاد هو ١ لا ٩

∴ ويكون الجذر المطلوب ٥١

تمارين (٥)

إذا علم أن الأعداد الآتية مربعات كاملة فأوجد جذورها التربيعية بالنظر (بدون تحليل)

(١) ٤٤١ (٢) ٦٢٥ (٣) ٩٦١ (٤) ١٦٨١ (٥) ٣٤٨١

(٦) ٥١٨٤ (٧) ٧٩٢١ (٨) ٩٠٢٥ (٩) ٨٨٣٦ (١٠) ٧٣٩٦

٢٤ — يؤخذ مما تقدم أنه عند تحليل المربع الكامل إلى عوامله الأولية لا بد أن تكون أسس هذه العوامل زوجية

والعدد الذى تكون أسس بعض عوامله الأولية غير زوجية لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً ولكى يمكن جعله مربعاً كاملاً يجب أن نجعل هذه الأسس زوجية إما بالضرب أو بالقسمة كما يتضح من المثالين الآتيين :

مثال (١) أوجد أصغر عدد يضرب فيه ٣٤٢ حتى يكون الناتج مربعاً كاملاً

العمـــل

$\therefore$ ٣٤٢ = ٢ × ٣^{٢} × ١٩

$\therefore$ أصغر عدد يضرب فى هذا المقدار حتى تصير أسسه زوجية

هو ٢ × ١٩

= ٣٨

مثال (٢) أوجد أصغر عدد يقسم عليه ١٦٤٦٤ ليكون الناتج مربعاً كاملاً

العمـــل

$\therefore$ ١٦٤٦٤ = ٢^{٤} × ٣ × ٧^{٢}

$\therefore$ العدد المطلوب = ٣ × ٧

= ٢١

مثال (٣) ما المربعات الكاملة المحصورة بين ٦٠٠٠ و ٨٠٠٠ وتقبل القسمة على ١٥

العمـــــل

مربع ١٥ = ١٥ × ١٥ = ٢٢٥

٢٠٠٠ ÷ ٢٢٥ = ٨ وكسر

و ٨٠٠٠ ÷ ٢٢٥ = ٣٥ وكسر

وعلى هذا تكون المربعات المطلوبة هى :

٢٢٥ × ٩ = ٢٠٢٥

٢٢٥ × ١٦ = ٣٦٠٠

٢٢٥ × ٢٥ = ٥٦٢٥

مثال (٤) أثبت أن $\sqrt{٣٢}$ ينحصر بين $\frac{١١}{٢}$ و $\frac{٤٧}{٨}$

العمـــــل

مربع $\frac{١١}{٢}$ = $\frac{١١}{٢} \times \frac{١١}{٢}$

= $\frac{١٢١}{٤}$

= ٣٠و٢٥

مربع $\frac{٤٧}{٨}$ = $\frac{٤٧}{٨} \times \frac{٤٧}{٨}$

= ٣٤و٥١٥٦٢٥

ولكن ٣٢ ينحصر بين ٣٠و٢٥ و ٣٤و٥١٥٦٢٥

∴ $\sqrt{٣٢}$ ينحصر بين $\frac{١١}{٢}$ و $\frac{٤٧}{٨}$

تمارين (٦)

(١) ما أصغر عدد يضرب فى كل من المقادير الآتية ليكون الناتج مربعاً كاملا

(ا) ٧٦٨ (ء) ٨٩٧١٢

(ب) ٩٧٢ (هـ) ٥٧٠٥٧٠

(حـ) ٧٤٢٥٠ (و) ٧٥٠٦٨٤

(٢) ما أصغر عدد يقسم عليه العدد المفروض فى التمارين الآتية ليكون الناتج مربعاً كاملاً ؟

(أ) ١٨١٥ (حـ) ٧٩٣٨

(ب) ٦٩٣٠ (ء) ١١٥٨٣٠

(٣) مجموع مربعى عددين ٤٣٠٤ وأحدهما ٤٠ فما العدد الآخر ؟

(٤) أوجد العدد الذى ينحصر بين ١٠٠٠ و ٢٠٠٠ إذا علم أنه مربع كامل ويقبل القسمة على ١٣

(٥) أوجد جميع الأعداد الصحيحة التى تنحصر بين ١٠٠٠ و ٤٠٠٠ إذا علم أن كلا منها مربع كامل ويقبل القسمة على ١٧

(٦) إذا غرس مزارع ٧٢٢٥ شجرة فى صفوف متساوية عددها يساوى عدد باقى كل منها من الأشجار فما عدد هذه الصفوف ؟

(٧) برهن على أن $\sqrt{٦٨}$ ينحصر بين $\frac{٢٠٦}{٢٥}$ و $\frac{٢٣}{٤}$

٢٥ — نطبق القاعدة المذكورة فى بند (٢٣) لإيجاد الجذر التربيعى لكسر اعتيادى أو عدد صحيح وكسر أو كسر عشرى إذا كانت هذه المقادير مربعات كاملة كما فى الأمثلة الآتية :

مثال (١) $\sqrt{\frac{٢٢٥}{٧٨٤}} = \sqrt{\frac{٣ \times ٥^{٢}}{٢^{٢} \times ٧^{٢}}} = \frac{٣ \times ٥}{٢ \times ٧} = \frac{١٥}{٢٨}$

مثال (٢) $\sqrt{٥\frac{١٩}{٢٥}} = \sqrt{\frac{١٤٤}{٢٥}} = \sqrt{\frac{١٢^{٢}}{٥^{٢}}} = \frac{١٢}{٥} = ٢\frac{٢}{٥}$

مثال (٣) $\sqrt{٠,٦٤} = \sqrt{\frac{٦٤}{١٠٠}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$ أو ٠,٨

تمارين (٧)

أوجد الجذر التربيعى لما يأتى بطريقة العوامل :

(١) $\frac{٢٢٥}{٧٢٩}$	(٥) $٢٤\frac{١٢١}{١٤٤}$	(٩) ٤١ و٤ .
(٢) $\frac{١٢٢٥}{٤٣٥٦}$	(٦) $٣٣\frac{١٦}{٢٥}$	(١٠) ٠ و٠٢٨٩
(٣) $\frac{٢٩١٦}{٨٢٨١}$	(٧) $١٩٧٤٠\frac{١}{٤}$	(١١) ٢١٣ و١٦
(٤) $\frac{١١٠٢٥}{١٢٥٤٤}$	(٨) $٣٠١٦٧٥\frac{٩}{١٦}$	(١٢) ٢٠ و٨٨٤٩

المكعب والجذر التكعيبى

المكعب

٢٦ — عرفنا من بند ١٥ أن مكعب أى عدد أو مقدار هو حاصل ضربه فى نفسه مرتين على التوالى

فمثلا مكعب ٦ هو $٦ \times ٦ \times ٦ = ٦^{٣} = ٢١٦$

و مكعب $٥^{٢}$ هو $٥^{٢} \times ٥^{٢} \times ٥^{٢} = (٥ \times ٥) \times (٥ \times ٥) \times (٥ \times ٥)$

$= ٥^{٦}$

و مكعب $٢^{٢} \times ٣$ هو $(٢^{٢} \times ٣) \times (٢^{٢} \times ٣) \times (٢^{٢} \times ٣)$

$= (٢ \times ٢ \times ٣) \times (٢ \times ٢ \times ٣) \times (٢ \times ٢ \times ٣)$

$= ٢^{٦} \times ٣^{٣}$

و مكعب $\frac{٣^{٢}}{٥}$ هو $(\frac{٣^{٢}}{٥}) \times (\frac{٣^{٢}}{٥}) \times (\frac{٣^{٢}}{٥})$

$= \frac{٣ \times ٣}{٥} \times \frac{٣ \times ٣}{٥} \times \frac{٣ \times ٣}{٥}$

$= \frac{٣^{٦}}{٥^{٣}}$

وهكذا

ونلاحظ أن أسس العوامل فى المكعب هى ثلاثة أمثال أسس العوامل نفسها فى المقدار الأصلى

٢٧ — كل من المقادير ٢١٦ ، $٥^{٦}$ ، $٢^{٦} \times ٣^{٣}$ ، $\frac{٦٣}{٣٥}$ يسمى مكعباً كاملاً أى أنه يقال للمقدار أنه مكعب كامل إذا كان ناتجاً من ضرب مقدار آخر فى نفسه مرتين

الجذر التكعيبى

٢٨ — الجذر التكعيبى لأى مقدار هو مقدار آخر مكعبه يساوى المقدار المعلوم ومن الأمثلة المذكورة فى بند ٢٦ نرى أن :

الجذر التكعيبى للعدد ٢١٦ هو ٦

لأن $٦ \times ٦ \times ٦ = ٢١٦$

والجذر التكعيبى للمقدار $٥^{٦}$ هو $٥^{٢}$

لأن $٥^{٢} \times ٥^{٢} \times ٥^{٢} = ٥^{٦}$

والجذر التكعيبى للمقدار $٢^{٦} \times ٣^{٣}$ هو $٢^{٢} \times ٣$

لأن $(٢^{٢} \times ٣) \times (٢^{٢} \times ٣) \times (٢^{٢} \times ٣) = ٢^{٦} \times ٣^{٣}$

والجذر التكعيبى للمقدار $\frac{٦٣}{٣٥}$ هو $\frac{٢٣}{٥}$

لأن $\frac{٢٣}{٥} \times \frac{٢٣}{٥} \times \frac{٢٣}{٥} = \frac{٦٣}{٣٥}$

ويمكننا الآن أن نضع الملاحظة التى فى آخر بند ٢٦ فى صيغة أخرى وهى « أن كلا من أسس العوامل فى الجذر التكعيبى هو $\frac{١}{٣}$ أس العامل نفسه فى المقدار الأصلى »

٢٩ — يرمز للجذر التكعيبى للمقدار بهذه العلامة $\sqrt[٣]{\quad}$ موضوعة فوق المقدار فمثلاً : الجذر التكعيبى للعدد ٢١٦ يكتب هكذا $\sqrt[٣]{٢١٦}$ وهو $= ٦$

و « « « « $\sqrt[٣]{٢^{٦} \times ٣^{٣}}$ وهو $= ٢^{٢} \times ٣$ وهكذا

٣٠ — من الملاحظة المذكورة فى آخر بند ٢٨ نستنتج القاعدة الآتية لاستخراج الجذر التكعيبى لمكعب كامل وهى :

أولاً : نحلل العدد المفروض إلى عوامله الأولية

ثانياً : نقسم أس كل عامل منها على ٣

ثالثاً : نضرب العوامل بالأسس الناتجة بعضها فى بعض فحاصل الضرب هو الجذر التكعيبى للعدد المفروض

ملاحظة : لجعل عدد ما مكعباً كاملاً يجب جعل أسس عوامله قابلة للقسمة على ٣ (إما بالضرب أو بالقسمة)

مثال (١) استخرج الجذر التكعيبى للعدد ٣٦٥٢٢٦٤

العمـــــل

∴ بالتحليل نجد أن $٣٦٥٢٢٦٤ = ٢^{٣} \times ٧^{٢} \times ١١^{٣}$

∴ $\sqrt[٣]{٣٦٥٢٢٦٤} = ٢ \times ٧ \times ١١$

$= ١٥٤$

مثال (٢) ما أصغر عدد يضرب فى ٢٨٥٧٦٨ ليكون الناتج مكعباً كاملاً

العمـــــل

∴ $٢٨٥٧٦٨ = ٢^{٣} \times ٣^{٦} \times ٧^{٢}$

∴ لجعل أسس جميع العوامل قابلة للقسمة على ٣ يجب ضرب طرفى المتساوية المتقدمة فى ٧

فيكون العدد المطلوب هو ٧

ملاحظة : الجذر التكعيبى للعدد ٢٨٥٧٦٨ × ٧ أو ٢٠٠٠٣٧٦ هو $٢ \times ٣^{٣} \times ٧$

$= ١٢٦$

٣١ — كما استخرجنا الجذور التربيعية للكسور نستخرج الجذور التكعيبية لها أيضاً بطريقة مماثلة مع أخذ ثلث الأسس بدلاً من نصفها

ويتبين ذلك فى المثالين الآتيين :

مثال (١) : $\sqrt[٣]{١\frac{٩١}{١٢٥}} = \sqrt[٣]{\frac{٢١٦}{١٢٥}}$

$= \sqrt[٣]{\frac{٦^٣ \times ٣^٣}{٥^٣}}$

$= \frac{٦ \times ٣}{٥}$

$= \frac{١٨}{٥}$

$= ٣\frac{٣}{٥}$

مثال (٢) : $\sqrt[٣]{٠,٥١٢} = \sqrt[٣]{\frac{٥١٢}{١٠٠٠}}$

$= \sqrt[٣]{\frac{٨^٣}{١٠^٣}}$

$= \frac{٨}{١٠}$

$= \frac{٤}{٥}$

$= ٠,٨$

تمارين (٨)

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد الآتية بتحليلها إلى عواملها الأولية :

(١) ١٧٢٨ (١٤) ١٣٣١٢٠٥٣

(٢) ٣٣٧٥ (١٥) ١٢٨١٢٩٠٤

(٣) ١٠٦٤٨ (١٦) ١٥٧٤٦٤

(٤) ١٣٨٢٤ (١٧) ١٠٧٢٠٧٦٥١٢٥

(٥) ١٩٦٨٣ (١٨) $\frac{٤٦٦٥٦}{٢٥٠٠٤٧}$

(٦) ٣٥٩٣٧ (١٩) $\frac{٣٧٣٢٤٨}{١٧٧١٥٩٢}$

(٧) ٤٢٨٧٥ (٢٠) $\frac{١٧٥٦١٦}{٩٧٠٢٦٤}$

(٨) ٤٦٦٥٦ (٢١) ٥,٨٣٢

(٩) ٧٤٠٨٨ (٢٢) ١٢,١٦٧

(١٠) ٨٥١٨٤ (٢٣) ١٠٤,٤٨٧١١١

(١١) ١٦٦٣٧٥ (٢٤) $٣٥\frac{١٦٢}{٣٤٣}$

(١٢) ٥٨٣٢٠٠٠ (٢٥) $١٢٧٧٢٨٩\frac{١}{٨}$

(١٣) ٤٣٨٩٧٦ (٢٦) ٠,٠٤٢٨٧٥

ما أصغر عدد يضرب فى كل مما يأتى ليكون الناتج مكعباً كاملاً :

(٢٧) ٤٠٣٢ (٣٠) ٥٣٣٦١

(٢٨) ٧٠٥٦ (٣١) ٢٤٥٠٢٥

(٢٩) ١٢٨٢٥ (٣٢) ٥٨٣٢٠٠

(٣٣) ما أصغر عدد يقسم عليه كل من الأعداد فى التمارين ٢٧ و ٢٨ و ٢٩ و ٣٠ و ٣١ و ٣٢ ليكون الناتج مكعباً كاملاً

(٣٤) ما أصغر عدد يضرب فى ٤٠٥ ليكون الناتج مربعاً كاملاً ومكعباً كاملا فى وقت واحد

(٣٥) ما أقرب عددين صحيحين للعدد ٨٠٠٠ بحيث يكونان مكعبين كاملين ويقبل القسمة على ٧

(٣٦) اختصر الكسر الآتى :

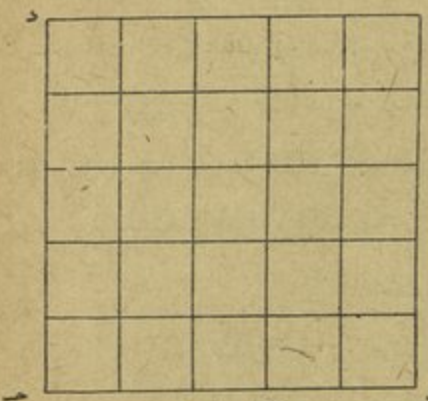
$$\frac{\sqrt[٣]{٧ \times ٥٨,٧٨ + ٠,١٣٢٦٥١}}{\sqrt[٣]{٣,٣٧٥ \times ٤٩\frac{٨}{٢٧}}}$$

الباب الثانى

المساحات

٣٢ — وحدة المساحات العلمية هى «السنتيمتر المربع» وهو عبارة عن مساحة مربع طول ضلعه سنتيمتر ويختار عادة السنتيمتر المربع وحدة عملية للمساحات التى تنقص عن المتر المربع ويختار المتر المربع للوحدات التى تزيد عليه. أما المساحات العظيمة كمساحات البلاد أو الأطيان الزراعية فإن الوحدة المستعملة هى الكيلومتر المربع أو الفدان.

٣٣ — المربع: سطح مستوى ا محدود بأربعة مستقيمات متساوية وزواياه الأربع قوائم.



شكل (١)

مساحة المربع تساوى مربع طول ضلعه.

وذلك لأننا إذا رسمنا مربعاً ا ب حـ د طول كل ضلع من أضلاعه ٥ سنتيمترات (شكل ١) وقسمنا ضلعه ا ب إلى خمسة أقسام متساوية طول كل منها سنتيمتر وأقمنا من نقط التقسيم أعمدة على الضلع المذكور ثم قسمنا الضلع ا د إلى خمسة أقسام متساوية أيضاً طول كل منها سنتيمتر وأقمنا من نقط تقسيمه أعمدة عليه نجد أن المربع الكلى ينقسم إلى ٢٥ مربعاً طول ضلع كل منها سنتيمتر

أى أن مساحة كل منها سنتيمتر مربع وعلى هذا تكون مساحة المربع الكلى ٢٥ سنتيمتراً مربعاً أى ٥ × ٥ من السنتيمترات المربعة *

فى حالة ما إذا كان فى طول ضلع المربع كسر من السنتيمترات بأن كان طول الضلع مثلا ٥٫٣ سم فإننا نقسم الشكل إلى مليمترات مربعة وذلك بتقسيم ضلعى المربع إلى مليمترات و إقامة أعمدة على كل منهما

فينتج أن مساحة الشكل ٥٣ × ٥٣ مليمتراً مربعاً

$$\frac{٥٣ \times ٥٣}{١٠٠} \text{ سنتيمتراً مربعاً}$$

أى ٥٫٣ سنتيمتراً مربعاً

وقياساً على هذا تكون مساحة المربع الذى طول ضلعه ٥٫٣٢ سم

= ٥٫٣٢ × ٥٫٣٢ سم^{٢}

ونتيجته أن مساحة المربع تساوى حاصل ضرب طول ضلعه فى نفسه

فإذا فرض أن طول ضلع المربع = ل سم فإن مساحته تساوى ل^{٢} سم^{٢}

مثال (١) حديقة مربعة الشكل يحيط بها سور طوله ١٤٢٠ متراً فكم فداناً تبلغ مساحة الحديقة (الفدان = $\frac{٥}{٦}$ ٤٢٠٠ من الأمتار المربعة) .

العمـــل

طول ضلع المربع = ١٤٢٠ ÷ ٤ = ٣٥٥ متراً

مساحة الحديقة = ٣٥٥ × ٣٥٥ متراً مربعاً .

= ٣٥٥ × ٣٥٥ × $\frac{٦}{٢٥٢٠٥}$ فداناً

= ٣٠ فداناً

---

* يمكن أن نستنتج من ذلك بسهولة أن السنتيمتر المربع يساوى ١٠٠ مليمتر مربع وذلك بأن نأخذ مربعاً طول ضلعه سنتيمتر واحد ونقسم ضلعين متجاورين منه إلى عشرة أقسام متساوية أى إلى مليمترات ثم نقيم أعمدة على كل ضلع من نقط التقسيم كما فى الشكل فينقسم السنتيمتر المربع إلى ١٠٠ مربع طول ضلع كل منها مليمتر واحد أى مليمترات مربعة وعلى ذلك فالسنتيمتر المربع يساوى ١٠٠ مليمتر مربع

٣٤ — المستطيل : سطح مستو محدود بأربعة مستقيمات ، كل اثنين متقابلين منها متوازيان ومتساويان ، وزواياه الأربع قوائم

مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه

لإثبات ذلك عملياً :-

ارسم مستطيلا طول قاعدته ٥ سنتيمترات وارتفاعه ٣ سنتيمترات ، ثم قسم القاعدة إلى خمسة أقسام متساوية ،

(٣ ش)

وأقم من نقط التقسيم أعمدة عليها ، ثم قسم الارتفاع إلى ثلاثة أقسام متساوية ، وأقم من نقط التقسيم أعمدة عليها أيضاً — تجد أن الشكل الأصلى انقسم إلى ١٥ سنتيمتراً مربعاً ، أى أن مساحته تساوى ١٥ سنتيمتراً مربعاً أى ٥ × ٣ سم^{٢}

وفى حالة احتواء الطول أو العرض ، أو كليهما ، على كسر من السنتيمتر بأن كان الطول ٥٫٣ سم والعرض ٣٫٢ سم مثلا فإننا نقسم المستطيل إلى مليمترات مربعة كما فعلنا فى حالة المربع ونرى أن مساحة الشكل

$= ٥٣ \times ٣٢$ مليمتراً مربعاً أى $\frac{٥٣ \times ٣٢}{١٠ \times ١٠}$ سنتيمتراً مربعاً أى

٥٫٣ × ٣٫٢ سنتيمتراً مربعاً

وعلى العموم إذا فرض أن طول قاعدة المستطيل = ل سم وارتفاعه = ع سم فمساحته تساوى ل × ع سم^{٢}

(مثال ٢) سار رجل حول قطعة أرض مستطيلة الشكل بسرعة ٦ كيلومترات فى الساعة فاستغرق فى ذلك ١٨٫٤٦ من الدقائق . فإذا علم أن طول قطعة الأرض ٧١٠ أمتار فما مساحتها بالأفدنة ؟

العمـــل

محيط قطعة الأرض = $\frac{١٨٩٤٦}{٦٠} \times ٦٠٠٠ = ١٨٤٦$ متراً

نصف المحيط = ٩٢٣ متراً

عرض المحيط = ٩٢٣ — ٧١٠ = ٢١٣ متراً

مساحتها = ٧١٠ × ٢١٣ متراً مربعاً

= ٧١٠ × ٢١٣ × $\frac{٦}{٢٥٢٠٥}$ فداناً

٣٦ فداناً

تمرين ٩

(١) ما مساحة المربع الذى محيطه ٥٢٨ متراً ؟

(٢) ما مساحة المستطيل الذى محيطه ١٦ متراً وعرضه $\frac{٣}{٥}$ طوله ؟

(٣) كم متراً من بساط عرضه $\frac{٣}{٤}$ متر تلزم لتغطية حجرة مستطيلة الشكل طولها ٦ $\frac{٣}{٤}$ من الأمتار وعرضها ٤ $\frac{٤}{٩}$ من الأمتار ؟

(٤) أوجد نفقات توريق جدران غرفة طولها ٢١ قدماً و ٤ بوصات ، وعرضها ١٨ قدماً و ٨ بوصات ، وارتفاعها ١٥ قدماً و ٦ بوصات بورق عرضه ٣٢ بوصة وثمن الياردة منه شلن واحد . مع العلم بأن مجموع مساحات الأبواب والنوافذ التى لا تغطى بالورق ١٢٠ قدما مربعاً .

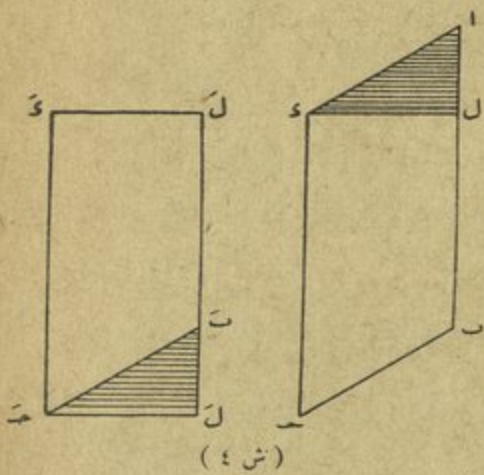
(٥) دهنت جدران حجرة مستطيلة الشكل فتكلفت ٢٦٥٫٥ قرش ، فما تكاليف المتر المربع إذا علم أن ارتفاع الحجرة ٤٫٥ متر وطولها ٦ أمتار وعرضها ٥ أمتار وبها باب عرضه ١ $\frac{٤}{٥}$ متر وارتفاعه ٢ $\frac{١}{٢}$ من الأمتار وبها أيضاً ٣ نوافذ عرض الواحدة منها متر وارتفاعها متران .

٣٥ — متوازى الأضلاع : سطح مستو محدود بأربعة مستقيمات كل اثنين متقابلين منها متوازيان متساويان .

و إذا اعتبرنا أحد الأضلاع قاعدة له كان البعد العمودى بينه و بين الضلع الذى يوازيه ارتفاعاً لمتوازى الأضلاع .

مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه

لإثبات ذلك عملياً :



(ش ٤)

اقطع من الورق المقوى القليل السمك متوازى أضلاع مثل ا ب حـ ء ثم ارسم ارتفاعه ء ل اقطع المثلث ا ء ل وافصله عن باقى الشكل ثم ضعه فى امتداد الشكل من الجهة الأخرى بحيث ينطبق ا ء على ب حـ — تجد أن متوازى الأضلاع يتحول إلى مستطيل . ومساحة هذا المستطيل هى نفس مساحة متوازى الأضلاع الأصلى لأن مساحة الشكل لا تتغير بتغير موضع جزء منه — وعلى هذا تكون مساحة متوازى الأضلاع تساوى طول قاعدته فى ارتفاعه فإذا فرض أن طول قاعدة متوازى الأضلاع = ل سم وارتفاعه = ع سم فإن مساحته تساوى ل × ع سم^{٢}

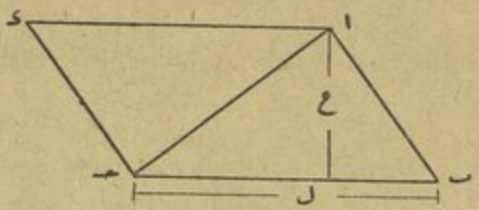
(مثال ٣) قطعة أرض على شكل متوازى الأضلاع طول قاعدته ١٥٠ ياردة وارتفاعه ١٨ ياردة ، فما مساحتها ؟

العمـــل

المساحة = ١٥٠ × ١٨ = ٢٧٠٠ ياردة مربعة

٣٦ — مساحة المثلث :

مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه . لإثبات ذلك عملياً :



(ش ٥)

اقطع من الورق المقوى القليل السمك متوازى أضلاع واقسمه إلى قسمين على اتجاه أحد قطريه وطبق أحد المثلثين الناتجين على الآخر تجد أنه ينطبق عليه تمام الانطباق :

وعلى هذا تكون مساحة المثلث تساوى نصف مساحة متوازى الأضلاع المتحد معه فى القاعدة والارتفاع . ولما كانت مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه ينتج أن مساحة المثلث تساوى نصف القاعدة فى الارتفاع

فإذا فرض أن طول القاعدة ل سم والارتفاع يساوى ع سم فمساحة المثلث

$= \frac{1}{2}$ ل × ع سم^2 .

(مثال ٤) ما مساحة المثلث الذى طول قاعدته $7\frac{1}{2}$ سم وارتفاعه ٤ سم .

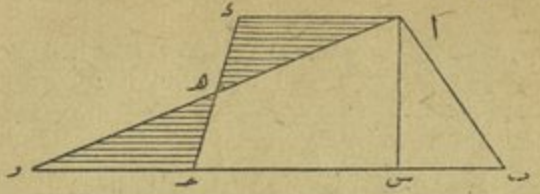
العمـــل

المساحة $= \frac{1}{2} \times 7\frac{1}{2} \times 4 = 15$ سم^2

٣٧ شبه المنحرف سطح مستو محدود بأربعة مستقيمات منها اثنان متوازيان و إذا اعتبرنا أحد الضلعين المتوازيين قاعدة لشبه المنحرف كان البعد العمودى بينهما ارتفاعا له .

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف مجموع طولى قاعدتيه فى ارتفاعه .

لإثبات ذلك عملياً :



(ش ٦)

نرسم شبه المنحرف ا ب حـ ء ونمد القاعدة ب حـ إلى و بحيث يكون حـ و مساوياً ا ء وتصل ا و فيقطع حـ ء فى هـ مثلا . فلو قطعنا المثلث ا ء هـ لأمكن تطبيقه تماماً على المثلث هـ حـ و وتكون مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ء تساوى مساحة المثلث ا ب و . فإذا أسقطنا العمود ا سـ على ب و كانت مساحة المثلث ا ب و تساوى نصف ب و × ا سـ

وحيث أن ا ء = حـ و بالرسم تكون مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ء التى تساوى مساحة المثلث ا ب و وتساوى $\frac{1}{2}$ ا س فى مجموع ب حـ ، حـ و

تساوى $\frac{1}{2}$ ا س فى مجموع ب حـ ، ا ء

تساوى $\frac{1}{2}$ الارتفاع فى مجموع القاعدتين .

(مثال ٥) ما مساحة شبه المنحرف الذى طولا قاعدتيه ٨ ، ١٠ من الأمتار وارتفاعه ١٥ متراً ؟

العمـــل

المساحة المطلوبة = $\frac{1}{2}$ × ١٥ (٨ + ١٠) متراً مربعاً

= ١٣٥ متراً مربعاً

٣٨ — المعين سطح مستو محدود بأربعة مستقيمات متساوية .

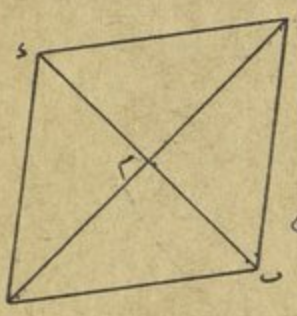
مساحة المعين تساوى حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه ، كما أنها تساوى $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه .

البرهان

أولاً — بما أن المعين هو متوازى أضلاع ، أضلاعه متساوية — إذن تكون مساحة المعين هى نفس مساحة متوازى الأضلاع ، أى تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه .

ثانياً — بما أن خواص المعين أن يكون قطراه متعامدين .

∴ مساحة المعين ا ب حـ ء ، إذا علم قطراه تساوى ضعف المثلث ا ب حـ



(ش ٧)

تساوى ٢ × ½ ا حـ × ب م

= ½ ا حـ × ٢ ب م

= ½ ا حـ × ب ء

= ½ حاصل ضرب طولى القطرين

ملاحظة :

∴ المربع حالة خاصة من المعين

فتكون مساحته أيضاً تساوى نصف حاصل ضرب قطريه

تساوى ½ مربع قطره (لأن قطرى المربع متساويان)

(مثال ٦) ما مساحة المعين الذى مجموع طولى قطريه ٣٠ متراً وطول أحدهما نصف الآخر ؟

العمل :

∴ مجموع طولى القطرين = ٣/٢ من أطولهما = ٣٠ متراً

∴ أطول القطرين = ٣٠ × ٢/٣ = ٢٠ متراً

∴ طول الآخر = ½ × ٢٠ = ١٠ أمتار

∴ المساحة = ½ × ٢٠ × ١٠ = ١٠٠ متر مربع

تمرين ١٠

(١) ما هو الفرق بين مساحة معين قطراه ٦٤ ، ٤٨ متراً ومساحة متوازى أضلاع قاعدته ٥٢ متراً وارتفاعه ٦١ متراً ؟

(٢) شبه منحرف مساحته ٤٨٠ متراً مربعاً وارتفاعه ١٦ متراً فما طول قاعدته السفلى إذا كان طول العليا ٢٣ متراً ؟

(٣) ا ب حـ ء شبه منحرف قائم فيه حـ ء عمود على القاعدتين المتوازيتين ب حـ ، ا ء فإذا كانت مساحة الشكل ٦٠ متراً مربعاً وطول قاعدتيه ٨و١٢ مترا ، ٢و٧ مترا ثم وصل القطر ب ء فما مساحة المثلث ا ب ء ؟

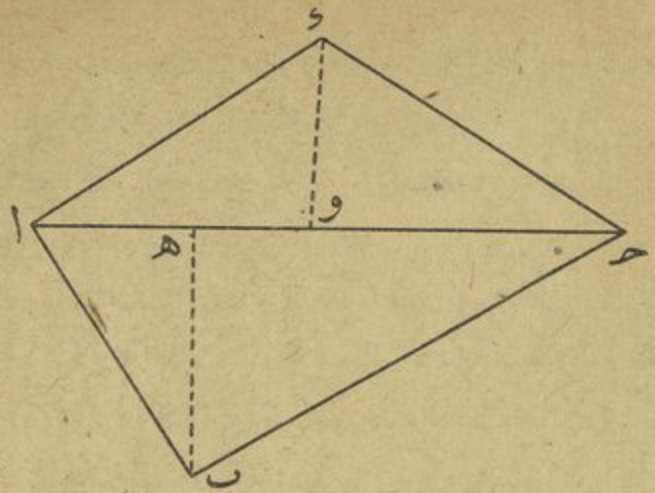
(٤) ا ب حـ ء شبه منحرف فيه ا ب يوازى حـ ء . فإذا كان طول ا ب ٦و٣ سم وطول حـ ء = ٥و٦ سم وقسم ا ب فى هـ بحيث كان ا هـ : هـ ب = ٢ : ٥ وقسم ء حـ فى و بحيث ء و : و حـ = ٣ : ٤ فما مساحة كل من الشكلين ا هـ و ء ، هـ ب حـ و إذا علم أن مساحة شبه المنحرف ا ب حـ ء = ١٨و٢٦ سم٢ ؟

٣٩ — مساحة أى شكل كثير الأضلاع تساوى مجموع مساحات المثلثات التى يمكن تقسيمه إليها .

وكذلك مساحة أى شكل كثير الأضلاع تساوى مجموع مساحات المثلثات القائمة الزاوية وأشباه المنحرفات التى يمكن تقسيمه إليها بإنزال أعمدة من رؤوسه على أحد أقطاره باعتباره قاعدة لكل من الأشكال الحادثة ، وإليك الأمثلة :

(مثال ٧) فناء على صورة الشكل الرباعى ا ب حـ ء رسم بمقياس سنتيمتر لكل ٥ أمتار فكان طول القطر ا حـ = ٢و٨ سم والعمود النازل عليه من ب = ٣و٤ سم والعمود النازل عليه أيضاً من ء = ٦و٢ سم والمطلوب إيجاد مساحة الفناء المذكور .

العمـــل



(٢٧)

∴ طول القطر ا حـ = ٥ × ٨٫٢ = ٤١ متراً

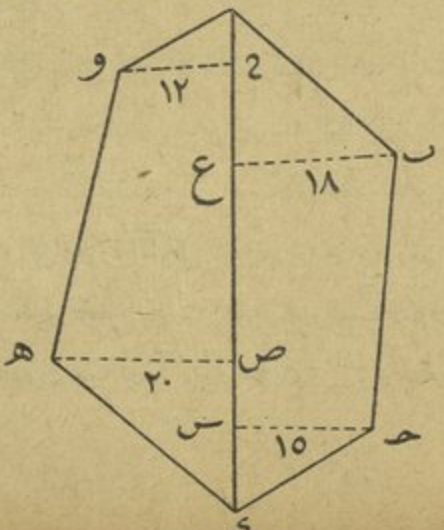
، العمود ب هـ = ٥ × ٣٫٤ = ١٧ متراً

، العمود ء و = ٥ × ٢٫٦ = ١٣ متراً مربعاً

∴ المساحة = $\frac{١}{٢}$ × ٤١ × (١٧ + ١٣) متراً مربعاً

= ٦١٥ متراً مربعاً

(مثال ٨) أوجد مساحة الحقل ا ب حـ ء هـ و من الأقيسة التى فى الجدول الآتى :



(٢٨)

	ء ا = ٥٦ متراً	
	ء د = ٥٠ متراً	د و = ١٢ متراً
ع ب = ١٨ متراً	ء ع = ٤٠ متراً	
	ء صـ = ١٨ متراً	صـ هـ = ٢٠ متراً
سـ حـ = ١٥ متراً	ء سـ = ١٠ متراً	

العمـــل

المثلث ا د و = $\frac{١}{٢}$ ا د × د و

= $\frac{١}{٢}$ (٥٦ — ٥٠) × ١٢ متراً مربعاً

= ٣٦ متراً مربعاً

المثلث ا ب ع = $\frac{١}{٢}$ ا ع × ع ب

= $\frac{١}{٢}$ × (٥٦ — ٤٠) × ١٨ متراً مربعاً

= ١٤٤ متراً مربعاً

المثلث ء صـ هـ = $\frac{١}{٢}$ ء صـ × صـ هـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٢٠ متراً مربعاً

= ١٨٠ متراً مربعاً

المثلث ء سـ حـ = $\frac{١}{٢}$ ء سـ × سـ حـ

= $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ١٥ متراً مربعاً

= ٧٥ متراً مربعاً

شبه المنحرف هـ و د صـ = $\frac{١}{٢}$ صـ د (صـ هـ + م هـ)

= $\frac{١}{٢}$ × (٥٠ — ١٨) × (٢٠ + ١٢)

= ٥١٢ متراً مربعاً

شبه المنحرف ب حـ سـ ع = $\frac{١}{٢}$ سـ ع (سـ حـ + ع ب)

= $\frac{١}{٢}$ × (٤٠ — ١٠) × (١٥ + ١٨)

= ٤٩٥ متراً مربعاً

بالجمع يحدث أن مساحة الشكل ا ب ح ء هـ و

= ٣٦ + ١٤٤ + ١٨٠ + ٧٥ + ٥١٢ + ٤٩٥

= ١٤٤٢ متراً مربعاً

تمرين ١١

(١) فناء على صورة الشكل الرباعى ا ب ح ء رسم بمقياس سنتيمتر لكل ٥ أمتار فكان فى الرسم طول القطر ا ح ١و٤ سم والعمود النازل عليه من ب ٧و١ سم وطول العمود النازل عليه من ء ٣و١ سم فما مساحة هذا الفناء ؟

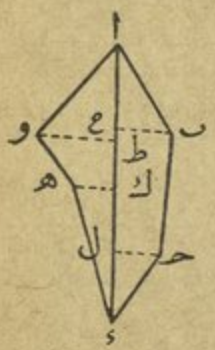
(٢) فى الشكل الرباعى ا ب ح ء طول ا ح ٤١ متراً وطول العمودين النازلين على ا ح من ب ، ء ١٧ ، ١٣ متراً على التناظر فما مساحة الشكل ؟

(٣) أوجد مساحة الشكل ا ب ح ء هـ و من الأقيسة التى فى الجدول الآتى :

(شكل ١٠)

متراً	متراً	متراً
	ا هـ = ٨٠	
	ا ع = ١٥٠ ع ء = ٨٠	
ص و = ٥٠	ا ص = ١٢٠ ص ح = ٥٠	
	ا س = ٥٠ س ب = ٤٠	

(٤) أوجد مساحة الشكل ا ب ح ء هـ و من الأقيسة التى فى الجدول الآتى :



(شكل ١١)

متراً	متراً	متراً
	ا ء = ٣٨	
ل ح = ٧	ا ل = ٢٨	
	ا ك = ٢٠ ك هـ = ٦	
	ا ط = ١٤ ط و = ١١	
ب ح = ٨	ا ع = ١٢	

٤٠ - الدائرة

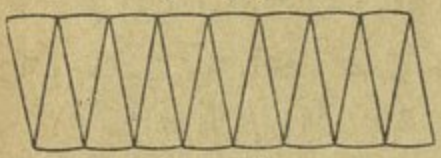
(ا) النسبة التقريبية : ارسم دائرة ثم قس محيطها وقطرها ثم اقسم المحيط على القطر ثم كرر هذه العملية فى دوائر مختلفة تجد أن خارج القسمة يساوى نسبة ثابتة يرمز لها بالرموز « ط » وقيمتها التقريبية ١٤و٣ أو $\frac{٢٢}{٧}$ وعلى هذا يكون طول محيط الدائرة = ٢ ط × نصف قطرها فإذا رمزنا لنصف القطر بالرمز نق كان طول محيط الدائرة = ٢ ط نق

(ب) مساحة الدائرة تساوى نصف القطر فى نصف المحيط . وكذلك تساوى مربع نصف القطر فى النسبة التقريبية .

لإثبات ذلك عملياً :

(ش ١٢)

إقطع قرصاً من الورق المقوى وقسمه إلى عدد زوجى من المثلثات الصغيرة المتساوية كما فى شكل ١٢ ثم افصل هذه المثلثات بعضها عن بعض وركبها كما فى شكل ١٣ تجد أن الشكل الحادث متوازى الأضلاع تقريباً قاعدته نصف



(ش ١٣)

محيط الدائرة وارتفاعه نصف قطرها تقريباً ومساحته تساوى مجموع مساحات المثلثات المكونة لسطح الدائرة .

∴ مساحة الدائرة = نصف القطر × نصف المحيط .

$$= نق \times \frac{١}{٢} \times ٢ ط نق$$

$$= نق \times ط \times نق$$

$$= ط نق^{٢}$$

(مثال ٩) أوجد مساحة الأجزاء المظللة فى الشكل الذى هو عبارة عن دائرة تمر برؤوس مربع طول قطره ٧ سم

العمـــــل

قطر الدائرة = قطر المربع = ٧ سم

مساحة الدائرة = ط نق^{٢} = $\frac{٢٢}{٧} \times \frac{٧}{٢} \times \frac{٧}{٢}$ سم^{٢}

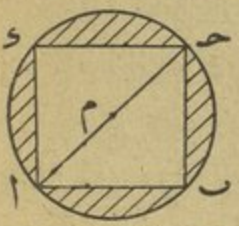
= $\frac{١٥٤}{٤}$ سم^{٢} = ٣٨$\frac{١}{٢}$ سم^{٢}

مساحة المربع = $\frac{١}{٢} \times ٧ \times ٧$ سم^{٢}

= $\frac{١}{٢}$ ٢٤ سم^{٢}

مساحة الأجزاء المظللة = ٣٨$\frac{١}{٢}$ — $\frac{١}{٢}$ ٢٤ سم^{٢}

= ١٤ سم^{٢}



(ش ١٤)

تمرين ١٢

(١) ما مساحة الدائرة التى طول محيطها ١٢٫٥٦ من الأمتار (ط = ٣٫١٤)؟

(٢) أوجد مساحة السطح المحصور بين محيطى دائرتين متحدتى المركز نصف قطر إحداهما ١١٫٤ سم ونصف قطر الأخرى ٨٫٦ سم (ط = ٣٫١٤)

(٣) حلبة سباق دائرية الشكل محصورة بين دائرتين قطراهما ٣٠٣٫٥٠٥ من الأمتار وبوسط قطعة الأرض المحيطة بها الحلبة بركة مستديرة مساحتها كمساحة الحلبة ، أوجد مساحة هذه البركة وطول قطرها (ط = ٣٫١٤)

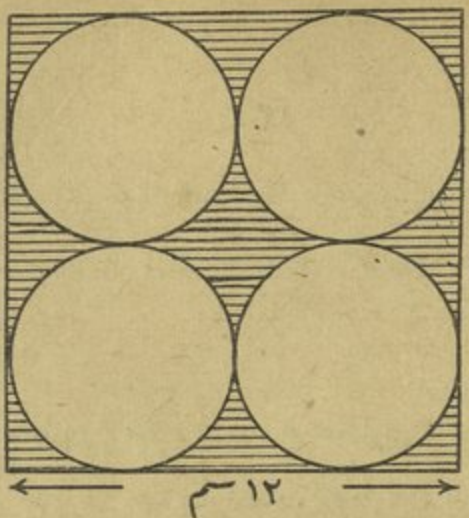
(٤) أوجد مساحة الجزء المظلل فى الشكل الآتى :

(ط = ٣٫١٤)

(ش ١٥)

(٥) أوجد مساحة الجزء المظلل فى الشكل الآتى :

ط = ٣و١٤

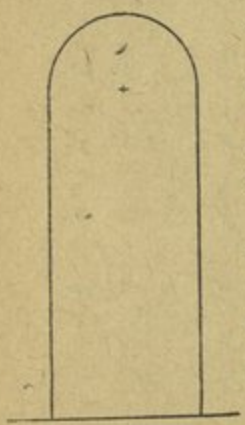


(ش ١٦)

(٦) سور مربع يمس بركة مستديرة الشكل ، فإذا كان طول السور ١٤ قصبة فما مساحة الأرض الموجودة داخل السور (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

(٧) حديقة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ م وعرضها ٥٠م وترك حولها ممر عرضه ٣ أمتار وغرست فى الباقى شجيرات الأزهار فى ثلاث قطع مستديرة الشكل أقطارها ٨ و ١٦ و ٢٤ و مترا ويحيط بهذه القطع نوع من الحشائش فما مساحة الجزء المنزرع حشائش (ط = ٣و١٤) ؟

(٨) شباك شكله عبارة عن مستطيل يعلوه نصف دائرة كما فى الشكل المبين ، فإذا علم أن عرض الشباك ٣ أقدام وأكبر ارتفاع له ٨ أقدام ، فما مساحته (ط = ٣و١٤) ؟



(ش ١٧)

مسائل منوعة على المساحات

تمرين ١٣

(١) ا ب ح مثلث رسم فيه ا ء عمودا على ب ح ، رسم ب هـ عمودا على ا ح فإذا كان ب ح = ١٦ سم ، ا ح = ١٢ سم ، ا ء = ٩ سم فأوجد طول ب هـ

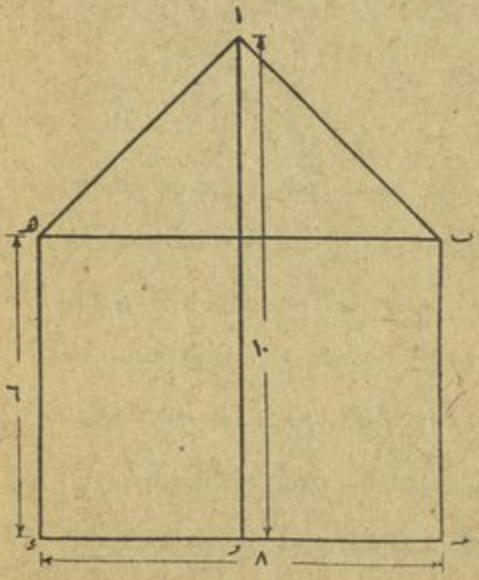
(٢) ا ب ح ء متوازى الأضلاع ، رسم ا هـ عمودا على ب ح (أو امتداده) ورسم ا ك عمودا على ح ء (أو امتداده) فإذا كان ا ب = ١٢ سم ، ب ح = ٨ سم ، ا هـ = ٩ سم فأجد طول ا ك

(٣) أوجد مساحة الشكل ا ب ح ء هـ مع العلم بأن :

ا و = ١٠ سم

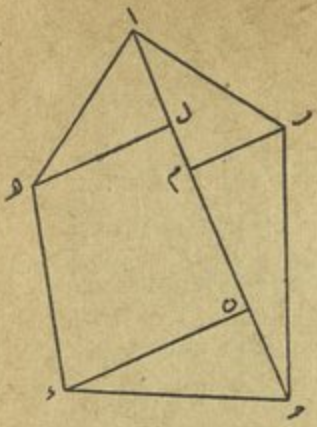
ء هـ = ٦ سم

ح ء = ٨ سم



(ش ١٨)

(٤) أوجد مساحة الشكل ا ب ح ء هـ من الأقيسة التى فى الجدول الآتى :



(ش ١٩)

	متر	متر	متر
ا ب	٢	ا ح	٨
ا ج	٦	ج ء	٤
ا ل	٢	ل هـ	٣

(٥) حجرة طولها ٦ أمتار و ٤٠ سنتيمتراً وعرضها أربعة أمتار ونصف متر . عملت فى أرضها حافة بعرض نصف متر من جميع الجوانب ودهنت بدهان يتكلف المتر المربع منه ٨ قروش ثم دهن الجزء الأوسط الباقى بدهان يتكلف المتر المربع منه ٦ قروش أوجد تكاليف دهان أرض الغرفة كلها .

(٦) غرفة طولها ٧ أمتار وعرضها ٥ أمتار . رسمت فى وسطها دائرة قطرها ثلاثة أمتار ونصف ودهنت الدائرة بدهان يتكلف المتر المربع منه ٨ قروش ودهن الجزء الباقى بدهان يتكلف المتر المربع منه ١٢ قرشاً أوجد تكاليف دهان أرض الغرفة كله (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٧) غرفة طولها ٨ أمتار ، ٤٠ سم وعرضها ٥ أمتار ، ٦٠ سم فرشت ببساط عرضه ١٢٠ سم وثمن المتر منه ٧٥ قرشاً . أوجد تكاليف فرش الغرفة بهذا البساط مع العلم بأن أجرة خياطة البساط بلغت ١ ٪ من ثمنه .

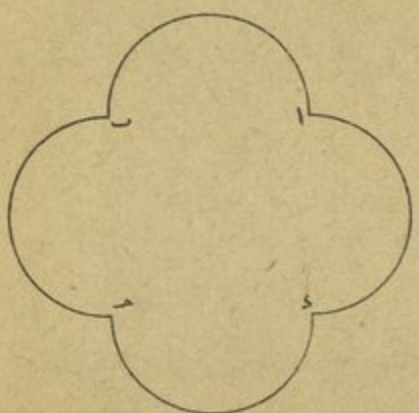
(٨) غرفة طولها ٦ أمتار وعرضها ٤ أمتار و ٥٠ سم فرشت ببساط عرضه ٥٠ سم وثمن المتر منه ٣٥ قرشاً . فإذا بلغت أجرة خياطة هذا البساط ٢٠ قرشاً فكم بلغت تكاليف فرش الغرفة بهذا البساط ؟

(٩) حجرة مستطيلة الشكل طولها ٥ أمتار وعرضها ٤ أمتار وارتفاعها ٣ أمتار بها نافذتان عرض كل منهما متر واحد وارتفاع كل منهما ١٫٥ متر وبها ٣ أبواب عرض كل منها ١٢٠ سم وارتفاع كل منها ٢٫٥ متر ، يراد تغطية جدرانها بالورق الذى عرضه ٤٠ سم وثمن المتر منه ٢٠ قرشاً أوجد مقدار ماتبلغه التكاليف إذا علم أن النوافذ لا تغطى بالورق .

(١٠) حجرة طولها ٢٥ قدماً و ٧ بوصات ، وعرضها ١٦ قدماً و ٩ بوصات وارتفاعها ٤٫٥ من الياردات وبها ثلاث نوافذ طول كل منها ٥ أقدام وعرضه ٣ أقدام و ٦ بوصات وبها باب طوله ٧ أقدام وعرضه ٤ أقدام وبها موقد للتدفئة مستطيل الشكل بعداه ٥ أقدام و ٣ أقدام غطيت جدرانها بالورق الذى عرضه $\frac{5}{8}$ ياردة والذى ثمن الياردة منه ٤٫٥ بنس أوجد بالنقود الإنجليزية مبلغ تكاليف توريق الحجرة إذا علم أن الفتحات لا تغطى بالورق .

(١١) ا ب حـ ء شبه منحرف فيه ا ء // ب حـ متوازيان وطول ا ء = ٦ سم ، ب حـ = ١٦ سم ومساحة الشكل كله ٤٩٫٥ سنتيمتراً مربعاً فإذا رسم ا هـ موازياً ء حـ وقاطعاً ب حـ فى هـ فأوجد مساحة المثلث ا ب هـ

(١٢) أوجد مساحة الشكل المرسوم بعد مع العلم بأن ا ، ب ، حـ ، ء رءوس مربع طول ضلعه ٢٥ سم وأن ط = ٣٫١٤



(ش ٢٠)

الباب الثالث

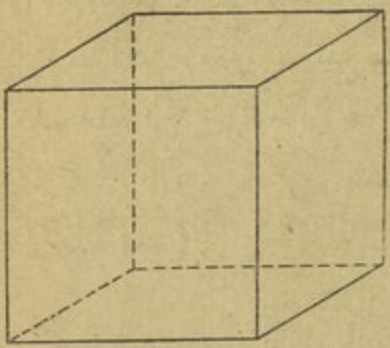
الحجـــوم

٤١ — وحدة الحجوم العلمية هى السنتيمتر المكعب وهو حجم مكعب طول ضلعه سنتيمتر .

والوحدة العملية التى تختار عادة هى السنتيمتر المكعب للحجوم التى تقل عن متر مكعب كما يختار المتر المكعب للحجوم التى تزيد عليه .

٤٢ — حجم المكعب = مكعب طول أحد الأضلاع .

فمثلا إذا كان طول ضلع المكعب المبين فى الشكل ١٠ سم فيكون حجمه $١٠^{٣}$ = ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب .



مكعب
(ش ٢١)

وعلى العموم إذا كان طول ضلع المكعب ل سم فإن حجمه = $ل^{٣}$ سم^{٣}

ملاحظة : المكعب الذى ضلعه ١٠ سم عبارة عن ديسيمتر مكعب وتسمى سعة الديسيمتر المكعب «لترا» وهو وحدة المكاييل المستعملة فى مصالح الحكومة المصرية .

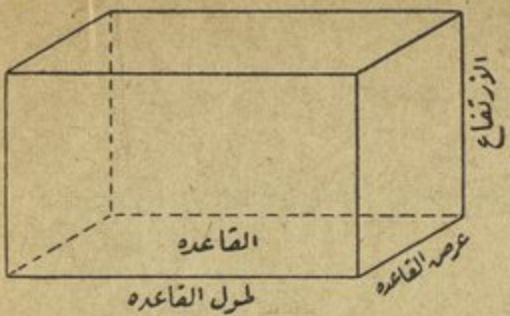
(مثال ١) أوجد حجم المكعب الذى طول ضلعه ٣٩ سم

العمـــل

حجم المكعب = ٣٩ × ٣٩ × ٣٩ سم^{٣} .

= ٥٩٣١٩ سم^{٣}

٤٣ — حجم متوازى المستطيلات يساوى مساحة القاعدة فى الارتفاع



(ش ٢٢)

فإذا فرض أن ارتفاع متوازى المستطيلات المبين فى الشكل ٨ سم وطول قاعدته ١٥ سم وعرضها ٦ سم فيكون حجمه

٨ × ١٥ × ٦ = ٧٢٠ سم^{٣}

وعلى العموم إذا كان ارتفاع متوازى المستطيلات ع سم وطول قاعدته = ل سم وعرضها م سم كان حجمه ع × ل × م سم^{٣}

(مثال ٢) كم متراً مكعباً تسع حجرة على شكل متوازى المستطيلات أبعادها ١٢ ، ١٨ ، ٦ $\frac{١}{٢}$ من الأمتار ؟

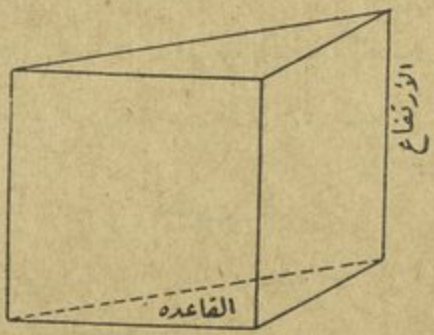
العمـــل

حجم الحجرة = سعتها .

= ١٢ × ١٨ × ٦ $\frac{١}{٢}$ متراً مكعباً .

= ١٤٠٤ أمتار مكعبة .

حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع .

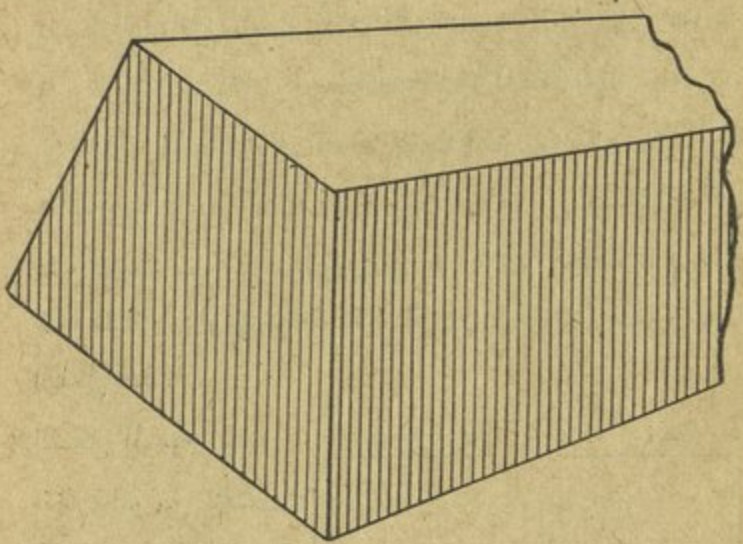


(ش ٢٣)

(مثال ٣) إذا اعتبرنا أن قنطرة خزان أسوان جسم منشورى مصمت لا عيون فيه طوله كيلومتران ، وارتفاعه $\frac{1}{2}$ ٢٨ من الأمتار ؟ وعرضه من أعلى $\frac{1}{2}$ ٤ أمتار ، ومن الأسفل $\frac{1}{2}$ ٢٤ من الأمتار ، فما حجم ما يحتويه من البناء ؟

العمـــل

نعتبر طول الخزان ارتفاعا للمنشور ، كما نعتبر إحدى نهايتى الخزان قاعدة المنشور وشكلها كما هو موضح من المعلومات شبه منحرف .



(ش ٢٤)

∴ طولا الضلعين المتوازيين لقاعدة المنشور = $\frac{1}{2}$ ٤ ، $\frac{1}{2}$ ٢٤ من الأمتار والبعد بينهما $\frac{1}{2}$ ٢٨ من الأمتار .

∴ مساحة القاعدة = $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ ٤ + $\frac{1}{2}$ ٢٤) × $\frac{1}{2}$ ٢٨ متراً مربعاً .

∴ حجم البناء = $\frac{1}{2}$ × ٢٩ × $\frac{1}{2}$ ٢٨ × ٢٠٠٠ متر مكعب .

= ٨٢٦٥٠٠ متر مكعب .

تمرين ١٤

(١) كم لتراً من الماء تملأ حوضاً على شكل متوازى المستطيلات طوله $\frac{1}{2}$ ١٠ متراً وعرضه ٢٫٢٥ متراً وعمقه ٢٫٧٥ متراً ؟

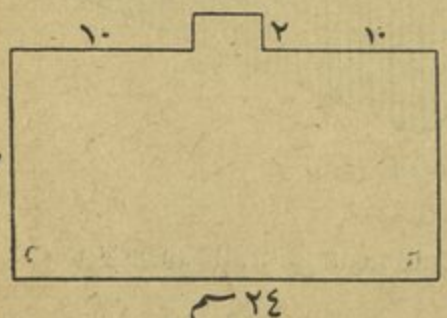
(٢) إناء على شكل متوازى المستطيلات مفتوح من أعلى يسع ٢٦٫٢٥ لتراً من الماء فإذا علم أن بعدى قاعدته من الداخل ٢٥ ، ٣٠ من السنتيمترات فما ارتفاعه من الداخل ؟

(٣) منشور ثلاثى قائم قاعدته مثلث قائم الزاوية طولا ضلعى القائمة فيه ٦ ، ٨ من السنتيمترات وحجمه ٣٦٠ سم^{٣} فما ارتفاعه ؟

(٤) كم قالباً من الحجر تلزم لبناء حائط طوله ١٦ متراً وسمكه $\frac{3}{4}$ متر وارتفاعه ٤ أمتار إذا كانت أبعاد القالب ٥٠ ، ٢٠ ، ٢٠ من السنتيمترات ؟

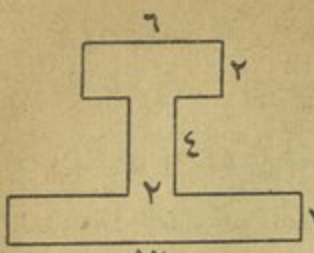
(٥) علبة كبريت تسع ٧٠ عوداً طول كل عود ٥ سم ومقطعه مربع ، طول ضلعه ملليمتران ؛ أوجد سعة العلبة مع العلم بأن الكبريت يشغل $\frac{7}{8}$ فضائها الداخلى فقط .

(٦) الشكل المرسوم يمثل مقطع قطعة من الخشب طولها متران أوجد وزن هذه القطعة إذا كان وزن السنتيمتر المكعب منها ٩٫٠ جرام .



(ش ٢٥)

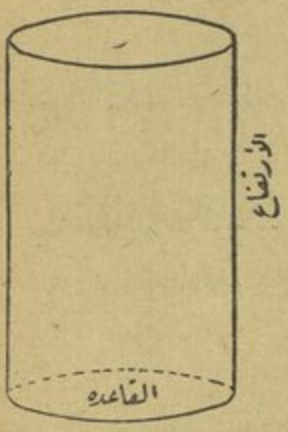
(٧) الشكل الآتى يمثل مقطع قضيب من الصلب . أوجد وزن ١٠٠ متر من هذا القضيب إذا علم أن وزن السنتيمتر المكعب ٨ جم (الأبعاد مبينة على الرسم بالسنتيمترات) .



(ش ٢٦)

حجم الاسطوانة القائمة يساوى مساحة القاعدة فى الارتفاع .

فإذا فرض أن طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة المبينة فى الشكل ٧ سم وارتفاع الاسطوانة ٢٥ سم كان حجمها $\frac{٢٢}{٧} \times ٧^{٢} \times ٢٥ = ٣٨٥٠$ سم^{٣}



(ش ٢٧)

وعلى العموم إذا كان طول نصف قطر قاعدتها نق سم وكان ارتفاع الاسطوانة ع سم كان حجمها ط نق^{٢} × ع سم^{٣}

(مثال ٤) كم متراً مكعباً تلزم لردم بئر أسطوانية الشكل ارتفاعها ١٦ متراً وقطر قاعدتها ٢٫٥ من الأمتار مع العلم بأن ط = ٣٫١٤٢

العمـــل

حجم البئر = مساحة القاعدة × الارتفاع .

= ط نق^{٢} ع

= ٣٫١٤٢ × $\frac{٥}{٤}$ × $\frac{٥}{٤}$ × ١٦ متراً مكعباً .

= ٧٨٫٥٥ من الأمتار المكعبة .

وهو المقدار اللازم لردم البئر .

٤٤ — حجم الكرة = حاصل ضرب $\frac{٣}{٤}$ ط × مكعب نصف القطر

أى = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣}

(مثال ٥) كرة من الحديد قطرها ٦ بوصات وضعت فى إناء اسطوانى الشكل قطر قاعدته قدم واحدة به كمية من الماء فإذا غمرت الكرة تماما تحت سطح الماء فما مقدار زيادة ارتفاع الماء فى الإناء ؟

العمـــل

حجم الكرة = حجم الماء الذى حلت محله

« « = $\frac{٤}{٣}$ ط نق^{٣} = $\frac{٤}{٣}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢٧ بوصة مكعبة .

مساحة قاعدة الإناء الاسطوانى = $\frac{٢٢}{٧}$ × ٦ × ٦ بوصة مربعة

زيادة ارتفاع الماء = ٤ × ٢٢ × $\frac{٩}{٧}$ × $\frac{٧}{٦ \times ٦ \times ٢٢}$ بوصة = ١ بوصة

تمرين ١٥

(١) أوجد حجم أسطوانة قطرها ١٢ سم وارتفاعها ٢١ سم .

(٢) إناء مكعب الشكل طوله ٢٠ سم وضع فيه مقدار من الماء ثم غمرت فيه أسطوانة من النحاس قطر قاعدتها ٨ سم وارتفاعها ٦ سم فارتفع الماء إلى آخر الإناء فكم لتراً مقدار الماء الذى وضع فى الإناء ؟

(٣) بالون كروى قطره ٢١ قدما . أوجد حجمه (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .

(٤) أوجد النسبة بين حجم كرة وحجم أسطوانة مع العلم بأن كلا من قطر الأسطوانة وارتفاعها يساوى قطر الكرة يساوى ٥ سم مثلا .

(٥) إذا علمت أن النسبة بين قطر الأرض وقطر القمر هى ١١ : ٣ فما النسبة بين حجميهما ؟

(٦) إذا اتحد نصف كرة واسطوانة فى القاعدة والارتفاع فما النسبة بين حجميهما ؟

(٧) كم كرة من الرصاص ، قطر كل منها سنتيمتر ، يمكن صنعها من قرص قطره ١٢ سم وسمكه ٣ سم ؟

(٨) كم متراً مكعباً من غاز الاستصباح تملأ مستودعا غازياً اسطوانياً قطره ١٢٫٦ متراً وارتفاعه ١٢ متراً (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

(٩) ما حجم اسطوانة نصف قطر قاعدتها ٥٫٣٢ سم وارتفاعها ٨٫٤ سم (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

(١٠) أوجد حجم اسطوانة محيط دائرة قاعدتها ٣٫٠٨ متراً وارتفاعها ١ $\frac{١}{٢}$ متر (ط = $\frac{٢}{٧}$) ؟

(١١) ما ارتفاع الاسطوانة التى حجمها ٦٩٫٣ من الديسيمترات المكعبة وقطر قاعدتها ٤٢ سم (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

تمرين ١٦

تمارين متنوعة على الحجوم

(١) ما عمق الخندق اللازم حفره حول قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ٨٠ ياردة وعرضها ٦٠ ياردة إذا كان عرضه ٩ أقدام وأريد أن يوضع ما يستخرج منه على سطح هذه القطعة ليرفع مستواها بقدر ٣٫٧ بوصة ؟

(٢) إناء اسطوانى الشكل فيه مقدار من الماء أضيف إلى ما فيه ٢٧ لتراً فامتلأ الإناء فإذا كان قطر قاعدته ٧٥ سم ومقدار الماء الذى وضع فيه يساوى $\frac{٣}{٨}$ مقدار ما كان فيه أولاً فما ارتفاع هذا الإناء ؟ (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

(٣) ماسورة من الرصاص طولها ٣ أمتار ، ونصف قطرها الخارجى ٧ $\frac{١}{٢}$ سم وسمكها $\frac{١}{٢}$ سم أوجد وزنها مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من الرصاص ١١٫٢ جم (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .

(٤) حوض على شكل متوازى المستطيلات طوله ٥ أقدام وعرضه ٤ أقدام وارتفاعه $\frac{٢}{٣}$ ٣ قدم وضع به ١١٠ قوالب من الطوب ثم صب فيه ماء حتى وصل سطح الماء إلى حافة الحوض . فإذا كان الطوب يمتص $\frac{١}{١١}$ من حجمه وكانت أبعاد كل قالب ٩ بوصات و ٣ بوصات و $٢\frac{٢}{٣}$ بوصة فما مقدار الماء الذى صب فى الحوض ؟

(٥) إناء من النحاس على شكل نصف كرة لا قاعدة لها قطرها الخارجى قدم واحدة وسمكها بوصة . أوجد وزن الإناء إذا كان وزن البوصة المكعبة من النحاس $٥\frac{١}{٤}$ أوقية (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .

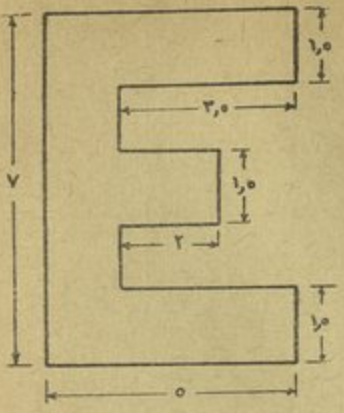
(٦) حوض على شكل متوازى مستطيلات طول قاعدته ٤٩ بوصة وعرضها $١٤\frac{٢}{٣}$ بوصة به كمية من الماء غمرت فيها كرة من الحديد قطرها ١٤ بوصة والمطلوب معرفة مقدار ما ارتفعه سطح الماء فى الإناء من وضع الكرة فيه (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .

(٧) منشور قائم مصنوع من الخشب ارتفاعه ٤٥ سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ٢٥ سم و ١٦ سم أوجد وزن المنشور مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من الخشب المصنوع منه ٠٫٦ من الجرام .

(٨) جسم على شكل اسطوانة دائرية قائمة ، مركب عليها نصف كرة تتحد قاعدتها مع قاعدة الاسطوانة فإذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة ٢٫٤ من الأقدام وارتفاع الاسطوانة ٨٫٥ من الأقدام . فأوجد حجم الجسم (ط = ٣٫١٤) .

(٩) حلقة من الحديد نصف قطرها الداخلى ٨٫٥ سم ونصف قطرها الخارجى ١٠٫٥ سم وسمكها ٣ سنتيمترات أوجد وزن الحلقة مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من الحديد ٧٫٥ من الجرامات (ط = ٣٫١٤) .

(١٠) عمل حرف E من الخشب الذى وزن السنتيمتر المكعب منه ٠٫٧٥ من الجرام فإذا كانت أبعاد قاعدة الحرف بالسنتيمترات كما هو مبين فى الشكل وسمك الحرف $\frac{1}{2}$ سم فأوجد وزنه .



(ش ٢٨)

(١١) كرة مجوفة من النحاس نصف قطرها الداخلى ١٠٫٥ سم ونصف قطرها الخارجى ١٤ سم أوجد وزنها مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من النحاس ٨٫٨ (ط = $\frac{22}{7}$) .

(١٢) اسطوانة من النحاس نصف قطر قاعدتها ١٧٫٥ سم وارتفاعها ٢٠ سم صهرت وعملت كرات من النحاس نصف قطر كل منها ٢٫٥ سم أوجد عدد الكرات الناتجة .

الباب الرابع

٥٤ — تطبيقات متنوعة على الجذرين التربيعى والتكعيبى فى المساحات والحجوم السابقة

(لاحظ أن $٧١^{٢} = ٥٠٤١$)

(مثال ١) حديقة مربعة الشكل مساحتها ٣٠ فداناً يراد إحاطتها بسور من الخشب . فكم متراً يكون طول هذا السور ؟

العمـــل

الجواب إجمالا $= \sqrt{٣٠ \times ٤٠٠٠}$ ٧ ٤ متراً

$= \sqrt{١٢٠٠٠٠}$ ٧ ٤ »

$= ٣٠٠ \times ٤$

$= ١٢٠٠$ متر ويجب أن يكون الجواب أكبر من ذلك

∴ المساحة $= ٣٠ \times \frac{٢٥٢٠٥}{٦} = ١٢٦٠٢٥$ متراً مربعاً

∴ طول ضلع المربع $= \sqrt{١٢٦٠٢٥}$ ٧ متراً

$= \sqrt{٥٠٤١ \times ^{٢}٢٥}$ ٧ متراً

$= \sqrt{^{٢}٧١ \times ^{٢}٢٥}$ ٧ متراً

$= ٥ \times ٧١$ متراً

$= ٣٥٥$ متراً

طول السـور = طول المحيط

$= ٤ \times ٣٥٥$ مترا

$= ١٤٢٠$ متراً

(مثال ٢) ما الزمن الذى يستغرقه رجل سرعته ٦ ك . م فى الساعة فى الطواف حول قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٣٦ فداناً وعرضها $\frac{٣}{١٠}$ طولها؟

العمـــل

طول المستطيل إجمالا = $\sqrt{٣٦ \times ٤٠٠٠ \times \frac{١٠}{٣}}$

$= \sqrt{٤٨٠٠٠٠} = ٧٠٠$ متر تقريباً

المساحة $= \frac{٣٦ \times ٢٥٢٠٠}{٦}$

$= ١٥١٢٣٠$ متراً مربعاً

$=$ الطول $\times \frac{٣}{١٠}$ الطول

$= \frac{٣}{١٠} \times$ مربع الطول

∴ مربع الطول $= \frac{١٠ \times ١٥١٢٣٠}{٣}$

$= ٥٠٤١٠٠$ متر مربع

∴ الطـول $= \sqrt{٥٠٤١٠٠}$ متراً

$= \sqrt{٢١٠ \times ٢٧١}$ متراً

$= ١٠ \times ٧١ = ٧١٠$ متراً

∴ العرض $= \frac{٣}{١٠} \times ٧١٠ = ٢١٣$ متراً

∴ طول محيط القطعة $= ٢ (٧١٠ + ٢١٣)$

$= ١٨٤٦$ متراً

∴ السرعة $= \frac{٦٠٠٠}{٦٠} = ١٠٠$ متر فى الدقيقة

∴ الزمن اللازم $= \frac{١٨٤٦}{١٠٠} = ١٨,٤٦$ دقيقة

(مثال ٣) قطعة من النحاس على شكل متوازى المستطيلات أبعاده ٧٠ ، ٤ ، ٥ من السنتيمترات سحبت على هيئة أسطوانة طولها ١٥٤ متراً فما طول قطرها (ط $= \frac{٢٢}{٧}$) ؟

العمـــل

حجم متوازى المستطيلات = ٨٠ × ٤ × ٥ سم^{٣}

∴ حجم متوازى المستطيلات = حجم الاسطوانة

∴ مساحة قاعدة الاسطوانة = $\frac{٨٠ \times ٤ \times ٥}{١٥٤ \times ١٠٠}$ سم^{٣}

∴ $\frac{٢٢}{٧} \times$ ق^{٢} = $\frac{٨}{٧٧}$

∴ ق^{٢} = $\frac{٨}{٧٧} \times \frac{٧}{٢٢}$ سم^{٢}

= $\frac{٢ \times ٢}{١١ \times ٢}$ سم^{٢}

∴ ق = $\frac{٢}{١١}$ سم

∴ قطر قاعدة الاسطوانة = $\frac{٢ \times ٢}{١١}$ = $\frac{٤}{١١}$ سم

(مثال ٤) أسطوانة من الحديد بها ١٩٨٠ لتراً من الماء وارتفاع الماء الموجود بها ٩٫٢٥٧٥ من الأمتار . وإذا كان قطر قاعدتها الخارجى ٥٦ $\frac{٤}{٢٣}$ من السنتيمترات فما سمك الحديد (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

العمـــل

∴ حجم الماء فى الاسطوانة = ١٩٨٠ لتراً وارتفاعه ٩٫٢٥٧٥ متراً تكون مساحة قاعدة الاسطوانة = $\frac{٢٢}{٧}$ ق^{٢} = $\frac{١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٩٨٠}{١٠٠ \times ٩٫٢٥٧٥}$

∴ ق = $\frac{٧ \times ١٠ \times ١٩٨٠}{٢٢ \times ٩٫٢٥٧٥}$ سم^{٢}

= $\frac{٩٠٠٠٠٠٠}{١٣٢٢٥}$ سم^{٢}

= $\frac{٣(٣٠٠)}{٣(٢٣ \times ٥)}$ سم^{٢}

∴ ق = $\frac{٣٠٠٠}{١١٥}$ = $\frac{٦٠٠}{٢٣}$ سم

= ٢٦ $\frac{٢}{٢٣}$ سم

∴ نصف القطر الداخلى $= ٢٦\frac{٢}{٢٣}$ سم

« « الخارجى $= \frac{٥٦\frac{٤}{٢٣}}{٢}$ سم

$= ٢٨\frac{٢}{٢٣}$ من السنتيمترات

∴ سمك الحديد $= ٢٨\frac{٢}{٢٣} - ٢٦\frac{٢}{٢٣} = ٢$ سم

(مثال ٥) إناء أسطوانى الشكل يسع ٥٠٢٤٠ لتراً وارتفاعه يساوى قطر قاعدته فإذا كانت النسبة التقريبية ٣و١٤ فما طول ارتفاعه ؟

العمـــــل

نفرض أن قطر قاعدة الإناء ل سم

فيكون ارتفاعه ل سم أيضاً

ونصف قطر قاعدته $\frac{ل}{٢}$ من السنتيمترات

ويكون حجمه $= ط \times (\frac{ل}{٢})^{٢} \times ل$

∴ $٥٠٢٤٠ \times ١٠٠٠ = ٣و١٤ \times \frac{ل^{٣}}{٤}$

∴ $ل^{٣} = \frac{٤ \times ٣١٠ \times ٥٠٢٤٠}{٣و١٤}$ سم^{٣}

$= ٦٤٠٠٠ \times ١٠^{٣}$ سم^{٣}

$= ٤^{٣} \times ١٠^{٣} \times ١٠^{٣}$ سم^{٣}

∴ ل $= ٤ \times ١٠ \times ١٠$ سم

$= ٤٠٠$ سم

(مثال ٦) كرة جوفاء مصنوعة من الحديد وزنها ٦٧٩١و٤ أوقية وقطرها الخارجى ٢٠ من البوصات فما سمكها إذا علم أن زنة البوصة المكعبة من الحديد ٤و٢ من الأوقيات وأن ط $= \frac{٢٢}{٧}$ ؟

العمـــل

. نفرض أن نصف قطرها الداخلى ن من البوصات

فيكون حجمها من الداخل = $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ ن^{٣} من البوصات المكعبة .

وحجمها الخارجى = $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٠^{٣}$ من البوصات المكعبة .

وحجم الحديد الذي فيها = $\frac{٦٧٩١و٤}{٤و٢} = ١٦١٧$ من البوصات المكعبة .

∴ حجمها من الداخل عبارة عن حجمها الكلى مطروحاً منه حجم الحديد .

∴ $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times$ ن$^{٣} = \frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٠^{٣} - ١٦١٧$

وبضرب طرفى المتساوية $\frac{٣}{٤} \times \frac{٧}{٢٢}$ ينتج أن

ن$^{٣} = ١٠^{٣} - \frac{٧ \times ٣ \times ١٦١٧}{٢٢ \times ٤}$

$= ١٠٠٠ - \frac{٣٠٨٧}{٨}$

$= \frac{٤٩١٣}{٨}$

∴ ن $= \frac{١٧}{٢}$ بوصة $= ٨\frac{١}{٢}$ بوصة

∴ سمك الحديد $= ١٠ - ٨\frac{١}{٢} = ١\frac{١}{٢}$ بوصة

تمرين ١٧

(١) أوجد ضلع المربع بالملليمترات إذا كانت مساحته تكافئ مجموع مساحتى مربعين طول ضلع الأول ٠,٥١٣ من المتر وطول ضلع الثانى ٤و٦٨ سم .

(٢) مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعى الزاوية القائمة ٧٥٦ م وطول الآخر ٦٧٢ م فما طول ضلع المربع المساوى له فى المساحة ؟

(٣) فى كم من الوقت يسير رجل حول حقل مربع الشكل مساحته ١٣٦٨٩ ياردة مربعة إذا علم أن سرعة الرجل $٤\frac{١}{٢}$ ميل فى الساعة ؟

(٤) مستطيل ومربع متكافئان فى المساحة وطول المستطيل وعرضه هما على الترتيب ٣٧و٦٢ ، ٣٢و١٢ متراً ، أوجد طول ضلع المربع .

(٥) حقل مربع الشكل مساحته ٤٦٦٥٦ م^{٢} محاط من جميع جهاته بطريق منتظم العرض مساحته ٢٦٢٨ م^{٢} أوجد عرض الطريق .

(٦) حقل مستطيل الشكل مساحته ٦١٢٥٠ م^{٢} فإذا كان طوله ضعف عرضه فما طول محيطه ؟

(٧) حقل مستطيل الشكل نسبة طوله : عرضه كنسبة ٧ : ٢ ومساحته ٩٧٥٧٤٤ متراً مربعاً أوجد تكاليف إحاطة هذا الحقل بسور إذا كان المتر منه يتكلف ١٥ قرشاً .

(٨) بلغت نفقات سور من الحديد حول قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها ١١٩٠٢٥ م^{٢} مبلغاً قدره ٢٣٧٠٥ جنيهاً مصرياً . والمطلوب معرفة نفقات سور من نوع السور الأول يحيط بقطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٢١٣٥ م^{٢} إذا علم أن عرضها $\frac{٣}{٥}$ طولها (٥٣^{٢} = ٢٨٠٩) .

(٩) مربع طول قطره ٤٠ متراً فما طول محيط المستطيل الذى يساويه فى المساحة والذى طوله ضعف عرضه ؟

(١٠) إذا كان عرض طريق منتظم محيط بقطعة أرض مربعة الشكل هو ١ $\frac{١}{٢}$ من الأمتار وكانت مساحة القطعة الكلية المكونة من قطعة الأرض والطريق ٤٨٤ م^{٢} فما تكاليف رصف هذا الطريق بحجارة إذا كانت نفقات رصف المتر المربع ٩ قروش ؟

(١١) فناء مستطيل الشكل طوله ١١٢ م وعرضه ٦٣ م حول إلى فناء آخر مربع الشكل يساويه فى المساحة وذلك بإنقاص طوله وإطالته فى عرضه فما مقدار هذه الإطالة وذلك الإنقاص ؟

(١٢) إذا فرشت أرض حجرة مستطيلة الشكل طولها ٣ أمثال عرضها ببساط عرضه ٧٥ سم وثمن المتر منه ٤٠ $\frac{١}{٢}$ قرشاً وبلغت التكاليف ٢٥٩٢ قرشاً فما طول هذه الحجرة ؟

(١٣) حجرة طولها ضعف عرضها فرشت أرضها ببساط ثمن المتر المربع منه ٣٠ قرشاً فبلغت التكاليف ٧٣٥ قرشاً ودهنت حوائطها بطلاء تكاليف المتر المربع منه ٤ $\frac{١}{٢}$ قروش وكانت تكاليف ذلك ٣٤٦ $\frac{١}{٢}$ قرشاً فما ارتفاع هذه الحجرة ؟

(١٤) إذا وضعت فى وسط حجرة مربعة الشكل مساحتها ٦٤ م^{٢} سجادة مربعة الشكل أيضاً ثمن المتر المربع منها ٨٠ قرشاً ثم فرشت المسافة الباقية بمشمع ثمن المتر المربع منه ١٥ قرشاً وكان ثمن السجادة والمشمع معاً ٣٣ جنيهاً مصرياً ، فما عرض المسافة المفروشة مشمعاً ؟

(١٥) قطعة أرض مربعة الشكل داخلها بركة على هيئة دائرة بحيث تمس أضلاع المربع فإذا كانت مساحة البركة ١٣٨٦ م^{٢} فما مساحة الأجزاء الداخلة الغير المغمورة بالماء (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) ؟

(١٦) مكعب حجمه ٥٩٣١٩ سم^{٣} فما طول حرفه ؟

(١٧) إذا كان حجم حوض مكعب الشكل $\frac{٢٢}{٧}$ ٢٣٤٥ بوصة مكعبة فأوجد مساحة قاعدته (٣١^{٣} = ٢٩٧٩١) .

(١٨) إذا كان حجم المكعب ١١٠٥٩٢ سم^{٣} فأوجد مجموع مساحات أوجهه .

(١٩) حوض مكعب الشكل يسع ما زنته ٨٣٦٥٫٤٢٧ كيلو جراماً من الماء أوجد ارتفاع الجدر من الداخل .

(٢٠) ثلاثة مكعبات من المعدن مساحة أحد أوجه الأول ١٤٤ سم^{٢} ومساحة أحد أوجه الثانى ٢٥٦ سم^{٢} ومساحة أحد أوجه الثالث ٤٠٠ سم^{٢} فإذا أذيبت هذه المكعبات الثلاثة وصنع من مادتها مكعب واحد فأوجد مساحة أحد أوجه المكعب الجديد .

(٢١) بيع ثلث ما بمخزن من القمح بسعر الإردب ١٦٠ قرشاً ، وبيع النصف بسعر الإردب ١٥٠ قرشاً والباقى بسعر الإردب ١٣٩ قرشاً . فبلغ الثمن كله ١١٣٦,٣٥ جنيها . فما أبعاد هذا المخزن إذا علم أنها تتناسب مع الأعداد ١٢ ، ١١ ، ٩ (الإردب = ١٩٨ لترا) .

(٢٢) حجرة تسع ٤٣٩٤ قدما مكعبة من الهواء . فإذا كان طولها ضعف عرضها وعرضها يساوى ارتفاعها فأوجد نفقات فرش أرضية الحجرة ببساط ثمن الياردة المربعة منه $\frac{1}{2}$ ٤ من الشلنات .

(٢٣) كرة حجمها ٣٨٨٠٨ سم^3 . فما نصف قطرها (ط = $\frac{22}{7}$) .

(٢٤) كرة جوفاء مصنوعة من النحاس وزنها ٣٩٥٦,٤ من الأوقيات ، ونصف قطرها الخارجى ٦ بوصات . فما سمكها إذا علم أن زنة البوصة المكعبة من هذا النحاس ٥ أوقيات (ط = ٣,١٤) ؟

الباب الخامس

المتوسط الحسابى

٤٦ — إذا قيل لنا إن تاجراً باع فى خمسة أيام متوالية بالمبالغ الآتية : ٢٢٠ ، ٣٥٠ ، ٤٨٤ ، ١١٦ ، ٢٠٠ من القروش بالترتيب ، فإن مجموع ما يكون قد باع به فى الخمسة الأيام هو :

٢٢٠ + ٣٥٠ + ٤٨٤ + ١١٦ + ٢٠٠ = ١٣٧٠ قرشاً .

ويقال إن المتوسط الحسابى لما باع به فى اليوم الواحد من تلك الأيام الخمسة هو $\frac{١٣٧٠}{٥}$ = ٢٧٤ قرشاً .

٤٧ — تعريف : أى أن المتوسط الحسابى لعدة مقادير من نوع واحد هو خارج قسمة مجموع تلك المقادير على عددها . وعلى ذلك فمجموع تلك المقادير يساوى حاصل ضرب عددها فى المتوسط الحسابى لها .

٤٨ — كثيراً ما يستعمل المتوسط الحسابى (ويطلق عليه لفظ « متوسط » فقط للاختصار) فى الإحصائيات والمشاهدات العملية كمعرفة متوسط محصول الفدان الواحد من القطن فى قطعة أرض أو متوسط درجات الحرارة فى مدة معينة أو متوسط مواليد أو وفيات مدينة معينة أو متوسط أعمار التلاميذ فى فصل ما .. الخ كما سيتضح من الأمثلة الآتية :

(مثال ١) بلغت درجة الحرارة عند الظهر فى القاهرة فى أربعة أيام متتالية ٢١,٧ ، ٢٤,٨ ، ٢٦,٧ ، ٢٧,٢ من الدرجات المئوية .

أوجد متوسط درجة الحرارة فى القاهرة عند الظهر فى هذه الأيام الأربعة .

العمـــل

مجموع درجات الحرارة :

= ٢١,٧ + ٢٤,٨ + ٢٦,٧ + ٢٧,٢ من الدرجات المئوية

= ١٠٠,٤ من الدرجات المئوية .

متوسط درجة الحرارة = $\frac{١٠٠,٤}{٤}$ = ٢٥,١ من الدرجات المئوية .

(مثال ٢٦) فى يوم ٢ يناير سنة ١٩٣٠ بين بارومتر مرصد حلوان أن الضغط الجوى فى الساعة السادسة صباحاً كان ٧٥٦,٧ من المليمترات وفى الظهر كان ٧٥٦,١ من المليمترات وفى الساعة السادسة مساء كان ٧٥٤,١ من المليمترات وفى نصف الليل ٧٥٤,٣ من المليمترات فما متوسط الضغط الجوى بالمليمترات فى ذلك اليوم حسب هذه المقاييس الأربعة ؟

العمـــل

يلاحظ أن المئات والعشرات فى كل من هذه الأعداد متحدة ، وعلى ذلك فلا داعى لإيجاد المتوسط الحسابى بوجودهما ويقتصر على إيجاد المتوسط الحسابى للجزء غير المشترك وهما الآحاد والخانة العشرية الأولى

ويكون المتوسط = ٧٥٠ + $\frac{٦,٧ + ٦,١ + ٤,١ + ٣,٤}{٤}$ من المليمترات

= ٧٥٠ + $\frac{٢١,٢}{٤}$ » »

= ٧٥٠ + ٥,٣ » »

= ٧٥٥,٣ » »

(مثال ٣) متوسط عشرة أعداد ٢٠ ومتوسط السبعة الأعداد الأولى منها ١٧ فما متوسط الثلاثة الأعداد الأخيرة ؟

العمـــل

مجموع العشرة أعداد = ١٠ × ٢٠ = ٢٠٠

« السبعة أعداد الأولى = ٧ × ١٧ = ١١٩

« الثلاثة أعداد الأخيرة = ٢٠٠ — ١١٩ = ٨١

متوسط الأعداد الثلاثة الأخيرة = ٨١ ÷ ٣ = ٢٧

(مثال ٤) متوسط درجة الحرارة فى ١٥ يوماً من شهر ما ٣٠ درجة ومتوسط درجة الحرارة فى العشرة الأيام الأولى منها ٣٢ درجة ومتوسط درجة الحرارة فى الثمانية الأيام الأخيرة منها ٢٦ درجة . فإذا كانت درجة حرارة اليوم الثامن $\frac{٣}{٥}$ درجة حرارة اليوم التاسع ودرجة حرارة اليوم التاسع تساوى درجة حرارة اليوم العاشر ، فما درجة الحرارة فى كل من الأيام الثامن والتاسع والعاشر ؟

العمـــل

مجموع درجات الحرارة فى الـ ١٥ يوماً = ١٥ × ٣٠ = ٤٥٠ درجة (١)

« « « « الـ ١٠ أيام الأولى = ١٠ × ٣٢ = ٣٢٠ « (٢)

« « « « الـ ٨ أيام الأخيرة = ٨ × ٢٦ = ٢٠٨ « (٣)

من (٢) و (٣) يكون مجموع درجات الحرارة فى الخمسة عشر يوماً كلها مضافاً إليها درجات الحرارة فى اليوم الثامن والتاسع والعاشر المتكررة

= ٣٢٠ + ٢٠٨ = ٥٢٨ درجة

مجموع درجات الحرارة فى اليوم الثامن والتاسع والعاشر = ٥٢٨ — ٤٥٠ = ٨٧ درجة

النسبة بين درجات الحرارة فى اليوم الثامن والتاسع والعاشر = ٣ : ٥ : ٥

∴ درجة الحرارة فى اليوم الثامن = $\frac{٣ \times ٨٧}{١٣}$ = ١٨ درجة

∴ درجة الحرارة فى كل من التاسع والعاشر = ٧٨ × $\frac{٥}{١٣}$ = ٣٠ درجة

(مثال ٥) ما ثمن اللتر الواحد من مزيج مكون من ٢٥٠ لتراً من شراب ثمن اللتر منه ٣٦ مليما و ٤٠٠ لتر من نوع آخر منه ثمن اللتر منه ٤٥ مليما و ١٠٠ لتر من نوع ثالث منه ثمن اللتر منه ٣٠ مليما ؟

العمـــل

∴ ثمن الصنف الأول = ٣٦ × ٢٥٠ = ٩٠٠٠ مليم

و ثمن النصف الثانى = ٤٥ × ٤٠٠ = ١٨٠٠٠ »

و ثمن النصف الثالث = ٣٠ × ١٠٠ = ٣٠٠٠ »

∴ ثمن المزيج وقدره ٧٥٠ لتراً (بالجمع) = ٣٠٠٠٠ »

∴ ثمن اللتر الواحد = ٣٠٠٠٠ ÷ ٧٥٠ = ٤٠ مليما

(مثال ٦) مدرسة ابتدائية بها ٨٠ تلميذاً بالسنة الأولى و ٧٠ تلميذاً بالسنة الثانية و ٦٠ تلميذاً بالسنة الثالثة و ٤٦ تلميذا بالسنة الرابعة فإذا نجح منهم فى الامتحان النهائى $\frac{٣}{٤}$ ٧٣٪ من تلاميذ السنة الأولى و ٨٠٪ من تلاميذ السنة الثانية و ٥٥٪ من تلاميذ السنة الثالثة و $٥٩\frac{١٥}{٢٣}$٪ من تلاميذ السنة الرابعة ، فما هى نسبة النجاح فى الفرق الأربع ؟

العمـــل

عدد الناجحين فى السنة الأولى = $\frac{٧٣\frac{٣}{٤} \times ٨٠}{١٠٠} = \frac{٢٩٥ \times ٨٠}{١٠٠ \times ٤}$ = ٥٩ تلميذاً

» » الثانية = $\frac{٨٠}{١٠٠} \times ٧٠$ = ٥٦ »

» » الثالثة = $\frac{٥٥}{١٠٠} \times ٦٠$ = ٣٣ »

» » الرابعة = $٤٦ \times \frac{٩٥\frac{١٥}{٢٣}}{١٠٠} = \frac{٤٦ \times ٢٢٠٠}{٢٣ \times ١٠٠}$ = ٤٤ »

جملة الناجحين = ٥٩ + ٥٦ + ٣٣ + ٤٤ = ١٩٢ »

النسبة المئوية فى الفصول = $\frac{١٩٢}{٢٥٦} \times ١٠٠$ = ٧٥ »

أى أن الناجحين ٧٥ ٪ من تلاميذ المدرسة

ملاحظة : يلاحظ أن النسبة التى حصلنا عليها لا تساوى متوسط النسب المئوية للنجاح فى السنوات الأربع . وذلك لأن أعداد التلاميذ فى هذه السنوات ليست متساوية .

تمرين ١٨

(١) دخل تاجر فى أربعة أيام متوالية هو :

شلن جنيه	بنس شلن جنيه	بنس شلن جنيه	جنيه
٦ ٧ ٦	٤ ٧ ٦	١ ٦ ٩	١٠ ٦ ٦

أوجد متوسط دخله فى اليوم .

شهر سنة	شهر سنة	شهر سنة	شهر سنة	شهر سنة	شهر سنة
٩ ١٧ ٦	٢ ١٣ ٦	٨ ١١ ٦	١ ١٠ ٦	٥ ٧	٤ ٧

فما متوسط أعمارهم ؟

(٣) متوسط ١٠ أعداد ١٥ ومتوسط السبعة أعداد الأولى منها ١٢ ، فما متوسط الثلاثة أعداد الأخيرة ؟

(٤) بلغ متوسط إيراد رجل فى ١٢ يوماً ١٧ جنيهاً ومتوسط إيراده فى الأربعة الأيام الأولى ١٥ جنيهاً ومتوسط إيراده فى السبعة الأيام الأخيرة ١٩ جنيهاً فما إيراده فى اليوم الخامس ؟

(٥) استغرق قطار فى قطع مسافة طولها ٥٤٩ ميلا مدة ١٠ ساعات و١٠ دقائق ووقف فى أثناء هذه الفترة مدة ١٥ دقيقة بإحدى المحطات و ٩ دقائق بمحطة أخرى و ٥ دقائق فى كل من ٦ محطات أخريات ودقيقتين فى كل من ٨ محطات ، فما متوسط سرعته فى المدة كلها وما متوسط سرعته فى المدة التى سارها فعلا ؟

(٦) متوسط ثلاثة أعداد ٥٥ ومتوسط الأول والثانى ٤٠ ومتوسط الأول والثالث ٦٠ ، فما متوسط الثانى والثالث ؟

(٧) تاجر بلغ متوسط مكسبه فى كل يوم من الخمسة عشر يوماً الأولى من شهر يناير ٤٨٠ قرشاً وفى كل يوم من الخمسة عشر يوماً الأخيرة منه ٣٦٠ قرشاً ومتوسط مكسبه فى كل يوم من أيام الشهر كله ٤٠٠ قرش ، فهل كسب أو خسر فى اليوم السادس عشر من هذا الشهر وما مقدار ذلك ؟

(٨) توظف ٣٢ شخصاً فكان متوسط عمر ثلاثة منهم ٢٠ سنة ومتوسط عمر أربعة غيرهم ٢١ سنة ومتوسط عمر اثنى عشر غير هؤلاء ٢٢ سنة ومتوسط عمر ١٢ آخرين ٢٣ سنة وعمر الشخص الباقى ٢٤ سنة ، فما متوسط عمر الشخص الواحد من الذين توظفوا جميعاً ؟

(٩) فصل به ٢١ تلميذاً متوسط أعمارهم ٨ سنة ١٦ شهر ومتوسط أعمار الأحد عشر تلميذاً الأول ١٦ سنة ومتوسط أعمار الأحد عشر تلميذاً الآخرين ٢ سنة ١٧ شهر فما عمر التلميذ الحادى عشر ؟

(١٠) متوسط درجة الحرارة فى المدة من يوم ٩ إلى يوم ١٥ من شهر ما (بما فى ذلك هذان اليومان) ٣٦و٦ درجة ومتوسطها من يوم ١٠ إلى يوم ١٦ من الشهر نفسه ٣٥و٩ درجة . فإذا كانت درجة الحرارة يوم ٩ هى ٢٠و٥° ، فما درجة الحرارة يوم ١٦ من هذا الشهر ؟

(١١) كان متوسط درجة الحرارة فى أيام الاثنين والثلاثاء والأربعاء من أسبوع ما ٢٦و٥ درجة وكان متوسطها فى أيام الثلاثاء والأربعاء والخميس ٢٧ درجة فإذا كانت درجة الحرارة فى يوم الخميس ٣٠ درجة ، فما هى درجة حرارة كل يوم من الأيام الباقية إذا علم أن درجة حرارة يوم الثلاثاء $\frac{١٥}{١٧}$ من درجة حرارة يوم الاثنين ؟

(١٢) متوسط درجات تلميذ فى ١٠ علوم ١٦و٤ ومتوسط الستة علوم الأولى منها ١٦$\frac{١}{٦}$ ومتوسط الخمسة علوم الأخيرة ١٦و٢ ودرجة العلم الخامس $\frac{١١}{١٤}$ من درجة العلم السادس ، فما متوسط الأربعة علوم الأولى على حدتها ؟

(١٣) أربعة أعداد متوسط الأول والثانى والثالث منها ١٩ ومتوسط الثانى والثالث والرابع ٣٣ ومتوسط الثالث والرابع والأول ٢٨ ومتوسط الرابع والأول والثانى ٣١ ، فما هى الأعداد الأربعة وما متوسطها ؟

(١٤) متوسط ستة أعداد ٣٠ ومتوسط الأربعة أعداد الأولى منها ٢٥ ومتوسط الثلاثة الأخيرة ٣٢ فما متوسط الثانى والرابع والسادس إذا علم أن النسبة بينهما كنسبة ٢ : ١ : ٣ ؟

(١٥) مجموع درجات تلاميذ فصلين بمدرسة ما ٨٤٠٠ درجة ومتوسط درجات التلميذ بالفصل الأول ١٨٠ درجة وبالفصل الثانى ١٦٠ درجة ، فما عدد تلاميذ كل فصل إذا كانت نسبة عدد تلاميذ الفصل الأول إلى عدد تلاميذ الفصل الثانى كنسبة ٢ : ٣ ؟

(١٦) اشترى رجل ٣٠ رطلا من الشاى بسعر الرطل ٢٠ قرشاً و ٥٠ رطلا من نوع آخر بسعر الرطل ٢٤ قرشاً ثم خلط النوعين معاً فبكم يبيع الرطل من الخليط كى يكسب ٢٠ ٪ ؟

(١٧) خلط تاجر ثلاثة أنواع من البن وكانت النسبة بين ما أخذه من النوع الأول وما أخذه من النوع الثانى وما أخذه من النوع الثالث هى ٥ : ٢ : ٣ فإذا كان ثمن الرطل من كل منها هو ٤ و ٥ و ٤ و ٥ من القروش على الترتيب ، فما ثمن تكاليف الرطل من الخليط وما الثمن الذى يبيعه به لكى يكسب ٢٥ ٪ ؟

(١٨) اشترى بدال مقداراً من الشاى بسعر الرطل ٢٠ قرشاً ثم اشترى نصف هذا المقدار من نوع آخر بسعر الرطل ٣٠ قرشاً ثم مقداراً ثالثاً يعادل مجموع ما اشتراه من النوعين الأولين بسعر الرطل ٢٠ قرشاً . فإذا خلط الثلاثة المقادير معاً فبكم يبيع الرطل من الخليط كى يكسب ٢٠ ٪ ؟

(١٩) إذا خلطت كميتان متساويتان من الشاى من نوعين مختلفين ثمن الأوقية من الأول قرشان ومن الثانى $1\frac{2}{3}$ من القروش و بيعت الأوقية من الخليط

بسعر ٢ ١/٦ من القروش فكان المكسب الكلى ٣ جنيهات مصرية ، فكم رطلا بيعت ؟

(٢٠) صهرت ثلاثة معادن أوزانها على الترتيب ٢٠١ و١٠٦ و١٥ و٦ من الباوندات وعملت منها سبيكة لم يتغير حجمها ولا وزنها عن مجموع أحجام وأوزان القطع الأصلية . فإذا علم أن القدم المكعبة تزن من كل منها على الترتيب ٦ و١٢٠ و ٦٣,٦ و ٤ و٢٣ من الباوندات ، فما وزن القدم المكعبة من من السبيكة الجديدة ؟

(٢١) أودع رجل ٤٠٠ جنيه فى مصرف بسعر ٥ ٪ فى السنة وأودع ٥٠٠ جنيه فى مصرف آخر بسعر ٣ ١/٥ ٪ أوجد السعر الذى إذا وضع به المبلغين معاً لحصل على نفس الربح السنوى الذى كان يحصل عليه فى الحالة الأولى .

(٢٢) بلغ عدد المتقدمين لامتحان الشهادة الابتدائيـة فى السنوات ١٩٣١ ١٩٣٢ و١٩٣٣ و ١٩٣٤ و١٩٣٥ و١٩٣٦ على الترتيب ١٤١٤٧ تلميذاً و ١٣٦٥٩ تلميذاً و ١٤٥٠٣ تلميذاً و ١٣١٧٦ تلميذاً و ١٤٥٢٩ تلميذاً و ١٣٤١٥ تلميذاً . وكانت نسبة عدد الناجحين فى الدور الأول ٥٢,٤ ٪ و ٤٦,١ ٪ و ٦٥,٧ ٪ و ٤٤,٦ ٪ و ٦٢,٨ ٪ و ٧١,٥ ٪ على الترتيب أوجد النسبة المئوية للناجحين فى السنوات الست .

(٢٣) تقدم لامتحان شهادة الدراسة الثانوية قسم ثان ٢٨٩٣ تلميذاً و ٣٤٩٤ تلميذاً و ٤٩٩٠ تلميذاً و ٤١٣٦ تلميذاً و ٥١٢٩ تلميذاً و ٥٢١٢ تلميذاً فى السنوات ١٩٣١ و١٩٣٢ و ١٩٣٣ و ١٩٣٤ و ١٩٣٥ و ١٩٣٦ على الترتيب وكانت النسبة لعدد الناجحين فى الدور الأول ٤١ ٪ و ٤٠ ٪ و ٤٢ ٪ و ٤١ ٪ و ٤٣ ٪ و ٤٢,٢ ٪ على الترتيب أوجد النسبة المئوية للناجحين فى السنوات الست ؟

٤٩ — من الأمثلة السابقة يلاحظ الطالب أن المتوسط الحسابى لجملة أعداد يزيد على بعض الأعداد وينقص عن بعضها الآخر (وقد يساوى بعضها)

فمثلا المتوسط الحسابى للأعداد ١ ، ٢ ، ٦ ، ٨ ، ٩ يساوى $\frac{١+٢+٨+٩}{٤} = ٥$

وهذا المتوسط يزيد على كل من ١ ، ٢ وينقص عن كل من ٦ ، ٨ ، ٩

ويلاحظ أن مجموع الأعداد ١ ، ٢ ، ٦ ، ٨ ، ٩ = ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥

ومعنى هذا أن مجموع الأربعة الأعداد المفروضة = مجموع أربعة أعداد متساوية كل منها يساوى المتوسط وهذا لا يكون إلا إذا كان مجموع مايزيده المتوسط عن الأعداد التى تكون أقل منه يساوى بالضبط مجموع ماينقصه المتوسط عن الأعداد التى تكون أكبر منه كى تعوض الزيادة النقص

وترى هنا مجموع زيادات المتوسط عن الأعداد التى أقل منه

$$= (٥ - ١) + (٥ - ٢)$$
$$= ٤ + ٣$$
$$= ٧$$

وترى نقص المتوسط عن الأعداد التى هى أكبر منه

$$= (٨ - ٥) + (٩ - ٥)$$
$$= ٣ + ٤$$
$$= ٧$$

مثال آخر : متوسط الأعداد ١ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ١٤ هو $\frac{١+٥+٧+٨+١٤}{٥}$

$$= \frac{٣٥}{٥} = ٧$$

ومجموع زيادات هذا المتوسط عن الأعداد الأقل منه

$$= (٧ - ١) + (٧ - ٥) = ٨$$

ومجموع نقص المتوسط عن الأعداد الأكبر منه

$$= (٨ - ٧) + (١٤ - ٧) = ٨$$

والمجموعتان متساويتان . ويلاحظ أن أحد الأعداد وهو ٧ يساوى المتوسط تماماً وهذه الخلاصة تساعدنا فى حل كثير من المسائل كما فى الأمثلة الآتية :

(مثال ٥) اشترى تاجر عدداً من الساعات . عشرون منها بسعر الواحدة ١٥٠ قرشاً والباقى بسعر الواحدة ١٨٠ قرشاً ووجد أن متوسط ثمن الساعة فى الكمية التى اشتراها كلها يساوى ١٦٠ قرشاً ، فما عدد الساعات التى اشتراها ؟

العمـــل

نقص ثمن الساعة من العشرين ساعة عن المتوسط = ١٦٠ — ١٥٠ = ١٠

النقص الناشىء فى العشرين ساعة كلها = ١٠ × ٢٠ = ٢٠٠

زيادة ثمن الساعة الواحدة فى الباقى عن المتوسط = ١٨٠ — ١٦٠ = ٢٠

وبما أن النقص الكلى يجب أن يساوى الزيادة الكلية

∴ عدد الساعات الباقية = $\frac{٢٠٠}{٢٠}$ = ١٠ ساعات

∴ عدد الساعات التى اشتراها كلها = ٢٠ + ١٠ = ٣٠ ساعة

(مثال ٢) مشى رجل فقطع فى الدقيقة الأولى من تحركه ٥ أمتار وفى الدقيقة الثانية ٧ أمتار وفى الثالثة ٩ أمتار وفى الرابعة ١١ متراً وفى الخامسة ١٣ متراً وفى السادسة ١٥ متراً ثم استمر يقطع فى كل دقيقة تالية ١٥ متراً مدة أخرى من الزمن ، فإذا علم أن متوسط ما قطعه فى الدقيقة مدة تحركه كلها ١٢ متراً فأوجد المدة التى سار فيها بسرعته الأخيرة

العمـــل

نقص ما قطعه فى الدقيقة الأولى عن المتوسط = ١٢ — ٥ = ٧ أمتار

» » » » الثانية » = ١٢ — ٧ = ٥ أمتار

» » » » الثالثة » = ١٢ — ٩ = ٣ أمتار

» » » » الرابعة » = ١٢ — ١١ = ١ متر

النقص الكلى = ٧ + ٥ + ٣ + ١ = ١٦ متراً .

زيادة ما سار به فى الدقيقة الخامسة عن المتوسط = ١٣ — ١٢ = ١ متر

زيادة ما سار به فى كل دقيقة من المدة الباقية = ١٥ — ١٢ = ٣ أمتار

∴ النقص الكلى يجب أن يساوى الزيادة الكلية .

∴ ١٦ = ١ + الزيادة فى المدة المطلوبة .

∴ ١٥ = الزيادة فى المدة المطلوبة .

∴ الزيادة فى الدقيقة الواحدة ٣ أمتار .

∴ عدد الدقائق = ١٥ ÷ ٣ = ٥ دقائق .

(مثال ٧) عشرون عاملاً بعضهم من الرجال والبعض الآخر من الأولاد يأخذون أجراً قدره ١٤٤ قرشاً فى اليوم ، فإذا علم أن أجرة الرجل فى اليوم ١٠ قروش وأجرة الولد ٣ قروش . فما عدد كل من الرجال والأولاد؟

العمـــل

متوسط أجرة العامل فى اليوم = $\frac{١٤٤}{٢٠}$ = ٧و٢ من القروش

زيادة أجرة الرجل على المتوسط = ١٠ — ٧و٢ = ٢و٨ « «

نقص أجرة الولد عن المتوسط = ٧و٢ — ٣ = ٤و٢ « «

∴ الزيادة الكلية يجب أن تساوى النقص الكلى .

∴ ٢و٨ × عدد الرجال = ٤و٢ × عدد الأولاد .

∴ $\frac{\text{عدد الرجال}}{\text{عدد الاولاد}}$ = $\frac{٤و٢}{٢و٨}$

= $\frac{٢}{٣}$

∴ عدد الرجال = ٢٠ × $\frac{٣}{٥}$ = ١٢ رجلا

وعدد الأولاد = ٢٠ × $\frac{٢}{٥}$ = ٨ أولاد

(مثال ٨) مزج رجل نوعين من شراب ثمن اللتر من النوع الأول ٣٠ مليما . وثمن اللتر من النوع الثانى ٤٢ مليما وكان ثمن اللتر من المزيج ٣٧ مليما فما النسبة التى تكون بها هذا المزيج ؟

العمـــــل

∴ مكسب الرجل فى المتر من النوع الأول = ٣٧ — ٣٠ = ٧ مليمات

و خسارته فى اللتر من النوع الثانى = ٤٢ — ٣٧ = ٥ »

فلكى تكون الخسارة الكلية معادلة للمكسب الكلى يجب أن يأخذ من النوع الأول ٥ لترات لكل سبع لترات يأخذها من الثانى .

تمرين ١٩

(١) جيش مكوّن من ١٢٠٠٠ جندى بعضهم من المصريين والباقى من السودانيين فإذا كان متوسط طول السودانى ٥ أقدام و ١٢ بوصة ومتوسط طول المصرى ٥ أقدام و ١٠ بوصات ومتوسط طول العسكرى فى الجيش كله ٥ أقدام و $10\frac{3}{4}$ بوصة فما عدد كل من المصريين والسودانيين ؟

(٢) اشترى تاجر نوعين من السكر الأول مقداره ٦٠ أقة بسعر الأقة ٣٠ مليما واشترى الثانى بسعر الأقة ٢٧,٥ مليما فوجد أن متوسط ثمن الأقة من الكمية كلها ٢٩ مليما . فما عدد الأقق التى اشتراها كلها ؟

(٣) متوسط درجات التلميذ فى فصل ما فى أحد الامتحانات ١٨٠ درجة ولو غاب عن الامتحان السبعة التلاميذ الأخيرون الذين متوسط درجاتهم ١٥٠ لأصبح متوسط درجات كل واحد من الباقين ١٩٠ درجة ، فما عدد تلاميذ هذا الفصل ؟

(٤) وضع رجل مبلغ ٢٤٠٠ جنيه فى مصرف بسعر ٥ ٪ فى السنة ووضع مبلغاً آخر فى مصرف آخر بسعر ٤ ٪ فى السنة فوجد أنه قد حصل على ربح منهما

يعادل الربح السنوى الذى يحصل عليه لو وضع المبلغين معاً بسعر ٤ ٢/٧ ٪ فى السنة ، أوجد مبلغه الكلى .

(٥) جيش مكوّن من ١٣٦٠٠ رجل بعضهم من السود والبعض الآخر من البيض فإذا كان متوسط قامة الرجل من السود ٥ أقدام و ١٠٫٧٤ بوصة ومتوسط قامة الرجل من البيض ٥ أقدام و ٩٫٨٨ بوصة ومتوسط قامة الرجل فى الجيش كله ٥ أقدام و ١٠٫١٢ بوصة فما عدد الرجال البيض فى الجيش ؟

(٦) صندوق به عدد من الساعات متوسط ثمن كل ساعة ٧٥ قرشاً ولما وضع فيه ٤ ساعات أخرى ثمنها ٤٥ و ٨٠ و ٥٥ و ٦٠ قرشاً نزل متوسط ثمن الساعة إلى ٧٢ قرشاً ، فكم ساعة أصبحت فى الصندوق ؟

(٧) كيس من النقود يحتوى على ١٠٠ قطعة من نوعين مختلفين من النقود قيمتها كلها ١١٠٠ قرش ، فإذا علم أن النوعين المذكورين هما الريال والقطعة ذات الخمسة قروش ، فما عدد قطع كل نوع ؟

(٨) فصلان ا و ب فى مدرسة ما متوسط عمر التلميذ فى ا : ١٢ ٢/٥ سنة ومتوسط عمر التلميذ فى الفصل ب : ١٣ ١/٤ سنة ، انتقل خمسة تلاميذ متوسط عمرهم ١٢ سنة من الفصل ب إلى الفصل ا فأصبح بذلك متوسط عمر التلميذ فى الفصل ا : ١٢ ١/٢ سنة ومتوسط عمره فى الفصل ب : ١٣ ١/٢ سنة فما عدد تلاميذ كل فصل على حدة ؟

(٩) مدرسة بها ٥ فصول بالسنة الأولى متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٣٢ تلميذاً و ٤ فصول بالسنة الثانية متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٣٥ تلميذاً و ٤ فصول بالسنة الثالثة متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٢٠ تلميذاً و ٥ فصول بالسنة الرابعة متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٣٦ تلميذاً فما عدد فصول السنة الخامسة إذا علم أن متوسط عدد تلاميذ الفصل فيها ٢٥ تلميذاً وأن متوسط عدد تلاميذ الفصل بالمدرسة كلها ٣٠ تلميذاً ؟

(١٠) قطع رجل فى كل من الخمس دقائق الأولى من تحركه ١٢ متراً ثم أخذت سرعته تزداد ١٢ متراً فى الدقيقة عن التى قبلها لمدة ٥ دقائق ثم بقيت سرعته ثابتة كما هى فى الدقيقة العاشرة من تحركه و بعد مدة من الزمن وجد أن متوسط ما قطعه فى الدقيقة فى المدة كلها $18\frac{1}{2}$ متراً . فما الزمن الذى استغرقه فى السير بسرعته الأخيرة ؟

(١١) متوسط أعمار تلاميذ أحد الفصول ١٠ سنة ١٦ شهر ولما استجد فى هذا الفصل ٣ تلاميذ أعمارهم ٥ سنة ١٦ شهر ، ٢ سنة ٦ شهر ، ١٥ سنة ١١ شهر ، ١٤ سنة ٦ شهر أصبح متوسط أعمار التلاميذ فى الفصل ٨ سنة ١٦ شهر فما عدد تلاميذ هذا الفصل قبل التحاق المستجدين ؟

(١٢) ٧ عمال يشتغلون فى عمل معين وتدفع أجرتهم باعتبار $2\frac{1}{2}$ قرش فى كل ساعة يشتغلها الرجل الواحد فإذا بلغت أجرتهم فى ٤٨ أسبوعاً ٣٤٨ جنيهاً وكان متوسط ما اشتغله كل من اثنين فيهم ٤٤ ساعة فى الأسبوع ومتوسط ما اشتغله كل من اثنين آخرين ٣٨ ساعة فى الأسبوع ، فما متوسط عدد الساعات التى اشتغلها كل من الثلاثة الرجال الباقين فى الأسبوع ؟

(١٣) دخل موظف الخدمة عند ما بلغت سنه ٢١ عاما وأخذ يتناول مرتباً سنوياً قدره ١٨٠ جنيهاً لمدة ٥ سنوات ثم أخذ راتبه يزداد ٢٤ جنيهاً مصرياً كل سنتين لمدة الـ ١٠ سنوات التالية ثم بقى بعد ذلك ثابتاً لم يتغير لمدة معينة ترك بعدها الخدمة فوجد أن متوسط ماهيته مدة توظيفه كلها ٢٤٦ جنيهاً سنوياً فكم عمره عند ما ترك الخدمة ؟

(١٤) خلط تاجر ١٢ رطلا من الشيكوريا ثمن الرطل منها قرشان مع مقدار من البن ثمن الرطل منه ٨ قروش أوجد مقدار البن إذا علم أن ثمن الرطل من المخلوط ٦ قروش .

(١٥) لدى تاجر ١٨٠ إردباً من القمح الذى ثمن الإردب منه ١٦٢ قرشاً فكم إردباً من الذى ثمنه ١٢٩ قرشاً يضيفها إلى ما عنده حتى إذا باع الإردب من الخليط بمبلغ ١٦٨ قرشاً يكسب $١٦\frac{٢}{٣}$ ٪ ؟

(١٦) اشترى رجل ٤٠ أقة من السكر بمبلغ ١٠٦ من القروش بعضها بسعر الأقة ٣ قروش والبعض الآخر بسعر الأقة ٢٥ مليما فما عدد أقق كل نوع ؟

(١٧) عمل تاج وزنه $٦٤\frac{١}{٢}$ من الأوقيات من خليط من الذهب والفضة ووجد أن حجم هذا التاج بوساطة الماء الذى يزيغه ٨٫٥ من البوصات المكعبة فإذا كانت البوصة المكعبة من الذهب تزن ١٠٫٢٥ من الأوقيات والبوصة المكعبة من الفضة تزن ٥٫٧٥ من الأوقيات فما مقدار كل من الذهب والفضة فى هذا التاج ؟

(١٨) اشترى تاجر مقداراً من القطن ربعه بسعر القنطار ٣٠٠ قرش وثلثه بسعر القنطار ٤٠٠ قرش وخمسه بسعر القنطار ٢٠٠ قرش والباقى دفع ثمنه ٤٨ جنيهاً مصرياً . فإذا كان متوسط ثمن القنطار فى الكمية كلها ٣٠٢٫٥ قرش فكم قنطاراً اشترى ؟

٥٠ — مسائل على التقسيم التناسبى*

١ — المطلوب تقسيم ١٠٫٥ جنيه بين ا ، ب بحيث يكون نصف نصيب ا معادلا $\frac{٢}{٣}$ نصيب ب

العمـــل

∵ نصف نصيب ا يعادل $\frac{٢}{٣}$ نصيب ب

∴ نصيب ا = $\frac{٤}{٣}$ نصيب ب

∴ النسبة بين نصيبى ا ، ب = ٤ : ٣

∴ نصيب ا = $\frac{٤}{٧}$ × ١٠$\frac{١}{٢}$ = ٦ جنيهات

نصيب ب = $\frac{٣}{٧}$ × ١٠$\frac{١}{٢}$ = ٤$\frac{١}{٢}$ جنيه

٢ — يراد تقسيم مبلغ ٢٨٥ جنيهاً بين ا ، ب ، حـ بحيث يأخذ ا $\frac{٩}{١٠}$ ما يأخذه ب ، حـ معاً ويأخذ ب $\frac{٧}{٨}$ ما يأخذه ا ، حـ معاً ، فكم يكون نصيب كل منهم؟

العمـــل

∵ ا يأخذ $\frac{٩}{١٠}$ من نصيبى ب ، حـ معاً فهو يأخذ $\frac{٩}{١٩}$ من مجموع الأنصبة

أى $\frac{٩}{١٩}$ × ٢٨٥ = ١٣٥ جنيهاً

∵ ب يأخذ $\frac{٧}{٨}$ مجموع نصيبى ا ، حـ فهو يأخذ $\frac{٧}{١٥}$ من مجموع الأنصبة

أى $\frac{٧}{١٥}$ × ٢٨٥ = ١٣٣ جنيهاً

∴ نصيب حـ = ٢٨٥ — ١٣٥ — ١٣٣ = ١٨ جنيهاً

٣ — $\frac{٢}{٣}$ تركة قسم بين أخ وأخت بنسبة ٩ : ٧ فكان نصيب الأخ يزيد على نصيب الأخت بمقدار $\frac{٨}{١٥}$ ١٧٢٨ جنيهاً أوجد $\frac{٥}{١٦}$ من هذه التركة

* يحسن تدريب التلاميذ على حل بعض هذه التمارين كعادة لمقرر المدارس الابتدائية من جهة وكتحضير لمسائل الشركات من جهة أخرى .

العمـــل

نصيب الأخ $= \frac{٩}{١٦} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٣}{٨}$ التركة كلها

نصيب الأخت $= \frac{٧}{١٦} \times \frac{٢}{٣} = \frac{٧}{٢٤}$ التركة كلها

نصيب الأخ يزيد على نصيب الأخت بمقدار $\frac{٣}{٨} - \frac{٧}{٢٤} = \frac{١}{١٢}$ من التركة كلها

وهذا يعادل $\frac{٨}{١٥}$ ١٧٢٨ جنيهاً

∴ التركة كلها $= \frac{٨}{١٥}$ ١٧٢٨ $\times \frac{١٢}{١}$ جنيهاً

∴ $\frac{٥}{١٦}$ من التركة $= \frac{٨}{١٥}$ ١٧٢٨ $\times$ ١٢ جنيهاً

$=$ ٦٤٨٢ جنيهاً .

٤ — بدأت أم وطفلاها فى رحلة طويلة . وكان مجموع أعمارهم فى اليوم الذى بدأوا فيه الرحيل ٣٥ سنة والنسبة بين أعمارهم ٣٥٦ : ٣٩ : ٢٥ وفى يوم وصولهم كانت النسبة بين عمرى الأم والولد الأكبر ٧٢٨ : ٩٤ أوجد المدة التى استغرقتها الرحلة :

العمـــل

فى بدء الرحيل كانت النسبة بين أعمارهم ٣٥٦ : ٣٩ : ٢٥

∴ مجموع أعمارهم ٣٥ سنة يكون عمر الأم $\frac{٣٥ \times ٣٥٦}{٤٢٠} = ٢٩\frac{٢}{٣}$ سنة

و عمر الولد الأكبر $= \frac{٣٥ \times ٣٩}{٤٢٠} = ٣\frac{١}{٤}$ سنة

و عمر الولد الأصغر $= \frac{٣٥ \times ٣٥}{٤٢٠} = ٢\frac{١}{٢}$ سنة

الفرق بين عمر الأم والولد الأكبر $= ٢٩\frac{٢}{٣} - ٣\frac{١}{٤} = ٢٦\frac{٥}{١٢}$ سنة

النسبة بين عمرى الأم والولد الأكبر يوم الوصول $= ٧٢٨ : ٩٤$

فإذا فرض أن ٧٢٨ يمثل عمر الأم فإن ٩٤ تمثل عمر الولد الأكبر .

ويكون ٧٢٨ — ٩٤ $=$ ٦٣٤ يمثل الفرق بين عمريهما ولكن هذا الفرق ثابت وهو $٢٦\frac{٥}{١٢}$ سنة

∴ ٦٣٤ تمثل $٢٦\frac{٥}{١٢}$ سنة

∴ ٧٢٨ تمثل $\frac{٧٢٨}{٦٣٤} \times ٢٦\frac{٥}{١٢} = ٣٠\frac{١}{٣}$ سنة

وهذا عمر الأم يوم الوصول

∴ عمرها فى بدء الرحلة كان $٢٩\frac{٢}{٣}$ سنة

∴ الرحلة استغرقت $٣٠\frac{١}{٣} - ٢٩\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$ سنة = ٨ أشهر

تمرين (٢٠)

(١) قسم مبلغ ٢٤٣ من الجنيهات بين ا ، ب ، حـ بحيث يأخذ ا $\frac{٤}{٢٧}$ من نصيب ب ويأخذ ب $\frac{٤}{٥}$ مجموع نصيبى ا ، حـ أوجد نصيب كل منهم .

(٢) مجموع عمرى ا ، ب الآن ٦٦ سنة ومنذ ١٥ سنة كانت النسبة بين عمريهما ٤ : ٥ أوجد عمر كل منهما الآن .

(٣) ترك رجل لأولاده الأربعة مبلغاً قسم بينهم بنسبة $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٣} : \frac{١}{٤} : \frac{١}{٥}$ فكان نصيب الأخير ٣٦٠٠ جنيه أوجد نصيب كل من الآخرين .

(٤) قسم مبلغ ١٨٠ جنيها بين ا ، ب ، حـ بحيث يأخذ ا ثلاثة أمثال ما يأخذه ب وأن يأخذ ب ، حـ معاً نصف ما يأخذه ا .

(٥) رجل وامرأة وولد يعملون عملا يأخذون عليه أجراً قدره ٣٠٧ قروش بحيث يشتغل الرجل ٩ أيام والمرأة ١٠ أيام والولد ١٢ يوماً والنسبة بين مقادير العمل الذى يعمله كل منهم فى اليوم تساوى $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٣} : \frac{١}{٥}$ أوجد كم يكون نصيب كل منهم من هذا المبلغ .

(٦) قسم مبلغ ١٣٣٠ جنيها بين ا ، ب ، حـ ، ء بحيث كان نصيب ب $\frac{٦}{٧}$ نصيب ا ونصيب حـ $\frac{١٠}{١١}$ من نصيب ب ونصيب ء نصف مجموع نصيبى ب ، حـ أوجد ما يستحقه كل منهم من هذا المبلغ .

(٧) المطلوب تقسيم مبلغ ١٠٧ جنيهات بين ١٥ رجلا ، ١٧ امرأة ، ٨ أولاد بحيث يكون نصيب المرأة ٣ أمثال نصيب الولد ، $\frac{١٣}{١١}$ من نصيب الرجل

(٨) أوصى رجل أن تقسم تركته بحيث يأخذ ا نصفها ويأخذ ب ثلثها ويأخذ حـ ربعها . بين أن هذا مستحيل . وإذا كانت تركته تبلغ ١٢٢٦ $\frac{٩}{٤٠}$ جنيها فكم يكون نصيب كل من ا ، ب ، حـ بحيث تكون النسبة بين أنصبتهم $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٣} : \frac{١}{٤}$

(٩) تركة قسمت بحيث أخذ ا خمسها وقسم الباقى بين ثلاثة آخرين بنسبة ١ : ٢ : ٣ فإذا كان أصغر هذه الأنصبة ٥٣٧٥ جنيهاً فكم كانت التركة الأصلية ؟

(١٠) النسبة بين مبلغى ا ، ب كنسبة ٣ : ٧ ولو أعطى ب ٣٤٥ جنيهاً إلى ا لأصبحت النسبة ٣ : ٥ فما مبلغ كل منهما ؟

(١١) يملك ا ٩ نعاج لكل ٥ يملكها ب وثمن النعجة من نعاج ا ١٢٥ قرشاً وثمن النعجة من نعاج ب ١٦٢٫٥ من القروش . فإذا علم أن ثمن قطيع ا يزيد ٢٦٥ $\frac{٥}{٨}$ من الجنيهات على ثمن قطيع ب فكم نعجة يملكها كل ؟

(١٢) إذا بلغت أجرة ٤٥ امرأة فى ٤٨ يوماً ٢٠٧ جنيهات فكم رجلا يمكن تشغيلهم ١٦ يوما بأجرة تبلغ ٧٦ $\frac{٢}{٣}$ جنيهاً إذا علم أن أجرة الرجل فى اليوم ضعف أجرة المرأة ؟

الشـــركات

٥٢ — تعريف : الشركة عقد بين اثنين أو أكثر يلتزم به كل من المتعاقدين وضع جزء من رأس مال للقيام بعمل مشترك بينهم وتقسيم الربح أو الخسارة التى تنشأ عنه بينهم .

ويراعى فى تقسيم الأرباح والخسارة بين الشركاء ثلاثة أمور :

(١) رأس المال الذى دفعه كل منهم .

(٢) المدة التى مكثها رأس مال كل شريك .

(٣) المجهود الخاص الذى بذله واحد أو أكثر من الشركاء فى إنجاح العمل .

٥٣ — سنبين فيما يلى طريقة حل هذا النوع من المسائل :

(مثال ١) اشترك ثلاثة فى تجارة ودفع الأول من رأس مالها ٥٠٠٠ جنيه ودفع الثانى ٢٤٠٠ جنيه ودفع الثالث ٣٦٠٠ جنيه وبعد سنة كان ربح التجارة ٢٢٠٠ جنيه فما مكسب كل شريك ؟

العمـــــل

∴ رأس المال الكلى = ٥٠٠٠ + ٢٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١١٠٠٠ جنيه

وربحـــه = ٢٢٠٠ »

∴ ربح كل جنيه منه = ٢٢٠٠ ÷ ١١٠٠٠ = $\frac{١}{٥}$ »

الجواب

∴ مكسب الأول = $\frac{١}{٥}$ × ٥٠٠٠ = ١٠٠٠ جنيه

و » » الثانى = $\frac{١}{٥}$ × ٢٤٠٠ = ٤٨٠ »

و » » الثالث = $\frac{١}{٥}$ × ٣٦٠٠ = ٧٢٠ »

ملاحظة : مكسب كل واحد منهم مناسب لرأس المال الذى دفعه

(مثال ٢) حـ و ز هـ كوّنوا شركة تجارية دفع فيها حـ رأس مال قدره ٣٠٠٠ جنيه ودفع ز ٢٥٠٠ جنيه ودفع هـ ١٥٠٠ جنيه واتفقوا على أن يقوم هـ بإدارة الشركة وأن يأخذ فى نظير ذلك $\frac{١}{٨}$ الأرباح السنوية وأن يقسم الباقى من الأرباح بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا كان جميع ما خص هـ من الأرباح ٢٥٠ جنيهاً ، فما مقدار ما أخذه كل من حـ و ز منها ؟

العمـــــل

∴ ما يأخذه هـ نظير إدارته للشركة = $\frac{١}{٨}$ الربح

∴ ما يقسم عليهم بنسبة رؤوس أموالهم = $\frac{٧}{٨}$ »

وهذا يقسم بنسبة ٣٠٠٠ : ٢٥٠٠ : ١٥٠٠

أى بنسبة ٦ : ٥ : ٣

∴ جميع ما خص هـ من الأرباح $\frac{١}{٨} + \frac{٣}{١٤} \times \frac{٧}{٨} = \frac{٥}{١٦}$ من الربح الكلى وهذا يعادل ٢٥٠ جنيهاً

الجواب

∴ الربح الكلى = ٢٥٠ ÷ $\frac{٥}{١٦}$ = ٨٠٠ جنيه

∴ ما أخذه حـ = $\frac{٦}{١٤}$ من $\frac{٧}{٨}$ الـ ٨٠٠ = ٣٠٠ »

و ما أخذه ء = $\frac{٥}{١٤}$ من $\frac{٧}{٨}$ الـ ٨٠٠ = ٢٥٠ جنيهاً

(تمرين ٢١)

(١) اشترك ٤ أشخاص فى تجارة دفع الأول ١٢٨٠ جنيهاً والثانى ١٠٠٠ جنيه والثالث ١٦٤٠ جنيهاً والرابع ٥٠٠ جنيه و بلغت أرباحهم فى نهاية السنة ١١٠٥ جنيهات ، فما نصيب كل واحد من هذه الأرباح ؟

(٢) اشترك ا و ب و حـ فى تجارة دفع ا ٧٠٠ جنيه و ب ٨٤٠ جنيهاً و بلغت أرباح الشركة ٤٢٢٫٥ من الجنيهات ، فإذا كان ما خص حـ من هذه الأرباح ١٧٢٫٢٥ من الجنيهات ، فما مقدار ما دفعه حـ وما مقدار نصيب كل من ا و ب من الأرباح ؟

(٣) اشترك حـ و ء فى تجارة دفع حـ ٢٥٠٠ جنيه و ء ٤٠٠٠ جنيه و بلغت خسارتهما فى آخر السنة ٥٢٠ جنيهاً خصمت من رأس المال ثم اشترك معهما هـ ودفع ٤٥٠٠ جنيه وفى آخر السنة الثانية بلغت أرباحهم ١١٧٩ جنيهاً ، فما مقدار ما يأخذه كل منهم من هذه الأرباح ؟

(٤) كوّن رجلان شركة تجارية وكان رأس مال الأول فيها ١٧٥٠ جنيهاً ورأس مال الثانى ٢٠٠٠ جنيه واتفقا على أن يقوم الأول بإدارة الشركة وأن يأخذ فى مقابل ذلك $\frac{٢}{٩}$ الأرباح وأن يقسم الباقى من الأرباح بينهما بنسبة رأس مال كل منهما ، فإذا كان جميع ما خص الأول من الأرباح ٧١١ جنيهاً فما مقدار ما خص الثانى منها ؟

(٥) شريكان لهما فى تجارة ٤٥٠ ، ٧٥٠ جنيهاً وكان أولهما يدير الشركة ويأخذ فى مقابل ذلك ١٠ ٪ من الأرباح والباقى منها يوزع بين الشريكين بنسبة رأس مال كل منهما فإذا كان جميع ما خص الثانى من الأرباح ١٥٧ ½ من الجنيهات فما مقدار ما أخذه الأول منها ؟

(٦) ح ، ء ، هـ كونوا شركة تجارية دفع ح فيها رأس مال قدره ٩٠٠ جنيه ودفع ء ١٢٠٠ جنيه ودفع هـ ١٦٠٠ جنيه واتفقوا على أن يقوم ح بإدارة الشركة وأن يأخذ فى نظير ذلك ٢٠ ٪ من الأرباح وأن يوزع باقى الأرباح بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا كان ما خص ح من الأرباح ٣٦٥ جنيهاً فما مقدار ما أخذه كل من ء ، هـ منها ؟

(٧) اشترك رجلان فى تجارة دفع الأول ١٣٥٠ جنيهاً ودفع الثانى ٧٥٠ جنيها واتفقا على أنهما يقسمان ٤٠ ٪ من الأرباح مناصفة بينهما لاشتراكهما فى الإدارة والباقى يقسم بينهما بنسبة رأس مال كل منهما فإذا كان نصيب أحدهما يزيد على نصيب الآخر بمقدار ٤٥ جنيها فما ربح كل منهما ؟

(٨) اشترك ا ، ب فى عمل تجارى دفع ا ٥٠٠٠ جنيه ، ب ٦٠٠٠ جنيه وبلغ ربح الشركة ٢٨٠٠ جنيه فإذا خص ا بمبلغ من المال نظير قيامه بالعمل ثم قسم الباقى من الربح بينهما بنسبة رأس مال كل منهما وكان نصيب ب مساويا ⅘ نصيب ا فكم أخذ ا نظير إدارته العمل ؟

(٩) كوّن ثلاثة شركاء شركة تجارية دفع الأول فيها ١٦٨٠ جنيها والثانى ٢٤٠٠ جنيه والثالث ٣١٢٠ جنيها واتفقوا على أن يقوم الأول بإدارة الشركة وأن يأخذ فى نظير ذلك ١٠ ٪ من الأرباح وأن يقسم الباقى منها بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا كان جميع ما خص الأول من الأرباح فى نهاية السنة ٥٤٢,٥ جنيه فما مقدار يأخذه كل من الثانى والثالث منها ؟

(١٠) اشترك ثلاثة أشخاص فى تجارة ودفع الأول ٧٢٠٠ جنيه والثانى ٥٦٠٠ جنيه والثالث ٦٤٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ الأول ١٣ $\frac{1}{3}$ ٪ من الأرباح قبل توزيعها فى نظير إدارته العمل وألا يتحمل شيئاً من الخسارة فإذا كانت الشركة قد خسرت فى نهاية السنة الأولى ١٢٠٠ جنيه خصمت من رأس مال الثانى والثالث ثم ربحت فى نهاية السنة الثانية ٣٠٠٠ جنيه فما مقدار ما خص كلا من الأرباح ؟

(١١) اشترك ح ، ء فى تجارة ودفع ح فيها ٢٥٠٠ جنيه ودفع ء ٤٠٠٠ جنيه فبلغت خسارتهما فى آخر السنة ٥٢٠ جنيهاً خصمت من رأس مالهما ثم اشترك معهما هـ بمبلغ ٤٥٠٠ جنية فبلغت أرباحهم فى نهاية السنة الثانية ٢٣٥٨ جنيهاً فما نصيب كل واحد من هذه الأرباح ؟

(١٢) أربعة شركاء وضعوا فى تجارة ٨٠٠ ، ١٠٠٠ ، ٩٠٠ ، ١٠٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ الأول لقيامه بإدارة الشركة ٥ و ٧٪ من باقى الأرباح بعد دفع ١٥٠ جنيهاً مرتباً سنوياً للثانى فى نظير مراقبته العمل وأن الباقى بعد ذلك يقسم بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فما مقدار ما يأخذه كل من الثانى والثالث والرابع إذا كان كل ما أخذه الأول ٥٥ جنيهاً ؟

(١٣) اشترك شخصان فى شراء منزل ودفع الأول $\frac{17}{24}$ من الثمن ودفع الثانى الباقى منه ثم باعاه بخسارة قدرها ٩٦ جنيهاً فما مقدار خسارة كل منهما ؟

(١٤) أشهر إفلاس أحد التجار وكان مديناً لثلاثة بيوت تجارية الأول بمبلغ ٢٦٦ جنيهاً والثانى بمبلغ ٤٢٤ جنيهاً والثالث بمبلغ ٦٥٠ جنيهاً وقد قومت ممتلكاته بمبلغ ٤٠٢ جنيه فكم يكون نصيب كل دائن ؟

مثال (٣) اشترك ثلاثة رجال فى شركة وضع الأول ٢٠٠٠ جنيه ووضع الثانى ١٥٠٠ جنيه ثم بعد ستة أشهر وضع مبلغا آخر قدره ٨٠٠ جنيه ووضع الثالث ١٢٠٠ جنيه غير أنه بعد مضى شهرين سحب مبلغ ٢٠٠ جنيه فإذا بلغت الأرباح فى نهاية السنة ١٠٣٦ جنيها فما نصيب كل منهم ؟

العمـــل

ربح مبلغ الأول ٢٠٠٠ جنيه لمدة سنة يعادل ما ربحه فى شهر واحد مبلغ ٢٠٠٠ × ١٢ = ٢٤٠٠٠ جنيه

ى ربح مبلغ الثانى ١٥٠٠ جنيه لمدة سنة و ٨٠٠ جنيه لمدة ٦ شهور يعادل ما ربحه فى شهر واحد مبلغ = ١٥٠٠ × ١٢ + ٨٠٠ × ٦

= ٢٢٨٠٠ جنيه

ى ربح مبلغ الثالث ١٢٠٠ لمدة شهرين ، (١٢٠٠ — ٢٠٠) لمدة ١٠ أشهر يعادل ما ربحه فى شهر واحد مبلغ

= ١٢٠٠ × ٢ + ١٠٠٠ × ١٠

= ١٢٤٠٠ جنيه

∴ تقسم الأرباح بنسبة ٢٤٠٠٠ : ٢٢٨٠٠ : ١٢٤٠٠

أى بنسبة ٦١ : ٥٧ : ٣١

∴ نصيب الأول من الأرباح = $\frac{٦٠}{١٤٨}$ × ١٠٣٦ = ٢٤٠ جنيها

ى نصيب الثانى من الأرباح = $\frac{٥٧}{١٤٨}$ × ١٠٣٦ = ٣٩٩ جنيها

ى نصيب الثالث من الأرباح = $\frac{٣١}{١٤٨}$ × ١٠٣٦ = ٢١٧ جنيها

مثال (٤) استأجر رجلان مرعى بمبلغ ٥٤ جنيها ووضع الأول ٢٣ حصانا لمدة ٢٧ يوما ووضع الثانى ٢١ حصانا لمدة ٣٩ يوما فما مقدار ما يدفعه كل منهما من هذا الإيجار ؟

العمـــل

∴ ما يأكله ٢٣ حصاناً فى ٢٧ يوماً يعادل ما يأكله فى يوم واحد

٢٣ × ٢٧ حصاناً = ٦٢١ حصاناً

و كذلك ما يأكله ٢١ حصاناً فى ٣٩ يوماً يعادل ما يأكله فى يوم واحد

٢١ × ٣٩ حصاناً = ٨١٩ حصاناً

∴ يقسم الإيجار بين الرجلين بنسبة ٦٢١ : ٨١٩ أى بنسبة ٦٩ : ٩١

الجواب
∴ ما يدفعه الأول من الإيجار = $\frac{٦٩}{١٦٠}$ × ٥٤ = ٢٣و٢٨٥ جنيهاً
و ما يدفعه الثانى من الإيجار = $\frac{٩١}{١٦٠}$ × ٥٤ = ٣٠و٧١٥ جنيهاً

تمرين ٢٢

(١) اشترك ثلاثة أشخاص فى تجارة ووضع الأول ٣٠٠ جنيه لمدة ١١ شهراً ووضع الثانى ٦٥٠ جنيهاً لمدة ٨ شهور والثالث ٥٠٠ جنيه لمدة ٣ شهور واكتسبوا ٢١٠ جنيهات فما مقدار ما خص كل واحد من الربح ؟

(٢) فتح شخص محلا تجاريا برأس مال قدره ٦٠٠ جنيه و بعد ٣ أشهر شاركه آخر بمبلغ ٣٠٠ جنيه و بعد مضى ٦ أشهر من تاريخ تأسيس المحل دفع كل واحد منهما ٣٠٠ جنيه و بعد سنة ونصف من الابتداء بلغ الربح ٣٧٥ جنيهاً فما نصيب كل واحد من ذلك ؟

(٣) اشترك ثلاثة رجال فى تجارة لمدة سنة ودفع الأول فى الابتداء ٢٠٠٠ جنيه ودفع الثانى ٥٠٠٠ جنيه ودفع الثالث ٤٠٠٠ جنيه . و بعد ثلاثة أشهر من تاريخ تأسيس الشركة أضاف الأول إلى رأس ماله ٥٠٠ جنيه و بعد ٤ أشهر من التأسيس أيضاً سحب الثانى ٣٠٠ جنيه وفى نهاية السنة بلغ الربح الكلى ٢٦٨٢ جنيهاً فكم يخص كلا منهم من هذا الربح ؟

(٤) اشترك ا ، ب فى تجارة ووضع كل منهما ٧٥٠ جنيهاً و بعد ٤ أشهر انضم إليهما حـ وفى نهاية السنة وزعت الأرباح عليهم بالتساوى فكم كان رأس مال حـ ؟

(٥) ابتدأ ا عملا تجاريا برأس مال قدره ٨٠٠ جنيه و بعد ٤ أشهر انضم إليه ب برأس مال ١٤٠٠ جنيه و بعد ذلك بشهرين انضم إليهما حـ وكانت الأرباح فى نهاية السنة ١٣٦٨ جنيهاً خص حـ منها ٤٣٢ جنيهاً فكم كان رأس ماله ؟

(٦) اشترك ا ، ب ، حـ فى تجارة ابتدأها ا بمبلغ ٢٠٠٠ جنيه أما ب فدفع فى الابتداء ٣٠٠٠ جنيه ثم دفع بعد ٤ أشهر ١٠٠٠ جنيه ، حـ دفع فى الابتداء ٤٠٠٠ جنيه ثم بعد ٩ أشهر سحب ١٠٠٠ جنيه من رأس ماله وفى آخر السنة بلغت أرباحهم ٨٤٧٥ جنيهاً فما مقدار ما خص كل واحد منهم من هذه الأرباح ؟

(٧) اشترك ٣ أشخاص فى تجارة فبلغت أرباحهم ٣٢٨٫٥ جنيه فإذا كان رأس مال الأول ١١٢٠ جنيهاً ومكث فى التجارة ١٢ شهراً ورأس مال الثانى ١٢٣٠ جنيهاً والثالث ١٢٦٠ جنيهاً . وكان نصيب الأول من الأرباح ١١٥٫٢ جنيه والثانى ١١٠٫٧ جنيه فما الزمن الذى مكثه كل من رأس مال الثانى والثالث فى التجارة ؟

(٨) ابتدأ ا عملا تجاريا برأس مال قدره ٤٠٠٠ جنيه و بعد ٤ شهور انضم إليه ب بمبلغ ٣٠٠٠ جنيه و بعد ذلك بشهرين انضم إليهما حـ بمبلغ ٥٠٠٠ جنيه وفى نهاية السنة قسمت الأرباح وكان نصيب حـ منها $\frac{1}{4}$ ٥٨١ جنيه فما نصيب كل من ا ، ب منها ؟

(٩) اشترك ا ، ب ، حـ فى تجارة ودفع الأول من رأس مالها $\frac{2}{3}$ ٦٦٦ من الجنيهات أما ب فدفع أولا ٥٠٠ جنيه ثم أبلغها بعد ٧ شهور إلى $\frac{2}{3}$ ٧٦٦ من الجنيهات ودفع حـ فى أول الأمر ٨٠٠ جنيه ثم أنقصها إلى ٣٠٠ جنيه

بعد ٣ أشهر و بعد مضى سنة من تأسيس الشركة كان نصيب ب من الأرباح يزيد على نصيب حـ منها بمقدار $\frac{1}{24}$ ٥٣ جنيهاً فما مقدار ما خص ا من الأرباح ؟

(١٠) اشترك ا و ب و حـ فى تجارة ودفع ا مبلغ ٦٥٠٠ جنيه و ب ٨٥٠٠ جنيه و حـ ١٥٠٠٠ جنيه و بعد مضى ٤ أشهر سحب كل واحد منهم ١٠٠٠ جنيه من رأس ماله واستمرت الشركة بعد ذلك ٨ أشهر فبلغت أرباحها ٢١٨٤ جنيها فما مقدار ما خص كل واحد من الأرباح ؟

(١١) فتح ا محلا تجاريا برأس مال ٤٥٠ جنيها و بعد ٤ أشهر شاركه ب بمبلغ ٣٠٠ جنيه ثم بعد شهرين آخرين شاركهما حـ بمبلغ ٥٠٠ جنيه غير أنه بعد مضى شهرين من اشتراكه سحب مبلغ ٢٥٠ جنيهاً من رأس ماله وفى نهاية السنة زاد نصيب ا من الأرباح على نصيب ب بمقدار ٧٥ جنيهاً فما هى الأرباح وما نصيب كل منهما ؟

(١٢) كون ا و ب شركة تجارية ووضع كل منهما رأس مال قدره ٢٠٠٠ جنيه واتفقا على أن يأخذ ا ٥٠٠ جنيه سنوياً نظير إدارة الشركة و بعد ٨ شهور أضاف ب إلى رأس ماله ١٠٠٠ جنيه فكان نصيبه من الأرباح فى آخر السنة ٣٥٠ جنيهاً فماذا كان نصيب ا منها ؟

(١٣) ثلاثة من تجار الماشية استأجروا مرعى واحداً بمبلغ ٦٦ جنيهاً فى السنة ووضع الأول ٨ بقرات لمدة ١٠ أشهر ووضع الثانى ٧ بقرات لمدة ١٢ شهراً ووضع الثالث ٢٠ بقرة لمدة ٥ أشهر فما مقدار ما يدفعه كل واحد من الإيجار ؟

(١٤) استأجر ا و ب مرعى لمدة ١٠ أشهر بمبلغ ١٥٠ قرشاً فى الشهر الواحد فإذا وضع ا ١٤ بقرة لمدة ٩ أشهر فكم بقرة يمكن ب أن يضعها مدة الشهر الباقى إذا دفع مبلغاً أقل مما دفعه ا بستة جنيهات ؟

تمرين ٢٣

مسائل متنوعة على الشركات

(١) تاجر مدين لأربعة دائنين بالمبالغ الآتية :
٢٨٩ و ٣٨١ و ٢٤٢ و ١٧٦ جنيهاً على التعاقب فإذا أفلس التاجر ووجد عند عمل التصفية أن قيمة تجارته ٦٢٦ جنيهاً ثم أعطى السمسار القائم بعمل التصفية من ذلك قيمة أتعابه ووزع الباقى على الدائنين بنسبة مبالغهم نخص الدائن الأول ١٢٥٫٨٠٠ جنيهاً فأوجد قيمة أتعاب السمسار الذى قام بعمل التصفية ؟

(٢) كوّن ثلاثة أشخاص شركة فدفع الأول ١٢٠٠ جنيه ودفع الثانى ١٥٠٠ جنيه ودفع الثالث ١٦٠٠ جنيه واشترطوا أن يؤخذ ٢٠ ٪ من الأرباح السنوية ويقسم عليهم بالتساوى فى نظير إدارة العمل ويقسم الباقى بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا بلغ نصيب الأول من جملة الأرباح فى سنة ما ١٨٧ جنيهاً فأوجد نصيب كل من الآخرين .

(٣) شرع رجل فى عمل تجارى برأس مال قدره ١٥٦٠ جنيهاً و بعد مدة من الزمن انضم إليه أخوه برأس مال قدره ١٨٦٠ جنيهاً ثم بعد مدة أخرى من الزمن انضم إليه ابن عمه برأس مال قدره ٢٤٢٠ جنيها و بعد مضى سنة بلغت الأرباح ٦٩٣ جنيهاً أخذ منها الأخ ١٩٧٫٧٨٠ جنيهاً وأخذ منها ابن العم ١٨٦٫٣٤٠ جنيهاً فإذا علم أن نصيب الرجل الأول بصفته مديراً للشركة يساوى نصف الأرباح التى خصت رأس ماله فأوجد عدد الأشهر التى بعدها انضم ابن العم إلى الشركة .

(٤) اشترك ا و ب بمبلغين النسبة بينهما كنسبة ٣ : ٤ و بعد أربعة أشهر سحبا $\frac{٢}{٥}$ و $\frac{٣}{٨}$ مبلغيهما على الترتيب وقد وجد فى آخر السنة أن الأرباح ٦٢٤ جنيهاً فما مقدار ما يأخذه كل منهما من هذه الأرباح ؟

(٥) دفع ا فى تجارة ٢١٢ جنيهاً ثم شاركه ب بمبلغ ١٢٧٢ جنيهاً وفى نهاية السنة وجد أن ماخص ب من الأرباح يعادل ٣ أمثال ماخص ا منها فبعد كم شهر من تأسيس التجارة اشترك ب ؟

(٦) اشترك ا ، ب ، حـ فى تجارة ودفعوا ٥٠٠ ، ٤٠٠ ، ٣٠٠ من الجنيهات على الترتيب و بعد أربعة أشهر أضاف حـ مبلغاً إلى رأس ماله وفى نهاية السنة بلغت الأرباح ٦٢٤ جنيهاً خص ب منها ١٦٠ جنيهاً فما هو المبلغ الذى أضافه حـ ؟

(٧) اشترك ا ، ب ، حـ فى تجارة ومكث رأس مال ا فيها ٨ أشهر وأخذ نصف الأرباح ومكث رأس مال ب ١٠ أشهر وأخذ ثلث الأرباح ودفع حـ ١٠٠٠ جنيه ومكث السنة بأكملها وأخذ $\frac{1}{6}$ الأرباح فما هو رأس مال كل من ا ، ب ؟

(٨) أسس ا ، ب مشروعاً تجارياً وكان نصيب رأس مال ا ضعف رأس مال ب و بعد مضى ستة أشهر سحب ا ربع رأس ماله و بعد مضى سنة من تاريخ تأسيس المشروع انضم إليهما حـ برأس مال قدره ٧٥٠ جنيهاً و بعد مضى سنتين من تاريخ تأسيس المشروع بلغت أرباحهم ١٤٤٠ جنيهاً خص حـ منها ١٨٠ جنيهاً فما مقدار رأس مال ب ؟

(٩) استأجر ثلاثة رجال ا ، ب ، حـ مرعى بمبلغ ٣٦ جنيهاً وقد وضع ا فى هذا المرعى ٨ خيول ووضع ب ١٣ ثوراً ووضع حـ ٢٢ نعجة فإذا علم أن نسبة تكاليف رعى الحصان والثور والنعجة تساوى ٣ : ٢ : ١ فكم يجب أن يدفع كل من إيجار هذا المرعى ؟

(١٠) استأجر ثلاثة رجال ا ، ب ، حـ مرعى لمدة شهر فوضع ا ١٩ ثوراً مدة ٢٥ يوماً ووضع ب ٦٩ ثوراً مدة ٦ أيام ووضع حـ ١٥٣ ثوراً لمدة ٣ أيام فإذا بلغ إيجار هذا المرعى ١٣٫٤٨ جنيهاً فكم يجب أن يدفع كل منهم ؟

(١١) استأجر شخصان مرعى بمقدار ٤٠٠و١٠١ جنيه ووضع الأول فيه ١٥ ثوراً لمدة ٦ أشهر و ٥٤ نعجة لمدة شهرين ووضع الثانى ٦ أحصنة و ٤٨ ثوراً لمدة ٣ أشهر فإذا كان كل ٣ أحصنة و ٣ نعاج تأكل معاً بقدر ما تأكله ٥ ثيران وما يأكله ثوران قدر ما تأكله ٧ نعاج فما حصة كل من الشخصين فى إيجار المرعى ؟

(١٢) اشترك ثلاثة فلاحين فى مرعى فأنزل الأول به ٢٥ حصاناً لمدة ٢٠ يوماً وأنزل الثانى ١٦ بغلا لمدة ١٨ يوماً وأنزل الثالث ٢٠ ثوراً لمدة ١٦ يوماً فإذا دفع الأول مبلغاً يزيد ٣٢٠ قرشاً على نصف ما دفعه الآخران وعلم أن ما يكفى ٣ ثيران يكفى ٤ من البغال أو يكفى ٥ من الخيل فى نفس الزمن فكم دفع كل منهم ؟

(١٣) استأجر ا ، ب ، حـ أرضاً للصيد بها مدة الشهور الثلاثة : سبتمبر وأكتوبر ونوفمبر بمبلغ ٤٢ جنيهاً ، ٧٩٠ مليما فما مقدار ما يدفعه كل منهم من هذا الإيجار إذا علم أن ا باشر الصيد بها مدة ١٠ أيام من كل شهر ، ب مدة ٨ أيام من سبتمبر و ١٥ من أكتوبر و ١٦ يوماً من نوفمبر ، حـ مدة ١٤ يوماً من سبتمبر و ١٠ أيام من أكتوبر و ٢٠ يوماً من نوفمبر وأن الصيد فى اليوم من سبتمبر يعادله فى يومين من أكتوبر أو ٣ من نوفمبر ؟

(١٤) اشترك محمد وعلى فى تجارة فدفع محمد ٧٠٠ جنيه ودفع على ٦٠٠ جنيه واتفقا على أن يقوم محمد بإدارة الشركة نظير نسبة مئوية معينة من الأرباح الكلية وبعد مضى ٤ شهور من بدء الشركة شاركهما إبراهيم فدفع ٤٠٠ جنيه وقبل شروط الاتفاق السابقة وفى نهاية السنة من بدء الشركة كانت الأرباح الكلية ٢٥٠ جنيهاً وكان نصيب محمد منها ١٢٠ جنيهاً فكم فى المائة من الأرباح كان نصيب محمد نظير إدارته العمل ؟

(١٥) اشترك ا ، ب ، حـ فى تجارة فوضع ا ٨٠٠ جنيه ، ب ١٠٠٠ جنيه ، حـ ٧٥٠ جنيهاً و بعد ٥ شهور أضاف الأول ٢٠٠ جنيه و بعد ٥ شهور أخرى سحب الثانى مبلغاً من رأس ماله وأضاف الثالث ٤٣٠ جنيهاً وقد اتفقوا على أن يقوم الثالث بإدارة الشركة نظير نسبة مئوية معينة من الأرباح ثم يقسم باقى الأرباح بينهم بنسبة رءوس الأموال مع مراعاة التغير الذى طرأ عليها فوجدوا فى نهاية السنة الأولى أن أنصبتهم من الأرباح متساوية والمطلوب إيجاد ما سحبه الثانى والنسبة المئوية لما أخذه الثالث من الأرباح نظير إدارته الشركة .

(١٦) اشترك ا ، ب ، حـ فى تجارة فدفع الأول ٦٣٠٠ جنيه والثانى ٥٠٠٠ جنيه والثالث ٦٠٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ ا ١٠ ٪ من الأرباح قبل توزيعها نظير إدارته العمل وألا يتحمل شيئاً من الخسارة فإذا كانت الشركة قد خسرت فى نهاية السنة الأولى ١١٠٠ جنيه خصمت من رأس مال ب ، حـ ثم ربحت فى نهاية السنة الثانية ٣٦٠٠ جنيه وصفيت أعمال الشركة . أوجد ما آل إليه حينئذ رأس مال كل من الشركاء الثلاثة .

الباب السابع

٥٤ — مسائل على الربح البسيط للاعادة *

(مثال ١) ما هو السعر الذى إذا وضع به مبلغ ١٣٥٠ جنيهاً ليربح ربحاً بسيطاً لمدة ٥ $\frac{٣}{٤}$ سنة تكون جملته فى نهاية المدة ١٦٢١ $\frac{١١}{١٦}$ من الجنيهات ؟

العمـــــل

الربح الكلى = ١٦٢١ $\frac{١١}{١٦}$ — ١٣٥٠ = ٢٧١ $\frac{١١}{١٦}$ جنيها

∴ الربح فى السنة الواحدة ٢٧١ $\frac{١١}{١٦}$ ÷ ٥ $\frac{٣}{٤}$ جنيها

∴ ربح المائة جنيه فى السنة الواحدة = $\frac{٢٧١\frac{١١}{١٦} \times ١٠٠}{٥\frac{٣}{٤} \times ١٣٥٠}$ = ٣ $\frac{١}{٢}$ جنيه

∴ السعر ٣ $\frac{١}{٢}$ ٪ فى السنة

(مثال ٢) أوجد الزمن الذى يؤول فيه مبلغ ٤٨٨ $\frac{١}{٦}$ جنيها بالربح البسيط بسعر ٣ ٪ فى السنة إلى جملة قدرها ٥٠٦ $\frac{٢٤٧}{٤٨٠}$ جنيهات .

العمـــــل

الربح الكلى = ٥٠٦ $\frac{٢٤٧}{٤٨٠}$ — ٤٨٨ $\frac{١}{٦}$ = ١٨ $\frac{٤٩}{١٦٠}$ جنيهاً

∴ الزمن = $\frac{١٠٠ \times ١٨\frac{٤٩}{١٦٠}}{٣ \times ٤٨٨\frac{١}{٦}}$ = ١ $\frac{١}{٤}$ سنة

(مثال ٣) أودع مبلغ من المال بالربح البسيط فى مصرف لمدة ٣ سنوات فبلغت جملته ٢٦٨ $\frac{٤}{٥}$ جنيهاً و بلغت جملته فى نهاية ٧ سنوات ٣٠٧ $\frac{١}{٥}$ جنيهات أوجد المبلغ والسعر .

---

(١) يحسن تدريب التلاميذ على حل بعض هذه التمارين كاعادة لمقرر المدارس الابتدائية من جهة وكتمهيد لمسائل الربح المركب والحطيطة من جهة أخرى .

العمـــل

ربح المبلغ فى ٤ سنوات = $٣٠٧\frac{١}{٥} - ٢٦٨\frac{٤}{٥} = ٣٨\frac{٢}{٥}$ جنيهاً

∴ الربح لمدة ٣ سنوات = $٣٨\frac{٢}{٥} \times \frac{٣}{٤} = ٢٨\frac{٤}{٥}$ جنيهاً

∴ رأس المال = $٢٦٨\frac{٤}{٥} - ٢٨\frac{٤}{٥} = ٢٤٠$ جنيهاً

∴ ربح المائة جنيه فى السنة = $٢٨\frac{٤}{٥} \times \frac{١٠٠}{٣ \times ٢٤٠} = ٤$ جنيهات

∴ السعر ٤ ٪

(مثال ٤) يقتصد موظف ٥٠ جنيهاً سنوياً يودعها بالربح البسيط فى مصرف فى أول يناير من كل سنة أوجد كم يكون لهذا الرجل فى المصرف بعد دفع الدفعة الرابعة مباشرة مع العلم بأن السعر ٥ ٪ فى السنة .

العمـــل

آخر دفعة لم تحسب عليها أرباح بعد قيمتها ٥٠ جنيها

الدفعة التى قبلها حسب عليها أرباح سنة ∴ قيمتها $٥٠ + \frac{٥ \times ٥٠}{١٠٠}$

الدفعة التى قبل هذه تحسب عليها أرباح سنتين ∴ قيمتها $٥٠ + \frac{٢ \times ٥ \times ٥٠}{١٠٠}$

و الدفعة التى قبل هذه تحسب عليها أرباح ٣ سنوات ∴ قيمتها $٥٠ + \frac{٣ \times ٥ \times ٥٠}{١٠٠}$

جملة ما للرجل فى المصرف .

$$= ٥٠ + (٥٠ + \frac{٥ \times ٥٠}{١٠٠}) + (٥٠ + \frac{٢ \times ٥ \times ٥٠}{١٠٠}) + (٥٠ + \frac{٣ \times ٥ \times ٥٠}{١٠٠})$$

$$= ٥٠ + ٥٢\frac{١}{٢} + ٥٥ + ٥٧\frac{١}{٢} = ٢١٥ \text{ جنيهاً}$$

تمرين ٢٤

(١) أودع شخص ٥٠٠ جنيه فى مصرف فى أول أغسطس سنة ١٩٣٦ وكان السعر $٢\frac{١}{٢}$ ٪ فى السنة وفى يوم ١٣ أكتوبر من السنة نفسها تغير الربح فصار $٣\frac{١}{٢}$ ٪ وفى ٢٠ مايو سنة ١٩٣٧ زاد السعر إلى ٤ ٪ فأوجد ما آل إليه مبلغ هذا الرجل فى يوم أول أغسطس سنة ١٩٣٧

(٢) مبلغان الفرق بينهما ٥٠٠ جنيه أودعا فى مصرفين أحدهما بسعر ٤ ٪ والآخر بسعر ٥ ٪ فكان الربح البسيط لأحدهما لأى زمن يساوى الربح البسيط للاخر فى نفس الزمن فأوجد المبلغين .

(٣) اقترض رجل مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه بسعر ٤ ٪ فى السنة وكان يسدد فى نهاية كل سنة ٨٠٠ جنيه منها أرباح الدين فى مدة السنة والباقى من أصل الدين أوجد ما آل إليه الدين فى نهاية ٣ سنوات .

(٤) مملكة مدينة بمبلغ ٥٨٩٫٠٠٠٫٠٠٠ جنيه تدفع عليها ربحا سنوياً بسعر ٥ ٪ فإذا كانت تسدد للدائنين سنوياً ٤٠٫٠٠٠٫٠٠٠ جنيه جزء منها أرباح للدين فى تلك السنة والباقى لاستهلاك جزء من الدين فأوجد ما آل إليه الدين فى نهاية ٣ سنوات .

(٥) اشترى تاجر بضاعة بمبلغ ١٠٥٠ جنيهاً باعها بعد شرائها بمدة ٦ شهور بمبلغ ٨٦٧ جنيهاً أوجد مقدار خسارته إذا علم أنه كان يستطيع استثمار ثمن الشراء بسعر ٨ ٪ فى السنة

(٦) مع رجل ٤٠٠٠ جنيه أقرض منها ٥٠٠ جنيه بسعر ٣ ½ ٪ فى السنة و ٢٠٠٠ جنيه بسعر ٤ ٪ فى السنة فما هو السعر الذى يجب أن يقرض به الباقى حتى يكون ربحه الكلى معادلا ٤ ¼ ٪ من مبلغه الأصلى ؟

(٧) الربح البسيط لمبلغ معين بسعر ٤ ¼ ٪ فى السنة لمدة سنتين ، ٤ أشهر يزيد ٦٣ جنيهاً على ربحه البسيط بسعر ٥ ٪ فى مدة ٩ أشهر وسنة واحدة فما هو هذا المبلغ ؟

(٨) أودع مبلغان من المال مجموعهما ١٩٤٦ ¼ جنيهاً أصغرهما بسعر ٤ ٪ فى السنة والأكبر بسعر ٤ ½ ٪ فى السنة وفى نهاية ١٨ شهراً كان مجموع ربحيهما ١٢٥ ٣٩/١٦٠ جنيهاً أوجد هذين المبلغين .

(٩) اشترى رجل منزلا و ٥ أفدنة بسعر ٤٤٠٠ جنيه وأجر المنزل بمبلغ ١٥٠ جنيهاً فى السنة و بنى ثلاثة بيوت على الأرض التى اشتراها و بلغت تكاليف

بناء البيت الواحد ١٨٠٠ جنيه أوجد المبلغ الذى يجب أن يؤجر به البيت الواحد من البيوت الجديدة بحيث يحصل على ٥٪ أرباحاً سنوية من المبالغ التى صرفها بعد خصم $\frac{1}{6}$ الإيراد نظير الإصلاحات .

(١٠) مبلغان من المال الفرق بينهما ٥ جنيهات وضع الأكبر بسعر $٣\frac{1}{2}$٪ والأصغر بسعر $٤\frac{1}{2}$٪ فى السنة فإذا بلغت جملتاهما فى نهاية سنة $98\frac{31}{40}$ جنيهاً فما المبلغان ؟

(١١) أعطى والد ابنه الأكبر فى يوم ٢٣ يونيه سنة ١٨٨٩ مبلغ ٣٠٠٠ جنيه وأعطى ابنه الثانى فى ٢٣ ديسمبر سنة ١٨٨٩ مبلغ ١٠٠٠ جنيه وتوفى هذا الرجل فى إبريل سنة ١٨٩١ تاركاً أمواله توزع بالتساوى بين أولاده الثلاثة على أن يدخل فى هذا التوزيع المبلغ الذى وضعه لكل من ولديه وربحه البسيط بسعر ٥٪ فى السنة حتى يوم تسوية الحساب فإذا عملت التسوية يوم ٢٣ يونيه سنة ١٨٩١ وكان المبلغ الذى تركه الرجل ٦٧٣٤ جنيهاً ، أوجد كم يكون نصيب الأولاد الثلاثة .

(١٢) أودع مبلغ بالربح البسيط لمدة $٣\frac{1}{2}$ سنة فصارت جملته ٢٨٥ جنيهاً ، فإذا علم أن الربح البسيط يعادل $\frac{7}{50}$ من رأس المال فأوجد كلا من السعر ورأس المال .

(١٣) مبلغ تصير جملته بعد ١٦ سنة ضعف رأس المال ، فكم كان السعر الذى حسب به الربح البسيط ؟

(١٤) مبلغ تصير جملته فى ١٠ سنوات بالربح البسيط بسعر $٣\frac{1}{2}$٪ فى السنة ٥٠٦ جنيهات انكليزية و ١٥ شلناً و $١\frac{1}{4}$ بنساً ، أوجد عدد السنين التى تمر بعد ذلك حتى تصير الجملة ٧٠٣ جنيهات إنكليزية و ١٦ شلناً و $٦\frac{3}{4}$ بنساً

(١٥) فى أول يناير سنة ١٩٣٥ أودع شخص ٣٦٥٠ جنيهاً فى مصرف بسعر ٥٪ فى السنة ثم سحب أرباحه فى ٥ فبراير من السنة نفسها وفى يوم آخر أودع مبلغ ٢١٩٠ جنيهاً فى نفس المصرف بنفس السعر ثم سحب أرباحه

فى ٦ سبتمبر من السنة نفسها فبلغ مجموع ربحيهما ١و٣٠ جنيها فما تاريخ اليوم الذى أودع فيه المبلغ الثانى ؟

(١٦) أوجد تاريخ اليوم الذى أودعت فيه ٧٣٠٠ جنيه بسعر ٥ ٪ فى السنة يكون الربح البسيط فى يوم ٨ مايو سنة ١٩٣٧ مبلغ ٨٠ جنيهاً

الربح المركب

١ — استخراج الجملة والربح من غير استعمال القانون :

٥٥ — إذا اقترض شخص مبلغاً من مصرف أو غيره فإنه يدفع فائدة تسمى الربح نظير انتفاعه بهذا القرض .

ويدفع الربح كل سنة أو كل نصف سنة أو كل ربع سنة على حسب الاتفاق بين الدائن والمدين . ويقدر عن وحدة الزمن بنسبة مئوية من المبلغ المقترض يقال لها « السعر »

إذا لم يدفع الربح بل أضيف كل سنة (أو نحوها) إلى رأس المال ليكون رأس مال جديد فحينئذ يسمى الربح مركباً .

٥٦ — لنوضح الآن طريقة حساب الربح المركب والجملة ورأس المال بالأمثلة الآتية :

(مثال ١) ما هى الجملة التى يئول إليها مبلغ ٦٢٥٠ جنيهاً إذا وضع فى مصرف بالربح المركب بسعر ٤ ٪ فى السنة لمدة ثلاث سنوات ؟

العمـــــل

ربح الجنيه الواحد فى السنة = ٠و٠٤ من الجنيه

∴ رأس المال الأصلى فى السنة الأولى = ٦٢٥٠ جنيهاً

∴ ربحه فى السنة الأولى = ٢٥٠ جنيهاً (وهو يساوى ٠و٠٤ × ٦٢٥٠)

∴ جملة المبلغ فى نهاية السنة الأولى

أو رأس المال للسنة الثانية = ٦٥٠٠ (بالجمع)

ويكون ربحه فى السنة الثانية = ٢٦٠ جنيهاً (وهو = ٠٤و٠ × ٦٥٠٠)

∴ جملة المبلغ فى نهاية السنة الثانية

أو رأس المال للسنة الثالثة = ٦٧٦٠ جنيهاً (بالجمع)

ويكون ربحه فى السنة الثالثة = ٤و٢٧٠ جنيهاً (وهو = ٠٤و٠ × ٦٧٦٠)

∴ بالجمع تكون الجملة فى نهاية السنة الثالثة = ٥و٧٠٣٠ جنيهاً

∴ الربح المركب فى المدة كلها = ٤و٧٠٣٠ — ٦٢٥٠ = ٤و٧٨٠ جنيهاً

٥٧ — ملاحظات :

(١) الجملة فى نهاية السنة الأولى هى رأس المال للسنة الثانية ، والجملة فى نهاية السنة الثانية هى راس المال للسنة الثالثة وهكذا .

(٢) الربح للسنة الأولى بسيط لأنه ربح رأس المال الأصلى ، أما الربح فى السنة الثانية فمركب من ربح رأس المال الأصلى وربح ربحه للسنة الأولى . والربح فى السنة الثالثة مركب أيضاً من ربح رأس المال الأصلى وربح أرباحه .

وعلى ذلك نرى أن الربح يتزايد سنة فسنة تبعاً لزيادة رأس المال والفرق بين أى ربحين متتاليين هو ربح أولهما .

(٣) الفرق بين جملتين متتاليتين هو ربح أولاهما

(مثال ٢) أوجد ما يئول إليه مبلغ ٢٥٠٠٠ جنيه بعد سنتين بسعر الربح المركب ٦ ٪ فى السنة إذا كان الربح يحسب كل نصف سنة

العمل

[الجملة بالإجمال = ٢٥٠٠٠ × ١و١٢ = ٢٨٠٠٠ جنيه تقريباً]

السعر = ٦ ٪ فى السنة أى ٣ ٪ فى نصف السنة وعدد المدد = ٤

∴ رأس المال فى المدة الأولى :

	جنيه	جنيه
	= ٢٥٠٠٠	
ربحه فى المدة الأولى	= ٧٥٠	وهو = ٠,٠٣ × ٢٥٠٠٠
جملة المدة الأولى ورأس المال فى المدة الثانيه (بالجمع)	= ٢٥٧٥٠	
ربحه فى المدة الثانية	= ٧٧٢,٥	وهو = ٠,٠٣ × ٢٥٧٥٠
جملة المدة الثانية ورأس المال فى المدة الثالثة (بالجمع)	= ٢٦٥٢٢,٥	
ربحه فى المدة الثالثة	= ٧٩٥,٦٧٥	وهو = ٠,٠٣ × ٢٦٥٢٢,٥
جملة المدة الثالثة ورأس المال فى المدة الرابعة (بالجمع)	= ٢٧٣١٨,١٧٥	
ربحه فى المدة الرابعة	= ٨١٩,٥٤٥٢٥	وهو = ٠,٠٣ × ٢٧٣١٨,١٧٥

∴ الجملة الكلية فى نهاية المدة = ٢٨١٣٧,٧٢٠٢٥

= ٢٨١٣٧ جنيهاً و ٧٢٠ مليما تقريبا

(مثال ٣) ما الفرق بين الربح المركب والربح البسيط لمبلغ ٤١٨و٦٢٥ جنيها بسعر ٣و٥ ٪ فى السنة لمدة سنتين إذا علم أن الأرباح تضاف كل نصف سنة .

العمـــل

الأرباح تضاف ٤ مرات بسعر (٣,٥ ÷ ٢) ٪ = ١,٧٥ ٪ فى كل مدة .

رأس المال فى المدة الأولى = ٤١٨,٦٢٥ جنيهاً .

ربحه فى المدة الأولى = ٤,١٨٦٢٥ وهو = ٠,٠١ × ٤١٨,٦٢٥
٢,٩٣٠٣٨ وهو = ٠,٠٠٧ × ٤١٨,٦٢٥
٠,٢٠٩٣١ وهو = ٠,٠٠٠٥ × ٤١٨,٦٢٥
= ٧,٣٢٥٩٤

رأس المال للمدة الثانية = ٤٢٥,٩٥٠٩٤

ربحه فى المدة الثانية = ٤,٢٥٩٥١
٢,٩٨١٦٥
٠,٢١٢٩٨

رأس المال للمدة الثالثة = ٤٣٣,٤٠٥٠٨

ربحه فى المدة الثالثة = ٤,٣٣٤٠٥
٣,٠٣٣٨٤
٠,٢١٦٨٠

رأس المال للمدة الرابعة = ٤٤٠,٩٨٩٦٧

ربحه فى المدة الرابعة = ٤,٤٠٩٩٠
٣,٠٨٦٩٢
٠,٢٢٠٤٩

الجملة الكلية = ٤٤٧,٧٠٦٩٨

∴ رأس المال = ٤١٨,٦٢٥

∴ الربح المركب = ٣٠,٠٨١٩٨

الربح البسيط = ٣,٥ × ٢ × $\frac{٤١٨,٦٢٥}{١٠٠}$ = ٢٩,٣٠٣٧٥

∴ الفرق = ٠,٧٧٨٢٣ = ٧٧٨ مليما الجواب

تمرين ٢٥

(١) أوجد ما يئول اليه مبلغ

(ا) ٦٨٠٠ جنيه بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ فى السنة

(ب) ٢٣٨٠ جنيهاً بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ فى السنة

(حـ) ٢٤٠٠ جنيه بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٣٫٥ ٪ فى السنة

(ء) ٥٧٦٠ جنيهاً بعد سنتين بسعر الربح المركب ٣٫٢٥ ٪ فى السنة

(٢) أوجد الربح المركب لمبلغ ٢٤٠٠ جنيه فى مدة ٤ سنوات بسعر الربح ٦ ٪ فى السنة

(٣) أوجد الربح المركب لمبلغ ٤٥٠ جنيهاً فى مدة ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة

(٤) أوجد الربح المركب لمبلغ ٥١٦ جنيهاً فى مدة سنتين بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة مع العلم بأنه يحسب كل نصف سنة

(٥) وضع رجل ٣٦٠٠ جنيه فى مصرف سعر الربح فيه ٢٫٧٥ ٪ فى السنة فإذا ترك الرجل أرباحه تنضم فى نهاية كل سنة إلى رأس المال ووضع فى نهاية السنة الأولى على ماله فى المصرف مبلغاً آخر قدره ٨١ جنيهاً وسحب فى نهاية السنة الثانية ١٥٦٫٧٥ من الجنيهات فما مقدار ما للرجل فى المصرف فى نهاية السنة الثالثة ؟

(٦) أوجد الفرق بين الربح المركب والربح البسيط لمبلغ ٢٥٠٠ جنيه فى مدة سنتين بسعر الربح المركب ٤ ٪

(٧) أوجد الفرق بين الربحين المركب والبسيط لمبلغ ٢٠٠٠ جنيه فى مدة ١٦ شهراً بسعر ٦ ٪ فى السنة مع العلم بأن الأرباح تحسب كل ٤ أشهر

(٨) يدفع شخص فى مصرف التوفير ٤٠٠ جنيه فى أول كل سنة لمدة ٤ سنوات فما مقدار ما للرجل فى المصرف فى نهاية السنة الرابعة إذا كان سعر الربح المركب ٣ ٪ فى السنة ؟

٢ — استخراج الجملة ورأس المال بالقانون

٥٨ — يمكن الحصول على الجملة فى حساب الربح المركب بطريقة أخرى وذلك بأن نبحث أولا عما تئول إليه الوحدة من رأس المال فى المدة المعلومة بالسعر المفروض ثم نضرب الناتج فى عدد وحدات رأس المال هكذا

(مثال ١) ما هى الجملة التى يئول إليها مبلغ ٦٨٠٠ جنيه بسعر الربح المركب ٥ ٪ فى السنة لمدة ٣ سنوات ؟

العمـــــل

∴ ربح الجنيه الواحد من رأس المال فى السنة = ٠٫٠٥ جنيه

∴ ما يئول إليه الجنيه الواحد فى سنة = ١ + ٠٫٠٥ = ١٫٠٥ جنيه

أى أن جملة الجنيه فى نهاية السنة الأولى = ١٫٠٥ جنيه

= رأس مال السنة الثانية

∴ ما يئول إليه الجنيه من رأس المال فى نهاية السنة الثانية

= رأس مال السنة الثانية × جملة الجنيه فى سنة

= ١٫٠٥ × ١٫٠٥ = ١٫٠٥^{٢} جنيه

= رأس مال السنة الثالثة

∴ ما يئول إليه الجنيه من رأس المال فى نهاية السنة الثالثة

= رأس مال السنة الثالثة × جملة الجنيه فى سنة

= ١٫٠٥^{٢} × ١٫٠٥ = ١٫٠٥^{٣} جنيه

∴ ما يئول اليه مبلغ ٦٨٠٠ جنيه فى نهاية المدة

= ١٫٠٥^{٣} × ٦٨٠٠

= ١٫١٥٧٦٢٥ × ٦٨٠٠

= ٧٨٧١٫٨٥ جنيه

٥٩ — يؤخذ من طريقة حل المثال السابق أنه

(١) إذا كان الواحد من رأس المال الأصلى يئول فى المدة الواحدة إلى ر وكان عدد مدد حساب الربح هو د فإن هذا الواحد من رأس المال يئول فى نهاية المدة كلها إلى $ر^{د}$

(٢) إذا كان رأس المال الأصلى يتكون من م وحدات فإن جملته فى نهاية المدة كلها تئول إلى $م ر^{د}$

فإذا رمزنا لتلك الجملة بالرمز ح كانت $ح = م ر^{د}$

وهذه الصورة الأخيرة تسمى بقانون الجملة فى الربح المركب .

(مثال ٢) أوجد ما يئول إليه مبلغ ٤٠٠ جنيه بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٣ ٪ فى السنة

العمـــل

$ح = م ر^{د}$

هنا $م = ٤٠٠$ ، $ر = ١٫٠٣$ ، $د = ٤$

$\therefore ح = ٤٠٠ \times ١٫٠٣^{٤}$ جنيه

$= ٤٠٠ \times ١٫١٢٥٥٠٨٨١$ »

$= ٤٥٠٫٢٠٣٥٢٤$ »

$= ٤٥٠٫٢٠٤$ جنيهاً تقريباً

١٫٠٣	١٫٠٦٠٩
١٫٠٣	١٫٠٦٠٩
١٫٠٣	١٫٠٦٠٩
٠٫٠٣٠٩	٠٫٠٦٣٦٥٤
	٠٫٠٠٠٩٥٤٨١
١٫٠٦٠٩	١٫١٢٥٥٠٨٨١

تمرين (٢٦)

أوجد بواسطة قانون الجملة ما يأتى :

(١) جملة مبلغ ٥٠٠٠ جنيه لمدة ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٦ ٪ فى السنة .

(٢) جملة مبلغ ٢٤٠٠ جنيه لمدة ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ فى السنة .

(٣) جملة مبلغ ١٢٥٠٠ جنيه لمدة سنتين بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة ويحسب كل ٦ أشهر

(٤) جملة مبلغ ٧٠٠٠٠٠ جنيه لمدّة سنتين بسعر الربح المركب ٦ ٪ فى السنة ويحسب كل ٦ أشهر .

(٥) الربح المركب لمبلغ ٨٠٠ جنيه لمدّة سنتين بسعر ٣٫٢٥ ٪ فى السنة .

٦٠ — حساب رأس المال .

(مثال ٣) ما هو المبلغ الذى بلغت جملته ٥٨٤٩٫٢٩٢٨ جنيهاً بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة ؟

العمـــل

$$ح = م\,(1+ر)^{ن}$$

$$\therefore\ ٥٨٤٩٫٢٩٢٨ = م \times ١٫٠٤^{٤} \text{ جنيه}$$

$$\text{ومنه } م = ٥٨٤٩٫٢٩٢٨ \div ١٫٠٤^{٤} \text{ جنيه}$$

$$= ٥٠٠٠ \text{ جنيه}$$

تنبيه : على الطالب أن يبين فى كراسته عمليات الضرب والقسمة فى حل جميع المسائل .

(مثال ٤) ماهو المبلغ الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٧٤٫٨٨ جنيهاً فى مدة سنتين بسعر ٨ ٪ فى السنة

العمـــل

$$\therefore \text{ جملة الجنيه فى سنتين} = ١٫٠٨^{٢} = ١٫١٦٦٤ \text{ جنيه}$$

$$\therefore \text{ ربح الجنيه فى سنتين} = ١٫١٦٦٤ - ١ = ٠٫١٦٦٤ \text{ من الجنيه}$$

$$\therefore \text{ المبلغ المطلوب} = ٧٤٫٨٨ \div ٠٫١٦٦٤ = ٤٥٠ \text{ جنيهاً}$$

تمرين ٢٧

(١) ما رأس المال الذى آلت جملته إلى ٤٧٨٠٫٦٧٢ جنيهاً بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة ؟

(٢) ما رأس المال الذى صارت جملته ٧٧٧٩و٢٤٠ جنيهاً بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ فى السنة ؟

(٣) ما رأس المال الذى صارت جملته ٨٨٨و٥٠٦١ جنيهاً بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة

(٤) ما رأس المال الذى إذا ربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ فى السنة تصير جملته بعد سنة ونصف ٧٩٥٩و٠٦ من الجنيهات مع العلم بأن الأرباح تحسب كل ستة أشهر ؟

(٥) ما رأس المال الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٩٧٩و٢٨ بعد ٣ سنوات بسعر ٢ ٪ فى السنة الأولى و٣و٥٦ ٪ فى السنة الثانية و ٤٦ ٪ فى السنة الثالثة

(٦) ما رأس المال الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٢٤و٤٨ جنيهاً بعد سنتين بسعر ٤ ٪ فى السنة ؟

(٧) ما رأس المال الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٩٣و٦٤٨ جنيها بعد ٣ سنوات بسعر ٤ ٪ فى السنة ؟

٦١ — أمثلة متنوعة على الربح المركب :

(مثال ٥) أودع مبلغان متساويان فى مصرف بسعر ٦ ٪ فى السنة لمدة سنتين وكانت الأرباح تضاف للأول سنوياً وتضاف للثانى كل نصف سنة وبذلك زاد ربح المبلغ الثانى على ربح المبلغ الأول ١٩٠و٨٨١ جنيهاً فى نهاية المدة فما قيمة كل من المبلغين ؟

العمـــل

∴ جملة الجنيه فى الحالة الأولى = ١و٠٦^{٢} جنيه

و « « « « الثانية = ١و٠٣^{٤} «

∴ فرق جملتى الجنيه فى المدة كلها .

وهو فرق الربحين أيضاً = ١٫٠٣[٤] — ١٫٠٦[٢] من الجنيه

= ١٫١٢٥٥٠٨٨١ — ١٫١٢٣٦ من الجنيه

= ٠٫٠٠١٩٠٨٨١ من الجنيه

∴ المبلغ المطلوب = $\frac{\text{٠٫٠٠٩٠٨٨١}}{\text{٠٫٠٠١٩٠٨٨١}}$

= ١٠٠٠٠٠ جنيه

(مثال ٦) وضع مبلغ فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر معين فإذا كانت جملته بعد مضى ٣ سنوات ٧٠٣٠٫٤ جنيهاً وبعد ٤ سنوات ٧٣١١٫٦١٦ جنيهاً فما السعر وما المبلغ ؟

العمل

(ا) ∴ ربح رأس مال السنة الرابعة = ٧٣١١٫٦١٦ — ٧٠٣٠٫٤

= ٢٨١٫٢١٦ جنيهاً

∴ رأس مال السنة الرابعة = الجملة بعد ٣ سنوات

= ٧٠٣٠٫٤ جنيهاً

∴ ربح الجنيه الواحد فى السنة الرابعة = ٢٨١٫٢١٦ ÷ ٧٠٣٠٫٤

= ٠٫٠٤ من الجنيه

∴ السعر = ٤ ٪ فى السنة

(ب) ∴ جملة الجنيه فى ٣ سنوات = ١٫٠٤[٣]

= ١٫١٢٤٨٦٤ جنيه

∴ المبلغ المطلوب = ٧٠٣٠٫٤ ÷ ١٫١٢٤٨٦٤

= ٦٢٥٠ جنيهاً

(مثال ٧) ما المبلغ الذى يبلغ الفرق بين ربحيه المركب والبسيط لمدة ٣ سنوات بسعر ٥ ٪ فى السنة ٧٫٦٢٥ من الجنيهات ؟

العمـــل

∴ الربح المركب للجنيه الواحد فى ٣ سنوات = ١٫٠٥^{٣} — ١ من الجنيه

= ٠٫١٥٧٦٢٥ »

ﻭ الربح البسيط له فى المدة نفسها = ٠٫٠٥ × ٣ »

= ٠٫١٥ »

∴ فرق ربحى الجنيه الواحد = ٠٫١٥٧٦٢٥ — ٠٫١٥ »

= ٠٫٠٠٧٦٢٥ »

∴ المبلغ المطلوب = ٧٫٦٢٥ ÷ ٠٫٠٠٧٦٢٥ »

= ١٠٠٠ جنيه

(مثال ٨) اقترض رجل مبلغ ١٨٧٢٫٩٦ جنيهاً بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة وتعهد بسداد القرض وأرباحه على ثلاث دفعات متساوية ، الأولى فى نهاية السنة الأولى والدفعة الثانية فى نهاية السنة الثانية والثالثة فى نهاية السنة الثالثة فما قيمة الدفعة الواحدة ؟

العمـــل

نفرض أن قيمة كل دفعة ١ جنيه .

∴ رأس مال الدفعة الأولى = $\frac{١}{١٫٠٤}$ من الجنيه

ﻭ رأس مال الدفعة الثانية = $\frac{١}{(١٫٠٤)^{٢}}$ »

ﻭ رأس مال الدفعة الثالثة = $\frac{١}{(١٫٠٤)^{٣}}$ »

مجموع رءوس الأموال للدفعات الثلاث .

$$= \frac{١}{١٫٠٤} + \frac{١}{(١٫٠٤)^{٢}} + \frac{١}{(١٫٠٤)^{٣}}$$

$$= \frac{٣٫١٢١٦}{(١٫٠٤)^{٣}}$$ وهذا ما يعادل المبلغ الأصلى

وهو ١٨٧٢٫٩٦ جنيهاً

∴ قيمة الدفعة = $\frac{٩٦و١٨٧٢ \times ١و٠٤^{٣}}{٣و١٢١٦}$ جنيهاً

= ٦٠٠ × (١و٠٤)^{٣} جنيهاً

= ٦٧٤و٩١٨ من الجنيهات

(مثال ٩) وضع شخص مبلغاً فى مصرف ليربح ربحاً مركباً فكان ربح السنة الثانية ٥٢ جنيهاً وربح السنة الثالثة ٥٤و٠٨ جنيهاً فما السعر وما المبلغ ؟

العمل

ربح مبلغ ٥٢ جنيهاً فى مدة سنة = ٥٤و٠٨ — ٥٢ = ٢و٠٨ من الجنيهات

السعر = $\frac{٢و٠٨}{٥٢} \times ١٠٠ = ٤$ ٪

نفرض أن رأس مال الشخص جنيه .

∴ ربح الجنيه فى السنة الثانية = ١و٠٤ × ٠و٠٤ = ٠و٠٤١٦ من الجنيهات

رأس المال الأصلى = $\frac{٥٢}{٠و٠٤١٦}$ = ١٢٥٠ جنيهاً

(مثال ١٠) ما المبلغ الذى ربحه البسيط فى ٣ سنوات ٦٠ جنيهاً وربحه المركب فى مدة سنتين ٤٠و٨ من الجنيهات ؟

العمل

ربح السنة الأولى = ٦٠ ÷ ٣ = ٢٠ جنيهاً

ربح السنة الثانية = ٤٠و٨ — ٢٠ = ٢٠و٨ جنيهاً

ربح مبلغ ٢٠ جنيهاً فى سنة = ٢٠و٨ — ٢٠ = ٠و٨ من الجنيه

∴ ربح الجنيه الواحد فى السنة $\frac{٠و٨}{٢٠}$ من الجنيه

فتكون ٢٠ جنيهاً ربحاً فى السنة لمبلغ ٢٠ × $\frac{٢٠}{٠و٨}$ = ٥٠٠ جنيه

تمرين ٢٨

(مسائل متنوّعة على الربح المركب)

(١) وضع مبلغ من المال فى مصرف ليربح ربحاً مركباً لمدة ٣ سنوات وكان سعر الربح فى السنة الأولى ٣ ٪ وفى السنة الثانية ٤ ٪ وفى السنة الثالثة ٥ ٪ فإذا علم أن هذا الربح المركب للمبلغ يزيد بمقدار ٣٥٧ قرشاً على ربحه البسيط لمدة ٣ سنوات بسعر ٤ ٪ فى السنة فأوجد المبلغ .

(٢) اقترض رجل مقداراً من المال بالربح المركب لمدة ٣ سنوات وكان السعر للسنة الأولى ٦ ٪ فى السنة وفى السنة الثانية ٥ ٪ فى السنة وفى السنة الثالثة ٤ ٪ فى السنة فإذا كانت جملة المبلغ الذى دفعه فى نهاية السنة الثالثة هى ١٤٤٦٫٩ من الجنيهات فما هو المبلغ المقترض ؟

(٣) ما هو المبلغ الذى إذا وضع بالربح البسيط لمدة ٣ سنوات بسعر ٥٫٥ ٪ فى السنة تزيد جملته $18\frac{7}{16}$ من الجنيهات على ما لو وضع بالربح المركب بسعر ٥ ٪ فى السنة للمدة عينها .

(٤) الفرق بين الربحين المركب والبسيط لمبلغ ما لمدة سنتين بسعر ٤٫٥ ٪ فى السنة هو ١٫٦٨٠٧٥ من الجنيهات فما المبلغ ؟

(٥) وضع مبلغ فى مصرف ليربح ربحاً مركباً مدة ٤ سنوات بسعر ٥ ٪ فى السنة وكان الربح فى السنة الثالثة يزيد عليه فى السنة الثانية بمقدار ٢٦٫٢٥ من الجنيهات فما مقدار الربح الكلى وما المبلغ ؟

(٦) وضع مبلغ فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ فى السنة فإذا كان الربح فى السنة الثالثة يزيد عليه فى السنة الأولى بمقدار ٦٫٣٧٥ من الجنيهات فما المبلغ ؟

(٧) إذا كانت جملة مبلغ ما بعد سنتين هى ١و٩٢٦ من الجنيهات و بعد ثلاث سنوات هى ٤٠٥و٩٧٢ من الجنيهات بحساب الربح المركب فما هو السعر وما المبلغ ؟

(٨) إذا كانت جملة مبلغ ما بعد ٣ سنوات بالربح المركب هى ٢٩٠و١٠ من الجنيهات وفى أربع سنوات ٨٠٤٥و١٠ من الجنيهات فما هو السعر وما المبلغ؟

(٩) ما هو المبلغ الذى لو ربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ فى السنة لكان ربحه فى سنتين ٥و٣٠٤ من الجنيهات ؟

(١٠) ما هو المبلغ الذى لو ربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ فى السنة لكان ربحه فى السنة الثالثة ١و٨٣٧٥ من الجنيهات ؟

(١١) مبلغ وضع ربعه بسعر ٣ ٪ فى السنة وخمساه بسعر ٥و٣ ٪ فى السنة والباقى بسعر ٤ ٪ فى السنة فبلغ ربحه المركب بعد سنتين ٧٣و٨٦ من الجنيهات فكم كان ذلك المبلغ ؟

(١٢) رأس مال ا يزيد على رأس مال ب بمقدار $\frac{٤١}{٤٠٠}$ من رأس مال ب فإذا وضع ب رأس ماله بالربح المركب لمدة ٣ سنوات بسعر ٥ ٪ فى السنة فما سعر الربح البسيط الذى يضع به ا رأس ماله حتى تتساوى الجملتان فى نهاية الثلاث سنوات ؟

(١٣) قسم مبلغ ٦٣٧٥ جنيهاً إلى جزءين بحيث إذا وضع كل منهما فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ فى السنة تكون جملة الأول بعد ٣ سنوات مساوية جملة الثانى بعد سنتين .

(١٤) اقترض رجل مبلغاً قدره ٢٠٣٠ جنيهاً على أن يسدده هو وأرباحه المركبة على دفعتين متساويتين يدفع الأولى فى نهاية السنة الأولى ويدفع الثانية فى نهاية السنة الثانية من اقتراضه للمبلغ فإذا كان سعر الربح المركب ٣ ٪ فى السنة فما مقدار كل دفعة ؟

(١٥) اقترض مبلغ ودفع هو وأرباحه المركبة على دفعتين متساويتين فى سنتين متتاليتين من تاريخ القرض وكان مقدار الدفعة الواحدة ٨٨٢ جنيهاً فإذا كان السعر ٥ ٪ فى السنة فما المبلغ المقترض ؟

(١٦) أوصى والد أن تقسم تركته البالغ قدرها ١٥٤٥٤٥ جنيها بين أولاده الثلاثة الذين أعمارهم ١٧و١٨و١٩ سنة بحيث إذا وضع كل منهم نصيبه فى مصرف ليربح كل منهم ربحاً مركباً بسعر ٣ ٪ فى السنة تكون المبالغ التى يأخذونها عند بلوغ كل منهم سن ٢١ سنة متساوية فما نصيب كل منهم ؟

(١٧) وضع مبلغ ٧٨١٢٥ جنيهاً فى مصرف لمدة سنتين بسعر ٤ ٪ فى السنة بحساب الربح المركب فما مقدار نقص الربح فى حالة إضافته سنوياً عنه فى حالة إضافته كل نصف سنة ؟

(١٨) ما رأس المال الذى لو وضع ليربح ربحاً مركباً لكان ربحه فى السنة الثانية ٤٢٠ جنيهاً وفى السنة الثالثة ٤٤١ جنيهاً ؟

(١٩) ما المبلغ الذى بلغ ربحه المركب فى السنة الثانية ٣١٨ جنيهاً وفى السنة الثالثة ٣٣٧٫٠٨ جنيهاً ؟

(٢٠) ما المبلغ الذى بلغ ربحه البسيط فى مدة ٣ سنوات ٣٦٠ جنيهاً وربحه المركب فى سنتين ٢٤٦ جنيهاً ؟

(٢١) ما المبلغ الذى بلغ ربحه البسيط فى مدة سنتين ٣٠٠ جنيه وربحه المركب بنفس السعر ولنفس المدة ٣٠٩ جنيهات ؟

(٢٢) إذا كان الربح المركب لمبلغ ما فى سنتين ٦١٢ جنيهاً وكانت نسبة ربح السنة الأولى إلى ربح السنة الثانية تساوى ٢٥ : ٢٦ فما السعر وما المبلغ وما جملته بعد ٣ سنوات ؟

(٢٣) وضع رجل مبلغاً من المال فى مصرف بسعر ٥ ٪ فى السنة واضطر فى آخر السنة الأولى أن يسحب ٢٠٠ جنيه وأبقى الباقى بسعر ٦ ٪ فى

السنة وفى نهاية الثانية أضاف ٧٦٠ جنيها لما له فى المصرف وصادف أن ارتفع السعر وقتئذ إلى ٨ ٪ فى السنة فإذا أصبح له فى آخر السنة الثالثة ٥٤٠٠ جنيه فما مبلغه الأصلى ؟

(٢٤) أودع رجل فى مصرف مبلغاً من المال ليربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ فى السنة و بعد مضى سنتين أضاف لما له فى المصرف ٧٩٥ جنيهاً وصادف أن تغير السعر فصار ٥ ½ ٪ فى السنة و بعد سنة من ذلك سحب ٣٦٥ جنيهاً وقد نزل السعر حينئذ فصار ٤ ٪ فى السنة و بعد مضى ٤ ½ سنة من بدء الإيداع وجد أن ما صار له فى المصرف ٢٤٠و٢٩٧٠ جنيهاً فكم كان مبلغه؟

(٢٥) وضع مبلغ فى مصرف بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة فزادت أرباحه المركبة فى آخر السنة الثالثة على أرباحه المركبة فى آخر السنة الثانية بمقدار ٨٦,٥٢٨ جنيهاً فما المبلغ ؟

(٢٦) بلغت جملة مبلغ وضع فى مصرف بالربح المركب لمدة ٢ ½ سنة ٢٧٥٨,٠٨ جنيهاً فإذا علم أن ربحه فى النصف السنة الأخير ٥٤,٠٨ جنيها فما المبلغ وما السعر (الأرباح تضاف سنويا)

(٢٧) أودع رجل مبلغاً من المال فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ فى السنة و بعد سنتين أضاف ١٨٠ جنيهاً وترك كل ما أصبح له بسعر ٤ ٪ فى السنة وفى آخر السنة الثالثة من بدء الإيداع سحب ٨٦٠ جنيهاً مما صار له فى المصرف وقد تغير السعر يوم السحب فأصبح ٦ ٪ فى السنة والمطلوب معرفة المبلغ الأصلى إذا علم أن جملة ما أصبح له فى المصرف بعد ٤ ½ سنة من بدء الإيداع يساوى ٩٢٨٠,٣ جنيها .

الحطيطة الخارجية أو الحطيطة التجارية :

٦٢ — تمهيد : فى المعاملات التجارية لا تدفع الديون عادة نقداً بل تدفع بعد أجل معين ويحرر التاجر على نفسه ما يسمى وثيقة أو كمبيالة يتعهد فيها بالدفع فى موعد معين .

فمثلا : إذا اشترى خياط أقمشة من تاجر وكانت قيمة هذه الأقمشة ٢٠٠ جنيه فإن ما يتبع عادة هو أن يتسلم الخليط البضاعة و يتعهد بدفع القيمة بعد مدة معينة ولتكن ستة أشهر مثلا ويكتب على نفسه وثيقة (كمبيالة) على الصورة الآتية :

مليم	جنيه
...	٢٠٠

مائتان من الجنيهات فقط

فى يوم ٢٥ فبراير سنة ١٩٣٦ ندفع بموجب هذه الوثيقة إلى تحت إذن التاجر (فلان) المبلغ المرقوم بعاليه وقدره مائتان جنيه مصرى لاغير ثمن بضاعة تسلمناها والدفع بالقاهرة والتقاضى أمام المحاكم الأهلية و إذا تأخرنا عن السداد فى الميعاد المحدد نكون ملزمين بدفع المبلغ مع الفوائد باعتبار المائة ٩ فى السنة من تاريخ الاستحقاق لغاية تمام السداد وللدائن الحق فى تحويل هذا المبلغ لمن يشاء بدون توقف على رضانا ؟

تحريراً فى ٥ أغسطس سنة ١٩٣٥ الخياط

(فلان)

ضمان المبلغ الموضح بهذه علينا فى الميعاد و بعد الميعاد بدون إحالة على المضمون وللدائن المذكور الحق فى مطالبتنا وحدنا دون مطالبة المدين أو مطالبته معنا وهذا ضمان علينا للاعتماد ؟

فى تاريخه ٢٥ أغسطس سنة ١٩٣٥ الضامن

(فلان)

وهذه الوثيقة يجب أن تسدد فى ٢٥ فبراير المحدد للتسديد (وفى بعض الأحوال يسمح للمدين بمهلة قدرها ٣ أيام) .

٦٣ — ويلاحظ أن أهم النقط التى يعنى بذكرها فى الوثيقة هى ما يأتى :

(١) اسم الدائن .	(٥) موعد الدفع .
(٢) اسم المدين .	(٦) مكان الدفع .
(٣) اسم الضامن .	(٧) التصريح بتحويل الدين .
(٤) مقدار الدين .	(٨) جهة التقاضى .

و بعد تسليم الوثيقة يكون لتاجر الأقمشة إحدى الطريقتين للتصرف فيها :

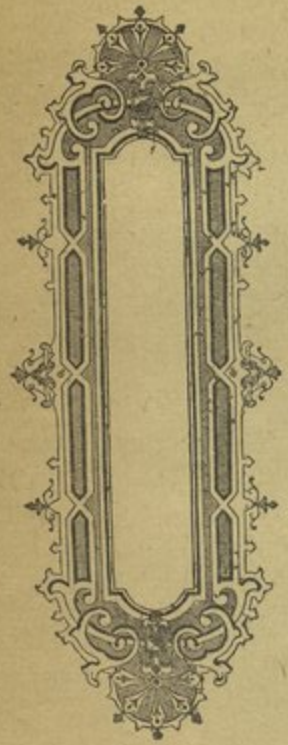
الأولى : أن يحتفظ بالوثيقة حتى الموعد المحدد ثم يردها للخياط مقابل تسلم المبلغ فوراً .

والثانية : أن يبيعها لأى مصرف فى أى تاريخ قبل الموعد المحدد . فإذا فرض أنه حولها إلى مصرف قبل موعدها بأربعة شهور مثلا فإن المصرف لا يدفع له كل المبلغ المكتوب فى الوثيقة بل يخصم منها مبلغاً بسعر معين عن الأربعة الأشهر الباقية وذلك نظير انتظاره هذه المدة فإذا اعتبر السعر ٣ ٪ فى السنة فإن المصرف يخصم من الوثيقة ٢٠٠ × $\frac{٣}{١٠٠}$ × $\frac{٤}{١٢}$ = ٢ جنيه ويعطى التاجر ٢٠٠ — ٢ = ١٩٨ جنيهاً ويسمى المبلغ الذى يخصم بهذه الطريقة (٢ جنيه) بالحطيطة التجارية أو الحطيطة الخارجية [٢] ويسمى هذا المبلغ المكتوب فى الوثيقة (٢٠٠ جنيه) القيمة الاسمية لها والمبلغ الذى تسلمه التاجر ١٩٨ جنيها القيمة الحالية التجارية .

وهاك صورة من صور الوثائق المستعملة فى الأعمال التجارية .

---

(١) وهاك نوع آخر من الحطيطة يسمى الحطيطة الداخلية ولكنها غير مستعملة عملياً ولذلك صرف النظر عن شرحها .



ص

٤٠٤٠٠ قروش صحيحة أميرية

فقط مبلغ وقدره أربعون ألفاً وأربعمائة قرش لاغير

فى يوم أول يناير سنة ١٩٣٥ ندفع بموجب هذة الوثيقة إلى وتحت إذن التاجر (ب)

المبلغ المرقوم بعاليه وقدره أربعمائة وأربعة جنيهات مصرية لا غير

ثمن بضاعة تسلمناها والدفع بالقاهرة والتقاضى أمام المحاكم الأهلية وإذا تأخرنا عن السداد فى الميعاد المحدود نكون ملزمين بدفع المبلغ مع الفوائد باعتبار المائة تسعة فى السنة من تاريخ الاستحقاق لغاية تمام السداد وللدائن الحق فى تحويل هذا المبلغ لمن يشاء بدون توقف على رضانا ؟ التاجر

تحريراً فى أول اكتوبر سنة ١٩٣٤ (ا)

ضمان المبلغ الموضح بهذا علينا فى الميعاد وبعد الميعاد بدون إحالة على المضمون وللدائن المذكور الحق فى مطالبتنا وحدنا دون مطالبة المدين أو مطالبته معنا وهذا ضمان علينا للاعتماد ؟ الضامن (ج)

فى تاريخه

٦٤ — أمثلة محلولة :

(مثال ١) وثيقة بمبلغ ٤٨٠ جنيهاً بيعت قبل ميعاد استحقاقها بعشرين شهراً نخصم منها حطيطة خارجية بسعر $٧\frac{١}{٢}$ ٪ فى السنة . أوجد مقدار هذه الحطيطة ثم أوجد المبلغ الذى دفع (أى القيمة الحالية التجارية لهذه الوثيقة) .

العمـــل

ربح الجنيه الواحـد فى المدة $= \frac{٢٠}{١٢} \times \frac{٧\frac{١}{٢}}{١٠٠} =$ ٠٫١٢٥ جنيه

الحطيطة الخارجية للوثيقـة $= ٤٨٠ \times ٠٫١٢٥ =$ ٦٠ جنيهاً

القيمة الحالية التجارية (المبلغ الذى دفع) $= ٤٨٠ - ٦٠ =$ ٤٢٠ جنيهاً

(مثال ٢) ما القيمة الحالية التجارية لوثيقة بمبلغ ١٠١٠ جنيهات تستحق الدفع بعد ٥ أشهر مكتوبة فى يوم ٧ يناير سنة ١٩٣٤ إذا بيعت فى ٢٦ مارس من السنة نفسها وكان سعر الحطيطة التجارية ٥ ٪ فى السنة ؟

العمـــل

∴ الوثيقة تستحق الدفع بعد ٥ أشهر ابتداء من ٧ يناير

∴ موعد استحقاقها هو ٧ يونيه (١)

∴ المدة الباقية على استحقاق الوثيقة عن تحويلها فى ٢٥ مارس هى :

مارس	ابريل	مايو	يونيه	يوما
٥	+ ٣٠	+ ٣١	+ ٧	= ٧٣

∴ ربح الجنيه الواحد فى هذه المدة $= ٠٫٠٥ \times \frac{٧٣}{٣٦٥} =$ ٠٫٠١ جنيه

∴ الحطيطة الخارجية للوثيقة $= ٠٫٠١ \times ١٠١٠ =$ ١٠٫١٠ «

∴ القيمة الحاليـة التجارية $= ١٠١٠ - ١٠٫١٠ =$ ٩٩٩٫٩٠ «

(١) حينما تذكر المدة بالأشهر تحسب مباشرة بأشهر السنة وليس بالأيام

(مثال ٣) ما القيمة الاسمية لوثيقة تستحق الدفع بعد ٣ أشهر إذا كانت قيمتها الحالية التجارية ٢٥٨٧ جنيهاً بسعر الحطيطة ٢ ٪ فى السنة ؟

العمـــل

∴ ح . خ للجنيه فى المدة المفروضة = ٠,٠٢ × $\frac{٣}{١٢}$ = ٠,٠٠٥ من الجنيه

∴ القيمة الحالية التجارية للجنيه الواحد = ١ — ٠,٠٠٥ = ٠,٩٩٥ «

∴ القيمة الاسمية المطلوبة = ٢٥٨٧ ÷ ٠,٩٩٥ = ٢٦٠٠ جنيه

تمرين ٢٩

(١) ما الحطيطة التجارية والقيمة الحالية التجارية

(ا) لوثيقة بمبلغ ٧٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٧٣ يوماً إذا كان سعر الحطيطة $\frac{٣}{٤}$ ٣ ٪ فى السنة ؟

(ب) لوثيقة بمبلغ ١٨٦٥ جنيهاً تستحق الدفع بعد ٣ أشهر إذا كان سعر الحطيطة ٥ ٪ فى السنة ؟

(حـ) لوثيقة بمبلغ ٣٧٣ جنيهاً تستحق الدفع بعد ٦ أشهر إذا كان سعر الحطيطة ٥ ٪ فى السنة ؟

(٢) حجزت الحطيطة التجارية لوثيقة تستحق الدفع بعد ١٤٦ يوماً بسعر ٨و٥ ٪ فى السنة فكانت ٤٤٢ قرشاً فما هى القيمة الاسمية للوثيقة ؟

(٣) وثيقة تستحق الدفع بعد ٩ أشهر حجزت حطيطتها التجارية بسعر ٨ ٪ فى السنة فكانت ٢٤٠ قرشاً فما هى قيمتها الاسمية ؟

(٤) حجزت الحطيطة التجارية لوثيقة تستحق الدفع بعد ١٠٠٠ يوم بسعر ٥و٤ ٪ فى السنة فكانت ١٨٩ قرشاً فما هى قيمتها الحالية التجارية ؟

(٥) ما القيمة الاسمية لوثيقة تستحق الدفع بعد ٨ أشهر إذا بلغت قيمتها الحالية التجارية ٥٦٨ جنيهاً بسعر الحطيطة ٨ ٪ فى السنة ؟

(٦) وثيقة تستحق الدفع بعد ٢٩٢ يوماً بيعت بمبلغ ٤١٧٦ قرشاً بعد خصم الحطيطة التجارية بسعر ٩ ٪ فى السنة فما هى قيمتها الاسمية ؟

(٧) وثيقة تستحق الدفع فى يوم ١٤ أغسطس سنة ١٩٣٢ بيعت فى يوم ٨ يناير من السنة نفسها بمبلغ ٨٧٣٠ قرشاً بعد أن خصمت حطيطتها التجارية بسعر ٥ ٪ فى السنة فكم كانت قيمتها الاسمية ؟

(٨) وثيقة تستحق الدفع فى ٢ أغسطس سنة ١٩٣٣ بيعت فى ٩ مارس من السنة نفسها بمبلغ ٥٧٩٦ جنيها بعد خصم حطيطة تجارية بسعر ٨و٥ ٪ فى السنة فما مقدار الحطيطة ؟

(مثال ٤) وثيقة بمبلغ ٨٥٠ جنيهاً حجزت حطيطتها التجارية بسعر ٤ ٪ فى السنة فكانت ١٨ جنيهاً فما هى المدة الباقية على استحقاق الوثيقة ؟

العمـــــل

∴ ربح الجنيه الواحد فى سنة = ٠٤و٠ من الجنيه

∴ ربح مبلغ الوثيقة فى سنة = ٠٤و٠ × ٨٥٠ = ٣٤ جنيهاً

∴ المدة الباقية على استحقاقها = ١٧ ÷ ٣٤ = $\frac{١}{٢}$ سنة أى ٦ أشهر

(مثال ٥) إذا كانت الحطيطة التجارية لوثيقة بمبلغ ٥٤٠ جنيهاً تستحق الدفع بعد ٤ أشهر هى ٩ جنيهات فما هو سعر الحطيطة ؟

العمـــــل

∴ ربح الجنيه الواحد فى ٤ أشهر = ٩ ÷ ٥٤٠ = $\frac{١}{٦٠}$ من الجنيه

∴ ربح الجنيه الواحد فى سنة = $\frac{١}{٦٠}$ × $\frac{١٢}{٤}$ = ٠٥و٠ من الجنيه

∴ السعر = ٥ ٪ فى السنة

تمرين ٣٠

(١) الحطيطة التجارية لوثيقة بمبلغ ٢٥٠٠ جنيه هى ٧٥ جنيهاً فإذا كان السعر ٩ ٪ فى السنة فما هى المدة الباقية على استحقاق الوثيقة ؟

(٢) الحطيطة التجارية لوثيقة بمبلغ ٤٢٠٠ جنيه هى ٨٤ جنيهاً فإذا كان السعر ٨ ٪ فى السنة فما هى المدة الباقية على استحقاق الوثيقة ؟

(٣) أوجد اليوم الذى بيعت فيه وثيقة تستحق الدفع فى يوم ٨ مايو سنة ١٩٣٣ إذا كانت قيمتها الاسمية ٧٣٠٠ جنيه وحطيطتها التجارية بسعر ٥ ٪ فى السنة ٨٠ جنيهاً .

(٤) وثيقة بمبلغ ١٨٢٥ جنيهاً بلغت حطيطتها التجارية بسعر ٤و٥ ٪ فى السنة ٢٢و٥ جنيهاً فى أول يناير سنة ١٩٣٢ ففى أى يوم كانت تستحق الدفع ؟

(٥) وثيقة بلغت قيمتها الحالية التجارية ٧٨٩٨ قرشاً فى أول يناير سنة ١٩٣٣ بعد خصم حطيطة تجارية بسعر ٦ ٪ فى السنه قدرها ١٣٢ قرشاً ففى أى يوم كانت تستحق الدفع ؟

(٦) وثيقة بمبلغ ٦٥٠٠ جنيه بيعت فى ٦ مارس سنة ١٩٣٢ وكانت تستحق الدفع فى ١٨ مايو من السنة نفسها فإذا كانت الحطيطة التجارية ٥٢ جنيهاً فما هو سعرها ؟

(٧) وثيقة بمبلغ ٣٢٨٥٠ قرشاً بلغت قيمتها التجارية ٣٢٦٦١ قرشاً فى ٢٩ أكتوبر سنة ١٩٣٣ وكانت تستحق الدفع فى ٣١ ديسمبر من السنة نفسها فما سعر الحطيطة التجارية ؟

(٨) وثيقة بمبلغ ٦٥٠٠ جنيه تستحق الدفع فى أول أكتوبر سنة ١٩٣٣ بيعت فى يوم ٨ مايو من السنة نفسها بمبلغ ٦٢٧٩ جنيهاً بعد خصم الحطيطة التجارية فما سعرها ؟

(٩) وثيقة بمبلغ ١٤٦٠ جنيهاً تستحق الدفع فى يوم أول نوفمبر سنة ١٩٣٣ بيعت فى يوم ٣ أغسطس من السنة نفسها فكانت حطيطتها التجارية ١٨ جنيهاً أوجد السعر ؟

تمرين ٣١

تمارين متنوعة على الحطيطة

(١) وثيقة بمبلغ ٧٢٩ جنيهاً تاريخها ١٨ مايو تستحق الدفع بعد ٤ شهور حوّلت إلى مصرف فى ٧ يوليو من السنة نفسها فخصم منها حطيطة خارجية بسعر ٥ ٪ فى السنة فكم يتسلم حاملها ؟

(٢) وثيقة بمبلغ ١٨١٢ جنيهاً تاريخها ١٣ يوليو ومدتها ٥ أشهر حولت فى أول أكتوبر على مصرف فخصم حطيطة خارجية بسعر ٣ ½ ٪ فى السنة أوجد مبلغ الحطيطة .

(٣) وثيقة بمبلغ ٣٢٨ جنيهاً حررت بتاريخ ٢٧ أغسطس لمدة ٦ شهور حولت فى ٣ سبتمبر إلى مصرف خصم حطيطة خارجية بسعر ٤و٥ ٪ فى السنة وأخذ ½ ٪ من القيمة الاسمية عمولة تحصيل زيادة على الحطيطة فكم جنيهاً تسلم حاملها ؟

(٤) ا مدين إلى ب بمبلغ ٣٠٠ جنيه ويريد أن يؤجل الدفع ستة شهور فطلب ب من ا أن يحرر له وثيقة بمبلغ يدفعه بعد ستة شهور ولكن إذا حول حالاً إلى مصرف تكون قيمته الحالية التجارية ٣٠٠ جنيه فما هو المبلغ الذى يكتب فى الوثيقة ؟ (تحسب الحطيطة بسعر ٨ ٪ فى السنة).

(٥) وثيقة بمبلغ ٥٠٥٠ جنيهاً انكليزياً تاريخها ٣٠ مارس تدفع بعد ٦ شهور بلغت قيمتها الحالية فى ١٩ يوليو من السنة نفسها ٤٩١١ جنيهاً إنكليزياً وشلنين و ٦ بنس فكم كان سعر الحطيطة ؟

(٦) خصم مصرف ٥ جنيهات حطيطة خارجية على وثيقة قيمتها الاسمية ٢٢٠ جنيهاً تستحق الدفع بعد سنتين . فإذا جعل سعر الحطيطة ثلاثة أمثاله فى الحالة الأولى فما القيمة الاسمية لوثيقة قيمتها الحالية نفس القيمة الحالية للأولى وزمنها نفس زمن الأولى ؟

(٧) شخص معه وثيقه بمبلغ ١٧٨٥ جنيها تستحق الدفع بعد ٨ شهور يراد تغييرها بأخرى تستحق الدفع بعد ٣ سنوات ، فما القيمة الاسمية التى تكتب فى الوثيقة الثانية إذا كان سعر الحطيطة الخارجية هو ٥ ٪ فى السنة ؟

(٨) وثيقتان إحداهما بمبلغ ٣٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٨ شهور وأخرى بمبلغ ٢٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٩ شهور ، غيرتا بوثيقة واحدة تستحق الدفع بعد سنتين و ٦ شهور فما القيمة الاسمية لهذه الوثيقة إذا كان سعر الحطيطة الخارجية ٤ ٪ فى السنة ؟

(القيمة الحالية للوثيقة الجديدة تساوى مجموع القيمتين الحاليتين للوثيقتين الأوليتين)

(٩) رجل عليه وثيقتان الأولى بمبلغ ٣٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد $2\frac{1}{2}$ من السنين والأخرى بمبلغ ٤٢٠ جنيهاً تستحق الدفع بعد ستة أشهر ، استبدل بهما وثيقة واحدة تستحق الدفع بعد سنة و ٨ أشهر . أوجد القيمة الاسمية للوثيقة الجديدة مع احتساب الحطيطة الخارجية بسعر ٦ ٪ فى السنة فى جميع الحالات .

(١٠) كان مع رجل وثيقتان ، الأولى بمبلغ ٣٦٥٠ جنيهاً تستحق الدفع فى ٥ فبراير سنة ١٩٣٥ و باعها فى أول يناير من السنة نفسها ، والثانية تستحق الدفع فى ٦ سبتمبر من السنة عينها . فإذا كان مجموع الحطيطتين الخارجيتين هو ١و٣٠ جنيهاً وأن القيمة الاسمية للوثيقة الثانية $\frac{4}{5}$ القيمة الاسمية للأولى والسعر فى كل حالة ٥ ٪ فى السنة ففى أى يوم باع الوثيقة الثانية ؟

(١١) مصرف خصم حطيطة تجارية بسعر $7\frac{1}{2}$ ٪ فى السنة من وثيقة بمبلغ معين ولكنه وجد أنه يربح ٨ ٪ على النقود التى دفعها ، فما الزمن الباقى على استحقاق هذه الوثيقة ؟

(١٢) وثيقتان مجموع مبلغيهما ٢٨٠٠ جنيه والأولى تستحق الدفع بعد ٣ شهور والثانية بعد ٥ شهور . فإذا بلغ مجموع حطيطتيهما الخارجيتين ٥٨ جنيهاً وكان السعر ٦ ٪ فى السنة . فما القيمة الحالية التجارية لكل منهما ؟

الباب الثامن

الرسم البيانى

الحاجة إلى الرسم المبيانى

٦٥ — كثيراً ما يستعان بالرسوم على مقارنة المقادير بعضها ببعض أو لتمثيل تغير كمية تبعاً لتغير كمية أخرى ؛ وذلك لأن الرسوم تبين هذه المقارنة أو هذا التغير بطريقة أوضح وأسهل عن مجرد ذكر أعداد بعضها بجانب بعض وهذه الرسوم تسمى الرسوم البيانية .

ويتبين ذلك من المثال الآتى :

(مثال ١) الجدول الآتى يبين أعداد السكان فى بعض المحافظات والمديريات فى القطر المصرى حسب إحصائية سنة ١٩٣٧

المحافظة أو المديرية	القاهرة	الاسكندرية	البحيرة	الغربية	الدقهلية	المنوفية	القليوبية	بنى سويف	أسيوط	أسوان
عدد السكان مقدراً بعشرات الألوف	١٣١	٦٨	١٠٦	١٩٦	١٢٢	١١٦	٦١	٥٦	١٢٠	٣١

والمطلوب تمثيل ذلك بالرسم .

الطريقـــة

(١) نأخذ ورقة ونرسم عليها خطاً أفقياً مثل م س (شكل ٢٩) .

(٢) تقيم عليه أعمدة بقدر عدد المحافظات والمديريات .

(٣) نجعل أطوال هذه الأعمدة مناسبة لأعداد السكان المختلفة ليكون كل عمود ممثلا لعدد السكان المقابل له .

فمثلا نجعل كل مليمتر طولى يمثل ١٠٠٠٠ شخص من السكان

∴ عدد سكان القاهرة يمثل بعمود طوله = ١٣و١ سم

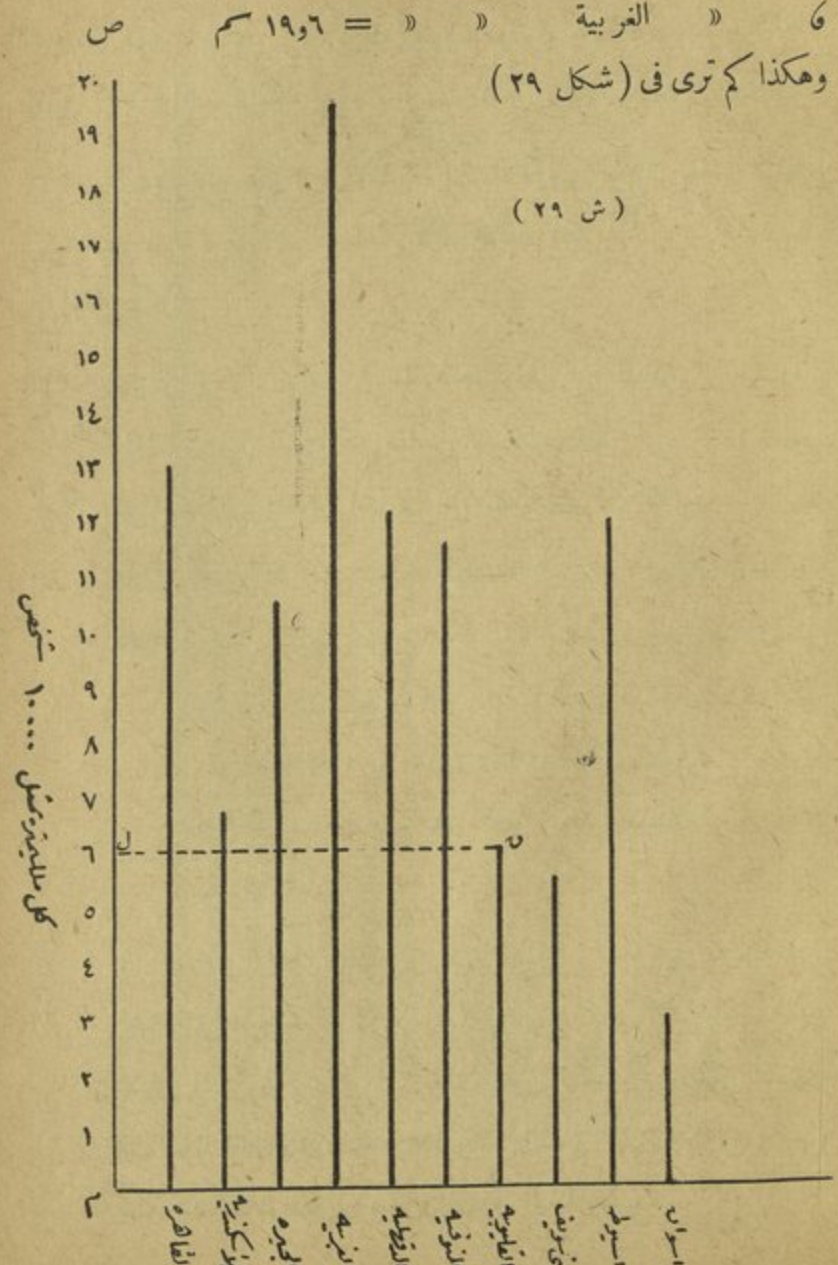
ى « « الإسكندرية « « = ٦و٨ سم

ى « « البحيرة « « = ١٠,٦ سم

ى « « الغربية « « = ١٩و٦ سم

وهكذا كما ترى فى (شكل ٢٩)

(ش ٢٩)



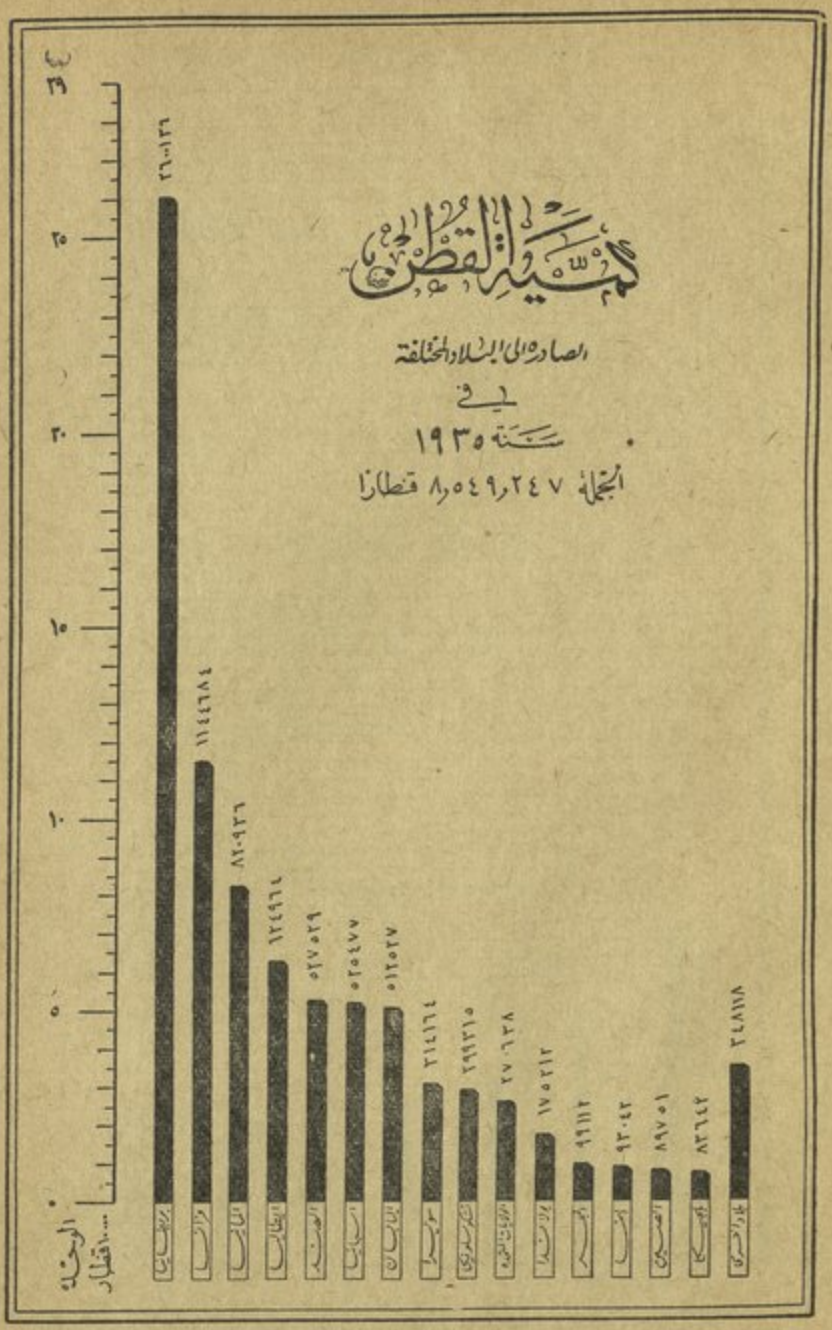
(٤) رسمنا إلى اليسار عموداً م ص مبينا عليه ما تدل عليه الارتفاعات المختلفة من أعداد السكان و بذلك يستغنى عن كتابة ارتفاع كل عمود أو عدد السكان الذى يدل عليه ؟ إذ يمكن إيجاد ذلك برسم مستقيم من نهاية العمود مواز يا م ص فيقابل م ص فى النقطة الدالة على عدد السكان الذى يمثله (أنظر ح ل فى الشكل)

بمجرد النظر إلى هذا الرسم ومقارنة تلك الأطوال بعضها ببعض نستطيع بسهولة مقارنة عدد سكان كل مديرية أو محافظة ومعرفة أيها أكثر سكانا وأيها أقل سكانا

٦٦ — مقياس الرسم : هو ما تدل عليه وحدة الطول من المقادير التى تمثلها . مثلا : فى المثال السابق كان مقياس الرسم مليمترا عن كل ١٠٠٠٠ شخص من السكان . و بدهى أننا فى كل مسألة لابد أن نختار مقياس الرسم مناسباً للفراغ المعد للرسم و يجب دائماً تكبير الرسم بقدر الإمكان

فمثلا : فى المثال السابق إذا جعلنا كل ١٠٠٠٠ شخص من السكان تمثل بمليمترين كان عدد سكان الغربية الذى هو ١٩٦٠٠٠٠ يمثل بعمود طوله ١٩٦ × ٢ = ٣٩٢ مليمترا أى ٣٩,٢ سم والفراغ الذى لدينا لا يسع هذا الطول ولذا جعلنا القياس أصغر من ذلك

فى كثير من الأحيان يستعاض عن الخطوط الرأسية التى تمثل المقادير المختلفة بمستطيلات كى تكون أكثر وضوحا كما فى الشكلين المرافقين اللذين يمثل أولهما (شكل ٣٠) كميات القطن الصادرة من القطن المصرى إلى البلاد المختلفة فى سنة ١٩٣٥ و يمثل الشكل الثانى (شكل ٣٠ م) قيمة جملة الصادرات إلى بعض الممالك فى السنة نفسها

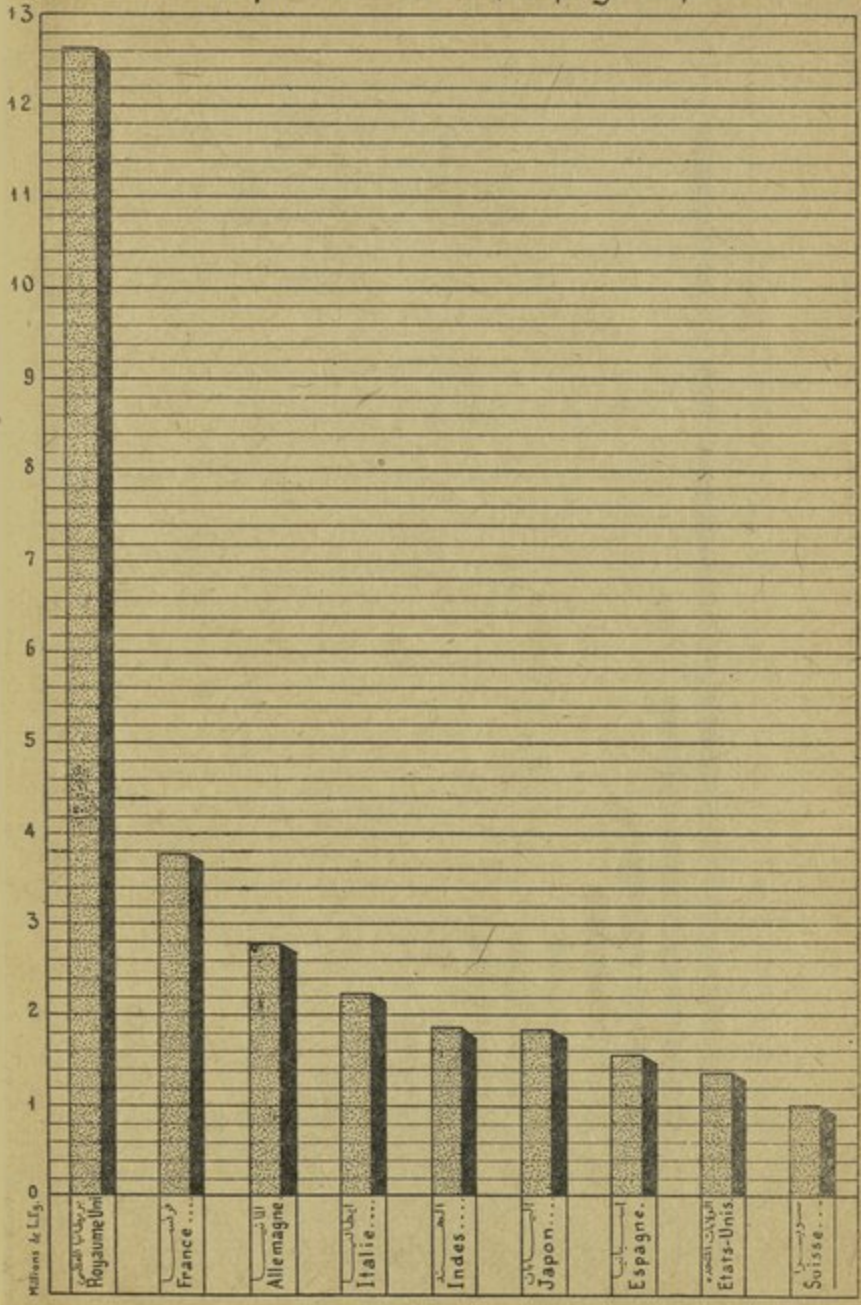

كمية القطن
المصادر الى البلاد المختلفة
في
سنة ١٩٣٥
المجموع ٨,٥٤٩,٢٤٧ قنطارا
الوحدة ١٠٠٠ قنطار
٠
٥
١٠
٢٠
٣٤
٢٦٠٠٣٩
١١٤٤٦٨٤
٨٢٠٩٣٦
١٢٤٩٦٤
٥٢٧٥٢٩
٥٢٥٤٧٧
٥١٢٥٢٧
٢١٤١٦٤
٢٩٩٣١٥
٢٧٦٣٨
١٧٥٢١٢
٩٦١١٢
٩٣٠٤٢
٨٩٧٠١
٨٣٦٤٢
٢٤٨١٨
بريطانيا
فرانسا
ايطاليا
المانيا
اليابان
اسبانيا
بلجيكا
هولندا
بلاد السوفيت
بولونيا
تشيكوسلوفاكيا
النمسا
المجر
سويسرا
الصين
الهند

ش (٣٠)

ج ١ (٩)

قيمة الصادرات لكل من الممالك الرئيسية. ١٩٣٥

Valeur des exportations de chaque pays important. 1935



(ش ٣٠ م)

تمرين ٣٢

باختيار مقاييس الرسم المناسبة ، مثل كلا من الجداول الآتية بالرسم :

(١) قيمة ما تصدر من مصر فى سنة ١٩٣٥ من بعض الأصناف :

الصنف	القطن السكلاريدس	الأشموني	أنواع أخرى من القطن	الأرز	بذرة القطن	الكسب	البصل
القيمة بملايين الجنيهات ...	٤,٣	١٥,٨	٧,٣	٠,٧	٢	٠,٨	٠,٧

(٢) قيمة الواردات إلى القطر المصرى من بعض الممالك فى السنة نفسها :

المملكة	انجلترا	الهند	اليابان	فرنسا	ايطاليا	ألمانيا	الولايات المتحدة
قيمة الواردات بملايين الجنيهات ...	٧,٤	٠,٧	٣,٩	١,٧	١,٨	٢,٩	١,٧

(٣) قيمة جملة الصادرات من القطر المصرى إلى بعض الممالك فى السنة نفسها .

المملكة	انجلترا	فرنسا	ألمانيا	إيطاليا	الولايات المتحدة	سويسرا	اليابان
قيمة الصادرات بملايين الجنيهات ...	١٢,٦	٣,٨	٢,٨	٢,٣	١,٤	١	١,٨

(٤) مصروفات بعض الوزارات كما قدر فى ميزانية السنة المالية ١٩٣٥ — ١٩٣٦

الوزارة	المعارف	التجارة والصناعة	الصحة	الداخلية	الحقانية	الأشغال	الحربية
المصروفات بملايين الجنيهات	٣,٤	١,٨	١,٧	٤,٥	١,٧	٦,٥	١,٦

(٥) ما تنتجه بعض مصادر إيراد الحكومة المصرية كما قدر فى ميزانية السنة المالية ١٩٣٥ — ١٩٣٦

المصـــدر	اموال مقررة	الجمارك	التمغة	رسوم قضائية	البريد	ارباح النقود	السكك الحديدية
الإيراد بملايين الجنيهات	٦,٤	١,٥	٠,٦	١,٩	٠,٨	١,٤	١,٣

(٦) تعداد بعض الحكومات الأجنبية حسب إحصائية سنة ١٩٢٧

الجنسيـــة	بريطانيا	فرنسا	إيطاليا	تركيا	يونانيا
العـدد بالألف	٣٤	٢٤	٥٢	٩	٧٦

(٧) متوسط محصول الفدان الواحد من القمح فى سنة ١٩٣٢ فى بعض مديريات القطر :

المـديرية	جرجا	أسيوط	الجيزة	القليوبية	المنوفية	الشرقية	الدقهلية	الغربية	البحيرة
متوسط المحصول بالاردب	٦,٥	٦,٥	٥,٦	٥,٧	٥,٩	٤,٩	٤,٦	٤,٦	٤,٤

(٨) بيان إجمالى عن المساحات بالفدان المشغولة ببعض المزروعات فى السنة الزراعية ١٩٣٢ — ١٩٣٣ مقدرة تلك المساحات بآلاف الأفدنة :

القطن	١٨٠٠	القمح	١٣٧٠
قصب السكر	٧٠	الفول	٤٧٠
الذرة الرفيعة	١٨٠	الشعير	٢٨٠
الأرز	٣٢٠		

٢ — تمثيل العلاقة بين كميتين متغيرتين

٦٧ — تعريف : إذا ارتبطت كميتان بعضهما ببعض بحيث إذا تغيرت قيمة إحداهما تغيرت قيمة الأخرى تبعاً لها تسمى الأولى بالمتغيرة الأصلية وتسمى الثانية بالمتغيرة التابعة .

مثلاً :

(١) ثمن قطعة من القماش مرتبط بطولها فإذا تغير الطول تغير الثمن .

(٢) ربح مبلغ ما فى مدة معينة يتوقف على السعر الذى يحسب به الربح فإذا زاد السعر زاد الربح .

فى هذين المثلين :

(١) طول القطعة هو المتغيرة الأصلية ، والثمن المتغيرة التابعة

(٢) السعر هو المتغيرة الأصلية والربح المتغيرة وهكذا .

٦٨ — من المرغوب فيه فى كثير من الأحوال أن نتتبع التغير الذى يطرأ على كمية ما لما يمكن أن نستنتجه من النتائج المفيدة من ملاحظة ذلك

والرسم البيانى إحدى الوسائل التى تعيننا على ذلك بسهولة و بسرعة كما يتبين من المثال الآتى :

(مثال) الجدول الآتى يبين أعلى درجة للحرارة فى القاهرة فى الخمسة عشر يوما الأولى فى شهر ابريل سنة ١٩٢٩

تاريخ اليوم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
النهاية العظمى لدرجة الحرارة	٢٤	٢٤	٢٦	٣٠	٣٤	٢٤	٢٣	٢٧	٢٣	٢٢	٢٥	٣٠	٣٤	٢٧	٢٦

والمطلوب تمثيل تغير درجة الحرارة تبعاً لتغير الأيام بالرسم البيانى

الطريقـة

(١) نأخذ ورقة ونرسم عليها خطين مستقيمين متعامدين أحدهما أفقى م س ويسمى بالمحور الأفقى والآخر رأسى م صـ ويسمى المحور الرأسى وتسمى نقطة تقاطعهما م بنقطة الأصل (شكل ٣١)

(٢) نأخذ على م سـ أبعاداً متساوية يمثل كل منها يوماً ولتكن المسافة بين كل اثنين سنتيمتراً واحداً . ثم نرقمها بالأرقام ١ ، ٢ ، ٣ الخ الدالة على تاريخ اليوم

(٣) فى نهاية كل قسم من الأقسام السابقة نقيم عموداً موازياً للمحور م صـ

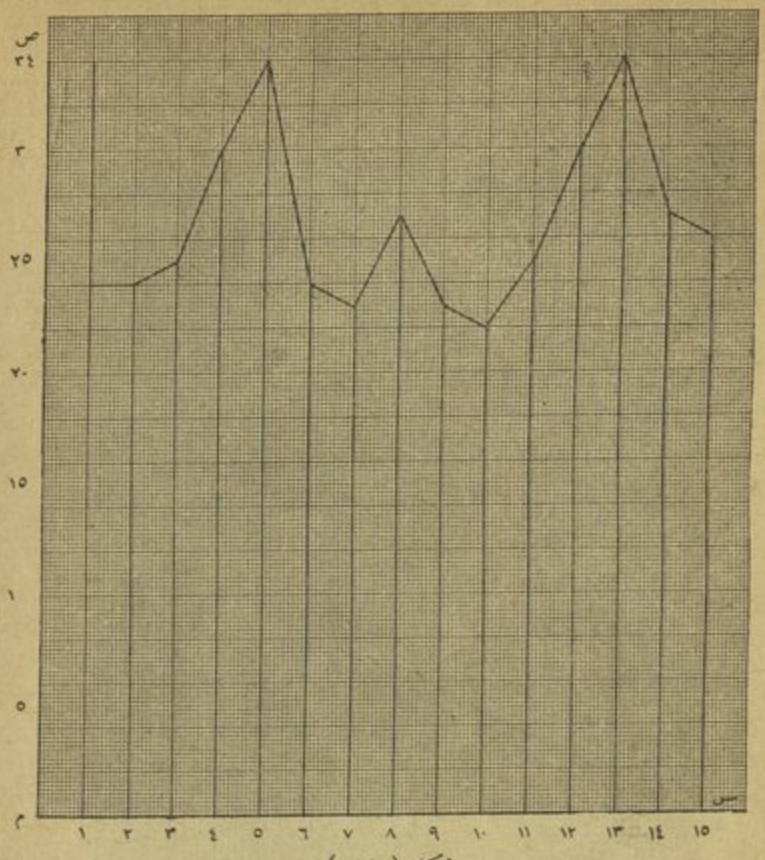
(٤) وبمقياس رسم مناسب نقيس على كل من الأعمدة المرسومة بعداً مناسباً لدرجة الحرارة المعلومة لذلك اليوم .

فمثلا : كانت أعلى درجة حرارة فى اليوم الأول ٢٤ فأخذنا البعد ١٢ سم ليمثلها أى أن كل نصف سنتيمتر يمثل درجة حرارة واحدة وكذلك فى اليوم الثالث كانت أعلى درجة حرارة ٢٦ فأخذنا على العمود المرسوم من رقم ٣ البعد ١٣ سم ليمثل هذه الدرجة وهكذا .

(٥) نصل نهايات هذه الأعمدة بمستقيمات على التوالى ، أى نصل نهاية العمود الأول بنهاية العمود الثانى ونهاية العمود الثانى بنهاية العمود الثالث وهكذا . وبذلك نحصل على الخط المنكسر المبين بالرسم .

وهو يبين لنا بطريقة أوضح تغير درجة الحرارة من هبوط وارتفاع من يوم إلى آخر . فكلما هبط الخط المنكسر دل ذلك على هبوط درجة الحرارة ، وكلما ارتفع دل على ارتفاع درجة الحرارة . ويسمى هذا الخط بالخط البيانى

نلاحظ كما سبق أننا لا نضع طول كل عمود أو ما يدل عليه من درجة الحرارة فى الرسم بل نكتفى بتقسيم المحور الرأسى م ص ووضع الأرقام عليه



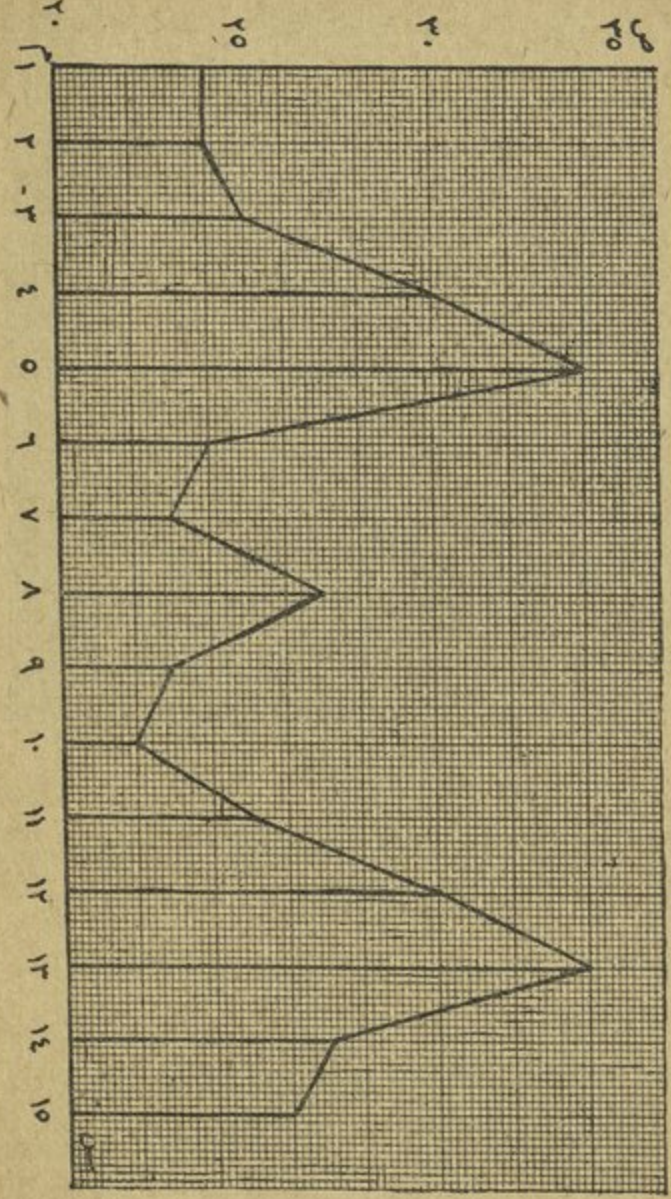
شكل (٣١)

٦٩ — ملاحظة : فى الشكل (٣١) قسمنا درجة الحرارة على المحور م ص باعتبار أن الصفر يقع عند نقطة الأصل م

ولكن بما أن أقل درجة للحرارة فى المدة المعلومة هى ٢٢ وهى درجة يوم ١٠ فكان من الممكن — وهذا هو المستحسن دائماً — أن نقيس درجة الحرارة على م ص باعتبار أن م تقابل درجة ٢٠ ثم نقيس على م ص ما يزيد على ٢٠ أى ٤ درجات لليوم الأول وهكذا فى باقى الأعمدة الأخرى

و بديهى أن ذلك لا يغير فى شكل الخط البيانى مطلقاً كما هو ظاهر من الشكل (٣٢) بل يكون من شأنه توفير الفراغ الكبير بين م س والخط

البيانى ، ويمكننا أيضاً من تكبير الرسم إذا أردنا ذلك وقد جعلنا فى الشكل أيضاً نقطة م على المحور الأفقى م س دلالة على تاريخ اليوم الأول



(شكل ٣٢) درجات الحرارة (كل سنتيمتر نصف درجة)

تمرين ٣٣

من الرسم المبين فى شكل ٣٢ اذكر :

(١) تاريخ كل من الأيام التى ارتفعت فيها النهاية العظمى لدرجة الحرارة عن اليوم السابق

(٢) تاريخ كل من الأيام التى انخفضت فيها النهاية العظمى لدرجة الحرارة عن اليوم السابق .

(٣) ماالذى تلاحظه فى الخط البيانى حينما :

(ا) ترتفع درجة الحرارة كثيراً فى يوم عن اليوم السابق .

(ب) ترتفع قليلا .

(حـ) تنخفض كثيراً .

(ء) تنخفض قليلا .

(هـ) تبقى ثابتة .

مثل لكل حالة .

٧٠ — استعمال الورق المقسم إلى مربعات .

فى المثال السابق قد اضطررنا لرسم كل الخطوط الرأسية وقسنا عليها الأطوال المطلوبة . ولكن يسهل علينا العمل كثيراً اذا استعملنا الورق المقسم الى مربعات وهو المقسم الى سنتيمترات مربعة ومليمترات مربعة . وباستعمال هذا الورق نستغنى عن القياس إذ يكفى عد الأقسام بين الخطوط المتوازية ، وكذلك نستغنى عن رسم الخطوط الرأسية ويكتفى فقط بوضع النقطة فى موضعها فى نهاية كل عمود ثم نصل هذه النقط بالتتالى كما فى المثال السابق :

٧١ — تعريف : تتعين أى نقطة على الورق مثل ﺟ تعيناً تاماً بالنسبة للمحورين الرأسى والأفقى متى عرف بعدها الأفقى عن المحور (ص) ويسمى

بالاحداثى الأفقى وكذلك بعدها الرأسى عن المحور م س ويسمى بالاحداثى الرأسى ، ويسمى البعدان معاً إحداثى النقطة ح .

٣ — تطبيقات على الرسم البيانى

٧٢ — من أهم التطبيقات على الرسم البيانى تمثيل الاحصائيات والمشاهدات العلمية والظواهر الطبيعية كتعداد السكان والنسب المئوية للناجحين فى امتحان ما وكالتغير فى مقياس النيل وكالتغير فى درجات الحرارة والضغط وغيرها ، وسنبين ذلك بالأمثلة الآتية :

(مثال ١) ارسم الخط البيانى الذى يمثل التغيرات فى متوسط ثمن القنطار من القطن من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٢٦ على حسب المبين فى الجدول الآتى :

السنة	١٩١٤	١٩١٥	١٩١٦	١٩١٧	١٩١٨	١٩١٩	١٩٢٠	١٩٢١	١٩٢٢	١٩٢٣	١٩٢٤	١٩٢٥	١٩٢٦
متوسط ثمن القنطار بالريال	١٢	١٩	٣٧	٣٨	٣٧	٨٧	٣٤	٣٤	٣٠	٣٩	٣٩	٣٠	٢٢

الطريقـــة

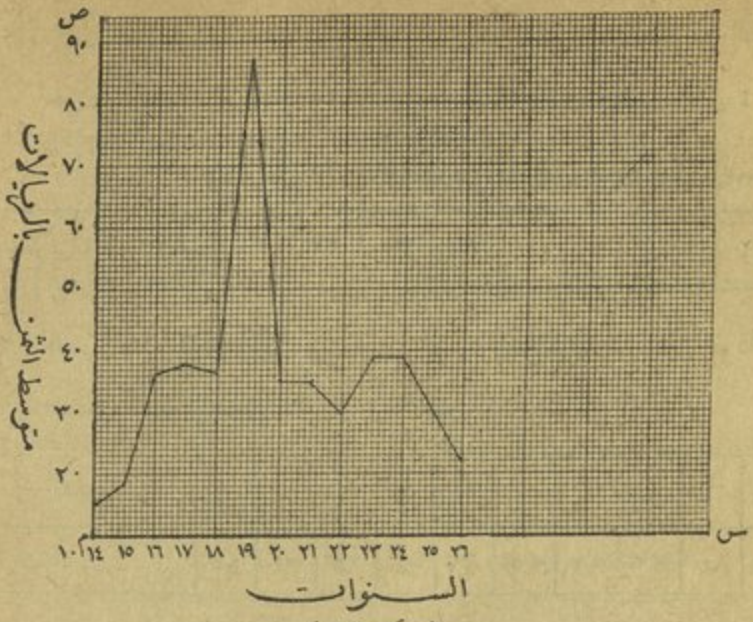
(١) نمثل السنوات على المحور الأفقى م س بأن نجعل كل نصف سنتيمتر يمثل سنة ونقطة م تقابل سنة ١٩١٤

(٢) نمثل متوسط الثمن بالريالات على المحور الرأسى م ص وليكن كل ملليمتر يمثل ريالاً واحداً ونقطة م تقابل ١٠

(٣) نعين النقط التى تمثل رؤوس الأعمدة على حسب الطريقة الموضحة آنفاً .

(٤) نصل هذه النقط بخط منكسر كما هو مبين فى الشكل الآتى :

فيكون هو الخط البيانى المطلوب .



(شكل ٣٣)

تمرين ٣٤

(١) من الرسم السابق (مادة ٧٢) اذكر :

أولا — تاريخ كل من السنوات التى ارتفع فيها متوسط سعر القطن عن السنة التى قبلها

ثانياً — تاريخ كل من السنوات التى انخفض فيها متوسط سعر القطن عن السنة التى قبلها

ثالثاً — ما الذى نلاحظه فى الخط البيانى حينما :

(ا) يرتفع سعر القطن كثيرا فى السنة السابقة

(ب) يرتفع قليلا

(حـ) ينخفض كثيراً

(ء) ينخفض قليلا

(هـ) يبقى ثابتاً لا يتغير

مثل لكل حالة

(٢) ارسم الخط البيانى الذى يمثل التغيرات فى متوسط ثمن القنطار من القطن من سنة ١٩٣٥ إلى سنة ١٩٣٢ على حسب المبين فى الجدول الآتى :

السنة	١٩٢٥	١٩٢٦	١٩٢٧	١٩٢٨	١٩٢٩	١٩٣٠	١٩٣١	١٩٣٢
متوسط ثمن القنطار بالريالات	٣٠	٢٢	٣٠	٢٦	٢٠	١٢	١٠	١٢

(٣) ارسم الخط البيانى الدّال على النسبة المئوية للتلاميذ المودعين نقودا فى صندق التوفير بإحدى المدارس فى الشهور المبينة بالجدول الآتى :

الشهر	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونية
النسبة المئوية	٤٥	٥٤	٦٥	٧٨	٨٦	٩٥	٩٢	٩٢	٨٤	٧٥

(٤) ارسم الخط البيانى الدّال على النسبة المئوية للطلبة الناجحين فى الحساب فى امتحان شهادة الدراسة الابتدائية من سنة ١٩١٠ إلى سنة ١٩١٧ وذلك من الجدول الآتى :

السنوات	١٩١٠	١٩١١	١٩١٢	١٩١٣	١٩١٤	١٩١٥	١٩١٦	١٩١٧
النسبة المئوية	٧٥	٧٠	٥٥	٨٠	٨٠	٦٥	٦٨	٧٢

(٥) يبين الجدول الآتى ثمن الإردب من القمح فى شهر يونيه من كل سنة فارسم خطاً بيانياً يبين كيفية تغير ثمن الإردب من القمح بين سنة ١٩١٤ وسنة ١٩٢١

السنوات	١٩١٤	١٩١٥	١٩١٦	١٩١٧	١٩١٨	١٩١٩	١٩٢٠	١٩٢١
الثمن بالقروش	١٨٠	١٩٥	٣٦٥	٤٧٠	٤٨٠	٤٥٠	٣٨٠	٣٢٠

(٦) ارسم الخط البيانى الدّال على كيفية اختلاف مقادير القطن فى ضيعة خلال المدة من سنة ١٩١٢ إلى سنة ١٩٢٣ باستخدام الجدول الآتى :

السنة	القطن بالقناطير	السنة	القطن بالقناطير
١٩١٢	٦٠	١٩١٨	٧٤
١٩١٣	٦٩	١٩١٩	٧٥
١٩١٤	٧٢	١٩٢٠	٧٧
١٩١٥	٦٨	١٩٢١	٦٥
١٩١٦	٥٠	١٩٢٢	٤٨
١٩١٧	٧٥	١٩٢٣	٥١

(٧) ارسم الخط البيانى الذى يمثل قيمة محصول القطن فى القطر المصرى من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٣٢ من الجدول الآتى :

السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات	السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات	السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات	السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات
١٩١٤	١٥	١٩١٩	٩٧	١٩٢٤	٥٧	١٩٢٩	٣٥
١٩١٥	١٨	١٩٢٠	٤١	١٩٢٥	٤٩	١٩٣٠	٢٠
١٩١٦	٣٩	١٩٢١	٣٠	١٩٢٦	٣٣	١٩٣١	١٣
١٩١٧	٤٨	١٩٢٢	٤٢	١٩٢٧	٣٦	١٩٣٢	١٢
١٩١٨	٣٥	١٩٢٣	٥٢	١٩٢٨	٤٢		

(٨) الجدول الآتى يبين متوسط محصول الفدان من قناطير القطن فى السنوات من ١٩٢١ إلى ١٩٣٢

ارسم خطاً بيانياً يدل على تغيير محصول الفدان من القطن فى المدة المذكورة

السنة	متوسط محصول الفدان من قناطير القطن	السنة	متوسط محصول الفدان من قناطير القطن	السنة	متوسط محصول الفدان من قناطير القطن
١٩٢١	٣,٤	١٩٢٥	٤,١	١٩٢٩	٤,٦
١٩٢٢	٣,٧	١٩٢٦	٤,٣	١٩٣٠	٤
١٩٢٣	٣,٨	١٩٢٧	٤	١٩٣١	٣,٨
١٩٢٤	٤,١	١٩٢٨	٤,٦	١٩٣٢	٤,٥

(٩) ارسم الخط البيانى الذى يمثل مقادير محصول القطن فى مصر من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٣٢ من الجدول الآتى :

السنة	المحصول مقدراً بملايين القناطير	السنة	المحصول مقدراً بملايين القناطير	السنة	المحصول مقدراً بملايين القناطير
١٩١٤	٦,٣	١٩٢١	٤,٣	١٩٢٨	٨,١
١٩١٥	٤,٦	١٩٢٢	٦,٧	١٩٢٩	٨,٥
١٩١٦	٥,٠	١٩٢٣	٦,٥	١٩٣٠	٨,٣
١٩١٧	٦,٣	١٩٢٤	٧,٣	١٩٣١	٦,٤
١٩١٨	٤,٨	١٩٢٥	٨	١٩٣٢	٥
١٩١٩	٥,٥	١٩٢٦	٧,٧		
١٩٢٠	٦,٠	١٩٢٧	٨,١		

(١٠) ارسم الخط البيانى الدّال على النسبة المئوية للناجحين فى امتحان شهادة الدراسة الثانوية قسم ثان بقسميها الأدبى والعلمى فى الدور الأول من سنة ١٩٢٧ إلى سنة ١٩٣٦ مأخوذة من الجدول الآتى :

السنة	١٩٢٧	١٩٢٨	١٩٢٩	١٩٣٠	١٩٣١	١٩٣٢	١٩٣٣	١٩٣٤	١٩٣٥	١٩٣٦
النسبة المئوية ...	٣٤	٣٠	٤١	٣٧	٤١	٤٠	٤٢	٤١	٤٥	٤٢

(مثال ٢) ارسم الخط البيانى الذى يمثل العلاقة بين عمر التلميذ ومتوسط وزنه من الجدول الآتى :

السن	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
متوسط الوزن بالكيلوجرامات	٣٦	٤٤	٤٨و٨	٥٢	٥٤و٢	٥٦و٣	٥٧و٨

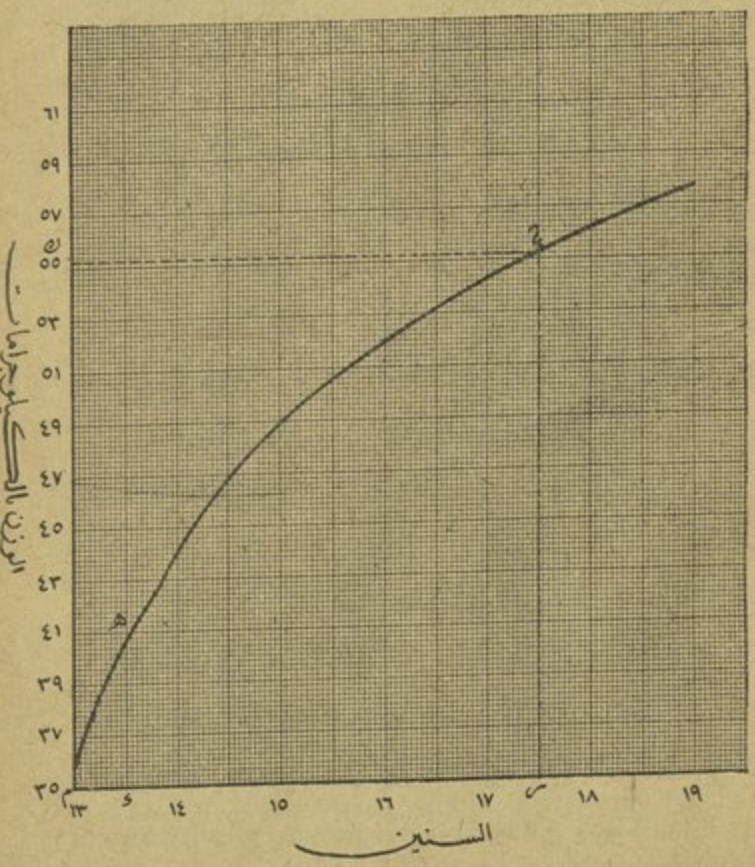
الطريقـــة

(١) نمثل السن على المحور الأفقى م س بأن نجعل كل ٢ سنتيمتر تمثل سنة واحدة ، م تقابل ١٣ سنة .

(٢) نمثل الوزن على المحور الرأسى م ص بأن نجعل كل نصف سنتيمتر يمثل كيلوجراماً واحداً ، م تقابل ٣٥ كيلوجراما .

(٣) نعين النقط كالمعتاد ونصلها بخط منكسر .

فيكون هو الخط البيانى المطلوب .



ش (٣٤)

٧٣ — لا بد أن يكون الطالب قد لاحظ فرقاً كبيراً بين الخط البيانى فى المثالين المبينين بشكلى ٣١ ، ٣٣ والخط البيانى فى المثال الأخير شكل ٣٤ فالخط البيانى فى كل من المثالين الأوّلين كان غير منتظم فتارة ينخفض وتارة يرتفع بدون رابط معلوم وأما الخط البيانى فى المثال الثالث فإنه سلس منتظم يحصل فيه التغير تدريجياً وليس فيه تغيرات فجائية تارة بالانخفاض وأخرى بالارتفاع كما فى الخطين الأولين والسبب فى ذلك هو ما يأتى :

فى المثالين الأوّلين لم تكن هناك علاقة تذكر بين الكميتين المتغيرتين ففى المثال الأوّل كانت العلاقة بين درجة الحرارة و بين تاريخ اليوم ضعيفة لا تذكر بجانب العوامل الأخرى التى تعمل على تغير درجة الحرارة فلم يكن تغيير تاريخ اليوم هو السبب الوحيد أو السبب الأكبر فى تغير درجة الحرارة وعلى ذلك فدرجة الحرارة تكاد تكون مستقلة عن تاريخ اليوم فهى ترتفع وتنخفض من يوم إلى آخر بدون رابط[1] وكذلك فى المثال الثانى فليست هناك علاقة بين تاريخ السنة وبين سعر القطن فيها أى أن تاريخ السنة لا يؤثر فى سعر القطن بل الذى يؤثر فيه عوامل أخرى وعلى ذلك فسعر القطن غير مرتبط بتاريخ السنة بل تارة ينخفض وتارة يرتفع من سنة إلى أخرى بدون رابط .

وأما فى المثال الثالث فإن متوسط وزن التلميذ مرتبط ارتباطاً تاماً بسنه فمتوسط الوزن يزداد تدريجياً بانتظام تبعاً لازدياد السن وعلى ذلك فالخط البيانى الذى يمثل هذه العلاقة كان منتظماً خالياً من التغيرات الفجائية .

و إذا لم نقتصر على إيجاد متوسط وزن التلميذ فى نهاية كل سنة بل أوجدناه أيضاً جملة مرات فيما بين ذلك ووضعنا النقط الدالة على ذلك

(١) نحن لا نتكلم هنا على التغير العام فى درجة الحرارة الذى يحصل أثناء السنة كلها بل نتكلم على التغير فى درجة الحرارة من يوم إلى آخر فى فترة قصيرة من الزمن .

على الورق فإننا نرى انتظام الخط البيانى بطريقة أوضح لأن هذه النقط تقع على منحن بدل خط منكسر .

ولذلك يجب فى مثل هذه الحالة — أى حينما يكون هناك ارتباط بين الكميتين المتغيرتين — وعلى ذلك يكون التغير فى الخط البيانى تدريجياً — أن نصل النقط التى تحصل عليها بخط منحن بدل خط منكسر .

وقد رسمنا مثل هذا الخط فى المثال الأخير (راجع الشكل ٣٤) وفى هذه الحالة يكون للخط البيانى فائدة هامة أخرى وهى أنه بوساطته يمكن معرفة مقادير تقريبية لإحدى الكميتين المتغيرتين عند معرفة ما يقابلها من الكمية الأخرى غير المقادير المعلومة أصلاً .

فمثلا فى المثال السابق .

(ا) لمعرفة متوسط وزن التلميذ الذى سنه ١٣ سنة ونصف .

(ب) لمعرفة سن التلميذ الذى متوسط وزنه ٥٥و٢ من الكيلوجرامات ، نجرى الأعمال الآتية .

(ا) ١ — نأخذ النقطة ء على م سـ بحيث يكون م ء ممثلا ١٣و٥ سنة .

٢ — نقيم عموداً على م سـ من ء حتى يقابل الخط المنحنى فى هـ فيكون ء هـ ممثلا للوزن المطلوب وهو ٤٠و٤ من الكيلوجرامات .

(ب) ١ — نقيس على المحور م صـ البعد م ك ليمثل ٥٥و٢ كيلوجراما أى أن م ك = (٥٥و٢ — ٣٥) ٥ = ١٠١ ملليمتر .

٢ — نرسم ك د موازياً م سـ فيقابل المنحنى فى د ثم نرسم د ر موازياً م صـ ومقابلاً م سـ فى ر فيكون م ر ممثلا السن المطلوبة وهى ١٧و٥ سنة .

على ذلك فإن إحداثيى أية نقطة على الخط البيانى يدلان على السن ومتوسط الوزن المقابل لها .

٧٤ — ملاحظة : لاستعمال الطريقة السابقة لاستنباط المقادير المقابلة لمقادير أخرى بين كميتين متغيرتين يجب أن تكون الكميتان مرتبطة إحداهما بالأخرى ، كما يجب أن تكون النقط المعلومة على الخط البيانى متقاربة غير متباعدة كى يمكن الرسم بدقة ويكون قريباً من شكله الحقيقى بقدر الإمكان .

(مثال ٣) قيس طول ظل شخص فى أوقات مختلفة من يوم ما فوجد كما هو مبين فى الجدول الآتى :

الوقت بالساعات	صباحا				الظهر	بعد الظهر			
	٨	٩	١٠	١١	١٢	١	٢	٣	٤
طول الظل بالسنتيمترات	١٤٠	٨٨	٦٤	٥٠	٤٥	٥٠	٦٤	٨٨	١٤٠

إرسم الخط البيانى الذى يمثل العلاقة بين الوقت وطول الظل فى ذلك اليوم ومنه أوجد :

(١) طول الظل حينما كانت الساعة ١٠ والدقيقة ٣٠ صباحاً .

(٢) كم كانت الساعة حينما كان طول الظل ٦٨ سم .

الطريقـــة

عينا النقط ورسمنا الخط البيانى المار بها كالمعتاد وكما هو مبين فى (الشكل ٣٥) وبالطريقة السابقة أيضاً نجد أنه :

ق ت

(١) حينما كانت الساعة ٣٠ ١٠ صباحاً كان طول الظل = ٥٦ سم .

(٢) كان طول الظل ٦٨ سم مرتين :

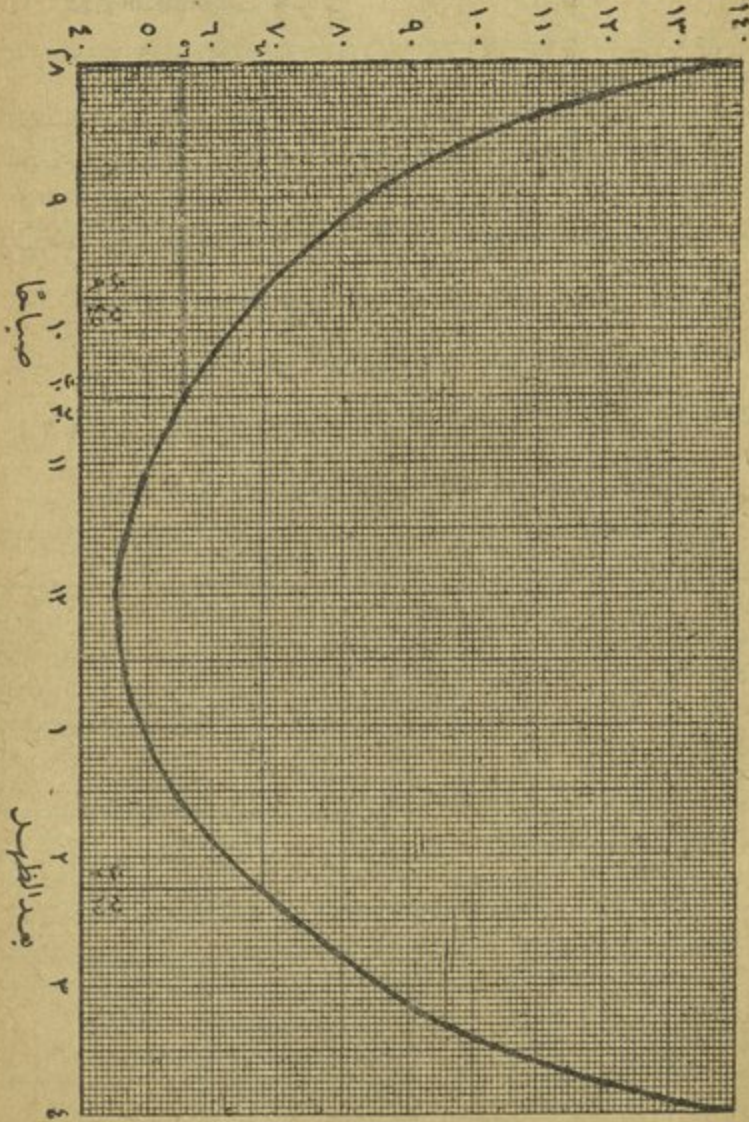
ق ت

الأولى — حينما كانت الساعة ٤٥ ٩ صباحا .

ق ت

الثانية — حينما كانت الساعة ١٥ ٢ بعد الظهر .

كما هو مبين فى الشكل .



(ش ٣٥)

تمـرين ٣٥

(١) الجدول الآتى يبين القسط السنوى الذى تطلب إحدى شركات التأمين دفعه ممن يريد التأمين على حياته بمبلغ ١٠٠٠ جنيه تدفع عند مماته مقدراً ذلك القسط حسب العمر :

العمر بالسنة	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥
القسط بالقروش	١٦٥٠	١٩٥٠	٢٤٠٠	٢٩٥٠	٣٦٥٠	٤٦٥٠	٦٩٠٠

ارسم خطاً بيانياً يوضح العلاقة بين عمر الشخص و بين القسط السنوى ومنه استنبط:

(ا) القسط السنوى الذى يجب أن يدفعه شخص عمره ٢٨ سنة .

(ب) عمر الشخص الذى يدفع قسطاً سنوياً قدره ٥٢٥٠ قرشاً .

(٢) ارسم الخط البيانى الذى يمثل تغير متوسط درجة الحرارة فى القاهرة مقيسة بترمومتر مئوى فى الأشهر المختلفة من الجدول الآتى :

الشهـر	درجة الحرارة	الشهـر	درجة الحرارة
يناير	١٢,٢	يوليه	٢٨,٢
فبراير	١٤,٢	أغسطس	٢٩,٧
مارس	١٧,٢	سبتمبر	٢٥,٥
أبريل	٢٠,٨	أكتوبر	٢٣,٢
مايو	٢٤,١	نوفمبر	١٨,٩
يونيه	٢٧	ديسمبر	١٤,٥

(٣) ارسم خطاً بيانياً يدل على كيفية تغير درجة الحرارة فى يوم كانت درجة الحرارة فيه كما هو مدون فى الجدول الآتى :

الوقت	صباحاً				الظهر	مساء						
	٨	٩	١٠	١١	١٢	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨
درجة الحرارة	٧	٨	١١	١٤	١٩	٢٠	٢٥	٣٠	٢٨	٢٤	١٨	١٢	١٠

(٤) الجدول الآتى يبين الأعداد الدالة على درجة رطوبة الجو فى الساعات المختلفة فى يوم ما : إرسم خطاً بيانياً يوضح التغيير فى درجة الرطوبة فى خلال هذا اليوم :

الوقت	نصف الليل	صباحا						الظهر	مساء				
		٢	٤	٦	٨	١٠		١٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢
درجة الحرارة	٦٠	٦٤	٦٧	٦٩	٦٣	٤٨		٣٦	٣١	٣١	٣٥	٤٣	٥٣	٥٩

ثم استنتج من الرسم الوقت الذى كان فيه العدد الدال على درجة الرطوبة ٥٠

(٥) يبين الجدول الآتى متوسط وزن الولد فى سنين مختلفة من عمره .

العمر بالسنين	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
الوزن بالأرطال	٦٠	٦٥	٦٩	٧٣	٧٨	٨٤	٩٢

أوجد بواسطة الرسم البيانى متوسط وزن الولد الذى عمره ١٢,٥ من السنين

(٦) الجدول الآتى يبين حجم مقدار من الماء بالسنتيمترات المكعبة فى درجات الحرارة المختلفة :

الحجم بالسنتيمترات المكعبة ...	١٦٠	١٥٦	١٥٢,٥	١٥٠	١٤٨,٥	١٤٨,٥	١٥١	١٥٤	١٦٠
درجة الحرارة المئوية	— ٦	— ٤	— ٢	صفر	٢	٦	٨,٥	١٠,٥	١٤

إرسم الخط البيانى الذى يربط التغير فى الحجم بالتغير فى درجة الحرارة ثم أوجد منه درجة الحرارة التى يكون فيها الماء فى كثافته العظمى (أى حجمه أقل مايمكن) .

(٧) الجدول الآتى يبين منتهى ضغط بخار الماء فى درجات الحرارة المبينة :

درجة الحرارة	٠	١	٢	٤	٥	٦	٨	١٠	١١	١٢	١٣	١٥
الضغط سم زئبق	٠٫٤٦	٠٫٤٩	٠٫٥٣	٠٫٦١	٠٫٦٥	٠٫٧٠	٠٫٨	٠٫٩١	٠٫٩٨	١٫٠٤	١٫١١	١٫٢٧

ارسم الخط البيانى الذى يدل على هذا الارتباط ومنه أوجد .

أولاً — الضغط عند ما تكون درجة الحرارة ٧٫٥°

ثانياً — درجة الحرارة عند ما يكون منتهى الضغط ٠٫٨٧ سم زئبق .

(٨) الجدول الآتى يبين أوقات غروب الشمس فى القاهرة فى الأيام المذكورة بعد :

تاريخ اليوم ...	مايو ١	مايو ١٠	مايو ٢٠	مايو ٣٠	يونيه ١٠	يونيه ٢٠	يونيه ٣٠	يوليه ١٠	يوليه ٢٠	يوليه ٣٠	أغسطس ١٠
وقت الغروب ...	ق ت ٦ ٣١	ق ت ٦ ٣٧	ق ت ٦ ٤٣	ق ت ٦ ٤٩	ق ت ٦ ٥٥	ق ت ٦ ٥٨	ق ت ٧ ٠٠	ق ت ٦ ٥٩	ق ت ٦ ٥٦	ق ت ٦ ٥٠	ق ت ٦ ٤٢

ارسم الخط البيانى الذى يدل على هذا الارتباط ومنه أوجد .

أولاً — وقت الغروب يوم ٢٥ مايو .

ثانياً — التاريخ الذى تغرب فيه الشمس فى الساعة ٦ والدقيقة ٤٨ مساء .

(مثال ٤) ارسم الخط البيانى الذى يمثل العلاقة بين درجة الحرارة بترمومتر سنتجراد ودرجة الحرارة بترمومتر فارنهيت من الجدول الآتى :

الدرجة بترمومتر سنتجراد	صفر	١٠	٢٠	٣٠
الدرجة بترمومتر فارنهيت	٣٢	٥٠	٦٨	٨٦

ثم أوجد من الرسم :

(١) الدرجة بترمومتر فارنهيت المقابلة للدرجة ١٥° بترمومتر سنتجراد .

(٢) الدرجة بترمومتر سنتجراد المقابلة للدرجة ١٢٢° بترمومتر فارنهيت .

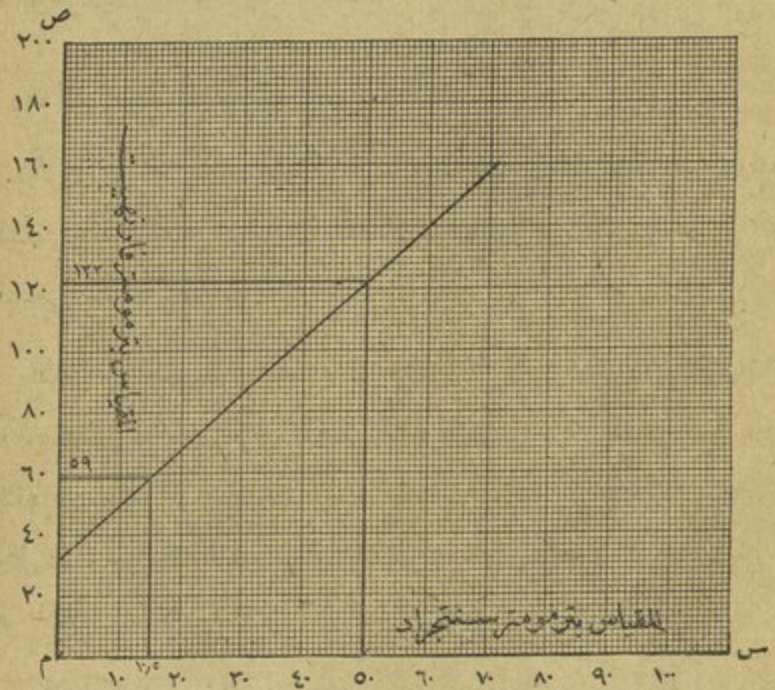
الطريقـة

(١) تمثل الدرجات بترمومتر سنتجراد على المحور الأفقى ونجعل كل درجة ممثلة بمليمتر .

(٢) تمثل الدرجات بترمومتر فارنهيت على المحور الرأسى ونجعل كل درجتين ممثلتين بمليمتر .

(٣) نرسم الخط كالمعتاد .

فنجد خطاً مستقيما كما فى الشكل الآتى :



(ش ٣٦)

بدهى أن المقياسين مرتبط كل منهما بالآخر ولذلك فالخط البيانى لا بد أن يكون منتظما ولكنه فوق ذلك خط مستقيم . ويرجع السبب فى ذلك إلى القاعدة الآتية التى يحسن أن يعرفها الطالب :

الخط البيانى الذى يمثل العلاقة بين كميتين متغيرتين يكون مستقيما إذا كانت كل زيادة فى إحدى الكميتين تتناسب مع الزيادة المقابلة لها فى الكمية الأخرى . ومعلوم أن الزيادة فى إحدى الدرجتين تتناسب مع الزيادة فى الأخرى إذ أن كل خمس درجات فى ترمومتر سنتجراد تقابلها ٩ درجات فى ترمومتر فارنهيت ولذلك فالخط البيانى مستقيم .

ومن الرسم نرى أن درجة ١٥ سنتجراد تقابلها درجة ٥٩ فارنهيت ، درجة ١٢٢ فارنهيت تقابلها درجة ٥٠ سنتجراد .

٧٥ — ملاحظتان :

الأولى : حينما يكون الخط البيانى مستقيما يكفى أن نجد عليه نقطتين ونصل المستقيم بينهما ويحسن أن تكون النقطتان متباعدتين حتى يكون الخطأ فى اتجاه المستقيم أصغر ما يمكن .

الثانية : حينما يكون الخط البيانى منحنياً لا يمكننا أن نمده من طرفيه بعد آخر نقطتين معلومتين عليه إلا قليلا . لأننا لا نعرف شكل المنحنى بعد هاتين النقطتين . وأما إذا كان الخط البيانى مستقيما فيمكننا أن نمده بقدر ما نريد وعلى ذلك ففى الحالة الأخيرة يمكننا استنباط مقادير لأحدى الكميتين خارجة على المقادير المعلومة أولا .

مثلا أمكننا معرفة الدرجة على ترمومتر سنتجراد المقابلة لدرجة ١٢٢ فارنهيت مع أنه فى المعلومات المعطاة لنا كانت أكبر درجة بترمومتر فارنهيت ٨٦ فقط .

وأما إذا كان الخط البيانى منحنياً فلا يمكننا استنباط مقادير لإحدى الكميتين إلا فيما بين المعلومات المعطاة أصلا .

تمرين ٣٦

(١) الجدول الآتى يبين العلاقه بين وزن مقـدار معين من الشاى وأثمانه والمطلوب بيان هذه العلاقة بالرسم البيانى :

وزن الأرطال	١	٢½	٥
السعر بالقروش	١٠	٢٥	٥٠

ومن الرسم أوجد ثمن ٣ ½ رطل ، ٥ ½ من الأرطال .

(٢) الجدول الآتى يبين درجات الحرارة المئوية وما يقابلها بالدرجات الفرنهيتية .

درجة الحرارة المئوية	— ١٠	صفر	١٥	٢٥
درجة الحرارة الفرنهيتية	١٤	٣٢	٥٩	٧٧

ارسم الخط البيانى الذى يدل على هذا الارتباط ومنه أوجد

أولاً — درجة الحرارة الفرنهيتية عند ما تكون الدرجة المئوية ١٢,٥

ثانياً — « « المئوية « « « الفرنهيتية ٨٧,٥

(٣) الجدول الآتى يبين العلاقة بين الأطوال بالأمتار وما يقابلها بالياردات :

الطول بالمتر	٦,٤	١٢,٨	١٦	٣٢
الطول بالياردات	٧	١٤	١٧,٥	٣٥

ارسم الخط البيانى الذى يمثل هذه العلاقة ومنه أوجد :

أولاً — عدد الياردات التى فى ١٩,٢ من الأمتار .

ثانياً — عدد الأمتار التى فى ٢٨ ياردة .

(٤) صنبور يصب فى حوض والجدول الآتى يبين ارتفاع الماء فى الحوض فى الأوقات المختلفة :

	ت	ق	ت	ق	ت	ق	ت	ق	ت	ق
الساعة	١٠	١٥	١٠	٣٠	١٠	٤٥	١٠	١١	٣٠	١١
الارتفاع بالأقدام	٢٠		٢٥		٣٠		٣٥	٤٠		٥٠

ارسم الخط البيانى الذى يمثل هذه العلاقة ومنه أوجد :

أولا — الساعة التى يكون فيها ارتفاع الماء فى الحوض ٤٥ قدماً .

ثانياً — ارتفاع الماء فى الحوض بالأقدام فى الساعة ١٠ والدقيقة ٤٠

تمرين ٣٧

مسائل متنوعة على الرسم البيانى

(١) جاء فى الإحصاء السنوى العام لسنة ١٩٣٧ أن سكان القطر المصرى كانوا كما هو مبين بالجدول الآتى فى الأزمنة المذكورة فارسم خطاً بيانياً يمثل العلاقة بين عدد السكان والزمن فى المدة المفروضة .

السنة	١٨٤٦	١٨٧٣	١٨٨٢	١٨٩٧	١٩٠٧	١٩١٧	١٩٢٧	١٩٣٧
التعداد بالمليون	٤,٥	٥,٢٥	٦,٧٥	٩,٧٥	١١,٢٥	١٢,٧٥	١٤,٢٥	١٦

(٢) ارسم الخطين البيانيين اللذين يمثلان قيمة الصادرات من القطر المصرى وقيمة الواردات إليه من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٣٤ من الجدول الآتى :

السنة	قيمة الصادرات بملايين الجنيهات	قيمة الواردات بملايين الجنيهات	السنة	قيمة الصادرات بملايين الجنيهات	قيمة الواردات بملايين الجنيهات
١٩١٤	٢٦	٢٢	١٩٢٦	٤٢	٥٢
١٩١٦	٣٨	٣١	١٩٢٨	٥٦	٥٢
١٩١٨	٤٥	٥١	١٩٣٠	٣٢	٤٧
١٩٢٠	٨٦	١٠٢	١٩٣٢	٢٧	٢٧
١٩٢٢	٤٨	٤٣	١٩٣٤	٣١	٢٩
١٩٢٤	٦٥	٥١			

(٣) ارسم الخطين البيانيين اللذين يمثلان إيرادات ومصروفات الحكومة المصرية فى السنوات المذكورة فى الجدول الآتى :

السنة المالية	٠٤/٩٢٩	٣١/٣٠	٣٢/٣١	٣٣/٣٢	٣٤/٣٣	٣٥/٣٤	٣٦/٣٥
الايراد بملايين الجنيهات	٤١,٩	٤١,٢	٣٧,٨	٣٧,١	٣٢,٢	٣١,٧	٣٢,٨
المصروفات بملايين الجنيهات ...	٤١,١	٤١,٢	٣٧,	٣٥,٩	٣٢,	٣١,٦	٣٢,٨

(٤) ارسم الخط البيانى الذى يدل على زيادة النيل فى التواريخ المبينة بالجدول الآتى:

التاريخ من شهر سبتمبر سنة ١٩١٨ ...	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
القيراط من فوق ٢٣ ذراعاً	٢٢	٢٣	٢٣	٢٥	٢٤	٢٥	٢٧	٣٣	٣٧	٣٠

(٥) ارسم الخط البيانى الذى يمثل التغيرات فى النهايات العظمى لدرجة الحرارة فى القاهرة مقيسة بترمومتر سنتجراد من ١٦ ابريل سنة ١٩٢٩ إلى آخر ذلك الشهر من الجدول الآتى :

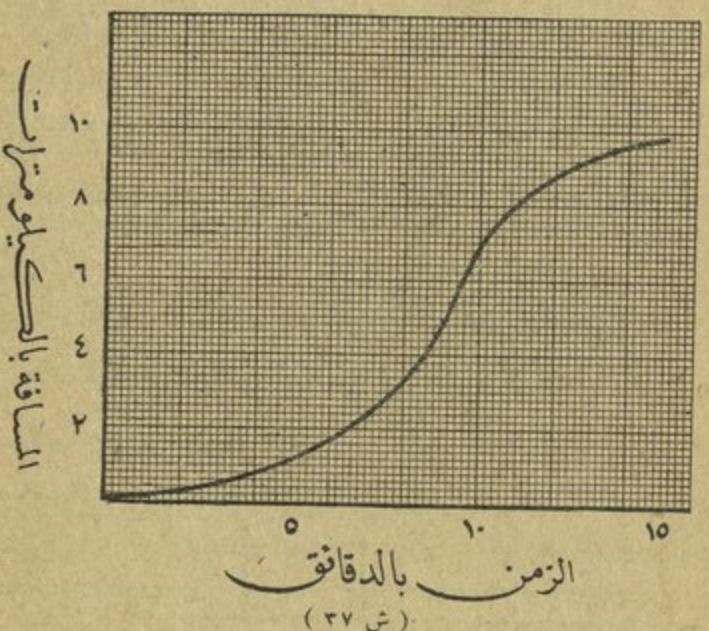
تاريخ اليوم	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠
النهاية العظمى لدرجة الحرارة	٢٧	٢٩	٣٠	٢٦	١٧	٢١	٢٥	٣٢	٢٥	٣٨	٣٠	٢٨	٣١	٣٧	٣٧

(٦) ارسم من الجدول الآتى خطين بيانيين يمثل أحدهما الربح البسيط لمبلغ جنيه واحد بسعر ٥ ٪ فى السنة فى المدد التى نهايتها ٣٠ سنة ويمثل الآخر الربح المركب للجنيه الواحد بالشروط نفسها .

واستنتج من هذا الرسم الفرق بين الربحين بعد ٢٢ سنة .

عدد السنين	٠	٥	١٠	١٥	٢٠	٢٥	٣٠
الربح البسيط	٠	٠٫٢٥	٠٫٥٠	٠٫٧٥	١٫٠٠	١٫٢٥	١٫٥٠
الربح المركب	٠	٠٫٢٨	٠٫٦٣	١٫٠٨	١٫٦٥	٢٫٣٩	٣٫٣٢

(٧) الخط البيانى المرسوم فى هذا الشكل ٣٧ يمثل المسافات التى قطعها قطار فى مدة ١٥ دقيقة . أوجد من الرسم ما يأتى :



(ش ٣٧)

(ا) المسافة التى قطعها القطار فى الخمس دقائق الأولى

(ب) المسافة التى قطعها القطار فى الخمس دقائق الثانية

(حـ) المسافة التى قطعها القطار فى الخمس دقائق الأخيرة

(ء) متوسط سرعة القطار فى كل من المدد المذكورة وكذلك فى المدة كلها

(هـ) أذكر متى كان القطار سائراً بأقصى سرعة وما الذى يدل على ذلك فى الخط البيانى ومتى كان القطار سائراً ببطء وما الذى يدل على ذلك فى الخط البيانى ؟

(٨) متوسط ارتفاع البارومتر وانخفاضه بالبوصات فى العشرة الأيام الأولى من شهر يناير سنة ١٩٢٤ كان كالآتى :

٢١و٢٩ ، ١٢و٢٩ ، ٢٩ ، ٢٥و٢٩ ، ٣٧و٢٩ ، ٢٦و٢٩ ، ٤٦و٢٩ ، ٨٣و٢٨ ، ٦٦و٢٨ ، ٧٦و٢٨

وضح ذلك بالرسم البيانى

(٩) الجدول الآتى يبين مقادير الماء بالجالونات الموجودة فى حوض فى أزمنة مختلفة والمطلوب بيان ذلك بالرسم البيانى :

الزمن	الساعة ١٠	ق ١ ت ١٠	ق ٢ ت ١٠	ق ٢ ¼ ت ١٠	ق ٣ ت ١٠	ق ٣ ¼ ت ١٠	ق ٤ ت ١٠	ق ٤ ¼ ت ١٠
كمية الماء بالجالونات	٨	١١	١٤	١٤	١٤	٩½	٥	½

(١٠) الجدول الآتى يبين محيط خطوط العرض على سطح الكرة الأرضية مقدّرة بآلاف الأميال :

خط العرض	٠°	١٠°	٢٠°	٣٠°	٤٠°	٥٠°	٦٠°	٧٠°	٨٠°	٩٠°
طول محيط دائرة خط العرض	٢٤و٩	٢٤و٥	٢٣و٤	٢١و٦	١٩و١	١٦	١٢و٥	٨و٥	٤و٣	—

ارسم خطاً بيانياً يمثل هذه العلاقة ومنه أوجد :

أولا — محيط الدائرة التى عرضها ٢٥°

ثانياً — خط العرض الذى محيط دائرته ١٨٠٠٠ ميل .

(١١) الجدول الآتى يبين عدد سكان مملكة مقدراً بالملايين فى نهاية سنين مختلفة

السنة	١٨٥٠	١٨٥٥	١٨٦٠	١٨٧٠	١٨٨٠	١٨٨٥	١٨٩٠	١٩٠٠	١٩١٠	١٩١٥
السكان بالمليون	٢٠٫٤	٢٢٫٢	٢٤٫٢	٢٩	٣٤٫٢	٣٤٫٤	٤١	٤٩٫٤	٥٧٫٨	٦٣٫٤

ارسم خطا بيانياً يمثل هذه العلاقة ومنه أوجد :

أولا — سكان المملكة فى نهاية سنة ١٨٦٨

ثانياً — السنة التى فى نهايتها يبلغ عدد السكان ٤٦ مليوناً .

(١٢) قذف حجر رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض والجدول الآتى يبين الارتفاعات المختلفة للحجر فى نهاية الأزمنة المقابلة .

الزمن بالثانية	$\frac{1}{4}$	١	$1\frac{1}{2}$	٢	$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
الارتفاع بالقدم	١٧	٥٦	٧٢	٨٠	٧٧	٦٥	٤٥

ارسم خطاً بيانياً يمثل هذه التغيرات ثم أوجد منه :

أولا — ارتفاع الحجر بعد $\frac{1}{2}$ ثانية .

ثانياً — عدد الثوانى التى مضت حتى وصل الحجر إلى أقصى ارتفاعه .

(١٣) الجدول الآتى يبين متوسط الضغط الجوى فى مدينة القاهرة فى كل شهر من شهور سنة ١٩٢٦ :

الشهر	الضغط الجوى بالمليمتر	الشهر	الضغط الجوى بالمليمتر
يناير	٧٦٢٫١	يوليه	٧٥٤٫٦
فبراير	٧٦١٫٤	أغسطس	٧٥٥٫٩
مارس	٧٥٩٫٣	سبتمبر	٧٥٩٫٧
أبريل	٧٥٩٫٣	أكتوبر	٧٥٩٫٧
مايو	٧٥٦٫٦	نوفمبر	٧٦٠٫٧
يونيه	٧٥٦٫٧	ديسمبر	٧٦١٫٧

ارسم خطاً بيانياً يبين التغيير الجوى فى شهور هذه السنة .

(١٤) وجد صاحب مطعم أنه إذا أكل عنده حـ شخصاً فى اليوم بلغت نفقاته (هـ) جنيهاً و بلغ دخله (و) جنيهاً فى اليوم والجدول الآتى يبين حسابه فى بعض الأيام :

حـ	٢١٠	٢٧٠	٣٢٠	٣٦٠
هـ	١٦٫٧	١٩٫٤	٢١٫٦	٢٣٫٤
و	١٥٫٨	٢١٫٢	٢٦٫٤	٢٩٫٨

فبالرسم البيانى أوجد كلا من هـ ، و عندما يأكل عنده ٣٤٠ شخصاً وكم يكون عدد الآكلين فى اليوم فى حالة ما لا يكسب ولا يخسر ؟

(١٥) الجدولان الآتيان يبينان القوة اللازمة لكل من مركبين ا ، ب لتوليد سرعة ما

ا	سرعة ...	٨	١٠	١٢	١٢٫٥	١٣٫٥	١٤٫٥	١٦٫١	١٦٫٧
	قوة ...	٢٠٠	٤٠٠	٩٢٠	١١٠٠	١٥٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٣٥٠٠

ب	سرعة ...	٨	١٠٫٧	١٢٫٧	١٤	١٦	١٦٫٢
	قوة	٥٠٠	١٠٠٠	١٥٠٠	١٩٥٠	١٨٠٠	٣٠٠٠

فعند أى سرعة تتساوى القوتان (استعمل الرسم البيانى)

(١٦) الجدول الآتى يبين متوسط سرعة الريح بالمتر فى الثانية فى الأوقات المختلفة فى أحد أيام شهر أبريل فى مدينة لندن

الساعة	صباحا						مساء					
	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢
السرعة بالمتر فى الثانية ...	٢٫٧	٢٫٦	٢٫٨	٣٫٨	٤٫٧	٥٫٢	٥٫٢	٥٫١	٤٫٣	٣٫٤	٣	٢٫٧

ارسم خطاً بيانياً مكبراً بقدر ما يمكن يبين سرعة الريح فى الأوقات المختلفة من هذا اليوم

(١٧) يبين الجدول الآتى القيمة التقديرية لمدينة ادنبرج (مقدرة بملايين الجنيهات) فى السنوات المبينة به

السنة	١٨٩٥	١٨٩٧	١٨٩٩	١٩٠٠	١٩٠١	١٩٠٣	١٩٠٥
التقدير بملايين الجنيهات ...	٢٫٢١	٢٫٣٤	٢٫٤٤	٢٫٦٥	٢٫٨١	٢٫٩٢	٣٫٠٩

بين ذلك بالرسم واستنتج من الرسم :

(ا) القيمة التقديرية للمدينة سنة ١٨٩٨

(ب) السنة التى كانت فيها القيمة التقديرية للمدينة تساوى ٢٫٨٧ مليون جنيه تقريباً

ملحـــق

الطريقة العامة لاستخراج الجذر التربيعى

٧٦ — ليست طريقة استخراج الجذر بالتحليل إلى العوامل الأولية بالطريقة العملية وذلك لعدة أسباب منها :

(أولا) صعوبة التحليل إلى العوامل إذا وجدت بينها عوامل كبيرة مثل ١٤٩ ، ٣٦٧

(ثانياً) إذا كانت أسس العوامل الأولية لا تقبل القسمة على ٢ فى حالة الجذر التربيعى أو ٣ فى حالة الجذر التكعيبى

ولهذا كانت الطريقة العامة هى الطريقة العملية لاستخراج الجذور وسنقصر بحثنا هنا على شرح استخراج الجذر التربيعى بهذه الطريقة

٧٧ — تمهد لهذه الطريقة بمعرفة ما يأتى :

(أولا) مربعات ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... هى ١ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠٠٠ ، ... على الترتيب . ومن ذلك نرى أن العدد المحصور بين ١ ، ١٠٠ (أى ذا الرقم الواحد أو الرقمين) جذره التربيعى محصور بين ١ ، ١٠ (أى مكون من رقم واحد) والعدد المحصور بين ١٠٠ ، ١٠٠٠٠ (أى المكون من ٣ أرقام أو ٤) جذره التربيعى محصور بين ١٠ ، ١٠٠ (أى مكون من رقمين) والعدد المحصور بين ١٠٠٠٠ ، ١٠٠٠٠٠٠ (أى المكون من ٥ أرقام أو ٦) جذره التربيعى محصور بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ (أى مكون من ٣ أرقام) وهكذا

ويمكننا أن نلخص ذلك فيما يلى :

إذا كان عدد أرقام العدد (١ أو ٢) ، (٣ أو ٤) ، (٥ أو ٦) ... فإن عدد أرقام جذره التربيعى هو ١ ، ٢ ، ٣ ... على التناظر

أى أنه كلما زاد عدد الأرقام رقمين يزيد عدد أرقام الجذر التربيعى رقماً واحداً

ونرى أيضاً أن عدد أرقام الجذر التربيعى يساوى نصف عدد أرقام المربع إذا كان هذا العدد زوجياً و إلا فهو نصف العدد الزوجى التالى له

مثلاً : إذا قسمنا العدد ٨٢٨١ أو العدد ١٧٤٢٤ إلى فصول ثنائية مبتدئين من اليمين هكذا ٨٢٫٨١ أو ١٫٧٤٫٢٤ فإن عدد أرقام الجذر التربيعى لكل من هذين العددين يساوى عدد هذه الفصول سواء أكان الفصل الأخير من جهة اليسار محتوياً على رقم واحد أو رقمين

أى أن الجذر التربيعى للعدد الأول يشتمل على رقمين فى حين أن الجذر التربيعى للعدد الثانى يشتمل على ثلاثة أرقام .

(ثانياً) ∴ $(حـ + ى)^{٢} = حـ^{٢} + ٢ حـ ى + ى^{٢}$

$= حـ^{٢} + ى (٢ حـ + ى)$

∴ $(حـ + ى)^{٢} - حـ^{٢} = ى (٢ حـ + ى)$

مثلا : $٤٧^{٢} - ٤٠^{٢} = (\text{ضعف } ٤٠ + ٧) \times ٧$

ى $٣٦٥^{٢} - ٣٦٠^{٢} = (\text{ضعف } ٣٦٠ + ٥) \times ٥$

ى $٤١٥٣^{٢} - ٤١٥٠ = (\text{ضعف } ٤١٥٠ + ٣) \times ٣$

أى أن الفرق بين مربع أى عدد ومربع جزء منه يساوى حاصل ضرب مجموع ضعف هذا الجزء والجزء الباقى فى هذا الجزء الباقى

٦٨ — لتطبيق ما تقدم فى استخراج الجذر التربيعى نمثل بالمثالين الآتيين :

(مثال ١) أوجد $\sqrt{٢٢٠٩}$

العمـــل

(١) نقسم العدد إلى فصول ثنائية مبتدئين من جهة اليمين هكذا ٢٢٫٠٩

(٢) يؤخذ من ذلك أن الجذر التربيعى مكوّن من رقمين : عشرات وآحاد

(٣) ∴ ٢٢ محصور بين المربعين المتتاليين ١٦ ، ٢٥

∴ ٢٢٠٩ « « « ١٦٠٠ ، ٢٥٠٠ وجذره محصور بين العددين ٤٠ ، ٥٠

∴ الجذر التربيعى = ٤٠ + رقم الآحاد

(٤) فيكون ٢٢٠٩ − ٤٠^{٢} = (ضعف ٤٠ + رقم الآحاد) × رقم الآحاد

∴ رقم الآحاد = $\frac{٢٢٠٩ - ٤٠^{٢}}{\text{ضعف ٤٠ + رقم الآحاد}} = \frac{٦٠٩}{٨٠ + \text{رقم الآحاد}}$

، ∴ رقم الآحاد مقدار صغير بالنسبة إلى ٨٠

∴ يمكن إهماله مؤقتاً فى المقام ونجرب قسمة ٦٠٩ على ٨٠ لتعيين رقم الآحاد

وبالتجربة نجد أن رقم الآحاد = ٧

لأن ٧ × ٨٧ = ٦٠٩

فيكون الجذر التربيعى المطلوب = ٤٧

وتوضع العملية على الصورة الآتية :

(٤٠ + ٧) ٢٢٠٩ (٤٠

١٦٠٠

٦٠٩ (٨٠ + ٧

٦٠٩

...

(مثال ٢) أوجد $\sqrt{١٣٣٢٢٥}$

العمل

بتقسيم العدد إلى فصول ثنائية هكذا ١٣٬٣٢٬٢٥

نرى أن الجذر المطلوب مكوّن من ٣ أرقام : مئات وعشرات وآحاد

الخطوة الأولى : نبحث عن رقم المئات

∴ ١٣ محصور بين المربعين المتتاليين ٩ ، ١٦

∴ العدد المفروض محصور بين ٩٠٠٠٠ ، ١٦٠٠٠٠

∴ الجذر محصور بين ٣٠٠ ، ٤٠٠

∴ رقم المئات ٣ ويكون الجذر = ٣٠٠ + عدد آخر نبحث عنه ويطرح $٣٠٠^{٢}$ أي ٩٠٠٠٠ من العدد المفروض يكون الباقي ٤٣٢٢٥ ويكون الباقي الأول

وهو ٤٣٢٢٥ = (ضعف ٣٠٠ + عدد آخر) × العدد الآخر نفسه

الخطوة الثانية : نبحث عن رقم العشرات

∴ العدد الآخر = $\frac{٤٣٢٢٥}{٦٠٠}$ تقريباً

= ٧٠ »

وبالتجربة نجد أن ٧٠ أكبر من العدد المطلوب

∴ فنجرب ٦٠

∴ ٦٠ (٦٠٠ + ٦٠) = ٣٩٦٠٠ وهو أصغر من ٤٣٢٢٥

∴ العدد الآخر أكبر من ٦٠ وأقل من ٧٠

أي أنه يساوى ٦٠ + رقم الآحاد وتكون العشرات = ٦٠

∴ الفرق ٤٣٢٢٥ — ٣٦٢٥ ناشيء عن رقم الآحاد

الجذر المطلوب = ٣٦٠ + رقم الآحاد

الخطوة الثالثة : نبحث عن رقم الآحاد

∴ الفرق ٣٦٢٥ = ٤٣٢٢٥ — ٦٠ (٦٠٠ + ٦٠)

= $١٣٣٢٢٥ — ٣٠٠^{٢} — ٦٠ (٦٠٠ + ٦٠)$

= $١٣٣٢٢٥ — ٣٦٠^{٢}$

= (ضعف ٣٦٠ + رقم الآحاد) × رقم الآحاد

= (٧٢٠ + رقم الآحاد) × رقم الآحاد

∴ رقم الآحاد = $\frac{٣٦٢٥}{٧٢٠}$ تقريباً

= ٥ »

وبالتجربة نجد أن ٥ هو الرقم المطلوب لأن ٥ × ٧٢٥ = ٣٦٢٥

∴ √١٣٣٢٢٥ = ٣٦٥

وتوضح العملية على الصورة الآتية :

(١) ٣٠٠ + ٦٠ + ٥)١٣٣٢٢٥(٣٠٠

٩٠٠٠٠

٤٣٢٢٥ (٦٠٠ + ٦٠ = ٦٦٠

٣٩٦٠٠

٣٦٢٥ (٧٢٠ + ٥ = ٧٢٥

٣٦٢٥

(٢) بعد حذف الأصفار

٣٦٥)١٣٣٢٢٥(٣

٩

٦٦)٤٣٢(

٣٩٦

٧٢٥)٣٦٢٥(

٣٦٢٥

٠٠٠٠

٧٩ — يمكننا إيضاح الوضع الأخير فى المثال السابق و بيان الخطوات المتتالية فى العمل بما يأتى :

(١) نقسم العدد إلى فصول ثنائية مبتدئين من جهة اليمين هكذا ١٣٣٢٢٥

(٢) نبحث عن أكبر مربع فى الفصل الأخير ١٣ من جهة اليسار نجده ٩ وجذره التربيعى ٣ فيكون هو الرقم الأيسر فى الجذر فنجعل ١٣ مقسوما ٦ ٣ مقسوماً عليه ثم نطرح ٣٢ من الفصل الأخير فيكون الباقى ٤

(٣) ننزل الفصل الثانى ونضعه على يمين الباقى فيتكون العدد ٤٣٢ ونجعله مقسوما ثم نضاعف الرقم الذى وجد من الجذر ونضع الناتج وهو ٦ فى المقسوم عليه ونقسم ٤٣ على ٦ فخارج القسمة ٧

نتصور وضع الرقم ٧ على يمين المقسوم عليه ونجرب ما إذا كان ٧ × ٦٧ لا يزيد على المقسوم وهو ٤٣٢ ففى هذه الحالة المقسوم أصغر من ٧ × ٦٧ فلذلك نأخذ الرقم الذى يلى خارج القسمة (٧) فى الصغر أى نأخذ ٦ ونتصور وضعه على

يمين الرقم ٦ فى المقسوم عليه ونجرب ما إذا كان ٦ × ٦٦ يساوى أو أصغر من المقسوم ٤٣٢ فنجد أن ٦ × ٦٦ أصغر من ٤٣٢ فيكون ٦ هو الرقم الثانى فى الجذر .

نضع هذا الرقم على يمين الرقم الأول الذى وجد ونضعه كذلك على يمين الرقم ٦ فى المقسوم عليه ثم نطرح حاصل ضرب ٦٦ × ٦ من المقسوم ٤٣٢ فالباقى ٣٦

(٤) ننزل الفصل الثالث على يمين الباقى فيتكون العدد ٣٦٢٥ فنجعله مقسوما ثم نضاعف الجزء الذى وجد من الجذر ونضع الناتج وهو ٧٢ فى موضع المقسوم عليه نقسم ٣٦٢ ÷ ٧٢ فخارج القسمة ٥

نجرب ما إذا كان ٥ × ٧٢٥ يساوى أو أقل من المقسوم ٣٦٢٥ (فى هذه الحالة ٥ × ٧٢٥ = ٣٦٢٥) .

نضع خارج القسمة ٥ على يمين الرقمين اللذين وجدا فى الجذر وكذا على يمين ٧٢ فى المقسوم عليه ونطرح حاصل الضرب ٥ × ٧٢٥ من المقسوم ٣٦٢٥ فالباقى صفر وانتهت فصول العدد المفروض .

(٥) ∴ $\sqrt{١٣٣٢٢٥}$ = ٣٦٥

من طريقة العمل فى المثالين السابقين وباتباع خطوات مماثلة لما تقدم يمكننا استنباط الطريقة العامة لاستخراج الجذر التربيعى لأى عدد مهما كان عدد أرقامه وهى :

الطريقة

يقسم العدد إلى فصول ثنائية من جهة اليمين ثم يستخرج الجذر التربيعى لأكبر مربع منحصر فى الفصل الأخير من جهة اليسار فيكون هو رقم الرتبة اليسرى من الجذر ثم يطرح مربع هذا الرقم من الفصل الأخير .

ينزل على يمين الباقى الفصل الذى يليه ثم يفصل رقم آحاد العدد المتكون ويقسم جميع عشراته على ضعف ناتج الجذر فالخارج إما هو الرقم الثانى للجذر أو أكبر منه .

ولتجربته يوضع على يمين ضعف ناتج الجذر ويضرب العدد المكون من ذلك فى نفس هذا الرقم فان أمكن طرح حاصل الضرب من العدد المكوّن من الباقى والفصل الذى أنزل على يمينه كان هو الرقم المطلوب وإلا فتعاد التجربة على الرقم الذى ينقص عنه بواحد وهكذا .

ومتى حصلنا على الرقم الثانى للجذر ينزل على يمين الثانى الفصل الثالث من جهة اليسار ويستمر فى العمل حتى تنتهى جميع الفصول فيكون الخارج الكلى هو الجذر المطلوب .

تنبيه : إذا لم تكن إحدى عمليات القسمة ممكنة فيوضع فى ناتج الجذر صفر ويعتبر ذلك المقسوم باقياً وينزل على يمينه فصل ثان ويستمر فى العمل .

(مثال) أوجد الجذر التربيعى للعدد ٣٩٧٩٠٨٦٤

العمـــل

[الجواب إجمالاً $= \sqrt{٤٠٠٠٠٠٠٠} = ٦٠٠٠$ تقريباً]

لا داعى الآن لذكر الخطوات المتتالية فى العمل فسنكتفى بوضع العملية التامة وعلى الطالب تتبع الخطوات

٣٩٬٧٩٬٠٨٬٦٤ (٦
٣٦
٣٧٩ (١٢٣
٣٦٩
١٠٠٨٦٤ (١٢٦٠٨
١٠٠٨٦٤

$\therefore \sqrt{٣٩٧٩٠٨٦٤} = ٦٣٠٧$

٨٠ — فى الأمثلة السابقة كانت الأعداد المطلوب استخراج جذورها التربيعية مربعات كاملة ولذلك انتهت العملية فى كل حالة بدون باق ولكن من المعلوم أن أغلب الأعداد ليست مربعات كاملة ففى هذه الحالة لا بد أن يتبقى باق بعد استخراج آحاد الجذر التربيعى وحينئذ يمكننا الاكتفاء باستخراج الجزء الصحيح من الجذر مع ذكر الباقى أو يمكننا أن نستمر فى عملية استخراج الجذر التربيعى بالحصول على أرقام عشرية للجذر كما سنبينه فى المواد الآتيه :

(مثال) أوجد أقرب عدد صحيح للجذر التربيعى للعدد ٦٥٧٤٨ .

العمـــل

٢) ٦٫٥٧٫٤٨ (٢٥٦	٢) ٦٫٥٧٫٤٨ (٢٥٧
٤	٤
٤٥) ٢ ٥٧ (	٤٥) ٢ ٥٧ (
٢ ٢٥	٢ ٢٥
٥٠٦) ٣٢ ٤٨ (	٥٠٧) ٣٢ ٤٨ (
٣٠ ٣٦	٣٥ ٤٩
٢ ١٢	

∴ ٦٥٧٤٨ = ٢٥٦^{٢} + ٢١٢

و = ٢٥٧^{٢} − ٣٠١

∴ أقرب عدد صحيح للجذر التربيعى للعدد المفروض هو ٢٥٦

ملاحظة : فى المثال السابق إذا طرح الباقى ٢١٢ من العدد المفروض كان الناتج مربعاً كاملا وهو أكبر مربع منحصر فى العدد المذكور

كما أنه إذا أضيف العدد ٣٠١ إلى العدد المفروض كان الناتج هو المربع الكامل التالى للعدد المذكور

تمرين ٣٨

(١) أوجد الجذر التربيعى لكل من الأعداد الآتية :

(ا) ٢٧٠٤ ، ٥٣٢٩ ، ٦٥٦١ ، ٣٤٨١

(ب) ٥٩٢٩ ، ٩٦٠٤ ، ١٧١٦١ ، ١٥١٢٩

(حـ) ٥٣٨٢٤ ، ٤٢٠٢٥ ، ١٠٦٢٧٦ ، ٣٦٧٤٤٩

(٢) ما هو أكبر مربع يقل عن ٣٤٧٩٨٧ وما هو أصغر مربع يزيد عليه ؟

(٣) ما أصغر عدد يطرح مما يأتى ليكون الباقى مربعاً كاملاً :

(ا) ٧٢٩٤ (حـ) ٢٠٧٩٤٥

(ب) ٥٨٨٤ (ء) ٩٢٤٤٣٠

(٤) ما أصغر عدد يضاف إلى ما يأتى ليكون الناتج مربعاً كاملاً .

(ا) ٧٢٩٤ (حـ) ١١٩٠١٩

(ب) ١٤٣٥٦ (ء) ٩٢٤٣٧

(٥) ما أقرب المربعات الكاملة إلى العدد ٨٧٤٥٢

(٦) ما أقرب المربعات الكاملة إلى العدد ٢٣٤١٧

الجذور التربيعية للأعداد والكسور العشرية

٨١ — لاستخراج الجذر التربيعى لعدد عشرى نستخرج الجذر التربيعى للجزء الصحيح كالمعتاد و بعد أن نفرغ من الجزء الصحيح نستمر فى العمل بإنزال الأرقام العشرية اثنين اثنين بالطريقة العادية تماماً لنحصل على الأرقام العشرية فى الجذر المطلوب .

(مثال) أوجد $\sqrt{٤٦٦,٥٦}$

العمـــل

[الجواب إجمالا = $\sqrt{٥٠٠}$ = ٢٠ تقريباً]

٢١,٦)	٤٦٦,٥٦	(٢
	٤	
	٦٦ ٠٠٠٠	(٤١
	٤١	
	٣٥ ٠٠٠ ٥٦	(٤٢٦
	٢٥ ٥٦	
	٠٠	

∴ $\sqrt{٤٦٦,٥٦}$ = ٢١,٦

٨٢ — نلاحظ فى المثال السابق أننا قسمنا الجزء الصحيح إلى فصول ثنائية من اليمين إلى اليسار كالمعتاد مبتدئين من رقم الآحاد فإذا لم يكن هناك عدد صحيح بأن كان المقدار المطلوب استخراج جذره كسراً عشرياً فإن الجذر لا يشتمل على عدد صحيح ولذلك نستخرج الجزء العشرى بإنزال الأرقام العشرية اثنين اثنين من اليسار إلى اليمين كما فى المثال الآتى :

(مثال) أوجد $\sqrt{٠,١٠٣٠٤١}$

العمـــل

الجواب إجمالا = $\sqrt{\frac{١٠٠}{١٠٠٠٠}}$ = ٠,٣ تقريباً]

٠,٣٢١)	١٠,٣٠,٤١	(٣
	٩	
	١٣٠	(٦٢
	١٢٤	
	٦٤١	(٦٤١
	٦٤١	

∴ الجذر المطلوب = ٠,٣٢١

٨٣ — فى المثالين السابقين انتهت عملية الجذر بدون باق لأن كل مقدار كان مربعاً كاملا وأما إذا لم تنته العملية فيمكننا الاستمرار فى عملية استخراج الجذر للحصول على أى عدد نطلبه من الأرقام العشرية وذلك بأن نضع على يمين العدد العشرى المراد استخراج جذره العدد اللازم من الأصفار ثم ننزل هذه الأصفار اثنين كالمعتاد .

(مثال ١) أوجد $\sqrt{\text{٠٫٠٠٣٢١}}$ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية

العمـــل

[الجواب بالإجمال $= \sqrt{\frac{٣٢}{١٠٠٠٠}} = \frac{٥}{١٠٠} =$ ٠٫٠٥ تقريباً]

٠٫٠٣٢١٠٠٠ (٠٫٠٥٦٦

٢٥

٧١٠ (١٠٦

٦٣٦

٧٤٠٠ (١١٢٦

٦٧٥٦

٦٤٤

∴ الجواب = ٠٫٠٥٦٦ أى ٠٫٠٥٧ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية

ملاحظة : قد حصلنا على رقم عشرى زائد على المطلوب لإمكان تقريب الرقم الأخير المراد ذكره فى الجذر .

(مثال ٢) أوجد $\sqrt{٣}$ بحيث يحتوى الجواب على رقمين عشريين .

العمـــل

١,٤١٤) ٠٠ ، ٠٠ ، ٠٠ ، ٢ (١
١
١٠٠ (٢٤
٩٦
٤٠٠ (٢٨١
٢٨١
١١٩٠٠ (٢٨٢٤
١١٢٩٦

∴ $\sqrt{٢}$ = ١,٤١٤ تقريباً .

٨٤ — نلاحظ أن مربع أى كسر عشرى يحتوى على ضعف عدد الأرقام العشرية فى الكسر المفروض أى أنه لا بد أن يحتوى على عدد زوجى من الأرقام العشرية ولذلك فإننا فى استخراج الجذر التربيعى لكسر عشرى ننزل الأرقام العشرية اثنين اثنين كى يكون عدد الأرقام العشرية التى يستخرج الجذر المقابل لها زوجياً .

وفى المثال الأولى فى المادة السابقة حينما أنزلنا الفصل الثانى لم ننزل الرقم ١ فقط بل أنزلنا على يمينه صفراً لنجعل عدد الأرقام زوجياً .

تمرين ٣٩

(١) أوجد الجذر التربيعى للكسور والأعداد العشرية الآتية .

(ا) ٠,٥٣٢٩ ، ٣٤١,١٤٠٩ ، ٨٤١,٥٨٠١

(ب) ٠,٠٩١٨٠٩ ، ٩,٧٩٦٩ ، ٠,٠٠٨٦٨٦٢٤

(حـ) ٠,٠٠٨١٩٠٢٥ ، ٢٥,٥٠٢٥ ، ٢٠,٨٨٤٩

(٢) أوجد الجذر التربيعى لما يأتى بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية:

(ا) ٠٫٠٦٤٢٦٧ ، ٠٫١٤٨٦٢٨ ، ٠٫٠٠٨٦٢٤

(ب) ١٧٫٣١٢ ، ٢٫٨١٩٤ ، ٤٫٦٧٨٩١

(٣) أوجد الجذر التربيعى لما يأتى مقرباً إلى رقمين عشريين :

(ا) ١٧٫٤٥٣ ، ٢٨٫٩

(ب) ٥٢٫١٦٧ ، ١٫٦ ، ٢٫٥

الجذور التربيعية للكسور الاعتيادية

٨٥ — سبق أن رأينا بمادة ٢٥ أن الجذر التربيعى لكسر اعتيادى هو كسر آخر بسطه الجذر التربيعى لبسط الكسر الأصلى ومقامه الجذر التربيعى لمقامه وقد سهل تطبيق ذلك فى الأمثلة السابق ذكرها لأن كلا من البسط والمقام كان مربعاً كاملاً .

وأما إذا كان المقام وحده مربعاً كاملا ولم يكن البسط كذلك فإننا نستخرج الجذر التربيعى للبسط بالطريقة العامة ونقسمه على الجذر التربيعى للمقام كما فى المثال الآتى :

(مثال) أوجد $\sqrt{\frac{٥}{٩}}$ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية .

العمـــل

$$\sqrt{\frac{٥}{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{٥}}{٣} = \frac{٢٫٢٣٦١}{٣} = ٠٫٧٤٥$$

تنبيـه — إذا لم يكن الكسر المفروض فى أصغر حديه فيجب اختصاره قبل استخراج الجذور .

فمثلا — إذا طلب استخراج الجذر التربيعى للكسر $\frac{٢٥}{٦٤}$ فإننا نختصره أولا إلى $\frac{٥}{٩}$ ثم نستخرج الجذر التربيعى للكسر الناتج كما فى المثال المتقدم .

٨٦ — فإذا لم يكن مقام الكسر مربعاً كاملا فإن عملية قسمة الجذر التربيعي للبسط على جذر المقام تكون طويلة سواء أكان البسط مربعاً كاملا أم لم يكن .

فمثلا — إذا أردنا أن نجد $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ فإننا نجد أن $\sqrt{٢} = ١٫٤١٤٢$ و $\sqrt{٣} = ١٫٧٣٢٠$

وبدهي أن عملية قسمة العدد الأول على الثاني مطوّلة ولذلك نتبع طريقة أخرى لاختصار العمل بأن نستبدل بهذا الكسر كسراً آخر مساوياً له ومقامه مربع كامل هكذا :

(مثال ١) أوجد $\sqrt{\frac{٢}{٣}}$ بحيث يكون الجواب محتوياً على رقمين عشريين .

العمل

$$\sqrt{\frac{٢}{٣}} = \sqrt{\frac{٣ \times ٢}{٣ \times ٣}} = \frac{\sqrt{٦}}{٣} = \frac{٢٫٤٤٩٢}{٣} = ٠٫٨٢$$

(مثال ٢) أوجد $\sqrt{١\frac{٩}{٢٠}}$ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية .

العمل

[الجواب تقريباً $= \sqrt{\frac{٣٦}{٢٥}} = \frac{٦}{٥} = ١٫٢$]

$$\sqrt{١\frac{٩}{٢٠}} = \sqrt{\frac{٢٩}{٢٠}} = \sqrt{\frac{٥ \times ٢٩}{٥ \times ٢٠}} = \frac{\sqrt{١٤٥}}{١٠} = ١٫٢٠٤ \text{ تقريباً}$$

تمرين ٤٠

(١) أوجد الجذر التربيعي لما يأتي :

(ا) $\frac{١٦٨١}{٢١١٦}$ و $\frac{١٨٤٩}{١٩٣٦}$ و $\frac{٤٧٥٧}{٦٥٥٣٣}$

(ب) $\frac{٢٠٤٨}{٢٤٥٠}$ و $\frac{٧٤٥٢٩}{٦٨٠٦٢٥}$ و $١٤٥\frac{١٤٤}{١٦٩}$

(حـ) $٢٥١٧\frac{١٩٦}{٢٨٩}$ و $٤١٩٤٣\frac{١}{٢٥}$ و $٣٠١٦٧٥\frac{٩}{١٦}$

(٢) (ا) أوجد $\sqrt{٤٢\frac{١}{٣٥}}$ و $\sqrt{٢٣\frac{٣}{٢٧}}$ مقرباً إلى رقم عشري واحد .

(ب) أوجد $\sqrt{\frac{٩}{٣٥}}$ و $\sqrt{\frac{١٦}{٢٧}}$ و $\sqrt{٤\frac{٥}{٢٢}}$ مقرباً إلى رقمين عشريين .

تمارين متنوعة لاعادة المقرر

(١)

(١) صندوق مكعب يسع تماما ١٢٥ كرة من الرصاص قطر كل منها ٣ بوصات أوجد كم قدما مكعبة من الرمل تملأ الفراغ الكائن داخل هذا الصندوق بين الكرات .

(٢) بدأ موظف الخدمة وسنه عشرون سنة بمرتب ١٠٠ جنيه سنويا وبقى مرتبه ثابتاً ٣ سنوات ثم زاد المرتب الشهرى جنيهين سنوياً لمدة العشر السنوات التالية ثم بقى كما هو حتى استقال وكان متوسط مرتبه مدة خدمته كلها ٢٥٠ جنيهاً سنوياً ، أوجد السن التى استقال فيها .

(٣) الربح المركب لمبلغ ما بسعر ٥ ٪ فى السنة لمدة سنتين يزيد على ربحه البسيط لنفس المدة ، و بنفس السعر بمقدار جنيه واحد فما المبلغ ؟

(٤) تاجر يحدد لبضاعته ثمنين أحدهما للدفع فوراً والآخر للدفع المؤجل فإذا علم أن الثمن المؤجل هو ١ ½ جنيه يخصم منه حطيطة بسعر ٥ ٪ للثمن الفورى فما الثمن الفورى ؟

(٥) اشترك ا ، ب فى تجارة بمبلغين مقدارهما ١٥٠٠٠ جنيه و٩٠٠٠ جنيه على الترتيب و بلغ الدخل فى نهاية السنة ٥٦٠٠ جنيه وزعت بالطريقة الآتية :

أولاً — ٥ ٪ من الأرباح الكلية تدفع لشركة التأمين .

ثانياً — ⅐ الأرباح الكلية للمصاريف النثرية .

ثالثاً — يعطى ب نسبة معينة مما تبقى مقابل إدارة العمل .

رابعا — يقسم الباقى الأخير بعد ذلك بينهما بنسبة رأس مالهما فإذا علم أن نصيب ا قد بلغ ٢٥٠٠ جنيه فكم كان نصيب ب مقابل إدارة الشركة

(٦) فى ٢٧ سبتمبر سنة ١٩٣٤ وضعت عصا رأسية طولها ٦ ديسمترات فى أرض فضاء . والجدول الآتى يبين طول ظل هذه العصا فى الأوقات المختلفة من النهار :

الوقت بالساعة	ت ١٠	ق ت ١٠,٤٠	ق ت ١١,١٥	ق ت ١١,٣٠	ق ت ١١,٤٥	ت ١٢	ق ت ١٢,٢٠	ت ١	ق ت ٢,١٥
طول الظل بالديسيمتر	٨,٦	٧,٧٩	٧,٣٥	٧,٢٥	٧,٢٢	٧,٢٢	٧,٣٠	٧,٧٥	٩,٨١

ارسم خطاً بيانيا يمثل طول الظل فى الأوقات المختلفة من النهار ومنه أوجد

أولا — الوقت عند ما كان طول الظل ٨٥ سنتيمتراً

ثانياً — طول الظل فى الساعة ق ت ١٢/ ٤٠ `

(٢)

(١) كرة معدنية مجوفة قطرها الخارجى ٨ بوصات وسمك معدنها $\frac{1}{2}$ ١ بوصة أوجد وزن المسحوق الذى يملؤها إذا علم أن كل ٢٥ بوصة مكعبة من هذا المسحوق تزن رطلين ؟

(٢) الجدول الآتى يبين درجات الحرارة فى أوقات مختلفة فى يوم ما فى مدينة حلوان

الوقت	صباحا						مساء					
	نصف الليل	٢	٤	٦	٨	١٠	الظهر	٢	٤	٦	٨	١٠
درجة الحرارة المئوية ...	١٣,٥	١٢,٥	١١,٥	١١°	١٣,٥	١٦,٥	١٩,٨	٢١,٣	٢١	١٩,٥	١٧	١٥

ارسم خطاً بيانياً يمثل ذلك ومنه أوجد :

أولا — درجة الحرارة عند الساعة التاسعة صباحا

ثانياً — كم كانت الساعة عند ما كانت درجة الحرارة ١٨ مئوية

(٣) وضع رجل مبلغاً فى مصرف فبلغ ربحه فى السنة الأولى ٢٠ جنيهاً و بلغ ربحه فى السنة الثانية ٢٠٫٨ جنيهاً فما زيادة ربح السنة الثالثة عن ربح السنة الأولى ؟

(٤) ابتدأ محمد عملا تجارياً برأس مال قدره ٨٥٠٠ جنيه و بعد شهرين اشترك معه أحمد ومحمود فدفعا ٨٠٠٠ جنيه ، ٧٢٠٠ جنيه على الترتيب إلا أن أحمد لم يمكنه البقاء فى الشركة فحسب مبلغه بعد أربعة أشهر من دخوله فيها فإذا زاد نصيب محمد من الأرباح فى نهاية السنة عن نصيب محمود ٤٥٠ جنيهاً فما نصيب كل من محمد وأحمد ومحمود من هذه الأرباح ؟

(٥) وثيقة باعها صاحبها « ا » قبل ميعاد استحقاقها بمدة ٦ شهور بسعر الحطيطة الخارجية ٨ ٪ فى السنة ثم وضع ماحصل عليه فى تجارة مشتركا مع آخر « ب » فكان مجموع مبلغيهما ٦٠٠ جنيه فإذا بلغت الأرباح الكلية للشركة بعد مدة ما ١٢٥ جنيهاً أعطى « ا » منها ٢٠ ٪ نظير إدارته العمل وكان نصيب « ب » من الأرباح ٦٠ جنيهاً فماذا كانت القيمة الإسمية للوثيقة ؟

(٦) فى المتوسط يكون عادة مقدار المطر الساقط فى شهر مارس هو نفسه فى شهر أبريل فى انجلترا وقد حدث فى سنة ١٩٢٣ أن زاد المطر الساقط فى شهر مارس ٢٠ ٪ عن المتوسط المعتاد ونقص فى شهر أبريل ١١ ٪ عن المتوسط المعتاد ولو أنه نقص فى شهر مايو ٨ ٪ عن المتوسط المعتاد لكان متوسط سقوط المطر فى الأشهر الثلاثة عادياً . أوجد هل سقوط المطر فى شهر مايو فى انجلترا فى المعتاد أكثر أو أقل منه فى شهر أبريل ومقدار ذلك فى المائة .

(٣)

(١) قطعة معدنية مصمتة على شكل أسطوانة دائرية قائمة ، ارتفاع هذه الأسطوانة يعادل طول نصف قطر قاعدتها ، كسر من الأسطوانة جزء

يعادل $\frac{1}{7}$ من وزنها وسقط هذا الجزء فى حوض به ماء وكانت قاعدة الحوض على شكل مربع طول ضلعه ٧ سنتيمترات فإذا علم أن الماء ارتفع فى الحوض مقدار سنتيمترين فاحسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ($ط = \frac{22}{7}$) .

(٢) شوهدت درجة الحرارة « ح » لقطعة معدنية آخذة فى البرودة فى مدة مختلفة « ز » فى لحظات معينة فوجدت أنها تتغير حسب الجدول الآتى :

« ز » بالدقائق	٠	٤	٦	٩	١٣	١٩	٢٨	٣٨
« ح » مئوية	١١٣	١٠١	٩٥	٨٧	٧٩	٧١	٦٤	٦٠

ارسم الخط الذى يوضح تلك التغيرات ثم استنتج من الشكل :

أولا — درجة الحرارة بعد ١٦ دقيقة

ثانياً — الزمن الذى بردت فيه القطعة من ٩٥° إلى ٦٥°

(٣) وضع رجل مبلغاً فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٢٪ فى السنة وفى نهاية السنة الثانية سحب ٥٠٫٣٣ جنيهاً وترك الباقى فى المصرف ليربح بالسعر الأول وفى نهاية السنة الثانية وجد أن جملة ماله فى المصرف ٢٩٣٫٥٥٦ جنيهاً فما أصل المبلغ الذى وضع فى المصرف ؟

(٤) اشترك ا ، ب ، حـ فى عمل تجارى برؤوس أموال قدرها ٥٠٠ جنيه ، ٧٥٠ جنيهاً ، ٢٥٠ جنيها على الترتيب واتفقوا على أن يقوم « ا » بادارة العمل نظير نسبة مئوية معينة من الأرباح الكلية و بعد مضى ٨ شهور سحب « ب » $\frac{1}{4}$ رأس ماله وانسحب « حـ » من الشركة وفى نهاية السنة من بدء الشركة كانت الأرباح الكلية ٦٤٠ جنيها خص « ا » منها ٢٨٠ جنيها فكم فى المائة من الأرباح الكلية كان نصيب « ا » نظير إدارة العمل

(٥) أوجد $\sqrt[3]{١٦٠٠٣٠٠٨}$

(٦) يمزج رجل نوعين من الشراب ثمن شراء اللتر من النوع الأول ٢٥ قرشاً وثمنه من النوع الثانى ١٥ قرشاً ويفقد ٥٪ من المزيج فى عملية المزج

ويبيع اللتر من المزيج بسعر ٢٤ قرشاً رابحاً فى ذلك ٢٠ ٪ من ثمن الشراء فما النسبة التى يمزج بها الرجل النوعين ؟

(٤)

(١) اقترض رجل ١٠٠٠ جنيه بالربح المركب بسعر ٣ ½ ٪ فى السنة فإذا رد للدائن ٢٣٥ جنيهاً فى نهاية السنة الأولى و٢٣٥ جنيهاً فى نهاية السنة الثانية فكم جنيهاً يدفعها للدائن فى السنة الثالثة لينتهى الدين ؟

(٢) إناءان ارتفاعاهما متساويان وأحد الاناءين متوازى مستطيلات بعدا قاعدته ١٢ و٨٦ من السنتيمترات والآخر اسطوانة قطر قاعدتها يساوى ٣٥ سنتيمتراً والاناءان موضوعان على نضد أفقى ومتصلان عند أسفلهما بأنبوبة قصيرة رفيعة يمكن إهمال حجمها ومثبت فى هذه الأنبوبة صنبور فإذا كان الصنبور مقفلا وصب فى متوازى المستطيلات ماء إلى ارتفاع ٢ و٤٤ سنتيمتر ثم فتح الصنبور بعد ذلك (لينتقل جانب من الماء إلى الاناء الآخر) فما هو الارتفاع الذى يصل إليه الماء فى الاسطوانة ؟

(٣) اشترك ا ، ب فى تجارة فدفع ا ٦٠٠٠ جنيه ودفع ب ٤٠٠٠ جنيه واتفقا على أن توزع الأرباح والخسائر بينهما فى نهاية كل سنة بنسبة مبلغيهما فى أول نفس السنة فإذا علم أن ا كان يسحب أرباحه فى نهاية كل سنة وأن ب كان يتركها فى التجارة وأن الشركة قد ربحت فى نهاية السنة الأولى ١٤٠٠ جنيه وفى نهاية السنة الثانية ١٥٨٤ جنيهاً وخسرت فى نهاية السنة الثالثة ١٧٨٤ جنيهاً فأوجد ما آل إليه رأس مال ب فى نهاية هذه المدة ؟

(٤) وثيقتان الأولى بمبلغ ٢٣٧٥ ٢٥/٩٧ جنيهاً تستحق الدفع فى أول مايو سنة ١٩٣٥ والثانية بمبلغ ٢٤٠٠ جنيه تستحق الدفع فى يوم ٢٤ سبتمبر سنة ١٩٣٥ وفى يوم ٦ ديسمبر سنة ١٩٣٤ كانت القيمة الحالية للوثيقة الأولى بعد

خصم حطيطة خارجية بسعر $\frac{1}{2}$ ٧ ٪ فى السنة تساوى القيمة الحالية للوثيقة الثانية بعد خصم حطيطة خارجية فأوجد السعر الذى حسبت به الحطيطة الخارجية للوثيقة الثانية ؟

(٥) برهن على أن $\sqrt[7]{٠,٣٠٣٦٠١}$ ينحصر بين ٥٥٢و٠ ، $\sqrt[3]{\sqrt[7]{٠,١٦٣٣٧٥}}$

(٦) يبين الجدول الآتى البعد عن مصب النيل عند رشيد مقدراً بالكيلومترات والارتفاع عن سطح البحر مقدراً بالأمتار لبعض المدن الواقعة على نهر النيل :

المدينة	رشيد	القاهرة	أسيوط	جرجا	الأقصر	اسوان	وادى حلفا
البعد عن رشيد بالكيلومترات ...	صفر	٢٦٠	٦٦٠	٨٠٠	٩٩٠	١٢١٠	١٥٥٠
الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار	صفر	١٥	٤٥	٥٧	٦٨	٨٣	١١٥

ارسم الخط البيانى الذى يمثل هذه التغييرات ومنه أوجد ما يأتى :

(أولا) ارتفاع مغاغة عن سطح البحر إذا علم أنها تبعد ٤٥٠ كيلومتراً عن رشيد

(ثانياً) بعد الدر عن رشيد إذا علم أن ارتفاع الدر عن سطح البحر ١٠٤ أمتار

(٥)

(١) أوجد الفرق بين $\sqrt[3]{\sqrt[7]{٠,١٦٦٣٧٥}}$ ، $\sqrt[7]{٠,٢٩١٦}$

(٢) قسم رجل رأس ماله إلى جزءين أودع الجزء الأول فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ فى السنة واستخدم الجزء الباقى وقدره ٨٧٥ جنيهاً فى تجارة وكانت التجارة تخسر ٢ ٪ فى كل سنة من قيمتها أول السنة نفسها فإذا كان ما يؤول إليه رأس مال هذا الرجل فى التجارة وفى المصرف معاً بعد ٣ سنوات هو ١٧٤٩و٦٤٣ جنيهاً فما مقدار رأس ماله ؟

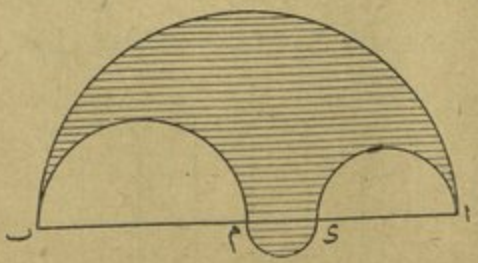
(٣) كتلة معدنية على شكل منشور قائم قاعدته معين طولا قطريه ٧ سم ٢٦و٨ سم على الترتيب وارتفاعه ١١ سم قطع منها جزء على شكل منشور ثلاثى قائم ارتفاعه هو ارتفاع الكتلة المعدنية ومساحة قاعدته ١٦و٢ سم^{٢} ثم صهر الجزء الباقى وحول إلى سلك أسطوانى طوله $\frac{١}{٤}$ ٢٣٢٢ سم فما قطر هـذا السلك إذا علم أن ط = $\frac{٢٢}{٧}$ ؟

(٤) وثيقة بمبلغ ١و١٨٢٥ جنيهاً تستحق الدفع بعد ست سنوات استبدل بها حاملها وثيقتين الأولى بمبلغ ١٠٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد أربع سنوات والأخرى تستحق الدفع بعد عشر سنوات من تاريخ الاستبدال فإذا علم أن الخطيطة الخارجية محسوبة بسعر ٥و٣٪ فى السنة فاحسب القيمة الأسمية للوثيقة الثانية .

(٥) (ا) أوجد باقى طرح العدد الذى جذره التكعيبى ٠و٠٧ من العدد الذى مربعة ٠و٠٠٥١٨٤ .

(ب) أوجد أصغر عدد يقسم عليه ٩١٤٧٦ ليكون الناتج مكعباً كاملا .

(٦) رسم نصف دائرة مركزها م ونصف قطرها م ب ثم أخذت نقطة ء على ا م ورسمت على ا ء ، ء م ، م ب ثلاثة أنصاف دوائر كما فى الشكل فإذا كان طول ا ب ٨٤ سم ، م ء ١٤ سم أوجد مساحة الجزء المظلل (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .



(شكل ٣٨)

(٦)

(١) وضع مبلغ فى بنك ليربح ربحاً مركباً فكانت جملته بعد سنتين ٥٤٠٫٨ جنيهاً وجملته بعد سنة أخرى ٥٦٢٫٤٣٢ جنيها فما السعر وما المبلغ ؟

(٢) ما هو المقدار الذى إذا طرح منه ٢ كان مكعب الناتج $\frac{٨٠٤٩٢}{٤٥٦٥٣٣}$ ٤

(٣) رجل معه وثيقتان الأولى بمبلغ ٧٣٠ جنيهاً تستحق الدفع فى ٥ فبراير سنة ١٩٣٧ والثانية تستحق الدفع فى ٦ سبتمبر من السنة عينها باعها فى أول يناير من السنة نفسها فإذا كان مجموع الخطيطتين الخارجيتين هو ١٨٫٣٨ من الجنيهات والقيمة الأسمية للوثيقة الثانية ٠٫٦ من القيمة الاسمية للأولى فما هو السعر الذى حسبت به الخطيطتان ؟

(٤) إناء على شكل منشور ثلاثى قائم ارتفاعه ١٢٠ سم وقاعدته مثلث قائم الزاوية ضلعا القائمة فيه ٢٠ ، ١٥ من السنتيمترات ملىء إلى ثلثيه ماء ثم سكب ما به فى إناءين الأول على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٦٦ سم وقطرها $٨\frac{١٠}{١١}$ سم فامتلأت ثم سكب الماء الباقى فى إناء على شكل متوازى المستطيلات بعدا قاعدته ٦ ، ١٨ سم فما ارتفاع الماء فيه ؟

(٥) اشترك شخصان فى تجارة فدفع الأول ٢٠٠٠ جنيه ودفع الثانى ١٥٠٠ جنيه وبعد شهرين أضاف الأول ٦٠٠ جنيه وانضم إليهما ثالث بمبلغ ٣٠٠٠ جنيه وبعد ثلاثة شهور أخرى أضاف الثانى ١٠٠٠ جنيه أوجد نصيب كل واحد منهم من الأرباح الكلية فى نهاية العام إذا علم أنها بلغت ٨٠٠ جنيه وأن الأول سيأخذ ١٠ ٪ من الأرباح نظير أتعاب الإدارة .

(٦) إذا علم أن محيط أحد المستطيلات ٢٢ متراً فارسم من الجدول الآتى الخط البيانى للارتباط بين مساحة المستطيل وأحد أضلاعه .

طول الضلع المتغير بالأمتار	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
مساحة المستطيل بالأمتار المربعة	٠	١٠	١٨	٢٤	٢٨	٣٠	٣٠	٢٨	٢٤	١٨	١٠	٠

ثم أوجد من الرسم طول كل من الضلعين عند ما تكون مساحة هذا المستطيل أكبر ما يمكن .

(٧)

(١) اقترض رجل مبلغ ٧٠٦٠ جنيهاً وتعهد أن يسدده هو وأرباحه على قسطين أولهما ومقداره ١ و٢٦٩٠ جنيهاً يدفع فى نهاية السنة الثانية من تاريخ القرض والثانى ومقداره ٥١٩٥,٤٢١ جنيهاً يدفع فى نهاية السنة الثالثة فإذا علم أن سعر الربح المركب فى السنتين الأولى والثانية ٥ ٪ فى السنة فما سعر الربح المركب فى السنة الثالثة ؟

(٢) إناءان أولهما على شكل أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٧٠ سم ومحيط دائرة قاعدتها $100\frac{4}{7}$ سم والثانى على شكل منشور ثلاثى قائم ارتفاعه ٥٠ سم وطول أحد أضلاع قاعدته ١٥ سم وطول العمود النازل على هذا الضلع من رأس المثلث المقابل للضلع ١١ سم ملىء الإناءان بعجينة يصنع منها الورق أوجد كم فرخاً من الورق يمكن صنعه من هذه العجينة إذا كان بعدا الفرخ الواحد ٢١ سم و ٣٣ سم وسمك كل ٣٠٠ فرخ ٢,٥ سم وأن العجينة تفقد ١٥ ٪ من حجمها عند التجفيف (ط = $\frac{22}{7}$)

(٣) أى المقدارين أكبر $\sqrt[3]{0,857375}$ أم $\sqrt[7]{0,9801}$

(٤) ارسم الخط البيانى الدّال على التغيرات التى طرأت على درجات الحرارة فى الأزمنة المقابلة لها كما هو مبين بالجدول الآتى :

الزمن بالساعات	نصف الليل	صباحا					الظهر	مساء				
		٢	٤	٦	٨	١٠		٢	٤	٦	٨	١٠
درجة الحرارة بالمقياس المئوى	١٠	٩	٨,٢	٩	١٢	١٥	١٨	٢٠	١٩	١٥	١٣	١٢

(٥) أسس ا ، ب مشروعا تجاريا وكان رأس مال ا ضعف رأس مال ب و بعد مضى ستة أشهر سحب ا ربع رأس ماله و بعد مضى سنة من تاريخ تأسيس المشروع انضم إليهما حـ برأس مال قدره ٧٥٠ جنيهاً و بعد مضى سنتين من تاريخ تأسيس المشروع بلغت الأرباح ١٤٤٠ جنيهاً خص حـ منها ١٨٠ جنيهاً فما مقدار رأس مال ب ؟

(٦) وثيقة محررة يوم ١٥ فبراير سنة ١٩٣٥ لمدة ٨ شهور حولت لمصرف مالى يوم ٢٢ مايو من السنة نفسها فدفع المصرف لحاملها ٥٩٠ جنيهاً و ٤٠٠ مليم فإذا علم أن سعر الحطيطة الخارجيـة ٤ ٪ فى السنة فكم كانت قيمتها الإسمية .

(٨)

(١) وضع رجل مبلغاً فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٥٪ فى السنة وفى نهاية السنة الأولى أضاف إلى ماله فى المصرف ٣٠٠ جنيه وانخفض السعر إلى ٤٪ فى السنة وفى نهاية السنة الثالثة سحب مما له فى المصرف ٢و٥٦٧ جنيهاً وقد وجد أن جملة ماله فى نهاية السنة الرابعة ٤٥١٥ جنيهاً أوجد المبلغ الذى وضعه فى المصرف أول الأمر .

(٢) إناء على شكل متوازى المستطيلات ارتفاعه ديسيمتران وطول قاعدته ٦ ½ سم وعرضها ٥ ½ سم ملىء كله بالماء ثم سكب الماء الذى فيه فى إناءين كل منهما على شكل اسطوانة قائمة موضوعين على نضد أفقى واحد ومتصلين عند أسفلهما بواسطة أنبوبة رفيعة يمكن إهمال حجم الماء الذى يملؤها فإذا كان قطرا قاعدتيهما ٦ ، ٤ من السنتيمترات على التناظر فاحسب ارتفاع الماء فيهما (ط = ٢٢/٧)

(٣) الجدول الآتى يبين العلاقة بين سرعة الريح والضغط الذى يحدثه على الأجسام المعرضة لها مع العلم بأن الضغط مقدر بثقل الباوند على القدم المربعة

سرعة الريح بالأميال فى الساعة	٥	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠
الضغط	٠,١	٠ر٥	٢	٤,٤	٧,٩	١٢,٢	١٨,٧	٢٤,١	٣١,٥

وضح هذه العلاقة بالرسم البيانى واستنتج من الرسم .

(ا) الضغط عند ما تكون سرعة الريح ٤٥ ميلا فى الساعة .

(ب) سرعة الريح عند ما يكون الضغط على القدم المربعة ٢١ پاوندا .

(٤) اشترك أحمد وعلى وسعيد فى تجارة فدفع أحمد ١٢٠٠ جنيه وعلى ١٥٠٠ جنيه وسعيد ١٠٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ الأخير ١٠٪ من أرباح الشركة نظير إدارته لأعمالها و بعد أربعة شهور أضاف أحمد إلى رأس المال ٣٠٠ جنيه و بعد شهرين آخرين سحب ٣٠٠ جنيه من رأس ماله .

وفى نهاية العام كان جميع ما أخذه سعيد يزيد على نصيب أحمد ٢٠ جنيها . أحسب ما أخذه كل منهم .

(٥) وثيقة بمبلغ ٥٠٠ جنيه كانت تستحق الدفع فى أول أبريل سنة ١٩٣٤ قدمت للمصرف بتاريخ ١٣ يونيه سنة ١٩٣٣ فحجز منها حطيطة خارجية ودفع الباقى لحاملها والمطلوب معرفة مادفع لحاملها إذا علم أن السعر الذى حسب به المصرف الحطيطة الخارجية وهو السعر نفسه الذى إذا وضع به ٤٢٠ جنيها فى مصرف ليربح ربحاً بسيطا مدة ٥ شهور لبلغ ربحه ٦ جنيهات

(٦) قيست أطوال عدد من الأشخاص ودونت فى الجدول الآتى :

الأطوال بالسنتيمترات	١٦٠	١٦١	١٦٢	١٦٣	١٦٤	١٦٥	١٦٦	١٦٧	١٦٩
عدد الأشخاص	١	٨	١١	١٧	س	٣٣	٣٠	٢٤	٢

فإذا علم أن متوسط الشخص الواحد ١٦٥ سم فأوجد قيمة س

(٩)

(١) ثلاثة أعداد حاصل ضرب أولها فى ثانيها ٦٠٤٨ وحاصل ضرب ثانيها فى ثالثها ٨٠٦٤ وحاصل ضرب ثالثها فى أولها ٦٩١٢ فما هى هذه الأعداد ؟

(٢) متوسط درجات تلميذ فى اللغات الثلاث فى الفترة الأولى ٢٥ ومتوسطه فيها فى الفترة الثانية ٣٠ فإذا كان متوسطه فى اللغة العربية فى الفترتين معا هو ٣٦ وكان متوسطه فى اللغة الإنجليزية فيهما أيضاً هو ٢٩ فما درجة اللغة الفرنسية فى كل فترة إذا علم أن درجته فيها فى الفترة الأولى $\frac{3}{4}$ درجته فيها فى الفترة الثانية ؟

(٣) اقترض على من حسن مبلغاً وكتب على نفسه وثيقة بمبلغ ٢٤٠٠ جنيه تستحق الدفع يوم ٨ أغسطس سنة ١٩٣٥ لكنه فى يوم ١٥ مارس سنة ١٩٣٥ دفع لحسن مما عليه ٨٠٠ جنيه وكتب بالباقى وثيقة أخرى جديدة تستحق الدفع يوم ٢٠ أكتوبر سنة ١٩٣٥ فأوجد القيمة الاسمية لهذه الوثيقة مع العلم بأن الحطيطة خارجية محسوبة بسعر ٥و٧٪ فى السنة

(٤) منشور معدنى مصمت قائم ارتفاعه $13\frac{1}{2}$ سم وقاعدته على هيئة شكل رباعى اب حء كل من زاويتيه اوء قائمة وأطوال أضلاعه اب وب حء حء وء اهى على الترتيب ١٣و١٠و٦و١٩و٨ من السنتيمترات أوجد حجمه وإذا صهر وحول إلى مكعب فكم تكون المساحة السطحية لهذا المكعب ؟

(٥) الجدول الآتى يبين إحصاء الحوادث التى قامت بإسعافها جمعية الاسعاف فى سنة ١٩٢٩

	يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيه	يوليه	اغسطس	سبتمبر	اكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
اصابات من الترام	٥١	٣٤	٥٣	٥٠	٤٧	٤٥	٥٤	٤٣	٤٨	٥٢	٤٩	٤٣
اصابات من الدراجات	٣٧	٣٧	٥٤	٥٢	٥٣	٥٤	٥١	٤٢	٥١	٣٥	٣٤	٣٩

ارسم خطاً بيانياً يوضح هذه العلاقة على ورقة واحدة و بمقياس رسم واحد .

(٦) اشترك محمد وأحمد فى محل تجارى فدفع أحمد ٢٢٥٠ جنيهاً ودفع محمد ٤٥٠٠ جنيه وبعد ٤ شهور أضاف محمد إلى رأس ماله ٥٠٠ جنيه وبعد شهرين آخرين سحب أحمد من رأس ماله ٢٥٠ جنيهاً وفى نهاية السنة كان نصيب محمد من الأرباح يزيد على نصيب أحمد منها بمقدار ٩٧٫٥ جنيهاً فما نصيب كل منهما من الأرباح

(١٠)

(١) يملك رجل وثيقة تستحق الدفع بعد ١٠ شهور باعها بسعر الحطيطة الخارجية ٩٪ فى السنة ثم أضاف إلى ما تحصل عليه مبلغ ٢٠ جنيهاً ، ثم اشترى بالناتج وثيقة أخرى قيمتها الإسمية ٨٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٨ شهور بسعر الحطيطة الخارجية ٧٫٥ ٪ فى السنة ، أوجد القيمة الاسمية للوثيقة الأولى .

(٢) كرتان قطر إحداهما ضعف قطر الأخرى ومجموع حجميهما ١٦١٧ سم^{٣} فما نصف قطر كل منهما (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٣) اشترك ا ، ب فى تجارة فدفع ا ١٤٠٠ جنيه ودفع ب ١٢٠٠ جنيه واتفقا على أن يدير ا الشركة على أن يختص بنسبة معينة من جملة الأرباح قبل توزيعها وبعد مضى ٨ شهور من بدء تأسيس الشركة انضم إليهما حـ برأس مال قدره ٨٠٠ جنيه واستمر ا يدير الشركة بنفس الشروط وفى نهاية سنتين من وقت تأسيس الشركة كانت الأرباح الكلية ٥٠٠ جنيه وكان نصيب ا الكلى ٢٤٠ جنيها فكم فى المائة من الأرباح الكلية كانت حصة ا نظير الإدارة ؟

(٤) الجدول الآتى يبين وزن عدة أنابيب صنعت من معدن واحد وذات طول واحد وسمك واحد :

القطر الخارجى للانبوبة بالبوصات	١	١و٥	٢	٢و٥	٣	٣و٥	٤	٤و٥	٥
الوزن بثقل الباوند	٧و٤	٨و٩	٣و١٢	٧و١٤	٢و١٧	٦و١٩	١و٢٢	٥و٢٤	٢٧

ارسم شكلا يبين العلاقة بين وزن تلك الأنابيب وقطرها الخارجى ومنه استنتج وزن قطعة من ذلك المعدن نفسه وذلك الطول والسمك وقطرها الخارجى $٣\frac{١}{٤}$ بوصة .

(٥) اشترى تاجر نوعين من الشاى أحدهما بسعر الرطل ١٨ قرشاً والثانى بسعر الأقة ٦٢ قرشاً فبأي نسبة يخلطهما بحيث يكسب $٢٤\frac{٤}{٥}$ ٪ إذا باع الكيلوجرام من المخلوط بسعر ٥٣و٦ من القروش

(٦) قطعة أرض مساحتها ٢١٦ فدانا على شكل متوازى أضلاع رسمت على الورق بمقياس ٢ سم لكل ١٠٠ قصبة فكان طول ضلعها الأكبر ٨ سم وطول ارتفاعها الأكبر ٤و٨ سم فما هو محيط تلك القطعة بالقصبات وما مساحة قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها يساوى محيط تلك القطعة والنسبة بين بعديها كنسبة ٢ : ٣ ثم أوجد أيضاً مساحة الشكل الذى ترسم به القطعة المستطيلة على الورق بالسنتيمترات المربعة بالمقياس السابق أيضاً (الفدان = $\frac{١٠٠٠}{٣}$ قصبة مربعة)

محتويات الكتاب

صفحة

الباب الأول :

التحليل إلى عوامل ومعنى الأس ٥
قاسم العدد ٥
العدد الأولى ٥
قابلية القسمة على ١٠ ... ... ٥
« « « ٥,٢ ... ... ٦
« « « ٢٥,٤ ... ... ٦
« « « ١٢٥,٨ ... ... ٧
« « « ٣,٩ ... ... ٨
« « « ٦ ... ... ١٠
« « « ١١ ... ... ١٠
تمرين ١ ... ... ١٢
الأعداد الأولية وكيفية معرفتها ١٤
تحليل العدد إلى عوامله الأولية ١٥
تمرين ٢ ... ... ١٦
معنى الأس والمربع والمكعب ١٧
المربع الكامل ١٨
تمرين ٣ ... ... ١٩
الجذر التربيعى ٢٠
استخراج الجذر التربيعى بطريقة العوامل ٢١
تمرين ٤ ... ... ٢٢
تمرين ٥ ... ... ٢٣
تمرين ٦ ... ... ٢٤
الجذور التربيعية للكسور ٢٥
تمرين ٧ ... ... ٢٦
المكعب والجذر التكعيبي ٢٦
طريقة استخراج الجذر التكعيبي بواسطة العوامل ٢٧
تمرين ٨ ... ... ٣٠

الباب الثانى : صفحه

المساحات : مساحة المربع ٣١
مساحة المستطيل ٣٣
تمرين ٩ ... ... ٣٤
مساحة متوازى الأضلاع ٣٥
« المثلث ٣٦
« شبه المنحرف ٣٦
« المعين ٣٧
تمرين ١٠ ... ... ٣٩
مساحة أى شكل كثير الأضلاع ٣٩
تمرين ١١ ... ... ٤٢
مساحة الدائرة ٤٣
تمرين ١٢ ... ... ٤٤
تمرين ١٣ ... ... ٤٦

الباب الثالث :

الحجوم : حجم المكعب ٤٩
حجم متوازى المستطيلات ٥٠
حجم المنشور القائم ٥١
تمرين ١٤ ... ... ٥٢
حجم الأسطوانة القائمة ٥٣
حجم الكرة ٥٤
تمرين ١٥ ... ... ٥٤
تمرين ١٦ ... ... ٥٥

الباب الرابع :

تطبيقات متنوعة على الجذرين التربيعى والتكعيبى ٥٨
فى المساحات والحجوم ٥٨
تمرين ١٧ ... ... ٦٢

الباب الخامس :

المتوسط الحسابى ٦٦
تمرين ١٨ ... ... ٧٠
تمرين ١٩ ... ... ٧٧

الباب السادس :

صفحة

مسائل على التقسيم التناسبي ٨١
تمرين ٢٠ ... ... ٨٣
الشركات ٨٤
تمرين ٢١ ... ... ٨٦
تمرين ٢٢ ... ... ٨٩
تمرين ٢٣ ... ... ٩٣

الباب السابع :

مسائل عل الربع البسيط ٩٧
تمرين ٢٤ ... ... ٩٨
الربع المركب ١٠١
تمرين ٢٥ ... ... ١٠٥
تمرين ٢٦ ... ... ١٠٧
تمرين ٢٧ ... ... ١٠٨
تمرين ٢٨ ... ... ١١٣
الخطيطة الخارجية ١١٧
تمرين ٢٩ ... ... ١٢١
تمرين ٣٠ ... ... ١٢٣
مسائل متنوعة تمرين ٣١ ... ... ١٢٤

الباب الثامن :

الرسم البيانى ١٢٦
تمرين ٣٢ ... ... ١٣١
تمرين ٣٣ ... ... ١٣٧
تمرين ٣٤ ... ... ١٣٩
تمرين ٣٥ ... ... ١٤٨
تمرين ٣٦ ... ... ١٥٣
تمرين ٣٧ ... ... ١٥٤
الطريقة العامة لاستخراج الجذر التربيعى ١٦١
تمرين ٣٨ ... ... ١٦٩
تمرين ٣٩ ... ... ١٧٢
تمرين ٤٠ ... ... ١٧٤
تمارين متنوعة لاعادة المقرر ١٧٥

١٩٤٣/٩/٦/١١٠٠

511:J41hA:v.1:c.1
جوهر، محمد صادق،
الحساب للمدارس الثانوية
AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES
01026441

American University of Beirut

511
J41hA
V.1

General Library