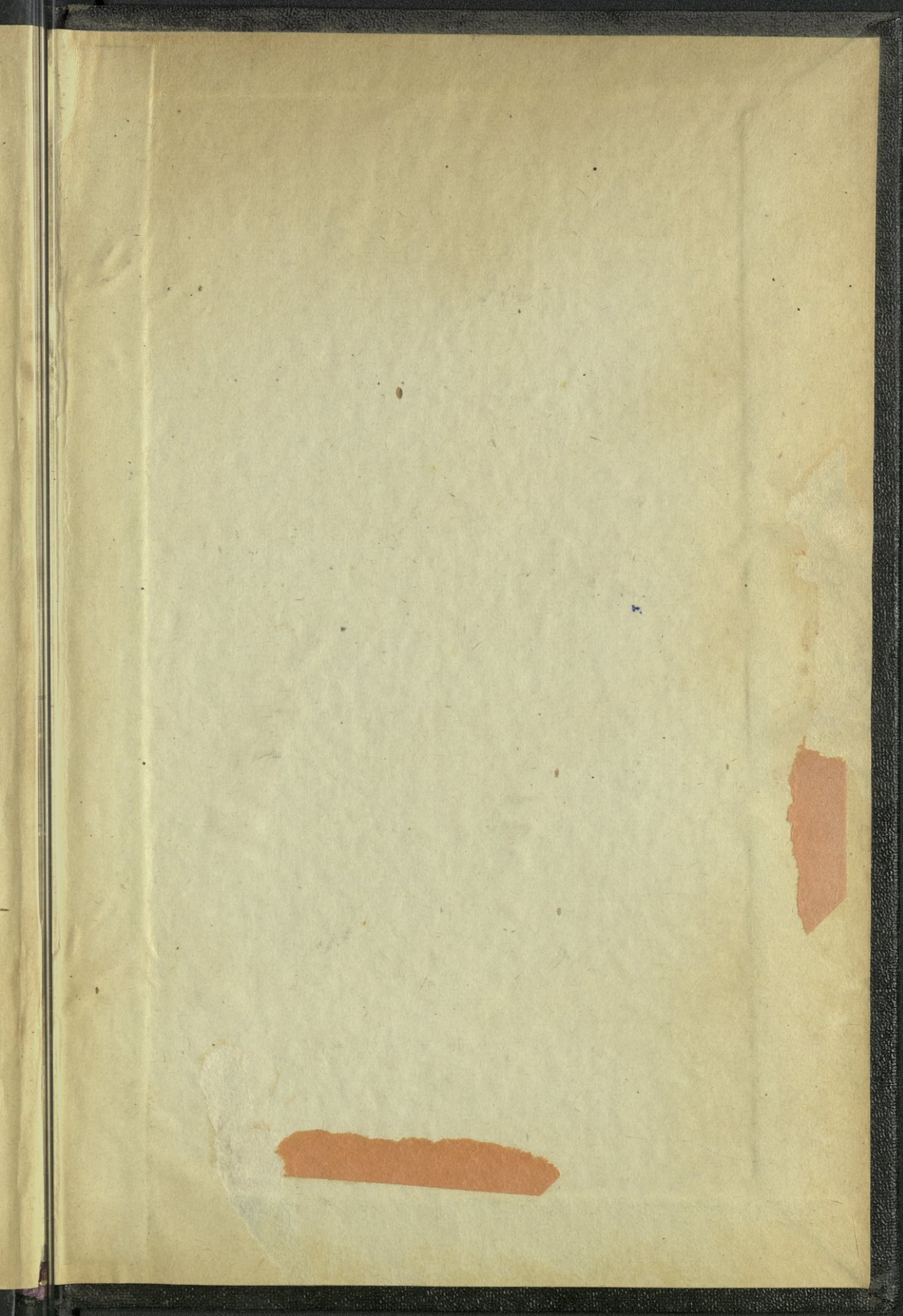




511: J41hA V.1

جوه - محمد صادق وغیره

الحساب للمدارس الثانوية

165

F. 247 3. 11. 72

To be returned

511: J41hA

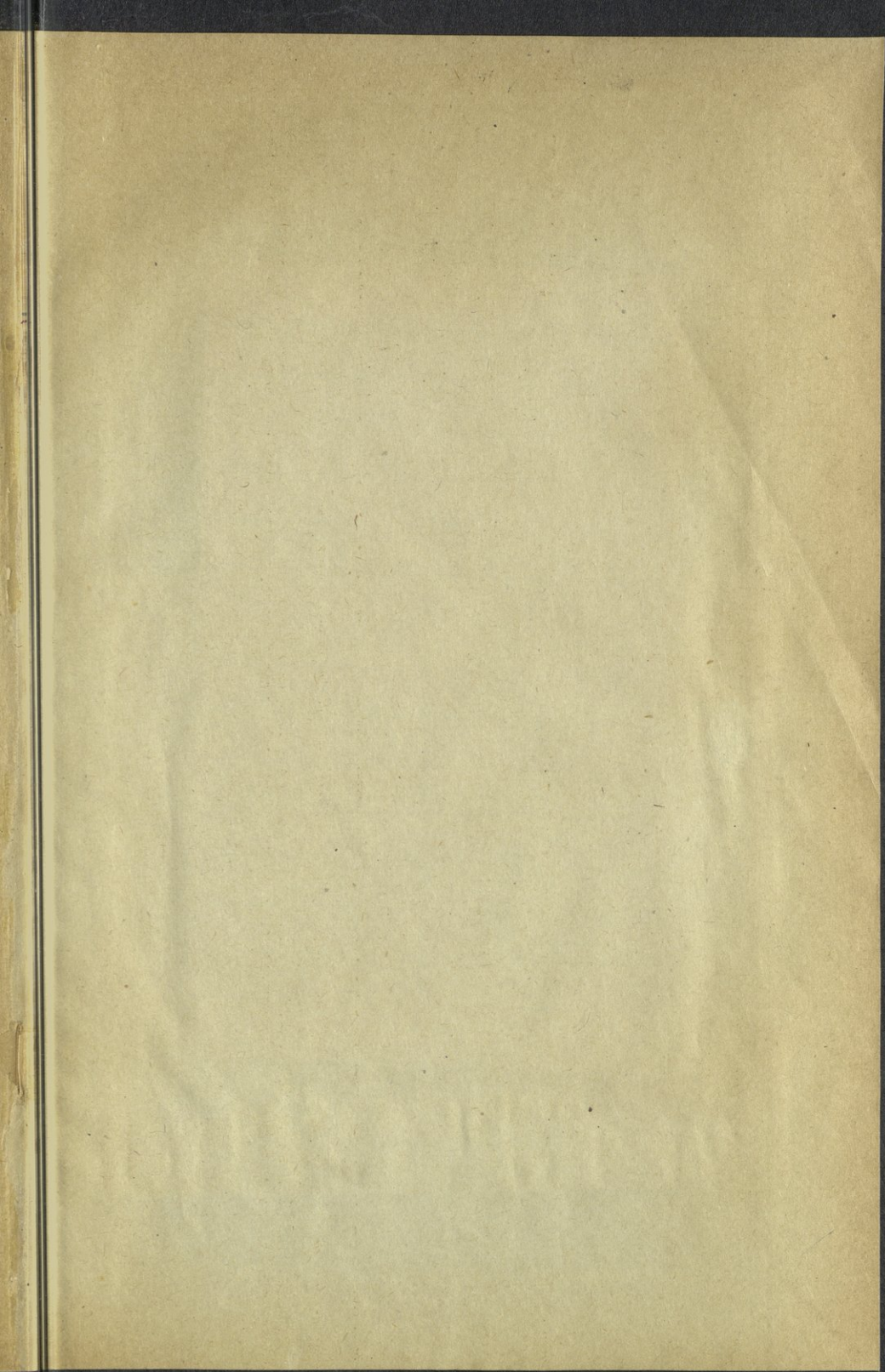
V.1

MY 5 54

AG 20 54

~~NOV 1972~~

~~247~~



قررت وزارة المعارف العمومية تدريس هذا الكتاب بمدارسها الثانوية

511
J416A
Y.1
C.1

كِتَابُ الْحُسْبَانِ لِلدَّرْسِ الثَّانَوِيِّ

وفق المنهج المخفف الذي أقرته وزارة المعارف العمومية

الجزء الأول

تأليف

أحمد محمد محمد

مراقب النشاط المدرسي
بوزارة المعارف العمومية

محمد أمين لطفي

الوكيل المساعد
لوزارة المعارف سابقاً

محمد صادق جوهري

الوكيل المساعد
لوزارة المعارف العمومية



حقوق الطبع محفوظة

59125

منزعم طبعه
مطبعة المعارف ومكتبتها بصير

Cal. 1944



2218

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

والصلاة والسلام على سيدنا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين .

وبعد فمئذ ثلاث سنوات وضعنا كتاباً في الحساب للمدارس الثانوية بالاشتراك مع زميلنا المغفور له الأستاذ محمد أمين لطفى الوكيل المساعد بوزارة المعارف سابقاً وقد قررت وزارة المعارف استعمال هذا الكتاب بأجزائه الثلاثة بمدارسها .

ونظراً لما أدخل حديثاً من التعديل في منهج الحساب بالمدارس الثانوية أعلنت الوزارة عن حاجتها إلى كتاب جديد يطابق المنهج الحديث فقمنا بإدخال ما يلزم من التعديل على الكتاب الأول تارة بالزيادة وأخرى بالحذف كما أضفنا كثيراً من التمارين في بعض الموضوعات وقد شعرنا في أثناء العمل بالخسارة الكبيرة التي أصابتنا بفقد زميلنا الكريم رحمه الله فقد كان لنا أكبر عون عند وضع الكتاب الأول .

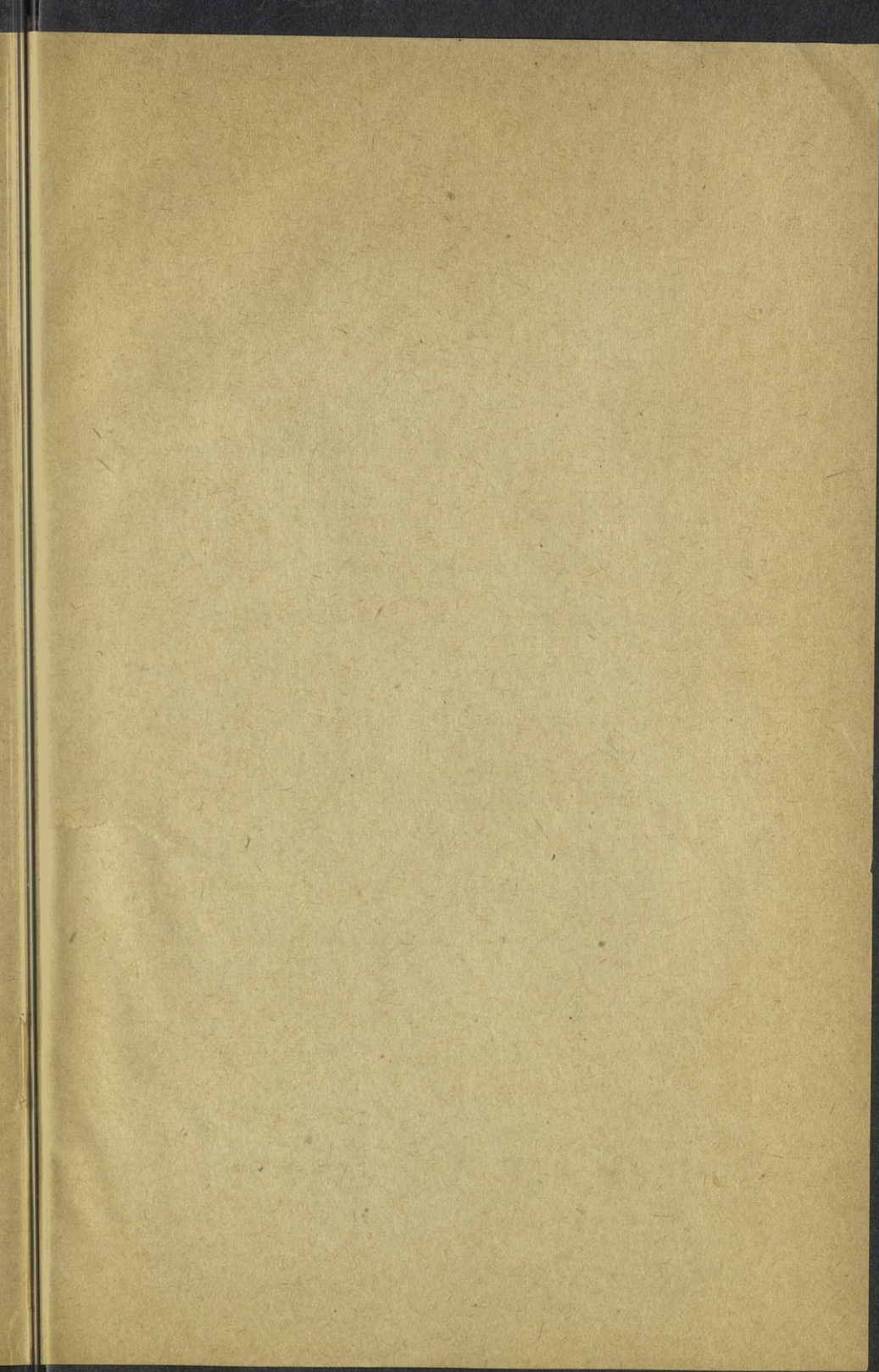
وقد توخينا في هذا الكتاب — كما في الكتاب الأول — سهولة العبارة وتبسيط الشروح ، وراعينا استنباط القواعد الضرورية من الأمثلة المحولة نموذجاً للطلبة كما راعينا أن تكون المسائل متصلة بقدر الإمكان بما يصادفه الطالب في حياته العملية .

وقد استطردنا من مسائل المتوسط الحسابي إلى المسائل البسيطة في الخلط والمزج لارتباطها بها من جهة ولأنه يحسن إلمام الطلبة بها من جهة أخرى كما شرحنا في آخر الكتاب الطريقة العامة لاستخراج الجذر التربيعي لمن يشاء من الطلبة .

ونسأل الله أن يجد الجميع في كتابنا هذا ما قصدناه من فائدة ونفع إنه

السميع الحبيب ؟

محمد صادق جوهر أحمد محمد



الباب الأول

التحليل إلى عوامل ومعنى الأس
الجذر التربيعي والجذر التكعيبي بواسطة العوامل

تعريف

١ — قاسم العدد هو عدد آخر يقبل العدد الأصلي القسمة عليه بدون باق
فمثلاً : ٣ قاسم للعدد ١٥ لأن $١٥ \div ٣ = ٥$ وليس هناك باق
٦٦ قاسم للعدد ٢٤ لأن $٢٤ \div ٦٦ = ٤$ وليس هناك باق وهكذا
ويقال للقاسم أيضاً إنه عامل للعدد فتكون ٣ عاملاً للعدد ١٥ ٦٦ عاملاً
للعدد ٢٤

٢ — العدد الأولي هو عدد لا قاسم له غير نفسه والواحد الصحيح
فمثلاً : ٢ ٣ ٥ ٦ ٧ ١١ ١٣ أعداد أولية

قبول الأعداد للقسمة

توجد طرق لمعرفة ما إذا كان بعض الأعداد يقبل القسمة على أعداد أخرى
نذكر منها ما يأتي :

٣ — قبول عدد القسمة على ١٠

يقبل العدد القسمة على ١٠ إذا كان رقمه الأيمن صفراً

مثلاً : ٤٨١٠ يقبل القسمة على ١٠

لأن $٤٨١٠ = ٤٨١$ عشرة إذا قدرت بالعشرات

٤ — قبول العدد القسمة على ٢ أو ٥

يقبل العدد القسمة على ٢ أو ٥ إذا كان رقه الأيمن صفراً أو يقبل القسمة على ٢ أو ٥ على التناظر

مثال (١) ٤٨١٠ يقبل القسمة على ٢ وأيضاً على ٥

لأن $٤٨١٠ = ٤٨١ \times ١٠$ عشرة وكل عشرة منها يمكن تقسيمها

إلى خمسة أقسام في كل منها ٢ كما أنه

يمكن تقسيمها أيضاً إلى قسمين في كل منهما

٥ $٤٨١٠ = ٤٨١ \times ١٠$ من الأقسام ذوات الاثنين

٦ $٤٨١٠ = ٤٨١ \times ٢$ من الخمسات

مثال (٢) ٤٨١٦ يقبل القسمة على ٢

لأن $٤٨١٦ = ٤٨١٠ + ٦$ وكل من هذين العددين يقبل القسمة على ٢

مثال (٣) ٤٨١٥ يقبل القسمة على ٥

لأن $٤٨١٥ = ٤٨١٠ + ٥$ وكل من هذين العددين يقبل القسمة على ٥

تنبيه : لما كانت الأرقام البسيطة التي تقبل القسمة على ٢ هي الأعداد الزوجية

٢ ٤ ٦ ٨ فقط ولا يوجد من الأرقام البسيطة ما يقبل القسمة على ٥

غيره أمكن أن يقال :

يقبل العدد القسمة على ٢ إذا كان رقم آحاده صفراً أو رقماً زوجياً

و يقبل القسمة على ٥ إذا كان رقم آحاده صفراً أو خمسة

نتيجة : باقى قسمة أى عدد على ٢ أو ٥ هو عين باقى قسمة رقم آحاده

على ٢ أو ٥ على التناظر

٥ — قبول العدد القسمة على ٤ أو ٢٥

يقبل العدد القسمة على ٤ أو ٢٥ إذا كان منتهياً من جهة اليمين بصفرين

أو إذا كان العدد المكوّن من أحاده وعشراته يقبل القسمة على ٤ أو ٢٥ على التناظر .

مثال (١) ٣٤٧٠٠ يقبل القسمة على ٤ وأيضاً على ٢٥

لأن $٣٤٧٠٠ = ٣٤٧ \text{ مائة}$

وكل مائة منها تساوى ٢٥ أربعة كما أنها تساوى أيضاً ٤ أقسام كل منها ٢٥

$$\therefore ٣٤٧٠٠ = ٢٥ \times ٣٤٧ \text{ من الأربعات}$$

$$= ٤ \times ٣٤٧ \text{ قسماً كل منها خمسة وعشرون}$$

مثال (٢) ٣٤٧٣٦ يقبل القسمة على ٤

لأن $٣٦ + ٣٤٧٠٠ = ٣٤٧٣٦$

= عددان من الأربعات + ٩ أربعات

= عدداً معيناً من الأربعات

مثال (٣) ٣٤٧٧٥ يقبل القسمة على ٢٥

لأن $٧٥ + ٣٤٧٠٠ = ٣٤٧٧٥$

= عددان من ذوات الخمسة وعشرين + ٣ من

ذوات الخمسة وعشرين

= عدداً معيناً من ذوات الخمسة وعشرين

نتيجة : باقى قسمة أى عدد على ٤ أو ٢٥ هو عين باقى قسمة العدد المكون

من عشراته وآحاده على ٤ أو ٢٥ على التناظر

٦ - قبول العدد القسمة على ٨ أو ١٢٥

يقبل العدد القسمة على ٨ أو ١٢٥ إذا كان منتهياً من جهة اليمين بثلاثة

أصفار . أو إذا كان العدد المكون من مئاته وعشراته وآحاده يقبل

القسمة على ٨ أو ١٢٥ على التناظر

مثال (١) ٤٣٠٠٠ يقبل القسمة على ٨ وأيضاً على ١٢٥

$$\text{لأن كل } ١٠٠٠ = ٨ \times ١٢٥$$

مثال (٢) ٤٣١٣٦ يقبل القسمة على ٨

$$\text{لأن } ٤٣١٣٦ = ٤٣٠٠٠ + ١٣٦$$

$$= ٤٣ \text{ ألفاً } + ١٧ \text{ من ذوات الثمانية}$$

مثال (٣) ٤٣٦٢٥ يقبل القسمة على ١٢٥

$$\text{لأن } ٤٣٦٢٥ = ٤٣ \text{ ألفاً } + ٦٢٥$$

$$= ٤٣ \text{ ألفاً } + ٥ \text{ من ذوات المائة وخمسة وعشرين}$$

نتيجة : باقى قسمة العدد على ٨ أو ١٢٥ هو عين باقى قسمة العدد المكوّن

من أحاده وعشراته ومئاته على ٨ أو ١٢٥ على التناظر

٧ — قبول العدد القسمة على ٩ أو ٣

يقبل العدد القسمة على ٩ أو ٣ إذا كان مجموع القيم المطلقة لأرقامه يقبل

القسمة على ٩ أو ٣ على التناظر

ولبيان ذلك نذكر الخاصة الآتية :

خاصة : الواحد الصحيح المتبوع بأصفار يساوى مكرراً للعدد ٩ مضافاً إليه واحد

$$\text{فمثلاً : } ١٠ = ١ + ٩$$

$$١٠٠ = ١ + ٩٩ = ١ + ٩ \text{ مكرر}$$

$$١٠٠٠ = ١ + ٩٩٩ = ١ + ٩ \text{ مكرر}$$

وهكذا :

لنفرض الآن عدداً ما مثل ٥٨٤٧٦

$$٥٨٤٧٦ = ٥٠٠٠٠ + ٨٠٠٠ + ٤٠٠ + ٧٠ + ٦$$

$$= ٥ \times ١٠٠٠٠ + ٨ \times ١٠٠٠ + ٤ \times ١٠٠ + ٧ \times ١٠ + ٦$$

$$= ٥ (١ + ٩ \text{ مكرر}) + ٨ (١ + ٩ \text{ مكرر}) + ٤ (١ + ٩ \text{ مكرر}) + ٦ +$$

$$٧ (١ + ٩ \text{ مكرر})$$

$$= \text{مكرر } ٩ + ٥$$

$$+ \text{مكرر } ٩ + ٨$$

$$+ \text{مكرر } ٩ + ٤$$

$$+ \text{مكرر } ٩ + ٧$$

$$+ ٦$$

$$= \text{مكرر } ٩ + (٥ + ٨ + ٤ + ٧ + ٦)$$

وكذلك بمثل ما تقدم من الأعمال يمكننا أن نبين أن كل عدد أكبر من ١٠ مركب من جزءين أحدهما مكرر ٩ والآخر مجموع القيم المطلقة لأرقامه ومن المتساوية نعلم أن قبول العدد المفروض القسمة على ٩ تتوقف على أن يكون الجزء الثاني من الطرف الأيسر قابلاً للقسمة على ٩

ولما كانت مكررات العدد ٩ هي أيضاً مكررات العدد ٣ كان كل عدد يساوي مكرراً للعدد ٣ مضافاً إليه مجموع القيم المطلقة لأرقامه وعلى ذلك يمكن أن نقول أن العدد يقبل القسمة على ٣ إذا كان مجموع القيم المطلقة لأرقامه يقبل القسمة على ٣

مثال (١) ٨١٤٥ يقبل القسمة على ٣ وأيضاً على ٩

$$\text{لأن } ١٨ = ٥ + ٤ + ١ + ٨$$

$$١٨٦ \text{ تقبل القسمة على } ٣$$

مثال (٢) ٨٧٦ يقبل القسمة على ٣ ولكنه لا يقبل القسمة على ٩

$$\text{لأن } ٢١ = ٦ + ٧ + ٨$$

$$٢١٦ \text{ يقبل القسمة على } ٣ \text{ ولكنه لا يقبل القسمة على } ٩$$

ملاحظتان :

(١) يحسن عند جمع أرقام العدد عدم جمع التسعات إن وجدت وأن نسقط

التسعات أولاً فأولاً كلما كان حاصل الجمع مساوياً ٩ أو أكبر منه

(٢) باقى قسمة العدد على ٩ أو ٣ هو عين باقى قسمة مجموع القيم المطلقة لأرقامه

على ٩ أو ٣ على التناظر.

٨ — يقبل العدد القسمة على ٦ إذا كان منتهياً من جهة اليمين بصفر أو رقم زوجي وكان مجموع أرقامه يقبل القسمة على ٣ لأنه من الشرط الأول يقبل القسمة على ٢ ومن الشرط الثاني يقبل القسمة على ٣ وحينئذ يقبل القسمة على ٢×٣ أى ٦

٩ — قبول العدد القسمة على ١١ إذا كان باقى طرح مجموع القيم المطلقة لأرقامه الزوجية الرتبة من مجموع القيم المطلقة لأرقامه الفردية الرتبة صفراً أو مكرر ١١ وليبيان ذلك نذكر الخواص الآتية:

الخاصة الأولى: الواحد الصحيح المتبوع بأصفار زوجية العدد يساوى مكرر ١١ مضافاً إليه ١

$$\text{لأن } ١٠٠ = ٩٩ + ١ = \text{مكرر } ١١ + ١$$

$$١٠٠٠٠٠٠ = ٩٩٩٩٩ + ١ = \text{مكرر } ١١ + ١$$

$$١٠٠٠٠٠٠٠٠ = ٩٩٩٩٩٩ + ١ = \text{مكرر } ١١ + ١$$

وهكذا

الخاصة الثانية: الواحد الصحيح المتبوع بأصفار فردية العدد يساوى مكرر ١١ مطروحاً منه واحد ١

$$\text{لأن } ١٠ = ٩٩٠ + ١١ - ١ = \text{مكرر } ١١ - ١$$

$$١٠٠٠ = ٩٩٩٠ + ١١ - ١ = \text{مكرر } ١١ - ١$$

$$١٠٠٠٠٠ = ٩٩٩٩٠ + ١١ - ١ = \text{مكرر } ١١ - ١$$

وهكذا

الخاصة الثالثة: كل رقم متبوع بأصفار يساوى مكرر ١١ مطروحاً منه أو مضافاً إليه هذا الرقم على حسب كون الأصفار التى على يمينه فردية العدد أو زوجيته

لأن $3000 = 3 \text{ آلاف} = 3 (\text{مكرر } 11 - 1) = \text{مكرر } 11 - 3$

$6000 = 6 \text{ مئات} = 6 (\text{مكرر } 11 + 1) = \text{مكرر } 11 + 6$ وهكذا

لنفرض الآن عدداً ما مثل ٧٦٣٤٢٥

$$5 + 20 + 400 + 3000 + 60000 + 700000 = 763425 \dots$$

$$= \text{مكرر } 11 - 7 + \text{مكرر } 11 + 6 + \text{مكرر } 11 - 3 =$$

$$+ \text{مكرر } 11 + 4 + \text{مكرر } 11 - 2 + 5 =$$

$$= \text{مكرر } 11 + [(2 + 3 + 7) - (5 + 4 + 6)] =$$

وكذلك بمثل ما تقدم من الأعمال يمكننا أن نبين أن كل عدد أكبر من ١١

مركب من جزئين أحدهما مكرر ١١ والآخر باقى طرح مجموع الأرقام الزوجية الرتبة

من مجموع الأرقام الفردية الرتبة

ومن هذا يؤخذ أن العدد يقبل القسمة على ١١ إذا كان الجزء الثانى من الطرف

الأيسر من المتساوية صفراً أو عدداً يقبل القسمة على ١١

وهنا العدد المفروض لا يقبل القسمة على ١١ لأن الجزء الثانى يساوى ٣

ملاحظتان : (١) إذا كان مجموع الأرقام الزوجية الرتبة أكبر من مجموع

الأرقام الفردية الرتبة فى عدد ما نضيف إلى مجموع الأرقام الفردية الرتبة ١١ أو

أحد مكرراتها حتى يمكن الطرح به وهذا العدد الذى نضيفه يؤخذ من مكررات ١١

الموجودة فى العدد الأصلى كما يتضح من المثال المذكور بعد

(٢) باقى قسمة أى عدد على ١١ هو عين باقى قسمة الفرق بين

مجموع أرقامه الفردية الرتبة ومجموع أرقامه الزوجية الرتبة على ١١

مثال : أوجد باقى قسمة ٧٥٨٤٩٣ على ١١

$$758493 = \text{أحد مكررات } 11 + [(3 + 4 + 5) - (9 + 8 + 7)]$$

$$= \text{أحد مكررات } 11 + [12 - 24]$$

$$= \text{مكرر آخر للعدد } 11 + 2 \times 11 + 12 - 24 =$$

$$= \text{مكرر آخر للعدد } ١١ + ٣٤ - ٢٤$$

$$= \text{مكرر آخر للعدد } ١١ + ١٠$$

∴ باقي القسمة المطلوب = ١٠

تمارين (١)

تنبيه : تحل جميع هذه التمارين بدون إجراء عمليات القسمة

(١) بين أن كلا من الأعداد الآتية يقبل القسمة على ٣ وأوجد منها ما يقبل القسمة على ٩

$$٧٨٣ \text{ } ٢٦٤ \text{ } ١٥٢١ \text{ } ٨٩٤٥٤ \text{ } ٨٦٩٥٣٥$$

(٢) أوجد باقي قسمة كل من الأعداد الآتية على ٣ ثم على ٩

$$٦١٢ \text{ } ١٣٦٣ \text{ } ٥٨٩١ \text{ } ٦٧٩٢٥٣$$

(٣) بين أن كلا من الأعداد الآتية يقبل القسمة على ٤ ثم بين منها ما يقبل

القسمة على ٨

$$٢١٣٦ \text{ } ٦٢٨٣٢ \text{ } ١٦٧٥٦ \text{ } ٨٣٥٦٤٨$$

(٤) أوجد باقي قسمة كل من الأعداد الآتية على ٤ ثم على ٨

$$٢٣١٥٤ \text{ } ٨٤٢١٦٢٣ \text{ } ٩٥٢٧٤٢١ \text{ } ١٢٨٥٦٤٦$$

(٥) بين أن الأعداد الآتية تقبل القسمة على ٦ ثم بين ما يقبل منها القسمة

على ١٢

$$٢٦٥٢ \text{ } ٣١٩١٤ \text{ } ٣٢٩٨٥٦ \text{ } ٦٥١٤٩٨$$

(٦) بين ما إذا كانت الأعداد الآتية تقبل القسمة على ١١ ثم أوجد باقي

القسمة في حالة عدم قبول القسمة

$$٨٥٢٥ \text{ } ٣٥١٦ \text{ } ٣٨٢٨ \text{ } ٨٤٩٢ \text{ } ١٩٧٦٥٢ \text{ } ٩١٧٣٨٢$$

(٧) أوجد الأرقام المحذوفة والمرموز لها بالعلامة * من الأعداد الواردة في

عمليات القسمة الآتية إذا علم أنه ليست هناك بواق لعمليات القسمة

$$٩ \div ٣٠٥٤ \quad (١)$$

$$٩ \div ٥٧٣١ \quad (ب)$$

$$١١ \div ١٤٨٣ \quad (ج)$$

$$١١ \div ٧٨٥٦٣ \quad (د)$$

$$٨ \div ٨٩٢٥٤ \quad (هـ)$$

(٨) ما أصغر عدد يضاف إلى :

$$٧٣٠٥٨ \quad (ج) \quad ٨٩٢٩٤ \quad (ب) \quad ٨٠٣٦٤٢ \quad (١)$$

ليكون المجموع قابلاً للقسمة على :

أولاً ٩ ثانياً ١١ ثالثاً ٨ رابعاً ٣

(٩) أوجد بواقي قسمة كل من ٣٧١ ٦ ٣٢٠٥ ٦ ١٤٥٧٦ ٦ ٤٨٥٦٩ ٦

٥١٦٣١٤ على كل من ٣ ٦ ٩ ١١

(١٠) ضع رقماً على يمين كل من الأعداد الآتية بحيث يجعل العدد الناتج في كل

حالة قابلاً للقسمة على ١١

$$٤٢٦٤٨٦٥ \quad ٤٧٥٦٦٥٧ \quad ٣١٢٢١$$

(١١) أوجد باقي قسمة كل من العمليات الآتية :

$$٣ \div ٥٢٥٨ \quad (١)$$

$$٩ \div ١٠٢٢٣٨ \quad (ب)$$

$$٢٥ \div ٩٠٧٨ \quad (ج)$$

$$١١ \div ١٣٠٨٣٦ \quad (د)$$

(١٢) إذا كان باقي قسمة العدد * ٣٧ * ٨ على ١٢٥ هو ٢ وكان العدد يقبل

القسمة على ١١ فما هما الرقمان المرموز لهما بالعلامة *

١٠ — الأعداد الأولية :

لمعرفة ما إذا كان عدد مفروض أولياً أو غير أولى تتبع الطريقة الآتية
مثلاً : المطلوب البحث عما إذا كان العددان ٣٢٣ و ٤٦٧ أوليين أو
غير أوليين

لذلك يجب أن تعرف هل لكل منهما قواسم أخرى غير الواحد والعدد نفسه
نحرب قسمة كل منهما على التوالى على الأعداد الأولية ٢ ٣ ٥ ٦ ... وهكذا

العدد ٤٦٧	العدد ٣٢٣
$١ \div ٤٦٧ = ٢٣٣$ ويبقى منه ١	$١ \div ٣٢٣ = ١٦١$ ويبقى منه ١
$٢ \div ٤٦٧ = ١٥٥$ » »	$٢ \div ٣٢٣ = ١٠٧$ » »
$٣ \div ٤٦٧ = ٩٣$ » »	$٣ \div ٣٢٣ = ٦٤$ » »
$٤ \div ٤٦٧ = ٦٦$ » »	$٤ \div ٣٢٣ = ٨٠$ » »
$٥ \div ٤٦٧ = ٩٣$ » »	$٥ \div ٣٢٣ = ٦٤$ » »
$٦ \div ٤٦٧ = ٧٧$ » »	$٦ \div ٣٢٣ = ٥٣$ » »
$٧ \div ٤٦٧ = ٦٦$ » »	$٧ \div ٣٢٣ = ٤٦$ » »
$٨ \div ٤٦٧ = ٥٨$ » »	$٨ \div ٣٢٣ = ٤٠$ » »
$٩ \div ٤٦٧ = ٥٢$ » »	$٩ \div ٣٢٣ = ٣٦$ » »
$١٠ \div ٤٦٧ = ٤٦$ » »	$١٠ \div ٣٢٣ = ٣٢$ » »
$١١ \div ٤٦٧ = ٤٢$ » »	$١١ \div ٣٢٣ = ٢٩$ » »
$١٢ \div ٤٦٧ = ٣٩$ » »	$١٢ \div ٣٢٣ = ٢٦$ » »
$١٣ \div ٤٦٧ = ٣٥$ » »	$١٣ \div ٣٢٣ = ٢٤$ » »
$١٤ \div ٤٦٧ = ٣٣$ » »	$١٤ \div ٣٢٣ = ٢٣$ » »
$١٥ \div ٤٦٧ = ٣١$ » »	$١٥ \div ٣٢٣ = ٢١$ » »
$١٦ \div ٤٦٧ = ٢٩$ » »	$١٦ \div ٣٢٣ = ٢٠$ » »
$١٧ \div ٤٦٧ = ٢٧$ » »	$١٧ \div ٣٢٣ = ١٩$ » »
$١٨ \div ٤٦٧ = ٢٦$ » »	$١٨ \div ٣٢٣ = ١٨$ » »
$١٩ \div ٤٦٧ = ٢٤$ » »	$١٩ \div ٣٢٣ = ١٧$ » »
$٢٠ \div ٤٦٧ = ٢٣$ » »	$٢٠ \div ٣٢٣ = ١٦$ » »
$٢١ \div ٤٦٧ = ٢٢$ » »	$٢١ \div ٣٢٣ = ١٥$ » »
$٢٢ \div ٤٦٧ = ٢١$ » »	$٢٢ \div ٣٢٣ = ١٤$ » »
$٢٣ \div ٤٦٧ = ٢٠$ » »	$٢٣ \div ٣٢٣ = ١٣$ » »
$٢٤ \div ٤٦٧ = ١٩$ » »	$٢٤ \div ٣٢٣ = ١٢$ » »
$٢٥ \div ٤٦٧ = ١٨$ » »	$٢٥ \div ٣٢٣ = ١١$ » »
$٢٦ \div ٤٦٧ = ١٧$ » »	$٢٦ \div ٣٢٣ = ١٠$ » »
$٢٧ \div ٤٦٧ = ١٦$ » »	$٢٧ \div ٣٢٣ = ٩$ » »
$٢٨ \div ٤٦٧ = ١٥$ » »	$٢٨ \div ٣٢٣ = ٨$ » »
$٢٩ \div ٤٦٧ = ١٤$ » »	$٢٩ \div ٣٢٣ = ٧$ » »
$٣٠ \div ٤٦٧ = ١٣$ » »	$٣٠ \div ٣٢٣ = ٦$ » »
$٣١ \div ٤٦٧ = ١٢$ » »	$٣١ \div ٣٢٣ = ٥$ » »
$٣٢ \div ٤٦٧ = ١١$ » »	$٣٢ \div ٣٢٣ = ٤$ » »
$٣٣ \div ٤٦٧ = ١٠$ » »	$٣٣ \div ٣٢٣ = ٣$ » »
$٣٤ \div ٤٦٧ = ٩$ » »	$٣٤ \div ٣٢٣ = ٢$ » »
$٣٥ \div ٤٦٧ = ٨$ » »	$٣٥ \div ٣٢٣ = ١$ » »
$٣٦ \div ٤٦٧ = ٧$ » »	$٣٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٣٧ \div ٤٦٧ = ٦$ » »	$٣٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٣٨ \div ٤٦٧ = ٥$ » »	$٣٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٣٩ \div ٤٦٧ = ٤$ » »	$٣٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٠ \div ٤٦٧ = ٣$ » »	$٤٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤١ \div ٤٦٧ = ٢$ » »	$٤١ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٢ \div ٤٦٧ = ١$ » »	$٤٢ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٣ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٣ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٤ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٤ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٥ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٥ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٦ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٧ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٨ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٤٩ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٤٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٠ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥١ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥١ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٢ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٢ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٣ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٣ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٤ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٤ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٥ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٥ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٦ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٧ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٨ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٥٩ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٥٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٠ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦١ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦١ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٢ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٢ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٣ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٣ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٤ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٤ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٥ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٥ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٦ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٧ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٨ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٦٩ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٦٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٠ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧١ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧١ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٢ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٢ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٣ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٣ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٤ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٤ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٥ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٥ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٦ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٧ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٨ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٧٩ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٧٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٠ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨١ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨١ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٢ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٢ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٣ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٣ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٤ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٤ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٥ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٥ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٦ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٧ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٨ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٨٩ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٨٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٠ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩١ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩١ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٢ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٢ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٣ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٣ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٤ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٤ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٥ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٥ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٦ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٦ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٧ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٧ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٨ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٨ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$٩٩ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$٩٩ \div ٣٢٣ = ٠$ » »
$١٠٠ \div ٤٦٧ = ٠$ » »	$١٠٠ \div ٣٢٣ = ٠$ » »

∴ خارج قسمة ٤٦٧ على ٢٣ هو ٢٠
وهو أصغر من ٢٣ ولا داعى لتجربة
القسمة على عدد أولى أكبر من ٢٣
لأنه لو كان يقبل القسمة عليه لكان
الخارج أقل من ٢٣ فيكون لهذا العدد
عامل أقل من ٢٣ وقد وجدنا بالتجربة
أن هذا غير صحيح
∴ العدد ٤٦٧ أولى

١١ — يؤخذ مما تقدم أنه يمكن معرفة أولية العدد بتجربة قسمته على التوالى على الأعداد الأولية ٢ ٣ ٥ ٧ ... الخ إلى أن يحدث خارج
قسمة مساو للمقسوم عليه الجارية عليه التجربة أو أصغر منه فإذا لم
يقبل القسمة على هذه الأعداد كان العدد المفروض أولياً .

والأعداد الأولية الواقعة بين ١ ٢٠٠ ٦ هي على الترتيب .

٢ ٣ ٥ ٧ ١١ ١٣ ١٧ ١٩ ٢٣ ٢٩ ٣١ ٣٧
٤١ ٤٣ ٤٧ ٥٣ ٥٩ ٦١ ٦٧ ٧١ ٧٣ ٧٩ ٨٣ ٨٩
٩٧ ١٠١ ١٠٣ ١٠٧ ١٠٩ ١١٣ ١٢٧ ١٣١ ١٣٧
١٣٩ ١٤٩ ١٥١ ١٥٧ ١٦٣ ١٦٧ ١٧٣ ١٧٩ ١٨١
١٩١ ١٩٣ ١٩٧ ١٩٩

تحليل العدد الى عوامله الأولية

١٢ — تحليل العدد إلى عوامله الأولية هو البحث عن جميع الأعداد الأولية
التي يكون حاصل ضربها بعضها في بعض مساوياً ذلك العدد .

مثال : حلل العدد ٥٧٠٢٤٠ إلى عوامله الأولية

العمل	٥٧٠٢٤٠	
(١) بقواعد قبول الأعداد القسمة	٥٧٠٢٤	$١٠ = ٢ \times ٥$
نبحث عن العوامل الأولية	٧١٢٨	$٨ = ٢ \times ٢ \times ٢$
وغير الأولية	٨٩١	$٨ = ٢ \times ٢ \times ٢$
(٢) ثم نحلل ما كان منها غير	٩٩	$٩ = ٣ \times ٣$
أولى إلى عوامله الأولية	١١	$٩ = ٣ \times ٣$
(٣) ثم نرتب العمل كما هو مبين	١	١١

وإذ تكون :

$$١١ \times ٥ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٥٧٠٢٤٠$$

تنبيه : يراعى دائما كتابة العوامل الأولية بترتيب تصاعدي بأن يكتب أصغر الأعداد أولا فالذى يليه فى الكبر وهكذا

تمارين (٢)

(١) ميز الأعداد الأولية وغير الأولية من الأعداد الآتية ثم استخراج العوامل الأولية التى تقل عن ٢٠ للأعداد غير الأولية منها :

٢٣٧ (ز)	٦٧ (ا)
٣٨٧ (ح)	٢٠٣ (ب)
٥٥٣ (ط)	١١٣ (ج)
٣٨٧١ (ي)	٦٧٩ (د)
٢٠١ (ك)	٩١٧ (هـ)
٩٥١ (ل)	٧١٢ (و)

(٢) أوجد العوامل الأولية لكل من الأعداد الآتية :

٧٢٤٥ (ح)	٥٣٨٢ (ا)
٦١٢٠ (د)	٣٣٣٢ (ب)

(٣) حلل كلا مما يأتى إلى عوامله الأولية :

٤٦٢٤٦٢ (د)	٢٤٩٩٨٤ (ا)
١٥٤٨٣٦ (هـ)	٢٨٠٢٨ (ب)
٣١٨٧٨ (و)	١٣٢٢٨٨ (ج)

معنى الأس

المربع والجذر التربيعي

١٣ — إذا ضرب عدد في نفسه مرة أو مرتين أو أكثر فاصل الضرب يسمى قوة لذلك العدد ويوضع فوق العدد مائلاً جهة اليسار الرقم الدال على عدد العوامل .

فتكون 3×3 القوة الثانية للعدد ٣ وتكتب 3^2
ويكون $3 \times 3 \times 3$ القوة الثالثة للعدد ٣ وتكتب 3^3
وهكذا

والرقم الدال على قوة أى عدد يسمى (أساً)
فالأس في 2^4 هو ٤ وفي 3^5 هو ٥ وهكذا

١٤ — مربع أى عدد هو القوة الثانية للعدد

فمربع ٥ هو 5^2 أى $5 \times 5 = 25$
وتقرأ 5^2 عادة ٥ تربيع .

١٥ — مكعب أى عدد هو القوة الثالثة للعدد

فمكعب ٥ هو 5^3 أى $5 \times 5 \times 5 = 125$
وتقرأ 5^3 عادة ٥ تكعيب

١٦ — 5^4 تقرأ ٥ أس أربعة و 5^5 تقرأ ٥ أس خمسة
وهكذا

١٧ — نرى مما تقدم أن مربع أى عدد أو مقدار هو حاصل ضربه في نفسه

فمثلاً مربع ٨ هو $8 \times 8 = 64$

ومربع 7^2 هو $7^2 \times 7^2 = (7 \times 7) \times (7 \times 7) = 7^4$

ومربع ٢×٣ هو $(٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢)$
 $(٣ \times ٢ \times ٢) \times (٣ \times ٢ \times ٢) =$
 $٢٣ \times ٢٣ =$
ومربع $\frac{٢٣}{٥}$ هو $\frac{٢٣}{٥} \times \frac{٢٣}{٥} = \frac{٣ \times ٣}{٥} \times \frac{٣ \times ٣}{٥} = \frac{٣٠}{٥}$
وهكذا

١٨ — كل من المقادير ٦٤ و ٧ و ٢ و ٣ و $\frac{٣٠}{٥}$ يسمى مربعاً
كاملاً أى أنه يقال للمقدار إنه مربع كامل إذا كان ناتجاً من ضرب
مقدار آخر في نفسه

١٩ — والمربعات الكاملة بعض خواص يحسن بالطالب أن يلاحظها وهي

أولاً : قيمة مربع الكسر الحقيقي أصغر من قيمة الكسر نفسه

$$\frac{١٦}{٣٥} = \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥}$$

والكسر $\frac{١٦}{٣٥}$ أصغر من الكسر الأصلي $\frac{٤}{٥}$

ثانياً : مربعات الأرقام التسعة هي كما يأتي

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	الرقم
٨١	٦٤	٤٩	٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	١	مربعة

ومن ذلك نستنتج أن أى مربع كامل لا بد أن ينتهي من جهة اليمين
بأحد الأرقام

١ أو ٤ أو ٩ أو ٦ أو ٥ أو بالصفر

وذلك لأن رقم الآحاد في أى مربع ينتج من تربيع رقم آحاد العدد
الأصلي وتربيع أى رقم لا ينتج إلا عدداً مبدوءاً من اليمين بأحد الأرقام

١ ٤ ٩ ٦ ٥ كما في الجدول السابق

أما إذا كان العدد ينتهي بالصفير فربعه ينتهي بالصفير كذلك وفي هذه الحالة الأخيرة لا بد أن يكون عدد الأصفار التي ينتهي بها المربع زوجياً وذلك لأن المربع المنتهي بالأصفار لا ينتج إلا من تربيع عدد منته بأصفار وعند تربيع مثل هذا العدد فأننا نضاعف عدد أصفاره وتكون الأصفار زوجية العدد

$$٢٥٠٠ = ٢٥٠ \quad \text{مثلاً}$$

$$٢٥٠٠٠٠ = ٢٥٠٠ \quad ٦$$

$$٢٥٠٠٠٠٠٠ = ٢٥٠٠٠ \quad ٦ \quad \text{وهكذا}$$

٢٠ - ويلخص كل هذا في أنه

إذا كان أحاد العدد ١ أو ٩	كان رقم أحاد المربع ١
» » » » ٢ أو ٨	» » » » ٤
» » » » ٣ أو ٧	» » » » ٩
» » » » ٤ أو ٦	» » » » ٦
» » » » ٥	» » » » ٥
» » » » ٠	» » » » ٠

نتيجة : المربع الكامل لا يمكن أن ينتهي من اليمين بأحد الأرقام

٢ أو ٣ أو ٧ أو ٨

تمارين (٣)

(١) أوجد مربعات الأعداد الآتية :

٦٥٠	سادساً	٣٢٥	أولاً
٦٥٠٠	سابعاً	٣٢٥٠	ثانياً
٠,٠٠٦٥	ثامناً	٣,٢٥	ثالثاً
٤ $\frac{٢}{٣}$	تاسعاً	٠,٠٣٢٥	رابعاً
٢ $\times \frac{٢}{٥}$	عاشراً	$\frac{٥}{٦}$	خامساً

(٢) برهن على أنه إذا كان العدد الزوجي مربعاً كاملاً فلا بد أنه يقبل القسمة على ٤
[لاحظ أنه إذا كان العدد الزوجي مربعاً كاملاً فإنه لا بد أن يكون مربعاً للعدد زوجي]

(٣) بين السبب في أن الأعداد الآتية لا يمكن أن تكون مربعات كاملة

$$١٩٨ \text{ } 6 \text{ } ٣٥٢ \text{ } 6 \text{ } ٤٨٩٧ \text{ } 6 \text{ } ٨٥٢٤٠٠٠ \text{ } 6 \text{ } ١٩٥٣$$

(٤) برهن على أن كل عدد مبدوء من اليمين بعدد زوجي من الأصفار وعن يسارها أحد الأرقام ٢ أو ٣ أو ٧ أو ٨ لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً.

الجذر التربيعي

٢١ — الجذر التربيعي لأي مقدار هو مقدار آخر مربعه يساوى المقدار المعلوم
ومن الأمثلة المذكورة في مادة ١٧ نرى أن :

الجذر التربيعي للعدد ٦٤ هو ٨

$$\text{لأن } ٦٤ = ٨ \times ٨$$

والجذر التربيعي للمقدار ٧ هو ٧

$$\text{لأن } ٧ = ٧ \times ٧$$

والجذر التربيعي للمقدار ٢ هو ٣ هو ٢

$$\text{لأن } ٢ \times ٢ = (٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢)$$

والجذر التربيعي للمقدار $\frac{٣}{٥}$ هو $\frac{٣}{٥}$

$$\text{لأن } \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥} \times \frac{٣}{٥}$$

وهكذا

ويمكننا الآن أن نصوغ الملاحظة التي في آخر المادة ١٧ في صيغة أخرى
وهي : « أن أسس العوامل في الجذر التربيعي أنصاف أسس العوامل نفسها في
المقدار الأصلي »

٢٢ — يرمز للجذر التربيعي للمقدار بهذه العلامة $\sqrt{\quad}$ موضوعة فوق المقدار

فمثلاً الجذر التربيعي للعدد ٦٤ يكتب $\sqrt{٦٤}$ وهو يساوى ٨
والجذر التربيعي للمقدار ٢×٣ يكتب $\sqrt{٢ \times ٣}$ وهو
يساوى ٢×٣ وهكذا

استخراج الجذر التربيعي بطريقة التحليل إلى العوامل

٢٣ — لاحظنا في بند ٢١ أن أسس العوامل في الجذر التربيعي لمقدار ما هي

أنصاف أسس العوامل نفسها في المقدار الأصلي وعلى ذلك نستنتج

القاعدة الآتية لاستخراج الجذر التربيعي للمربع الكامل وهي :

نحلل العدد المفروض إلى عوامله الأولية ثم نضرب العوامل بعضها في بعض
مرفوعة إلى أسس جديدة هي أنصاف الأسس الأولى فيكون الناتج هو الجذر
التربيعي المطلوب .

مثال (١) أوجد الجذر التربيعي للمقدار ١٥٨٧٦

العمل

$٢٢ = ٤$	١٥٨٧٦	$٢ \times ٣ \times ٧ = ١٥٨٧٦$ العدد
$٢٣ = ٩$	٣٩٦٩	$٧ \times ٣ \times ٢ = ١٥٨٧٦$
$٢٣ = ٩$	٤٤١	$١٢٦ =$
$٢٧ = ٤٩$	٤٩	
	١	

ملاحظة : لكي يأمن الطالب من الخطأ بقدر الإمكان يحسن أن يبحث
عن مقدار تقريبي للجواب المطلوب حتى يطمئن إلى الجواب الذى
يحصل عليه .

فمثلاً في التمرين السابق نرى أن العدد ١٥٨٧٦ محصور بين المربعين

١٤٤٠٠ (مربع ١٢٠) و ١٦٩٠٠ (مربع ١٣٠) وعلى ذلك

فالجواب يجب أن يكون محصوراً بين ١٢٠ و ١٣٠ وقد وجدنا أنه ١٢٦

تمارين (٤)

أوجد الجذر التربيعي لكل من الأعداد الآتية بتحليلها إلى عواملها الأولية

١٢٥٤٤ (١٣)	٤٠٩٦ (٧)	٥٧٦ (١)
٦٧٨٠٦٢٥ (١٤)	٢١٠٢٥ (٨)	١٧٦٤ (٢)
٢٠٢٥٠٠٠٠ (١٥)	٨٥٣٧٧٦ (٩)	٧٠٥٦ (٣)
٨٩٣٠٢٥٠٠ (١٦)	٢٢٥٠٠٠٠ (١٠)	٥٣٣٦١ (٤)
	٥٩٠٩٧٦١ (١١)	٧٤٥٢٩ (٥)
	٥٢٧٠٧٦ (١٢)	٩٩٢٢٥ (٦)

مثال (٢) إذا علم أن ٢٦٠١ مربع كامل فأوجد جذره التربيعي بالنظر
(بدون تحليل)

العمل

٢٦٠١ محصور بين المربعين ٢٥٠٠ و ٣٦٠٠

∴ ٢٦٠١ محصور بين ٢٥٠٠ و ٣٦٠٠

أى بين ٥٠ و ٦٠

∴ رقم العشرات للجذر المطلوب هو ٥

∴ رقم الآحاد فى المربع المعلوم ١

∴ رقم آحاد الجذر المطلوب ١ أو ٩ (بند ١٩)

∴ ٢٦٠١ أقرب كثيراً إلى ٢٥٠٠ منه إلى ٣٦٠٠

∴ رقم الآحاد هو ١ لا ٩

∴ ويكون الجذر المطلوب ٥١

تمارين (٥)

إذا علم أن الأعداد الآتية مربعات كاملة فأوجد جذورها التربيعية بالنظر (بدون تحليل)

$$٤٤١ (١) \quad ٦٢٥ (٢) \quad ٩٦١ (٣) \quad ١٦٨١ (٤) \quad ٣٤٨١ (٥)$$

$$٥١٨٤ (٦) \quad ٧٩٢١ (٧) \quad ٩٠٢٥ (٨) \quad ٨٨٣٦ (٩) \quad ٧٣٩٦ (١٠)$$

٢٤ — يؤخذ مما تقدم أنه عند تحليل المربع الكامل إلى عوامله الأولية لا بد أن تكون أسس هذه العوامل زوجية

والعدد الذى تكون أسس بعض عوامله الأولية غير زوجية لا يمكن أن يكون مربعاً كاملاً ولكن يمكن جعله مربعاً كاملاً يجب أن نجعل هذه الأسس زوجية إما بالضرب أو بالقسمة كما يتضح من المثالين الآتيين :
مثال (١) أوجد أصغر عدد يضرب فيه ٣٤٢ حتى يكون الناتج مربعاً كاملاً

العمل

$$١٩ \times ٢ \times ٣ = ٣٤٢ \dots$$

∴ أصغر عدد يضرب فى هذا المقدار حتى تصير أسسه زوجية

$$\text{هو } ١٩ \times ٢$$

$$= ٣٨$$

مثال (٢) أوجد أصغر عدد يقسم عليه ١٦٤٦٤ ليكون الناتج مربعاً كاملاً

العمل

$$٢ \times ٣ \times ٧ = ١٦٤٦٤ \dots$$

$$\text{∴ العدد المطلوب } ٢ \times ٧$$

$$= ٢١$$

مثال (٣) ما المربعات الكاملة المحصورة بين ٨٠٠٠ و ٢٠٠٠٠ وقبل القسمة على ١٥

العمل

$$\begin{aligned} 225 &= 15 \times 15 = 15 \text{ مربع} \\ 8 \text{ وكسر} &= 225 \div 2000 \\ 35 \text{ وكسر} &= 225 \div 8000 \end{aligned}$$

وعلى هذا تكون المربعات المطلوبة هي :

$$\begin{aligned} 2025 &= 45 \times 45 \\ 3600 &= 60 \times 60 \\ 5625 &= 75 \times 75 \end{aligned}$$

مثال (٤) أثبت أن $\sqrt{32}$ ينحصر بين $\frac{11}{2}$ و $\frac{47}{8}$

العمل

$$\begin{aligned} \frac{11}{2} \times \frac{11}{2} &= \frac{121}{4} \\ &= 30.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{47}{8} \times \frac{47}{8} &= \frac{2209}{64} \\ &= 345.15625 \end{aligned}$$

ولكن $\sqrt{32}$ ينحصر بين 30.25 و 345.15625

$$\therefore \sqrt{32} \text{ ينحصر بين } \frac{11}{2} \text{ و } \frac{47}{8}$$

تمارين (٦)

(١) ما أصغر عدد يضرب في كل من المقادير الآتية ليكون الناتج مربعاً كاملاً

٨٩٧١٢ (أ)	٧٦٨ (١)
٥٧٠٥٧٠ (هـ)	٩٧٢ (ب)
٧٥٠٦٨٤ (و)	٧٤٢٥٠ (ح)

(٢) ما أصغر عدد يقسم عليه العدد المفروض في التمارين الآتية ليكون الناتج مرعاً كاملاً ؟

$$\begin{array}{ll} (١) ١٨١٥ & (ح) ٧٩٣٨ \\ (ب) ٦٩٣٠ & (د) ١١٥٨٣٠ \end{array}$$

(٣) مجموع مرععى عددين ٤٣٠٤ وأحدهما ٤٠ فما العدد الآخر ؟

(٤) أوجد العدد الذى ينحصر بين ١٠٠٠ و ٢٠٠٠ إذا علم أنه مرعى كامل ويقبل القسمة على ١٣

(٥) أوجد جميع الأعداد الصحيحة التى تنحصر بين ١٠٠٠ و ٤٠٠٠ إذا علم أن كلا منها مرعى كامل ويقبل القسمة على ١٧

(٦) إذا غرس مزارع ٧٢٢٥ شجرة فى صفوف متساوية عددها يساوى عدد باقى كل منها من الأشجار فما عدد هذه الصفوف ؟

(٧) برهن على أن $\overline{٦٨١}$ ينحصر بين $\frac{٢٠٦}{٢٥}$ و $\frac{٢٣}{٤}$

٢٥ — نطبق القاعدة المذكورة فى بند (٢٣) لإيجاد الجذر التربيعى لكسر اعتيادى أو عدد صحيح وكسر أو كسر عشرى إذا كانت هذه المقادير مربعات كاملة كما فى الأمثلة الآتية :

$$\frac{١٥}{٢٨} = \frac{٥ \times ٣}{٧ \times ٢٢} = \frac{\overline{٢٥} \times \overline{٢٣}}{\overline{٢٧} \times \overline{٤٢}} \sqrt{} = \frac{\overline{٢٢٥}}{\overline{٧٨٤}} \sqrt{} \quad \text{مثال (١)}$$

$$\frac{٢}{٥} = \frac{١٢}{٥} = \frac{\overline{٢١٢}}{\overline{٢٥}} \sqrt{} = \frac{\overline{١٤٤}}{\overline{٢٥}} \sqrt{} = \frac{\overline{١٩}}{\overline{٢٥}} \sqrt{} \quad \text{مثال (٢)}$$

$$\frac{٤}{٥} \text{ أو } \frac{٨}{١٠} = \frac{\overline{٨}}{\overline{١٠}} \sqrt{} = \frac{\overline{٦٤}}{\overline{١٠٠}} \sqrt{} = \frac{\overline{٠,٦٤}}{} \sqrt{} \quad \text{مثال (٣)}$$

تمارين (٧)

أوجد الجذر التربيعي لما يأتي بطريقة العوامل :

٤٠٤١ (٩)	٢٤ $\frac{١٢١}{١٤٤}$ (٥)	$\frac{٢٢٥}{٧٢٩}$ (١)
٠.٠٢٨٩ (١٠)	٣٣ $\frac{١٦}{٢٥}$ (٦)	$\frac{١٢٢٥}{٤٣٥٦}$ (٢)
٢١٣,١٦ (١١)	١٩٧٤٠ $\frac{١}{٤}$ (٧)	$\frac{٢٩١٦}{٨٢٨١}$ (٣)
٢٠,٨٨٤٩ (١٢)	٣٠,١٦٧٥ $\frac{٩}{١٦}$ (٨)	$\frac{١١٠٢٥}{١٣٥٤٤}$ (٤)

المكعب والجذر التكعيبي

المكعب

٢٦ — عرفنا من بند ١٥ أن مكعب أى عدد أو مقدار هو حاصل ضربه في

نفسه مرتين على التوالي

فمثلا مكعب ٦ هو $٦ = ٦^٢ = ٦ \times ٦ \times ٦$

٦ مكعب ٥ هو $٥^٢ = ٥ \times ٥ \times ٥ = (٥ \times ٥) \times (٥ \times ٥) \times (٥ \times ٥)$
 $٥^٢ =$

٦ مكعب ٣×٢ هو $(٣ \times ٢)^٢ = (٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢)$

$= (٣ \times ٢ \times ٢) \times (٣ \times ٢ \times ٢) \times (٣ \times ٢ \times ٢) =$

$٢٣ \times ٦٢ =$

٦ مكعب $\frac{٢٣}{٥}$ هو $(\frac{٢٣}{٥})^٢ = (\frac{٢٣}{٥}) \times (\frac{٢٣}{٥}) \times (\frac{٢٣}{٥})$

$= \frac{٣ \times ٣}{٥} \times \frac{٣ \times ٣}{٥} \times \frac{٣ \times ٣}{٥} =$

$\frac{٦٣}{٣٥} =$

وهكذا

ونلاحظ أن أسس العوامل في المكعب هي ثلاثة أمثال أسس العوامل
 نفسها في المقدار الأصلي

٢٧ — كل من المقادير ٢١٦ ٥ ٦ ٢ ٣ × ٦ ٣ ٥ ٦ $\frac{٦٣}{٣٥}$ يسمى مكعباً كاملاً أى أنه يقال للمقدار أنه مكعب كامل إذا كان ناتجاً من ضرب مقدار آخر في نفسه مرتين

الجذر التكعيبي

٢٨ — الجذر التكعيبي لأى مقدار هو مقدار آخر مكعبه يساوى المقدار المعلوم ومن الأمثلة المذكورة في بند ٢٦ نرى أن :

الجذر التكعيبي للعدد ٢١٦ هو ٦

$$\text{لأن } ٢١٦ = ٦ \times ٦ \times ٦$$

والجذر التكعيبي للمقدار ٥ هو ٥

$$\text{لأن } ٥ = ٥ \times ٥ \times ٥$$

والجذر التكعيبي للمقدار ٢ × ٣ هو ٢ × ٣

$$\text{لأن } ٢ \times ٣ = (٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢) \times (٣ \times ٢)$$

والجذر التكعيبي للمقدار $\frac{٦٣}{٣٥}$ هو $\frac{٦٣}{٣٥}$

$$\text{لأن } \frac{٦٣}{٣٥} = \frac{٢٣}{٥} \times \frac{٢٣}{٥} \times \frac{٢٣}{٥}$$

ويمكننا الآن أن نضع الملاحظة التى فى آخر بند ٢٦ فى صيغة أخرى وهى

« أن كلا من أسس العوامل فى الجذر التكعيبي هو $\frac{١}{٣}$ أس العامل نفسه

فى المقدار الأصلى »

٢٩ — يرمز للجذر التكعيبي للمقدار بهذه العلامة $\sqrt[٣]{\quad}$ موضوعة فوق المقدار

فمثلاً : الجذر التكعيبي للعدد ٢١٦ يكتب هكذا $\sqrt[٣]{٢١٦}$ وهو ٦

٦ « » « » « » $\sqrt[٣]{٢ \times ٣}$ وهو $\sqrt[٣]{٢٣}$

$$= \sqrt[٣]{٢} \times ٣ \text{ وهكذا}$$

٣٠ — من الملاحظة المذكورة في آخر بند ٢٨ نستنتج القاعدة الآتية لاستخراج

الجذر التكعيبي لمكعب كامل وهي :

أولاً : نحلل العدد المفروض إلى عوامله الأولية

ثانياً : نقسم أس كل عامل منها على ٣

ثالثاً : نضرب العوامل بالأسس الناتجة بعضها في بعض فحاصل الضرب

هو الجذر التكعيبي للعدد المفروض

ملاحظة : لجعل عدد ما مكعباً كاملاً يجب جعل أسس عوامله قابلة للقسمة

على ٣ (إما بالضرب أو بالقسمة)

مثال (١) استخراج الجذر التكعيبي للعدد ٣٦٥٢٢٦٤

العمل

$$\therefore \text{بالتحليل نجد أن } 3652264 = 2^3 \times 7^3 \times 11^3$$

$$\therefore \sqrt[3]{3652264} = 2 \times 7 \times 11$$

$$= 154$$

مثال (٢) ما أصغر عدد يضرب في ٢٨٥٧٦٨ ليكون الناتج مكعباً كاملاً

العمل

$$\therefore 285768 = 2^3 \times 3 \times 7^3$$

∴ لجعل أسس جميع العوامل قابلة للقسمة على ٣ يجب ضرب طرفي

المتساوية المتقدمة في ٧

فيكون العدد المطلوب هو ٧

ملاحظة : الجذر التكعيبي للعدد 285768×7 أو ٢٠٠٠٣٧٦

$$\text{هو } 2 \times 3 \times 7$$

$$= 126$$

٣١ — كما استخرجنا الجذور التربيعية للكسور نستخرج الجذور التكعيبية لها
أيضاً بطريقة مماثلة مع أخذ ثلث الأس بدلاً من نصفها
ويتبين ذلك في المثالين الآتيين :

$$\sqrt[3]{\frac{٢١٦}{١٢٥}} = \sqrt[3]{\frac{١ \frac{٩١}{١٢٥}}{١}} \quad \text{مثال (١) :}$$

$$\sqrt[3]{\frac{٢٣ \times ٣٢}{٢٥}} =$$

$$\frac{٣ \times ٢}{٥} =$$

$$\frac{٦}{٥} =$$

$$١ \frac{١}{٥} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{٥١٢}{١٠٠٠}} = \sqrt[3]{٠,٥١٢} \quad \text{مثال (٢) :}$$

$$\sqrt[3]{\frac{٩٢}{٢١٠}} =$$

$$\frac{٢٢}{١٠} =$$

$$\frac{٨}{١٠} =$$

$$٠,٨ =$$

تمارين (٨)

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد الآتية بتحليلها إلى عواملها الأولية :

١٣٣١٢٠٥٣ (١٤)	١٧٢٨ (١)
١٢٨١٢٩٠٤ (١٥)	٣٣٧٥ (٢)
١٥٧٤٦٤ (١٦)	١٠٦٤٨ (٣)
١٠٧٢٠٧٦٥١٢٥ (١٧)	١٣٨٢٤ (٤)
$\frac{٤٦٦٥٦}{٣٥٠٠٤٧}$ (١٨)	١٩٦٨٣ (٥)
$\frac{٣٧٣٢٤٨}{١٧٧١٥٩١}$ (١٩)	٣٥٩٣٧ (٦)
$\frac{١٧٥٦١٦}{٩٧٠٣٩٩}$ (٢٠)	٤٢٨٧٥ (٧)
٥,٨٣٢ (٢١)	٤٦٦٥٦ (٨)
١٢,١٦٧ (٢٢)	٧٤٠٨٨ (٩)
١٠٤,٤٨٧١١١ (٢٣)	٨٥١٨٤ (١٠)
$٣٥\frac{١٦٢}{٤٣}$ (٢٤)	١٦٦٣٧٥ (١١)
$١٢٧٧٢٨٩\frac{١}{٨}$ (٢٥)	٥٨٣٢٠٠٠ (١٢)
٠,٠٤٢٨٧٥ (٢٦)	٤٣٨٩٧٦ (١٣)

ما أصغر عدد يضرب في كل مما يأتي ليكون الناتج مكعباً كاملاً :

٥٣٣٦١ (٣٠)	٤٠٣٢ (٢٧)
٢٤٥٠٢٥ (٣١)	٧٠٥٦ (٢٨)
٥٨٣٢٠٠ (٣٢)	١٢٨٢٥ (٢٩)

(٣٣) ما أصغر عدد يقسم عليه كل من الأعداد في التمارين ٢٧ و ٢٨ و ٢٩ و

٣٠ و ٣١ و ٣٢ ليكون الناتج مكعباً كاملاً

(٢٤) ما أصغر عدد يضرب في ٤٠٥ ليكون الناتج مربعاً كاملاً ومكعباً كاملاً

في وقت واحد

(٣٥) ما أقرب عددين صحيحين للعدد ٨٠٠٠ بحيث يكونان مكعبين كاملين

ويقبل القسمة على ٧

$$\frac{\sqrt[3]{٠,١٣٢٦٥١٧ + ٥٨,٧٨}}{\sqrt[3]{٤٩\frac{٨}{٢٧} \times ٣,٣٧٥}}$$

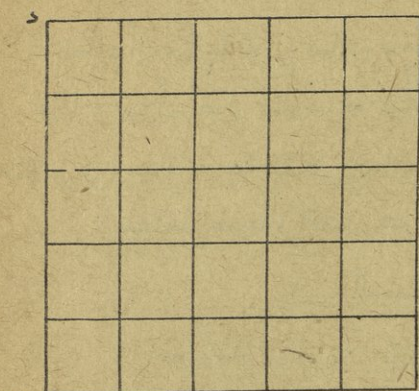
(٣٦) اختصر الكسر الآتي :

الباب الثاني

المساحات

٣٢ — وحدة المساحات العلمية هي «السنتمتر المربع» وهو عبارة عن مساحة مربع طول ضلعه سنتمتر ويختار عادة السنتمتر المربع وحدة عملية للمساحات التي تنقص عن المتر المربع ويختار المتر المربع للوحدات التي تزيد عليه . أما المساحات العظيمة كمساحات البلاد أو الأقطان الزراعية فإن الوحدة المستعملة هي الكيلومتر المربع أو الفدان .

٣٣ — المربع : سطح مستوى ١
محدود بأربعة مستقيمت
متساوية وزواياه الأربع
قوائم .
مساحة المربع تساوي
مربع طول ضلعه .
وذلك لأننا إذا رسمنا
مربعاً ا ب ح د طول كل



شكل (١)

ضلع من أضلاعه ٥ سنتمترات (شكل ١) وقسمنا ضلعه ا ب إلى خمسة أقسام متساوية طول كل منها سنتمتر وأقننا من نقط التقسيم أعمدة على الضلع المذكور ثم قسمنا الضلع ا د إلى خمسة أقسام متساوية أيضاً طول كل منها سنتمتر وأقننا من نقط تقسيمه أعمدة عليه نجد أن المربع الكلى ينقسم إلى ٢٥ مربعاً طول ضلع كل منها سنتمتر

أى أن مساحة كل منها سنتيمتر مربع وعلى هذا تكون مساحة المربع الكلى ٢٥ سنتيمتراً مربعاً أى 5×5 من السنتيمترات المربعة*

في حالة ما إذا كان في طول ضلع المربع كسر من السنتيمترات بأن كان طول الضلع مثلاً ٥٣ سم فإننا نقسم الشكل إلى مليمترات مربعة وذلك بتقسيم ضلعي المربع إلى مليمترات وإقامة أعمدة على كل منهما فينتج أن مساحة الشكل 53×53 مليمتراً مربعاً

$$\frac{53 \times 53}{100} \text{ سنتيمتراً مربعاً}$$

أى ٥٣ سنتيمتراً مربعاً

وقياساً على هذا تكون مساحة المربع الذى طول ضلعه ٥٣٢ سم

$$= 532 \times 532 \text{ سم}^2$$

ونتيجه أن مساحة المربع تساوى حاصل ضرب طول ضلعه في نفسه

فإذا فرض أن طول ضلع المربع = ل سم فإن مساحته تساوى $ل^2$ سم^٢

مثال (١) حديقة مربعة الشكل يحيط بها سور طوله ١٤٢٠ متراً فكم فداناً تبلغ

مساحة الحديقة (الفدان = $\frac{1}{6}$ من الأمتار المربعة).

العمل

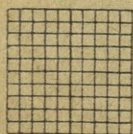
$$\text{طول ضلع المربع} = 1420 \div 4 = 355 \text{ متراً}$$

$$\text{مساحة الحديقة} = 355 \times 355 \text{ متراً مربعاً.}$$

$$= 355 \times 355 \times \frac{6}{25200} \text{ فداناً}$$

$$= 30 \text{ فداناً}$$

* يمكن أن نستنتج من ذلك بسهولة أن السنتيمتر المربع يساوى ١٠٠ مليمتراً مربعاً وذلك

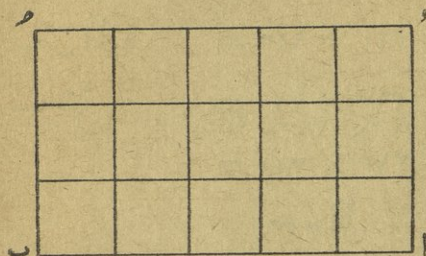


بأن نأخذ مربعاً طول ضلعه سنتيمتر واحد ونقسم ضلعين متجاورين منه إلى عشرة أقسام متساوية أى إلى مليمترات ثم نقيم أعمدة على كل ضلع من نقط التقسيم كما في الشكل فينقسم السنتيمتر المربع إلى ١٠٠ مربع طول ضلع كل منها مليمتراً واحد أى مليمترات مربعة وعلى ذلك فالسنتيمتر المربع يساوى ١٠٠ مليمتراً مربعاً

٣٤ - المستطيل : سطح مستو محدود بأربعة مستقيمت ، كل اثنين متقابلين منها متوازيان ومتساويان ، وزواياه الأربعة قوائم

مساحة المستطيل تساوي حاصل ضرب طول قاعدته في ارتفاعه

لإثبات ذلك عملياً :



(٣ ش)

ارسم مستطيلاً طول قاعدته

٥ سنتيمترات وارتفاعه

٣ سنتيمترات ، ثم قسم القاعدة

إلى خمسة أقسام متساوية ،

وأقم من نقط التقسيم أعمدة عليها ، ثم قسم الارتفاع إلى ثلاثة أقسام متساوية ،

وأقم من نقط التقسيم أعمدة عليها أيضاً — تجد أن الشكل الأصلي انقسم إلى

١٥ سنتيمتراً مربعاً ، أي أن مساحته تساوي ١٥ سنتيمتراً مربعاً أي ٥×٣ سم^٢

وفي حالة احتواء الطول أو العرض ، أو كليهما ، على كسر من السنتيمتر بأن

كان الطول ٣ و ٥ سم والعرض ٢ و ٣ سم مثلاً فإننا نقسم المستطيل إلى مليمترات

مربعة كما فعلنا في حالة المربع ونرى أن مساحة الشكل

$$= ٥٣ \times ٣٢ \text{ مليمتراً مربعاً أي } \frac{٣٢ \times ٥٣}{١٠ \times ١٠} \text{ سنتيمتراً مربعاً أي}$$

$$٥٣ \times ٣٢ \text{ سنتيمتراً مربعاً}$$

وعلى العموم إذا فرض أن طول قاعدة المستطيل = ل سم وارتفاعه = ع سم

فمساحته تساوي $ل \times ع$ سم^٢

(مثال ٢) سار رجل حول قطعة أرض مستطيلة الشكل بسرعة ٦ كيلومترات

في الساعة فاستغرق في ذلك ١٨ و ٤٦ من الدقائق . فإذا علم أن طول قطعة

الأرض ٧١٠ أمتار فما مساحتها بالأفدنة ؟

العمل

$$\begin{aligned}
 \text{محيط قطعة الأرض} &= \frac{18946}{6} \times 6000 = 1846 \text{ متراً} \\
 \text{نصف المحيط} &= 923 \text{ متراً} \\
 \text{عرض المحيط} &= 710 - 923 = 213 \text{ متراً} \\
 \text{مساحتها} &= 213 \times 710 = \text{متراً مربعا} \\
 &= \frac{6}{20200} \times 213 \times 710 = 36 \text{ فدانا}
 \end{aligned}$$

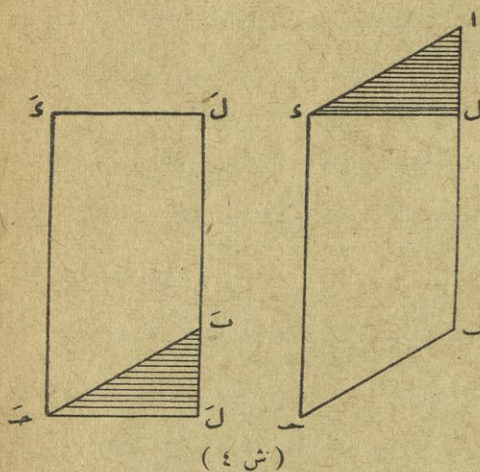
تمرين ٩

- (١) ما مساحة المربع الذي محيطه ٥٢٨ متراً؟
- (٢) ما مساحة المستطيل الذي محيطه ١٦ متراً وعرضه $\frac{2}{3}$ طوله؟
- (٣) كم متراً من بساط عرضه $\frac{2}{3}$ متر تلزم لتغطية حجرة مستطيلة الشكل طولها $6\frac{2}{3}$ من الأمتار وعرضها $4\frac{4}{9}$ من الأمتار؟
- (٤) أوجد نفقات توريق جدران غرفة طولها ٢١ قدماً و ٤ بوصات ، وعرضها ١٨ قدماً و ٨ بوصات ، وارتفاعها ١٥ قدماً و ٦ بوصات بورق عرضه ٣٢ بوصة وثمن الyarدة منه شلن واحد . مع العلم بأن مجموع مساحات الأبواب والنوافذ التي لا تغطي بالورق ١٢٠ قدماً مربعا .
- (٥) دهنت جدران حجرة مستطيلة الشكل فتكلف ٢٦٥٥ قرش ، فما تكاليف المتر المربع إذا علم أن ارتفاع الحجرة ٤٥٥ متر وطولها ٦ أمتار وعرضها ٥ أمتار وبها باب عرضه $1\frac{4}{5}$ متر وارتفاعه $2\frac{1}{3}$ من الأمتار وبها أيضاً ٣ نوافذ عرض الواحدة منها متر وارتفاعها متران .

٣٥ — متوازي الأضلاع : سطح مستو محدود بأربعة مستقيمت كل اثنين متقابلين منها متوازيان متساويان .

وإذا اعتبرنا أحد الأضلاع قاعدة له كان البعد العمودي بينه وبين الضلع الذي يوازيه ارتفاعاً لمتوازي الأضلاع .

مساحة متوازي الأضلاع تساوي حاصل ضرب طول قاعدته في ارتفاعه لإثبات ذلك عملياً :



اقطع من الورق المقوى القليل السمك متوازي أضلاع مثل ا ب ح د ثم ارسم ارتفاعه د ل اقطع المثلث ا د ل وافصله عن باقي الشكل ثم ضعه في امتداد الشكل من الجهة الأخرى بحيث ينطبق ا د على ب ح — تجد

أن متوازي الأضلاع يتحول إلى مستطيل . ومساحة هذا المستطيل هي نفس مساحة متوازي الأضلاع الأصلي لأن مساحة الشكل لا تتغير بتغير موضع جزء منه — وعلى هذا تكون مساحة متوازي الأضلاع تساوي طول قاعدته في ارتفاعه فإذا فرض أن طول قاعدة متوازي الأضلاع = ل سم وارتفاعه = ع سم فإن مساحته تساوي $ل \times ع$ سم^٢

(مثال ٣) قطعة أرض على شكل متوازي الأضلاع طول قاعدته ١٥٠ ياردة وارتفاعه ١٨ ياردة ، فما مساحتها ؟

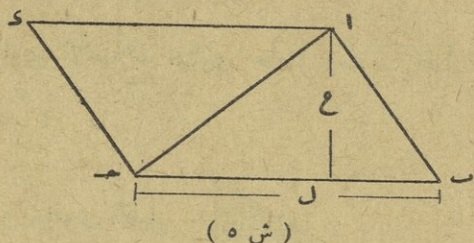
العمل

المساحة = $18 \times 150 = 2700$ ياردة مربعة

٣٦ — مساحة المثلث :

مساحة المثلث تساوى نصف حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه . لإثبات

ذلك عملياً :



اقطع من الورق المقوى القليل السمك متوازى أضلاع واقسمه إلى قسمين على اتجاه أحد قطريه وطبق أحد المثلثين الناتجين على الآخر تجد أنه ينطبق عليه تمام الانطباق :

وعلى هذا تكون مساحة المثلث تساوى نصف مساحة متوازى الأضلاع المتحد معه فى القاعدة والارتفاع . ولما كانت مساحة متوازى الأضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه ينتج أن مساحة المثلث تساوى نصف القاعدة فى الارتفاع فإذا فرض أن طول القاعدة ل سم والارتفاع يساوى ع سم فمساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times ل \times ع$ سم^٢.

(مثال ٤) ما مساحة المثلث الذى طول قاعدته $7\frac{1}{4}$ سم وارتفاعه ٤ سم .

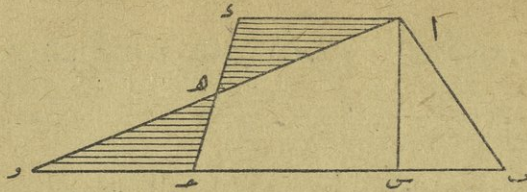
العمل

المساحة = $\frac{1}{2} \times 7\frac{1}{4} \times 4 = 15$ سم^٢

٣٧ شبه المنحرف سطح مستو محدود بأربعة مستقيمتين منها اثنان متوازيان

وإذا اعتبرنا أحد الضلعين المتوازيين قاعدة لشبه المنحرف كان البعد العمودى بينهما ارتفاعا له .

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف مجموع طولى قاعدتيه فى ارتفاعه .
لإثبات ذلك عملياً :



(ش ٦)

نرسم شبه المنحرف ا ب ح و ونمد القاعدة ب ح إلى و بحيث يكون ح و مساوياً
ا و ونصل ا و فيقطع ح و فى ه مثلاً . فلو قطعنا المثلث ا و ه لأمكن تطبيقه
تماماً على المثلث ه ح و وتكون مساحة شبه المنحرف ا ب ح و تساوى مساحة
المثلث ا ب و . فإذا أسقطنا العمود ا س ه على ب و كانت مساحة المثلث
ا ب و مساوى لنصف ب و $\times$ ا س ه

وحيث أن ا و = ح و بالرسم تكون مساحة شبه المنحرف ا ب ح و التى
تساوى مساحة المثلث ا ب و وتساوى $\frac{1}{2}$ ا س فى مجموع ب ح و ح و
تساوى $\frac{1}{2}$ ا س فى مجموع ب ح و ا و
تساوى $\frac{1}{2}$ الارتفاع فى مجموع القاعدتين .

(مثال ٥) ما مساحة شبه المنحرف الذى طولاه قاعدتيه ٨ و ١٠ من الأمتار
وارتفاعه ١٥ متراً ؟

العمل

$$\text{المساحة المطلوبة} = \frac{1}{2} \times 15 \times (10 + 8) \text{ متراً مربعاً}$$

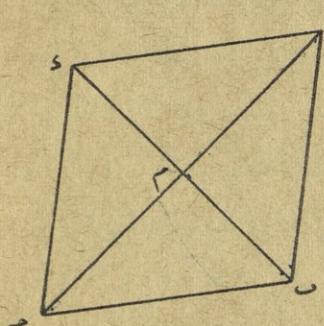
$$= 135 \text{ متراً مربعاً}$$

٣٨ — المعين سطح مستو محدود بأربعة مستقيمت متساوية .
مساحة المعين تساوى حاصل ضرب طول قاعدته فى ارتفاعه ، كما أنها تساوى
 $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه .

البرهان

أولاً — بما أن المعين هو متوازي أضلاع ، أضلاعه متساوية — إذن تكون مساحة المعين هي نفس مساحة متوازي الأضلاع ، أى تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه .

ثانياً — بما أن خواص المعين أن يكون قطراه متعامدين .
 ∴ مساحة المعين $ا ب ح د$ ، إذا علم قطراه تساوى ضعف المثلث $ا ب ح$



$$\begin{aligned} \text{تساوى } ٢ \quad & ا ب ح \times \frac{١}{٢} د ب = ا ب ح د \times \frac{١}{٢} د ب \\ & = ا ب ح د \times \frac{١}{٢} د ب \\ & = ا ب ح د \times \frac{١}{٢} د ب \\ & \langle \rangle = \frac{١}{٢} \text{ حاصل ضرب طولى القطرين } \langle \rangle \\ & \text{ملاحظة :} \end{aligned}$$

(ش ٧)

∴ المربع حالة خاصة من المعين

فتكون مساحته أيضاً تساوى نصف حاصل ضرب قطريه

تساوى $\frac{١}{٢}$ مربع قطره (لأن قطرى المربع متساويان)

(مثال ٦) ما مساحة المعين الذى مجموع طولى قطريه ٣٠ متراً وطول أحدها

نصف الآخر ؟

العمل :

$$\begin{aligned} \therefore \text{مجموع طولى القطرين} &= \frac{٣}{٢} \text{ من أطولها} = ٣٠ \text{ متراً} \\ \therefore \text{أطول القطرين} &= \frac{٢}{٣} \times ٣٠ = ٢٠ \text{ متراً} \\ \text{طول الآخر} &= ٢٠ \times \frac{١}{٢} = ١٠ \text{ أمتار} \\ \therefore \text{المساحة} &= ١٠ \times ٢٠ \times \frac{١}{٢} = ١٠٠ \text{ متر مربع} \end{aligned}$$

تمرين ١٠

١) ما هو الفرق بين مساحة معين قطراه ٦٤ و ٤٨ متراً ومساحة متوازي

أضلاع قاعدته ٥٢ متراً وارتفاعه ٦١ متراً؟

٢) شبه منحرف مساحته ٤٨٠ متراً مربعاً وارتفاعه ١٦ متراً فما طول قاعدته

السفلى إذا كان طول العليا ٢٣ متراً؟

٣) ا ب ح د شبه منحرف قائم فيه ح د عمود على القاعدتين المتوازيتين

ب ح و ا د فإذا كانت مساحة الشكل ٦٠ متراً مربعاً وطول قاعدتيه

١٢ و ٨ متراً و ٧ و ٢ متران وصل القطر ب د فما مساحة المثلث ا ب د؟

٤) ا ب ح د شبه منحرف فيه ا ب يوازي ح د . فإذا كان طول ا ب

٦ و ٣ سم وطول ح د = ٥ و ٦ سم وقسم ا ب في ه بحيث كان ا ه :

ه ب = ٢ : ٥ وقسم ح د في و بحيث و د : و ح = ٣ : ٤ فما

مساحة كل من الشكلين ا ه و و ب ه ح د ؟ إذا علم أن مساحة شبه

المنحرف ا ب ح د = ٢٦ و ١٨ سم^٢ ؟

٣٩ — مساحة أى شكل كثير الأضلاع تساوى مجموع مساحات المثلثات

التي يمكن تقسيمه إليها .

وكذلك مساحة أى شكل كثير الأضلاع تساوى مجموع مساحات المثلثات

القائمة الزاوية وأشباه المنحرفات التي يمكن تقسيمه إليها بإنزال أعمدة من رؤوسه

على أحد أقطاره باعتباره قاعدة لكل من الأشكال الحادثة ، وإليك الأمثلة :

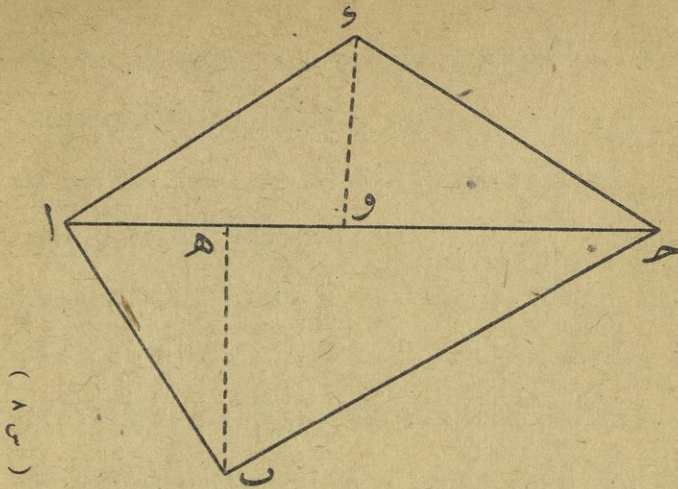
(مثال ٧) فناء على صورة الشكل الرباعي ا ب ح د رسم بمقياس سنتيمتر

لكل ٥ أمتار فكان طول القطر ا ح = ٨ و ٢ سم والعمود النازل عليه من ب =

٤ و ٣ سم والعمود النازل عليه أيضاً من د = ٢ و ٦ سم والمطلوب إيجاد مساحة

الفناء المذكور .

العمل



∴ طول القطر ا ح = $٨,٢ \times ٥ = ٤١$ متراً

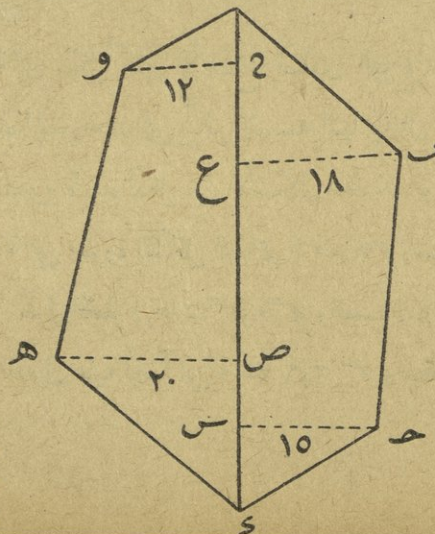
و العمود ب هـ = $٣,٤ \times ٥ = ١٧$ متراً

و العمود و هـ = $٢,٦ \times ٥ = ١٣$ متراً مربعاً

∴ المساحة = $\frac{١}{٢} \times ٤١ \times (١٧ + ١٣)$ متراً مربعاً

= ٦١٥ متراً مربعاً

(مثال ٨) أوجد مساحة الحقل ا ب ح و هـ من الأقيسة التي في الجدول الآتي :



متراً

متراً

متراً

$$٥٦ = ١ و$$

$$٥٠ = ٥ و$$

$$٤٠ = ع و$$

$$١٨ = و ص ه$$

$$١٠ = و س ه$$

$$١٢ = و ٥$$

$$٢٠ = ص ه$$

$$١٨ = ع ب$$

$$١٥ = س ه ح$$

العمل

$$\frac{1}{4} = ٥١ \times ٥ و$$

$$\frac{1}{4} = (٥٠ - ٥٦) \times ١٢ \text{ متراً مربعاً}$$

$$٣٦ \text{ متراً مربعاً}$$

$$\frac{1}{4} = ٤١ \times ع ب$$

$$\frac{1}{4} = (٤٠ - ٥٦) \times ١٨ \text{ متراً مربعاً}$$

$$١٤٤ \text{ متراً مربعاً}$$

$$\frac{1}{4} = و ص ه \times ص ه$$

$$\frac{1}{4} = ٢٠ \times ١٨ \times \text{متراً مربعاً}$$

$$١٨٠ \text{ متراً مربعاً}$$

$$\frac{1}{4} = و س ه \times س ه ح$$

$$\frac{1}{4} = ١٥ \times ١٠ \times \text{متراً مربعاً}$$

$$٧٥ \text{ متراً مربعاً}$$

$$\frac{1}{4} = و ص ه \text{ شبه المنحرف ه و و ص ه} + (٢٠ + ١٢)$$

$$\frac{1}{4} = (١٨ - ٥٠) \times (١٢ + ٢٠)$$

$$٥١٢ \text{ متراً مربعاً}$$

$$\frac{1}{4} = س ه ع \text{ شبه المنحرف ب ح س ه ع} + (١٠ + ١٨)$$

$$\frac{1}{4} = (١٠ - ٤٠) \times (١٨ + ١٥)$$

$$٤٩٥ \text{ متراً مربعاً}$$

المثلث ا ب و

المثلث ا ب ع

المثلث و ص ه

المثلث و س ه ح

بالجمع يحدث أن مساحة الشكل ا ب ح د ه و

$$٤٩٥ + ٥١٢ + ٧٥ + ١٨٠ + ١٤٤ + ٣٦ =$$

$$١٤٤٢ \text{ متراً مربعاً}$$

تمرين ١١

(١) فناء على صورة الشكل الرباعي ا ب ح د رسم بمقياس سنتيمتر لكل ٥

أمتار فكان في الرسم طول القطر ا ح ١٥ سم والعمود النازل عليه من

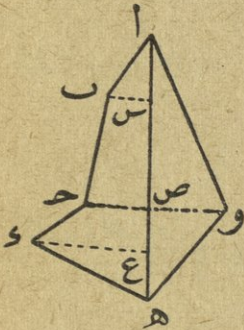
ب ٧ سم وطول العمود النازل عليه من د ١٣ سم فما مساحة هذا الفناء؟

(٢) في الشكل الرباعي ا ب ح د طول ا ح ٤١ متراً وطول العمودين النازلين

على ا ح من ب ١٧ سم و د ١٣ متراً على التناظر فما مساحة الشكل ؟

(٣) أوجد مساحة الشكل ا ب ح د ه و من الأقيسة

التي في الجدول الآتي :



(شكل ١٠)

متراً

متراً

متراً

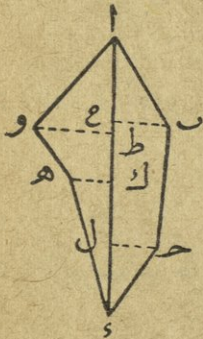
$$٨٠ = ه ا$$

$$٨٠ = د ع \quad ١٥٠ = ا ح$$

$$٥٠ = و ه \quad ١٢٠ = ص ه \quad ٥٠ = ح د$$

$$١٥٠ = س ه \quad ٤٠ = ب د$$

(٤) أوجد مساحة الشكل ا ب ح د ه و من الأقيسة التي في الجدول الآتي :



(شكل ١١)

متراً

متراً

متراً

$$٣٨ = د ا$$

$$٢٨ = ل ا \quad ٧ = ح د$$

$$٦ = ه ه \quad ٢٠ = ك ه$$

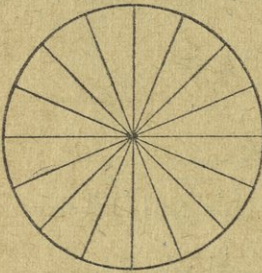
$$١١ = و ط \quad ١٤ = ط ا$$

$$١٢ = ح ا \quad ٨ = ب ح$$

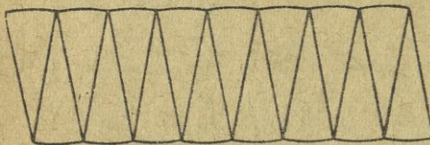
٤٠ - الدائرة

(١) النسبة التقريبية : ارسم دائرة ثم قس محيطها وقطرها ثم اقسّم المحيط على القطر ثم كرر هذه العملية في دوائر مختلفة تجد أن خارج القسمة يساوى نسبة ثابتة يرمز لها بالرموز « ط » وقيمتهما التقريبية ١٤ و ٣ أو $\frac{٢٢}{٧}$ وعلى هذا يكون طول محيط الدائرة = ٢ ط × نصف قطرها فإذا رمزنا لنصف القطر بالرمز ن كان طول محيط الدائرة = ٢ ط ن
(ب) مساحة الدائرة تساوى نصف القطر في نصف المحيط . وكذلك تساوى مربع نصف القطر في النسبة التقريبية .

لإثبات ذلك عملياً :



(ش ١٢)



(ش ١٣)

إقطع قرصاً من الورق المقوى وقسمه إلى عدد زوجي من المثلثات الصغيرة المتساوية كما في شكل ١٢ ثم افصل هذه المثلثات بعضها عن بعض وركبها كما في شكل ١٣ تجد أن الشكل الحادث متوازي الأضلاع تقريباً قاعدته نصف

محيط الدائرة وارتفاعه نصف قطرها تقريباً ومساحته تساوى مجموع مساحات المثلثات المكونة لسطح الدائرة .

∴ مساحة الدائرة = نصف القطر × نصف المحيط .

$$= ن \times \frac{١}{٢} \times ٢ ط ن$$

$$= ن \times ط \times ن$$

$$= ط ن^٢$$

(مثال ٩) أوجد مساحة الأجزاء المظلة في الشكل الذى هو عبارة عن دائرة تمر

برؤوس مربع طول قطره ٧ سم

العمل

قطر الدائرة = قطر المربع = ٧ سم
 مساحة الدائرة = $\pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{77}{2} \approx 38\frac{1}{2}$ سم^٢
 مساحة المربع = $7 \times 7 = 49$ سم^٢
 مساحة الأجزاء المظلمة = $49 - 38\frac{1}{2} = 10\frac{1}{2}$ سم^٢
 (ش ١٤)

تمرين ١٢

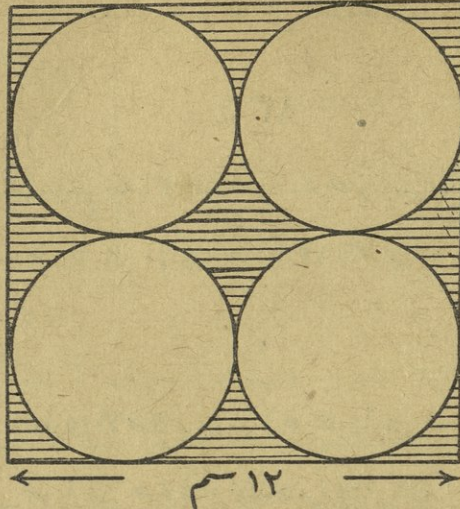
- (١) ما مساحة الدائرة التي طول محيطها ١٢٥٦ من الأمتار (ط = ٣,١٤)؟
- (٢) أوجد مساحة السطح المحصور بين محيطي دائرتين متخدتى المركز نصف قطر إحدهما ١١,٤ سم ونصف قطر الأخرى ٨,٦ سم (ط = ٣,١٤)
- (٣) حلبة سباق دائرية الشكل محصورة بين دائرتين قطرها ٥٠٥ و ٣٠٣ من الأمتار وبوسط قطعة الأرض المحيطة بها الحلبة بركة مستديرة مساحتها كمساحة الحلبة ، أوجد مساحة هذه البركة وطول قطرها (ط = ٣,١٤)
- (٤) أوجد مساحة الجزء المظلل في الشكل الآتي :



(ش ١٥)

(٥) أوجد مساحة الجزء المظلل في الشكل الآتي :

$$ط = ٣١٤$$



(ش ١٦)

(٦) سور مربع يمس بركة مستديرة الشكل ، فإذا كان طول السور ١٤ قصبة فما مساحة الأرض الموجودة داخل السور ($ط = \frac{٢٢}{٧}$) ؟

(٧) حديقة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ م وعرضها ٥٠ م وترك حولها ممر عرضه

٣ أمتار وغرست في الباقي شجيرات الأزهار في

ثلاث قطع مستديرة الشكل أقطارها ٨ و ١٦ و

٢٤ مترا ويحيط بهذه القطع نوع من الحشائش

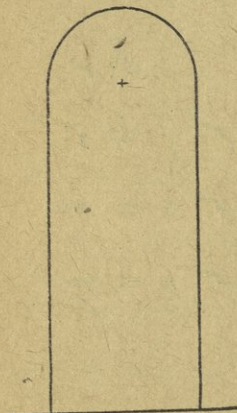
فما مساحة الجزء المنزوع حشائش ($ط = ٣١٤$) ؟

(٨) شباك شكله عبارة عن مستطيل يعلوه نصف

دائرة كما في الشكل المبين ، فإذا علم أن عرض

الشباك ٣ أقدام وأكبر ارتفاع له ٨ أقدام ، فما

مساحته ($ط = ٣١٤$) ؟



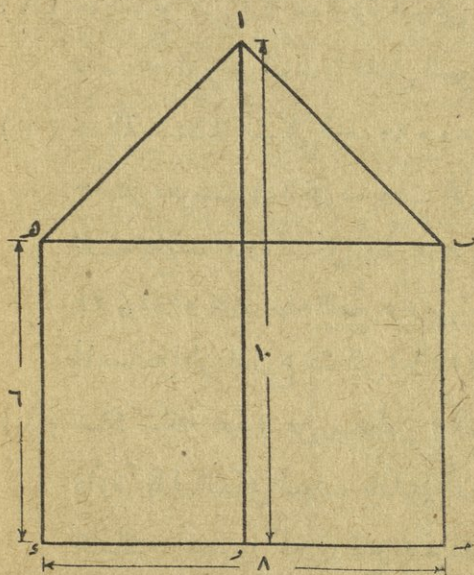
(ش ١٧)

مسائل متنوعة على المساحات

تمرين ١٣ .

(١) $ا ب ح$ مثلث رسم فيه $ا د$ عمودا على $ب ح$ و $ا ه$ رسم $ب ه$ عمودا على $ا ح$
فإذا كان $ب ح = ١٦$ سم $ا د = ١٢$ سم $ا ه = ٩$ سم فأوجد
طول $ب ه$

(٢) $ا ب ح د$ متوازي الأضلاع ، رسم $ا ه$ عمودا على $ب ح$ (أو امتداده)
ورسم $ا ك$ عمودا على $ح د$ (أو امتداده) فإذا كان $ا ب = ١٢$ سم
 $ب ح = ٨$ سم $ا ه = ٩$ سم فأوجد طول $ا ك$



(٣) أوجد مساحة الشكل

$ا ب ح د ه$ مع

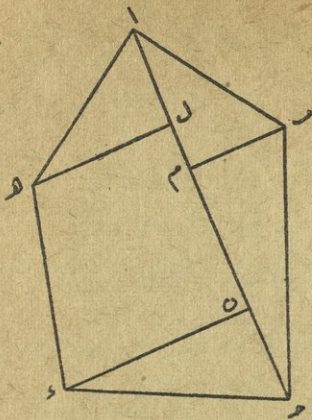
العلم بأن :

$$ا و = ١٠ \text{ سم}$$

$$د ه = ٦ \text{ سم}$$

$$ح د = ٨ \text{ سم}$$

(ش ١٨)



(٤) أوجد مساحة الشكل ا ب ح و هـ من
الأقيسة التي في الجدول الآتي :

مترا	مترا	مترا
٨ = ا	٢ = ب	٢ = ج

٤ = د ٥ = هـ ٦ = ز

٣ = ح ٢ = ط ١ = ل

(ش ١٩)

(٥) حجرة طولها ٦ أمتار و ٤٠ سنتيمتراً وعرضها أربعة أمتار ونصف متر .

عملت في أرضها حافة بعرض نصف متر من جميع الجوانب ودهنت بدهان
يتكلف المتر المربع منه ٨ قروش ثم دهن الجزء الأوسط الباقي بدهان
يتكلف المتر المربع منه ٦ قروش أوجد تكاليف دهان أرض الغرفة كلها .

(٦) غرفة طولها ٧ أمتار وعرضها ٥ أمتار . رسمت في وسطها دائرة قطرها ثلاثة

أمتار ونصف ودهنت الدائرة بدهان يتكلف المتر المربع منه ٨ قروش
ودهن الجزء الباقي بدهان يتكلف المتر المربع منه ١٢ قرشاً أوجد تكاليف

دهان أرض الغرفة كله (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٧) غرفة طولها ٨ أمتار ، ٤٠ سم وعرضها ٥ أمتار ، ٦٠ سم فرشت ببساط

عرضه ١٢٠ سم وثمن المتر منه ٧٥ قرشاً . أوجد تكاليف فرش الغرفة
بهذا البساط مع العلم بأن أجرة خياطة البساط بلغت ١ ٪ من ثمنه .

(٨) غرفة طولها ٦ أمتار وعرضها ٤ أمتار ٦٠ سم فرشت ببساط عرضه

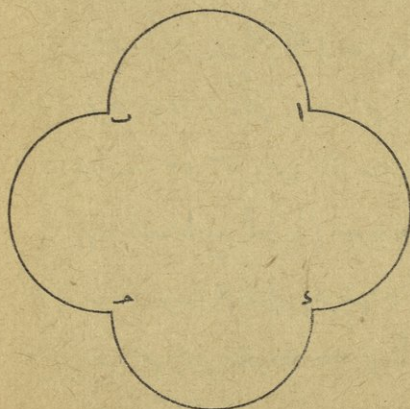
٥٠ سم وثمن المتر منه ٣٥ قرشاً . فإذا بلغت أجرة خياطة هذا البساط

٢٠ قرشاً فكم بلغت تكاليف فرش الغرفة بهذا البساط ؟

(٩) حجرة مستطيلة الشكل طولها ٥ أمتار وعرضها ٤ أمتار وارتفاعها ٣ أمتار بها نافذتان عرض كل منهما متر واحد وارتفاع كل منهما ١٥٥ متر وبها ٣ أبواب عرض كل منها ١٢٠ سم وارتفاع كل منها ٢٥٥ متر ، يراد تغطية جدرانها بالورق الذي عرضه ٤٠ سم وثمان المتر منه ٢٠ قرشاً أوجد مقدار ما تبلغه التكاليف إذا علم أن النوافذ لا تغطي بالورق .

(١٠) حجرة طولها ٢٥ قدماً و ٧ بوصات ، وعرضها ١٦ قدماً و ٩ بوصات وارتفاعها ٤٥ من الiardات وبها ثلاث نوافذ طول كل منها ٥ أقدام وعرضه ٣ أقدام و ٦ بوصات وبها باب طوله ٧ أقدام وعرضه ٤ أقدام وبها موقد للتدفئة مستطيل الشكل بعده ٥ أقدام و ٣ أقدام غطيت جدرانها بالورق الذي عرضه $\frac{5}{8}$ ياردة والذي ثمن الiardة منه ٤٥٥ بنس أوجد بالنقود الإنجليزية مبلغ تكاليف توريق الحجرة إذا علم أن الفتحات لا تغطي بالورق .

(١١) ا ب ح د شبه منحرف فيه ا ب ٦ ح متوازيان وطول ا د = ٦ سم و ا ب ح د = ١٦ سم ومساحة الشكل كله ٩٥٥ سنتيمتراً مربعاً فإذا رسم ا ه موازياً د ح وقاطعاً ب ح في ه فأوجد مساحة المثلث ا ب ه



(ش ٢٠)

(١٢) أوجد مساحة الشكل المرسوم

بعد مع العلم بأن ا ب ٦ ح د

رءوس مربع طول ضلعه

٢٥ سم وأن ط = ٣١٤

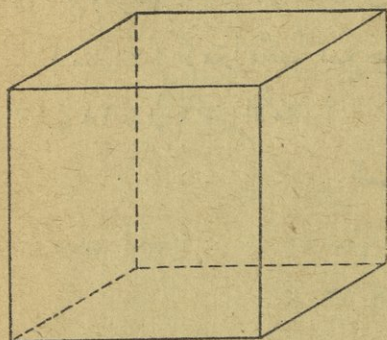
الباب الثالث

الحجوم

٤١ - وحدة الحجوم العلمية هي السنتيمتر المكعب وهو حجم مكعب طول ضلعه سنتيمتر.

والوحدة العملية التي تختار عادة هي السنتيمتر المكعب للحجوم التي تقل عن متر مكعب كما يختار المتر المكعب للحجوم التي تزيد عليه.

٤٢ - حجم المكعب = مكعب طول أحد الأضلاع.



فمثلا إذا كان طول ضلع المكعب المبين في الشكل ١٠ سم فيكون حجمه $10^3 = 1000$ سنتيمتر مكعب.

وعلى العموم إذا كان طول ضلع المكعب ل سم فإن حجمه = L^3 سم^٣ ملاحظة : المكعب الذي ضلعه

١٠ سم عبارة عن ديسيمتر مكعب وتسمى سعة الديسيمتر المكعب «لترا»

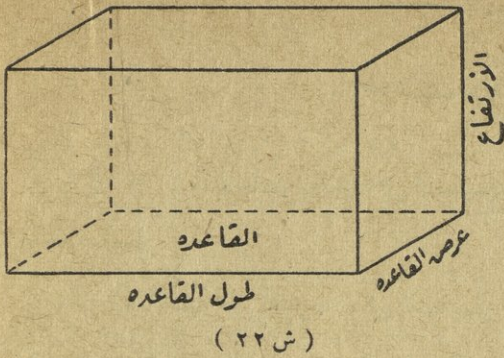
وهو وحدة السكايل المستعملة في مصالح الحكومة المصرية.

(مثال ١) أوجد حجم المكعب الذي طول ضلعه ٣٩ سم

العمل

$$\text{حجم المكعب} = 39 \times 39 \times 39 \text{ سم}^3 \\ = 59319 \text{ سم}^3$$

٤٣ — حجم متوازي المستطيلات يساوي مساحة القاعدة في الارتفاع

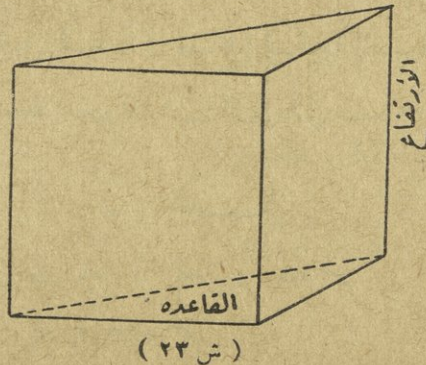


فإذا فرض أن ارتفاع
متوازي المستطيلات المبين
في الشكل ٨ سم وطول
قاعدته ١٥ سم وعرضها
٦ سم فيكون حجمه
 $٧٢٠ = ٦ \times ١٥ \times ٨$ سم^٣

وعلى العموم إذا كان ارتفاع متوازي المستطيلات ع سم وطول قاعدته =
ل سم وعرضها م سم كان حجمه ع $\times$ ل $\times$ م سم^٣
(مثال ٢) كم متراً مكعباً تسع حجرة على شكل متوازي المستطيلات أبعادها
١٢ ١٨ ٦ $\frac{١}{٢}$ من الأمتار؟

العمل

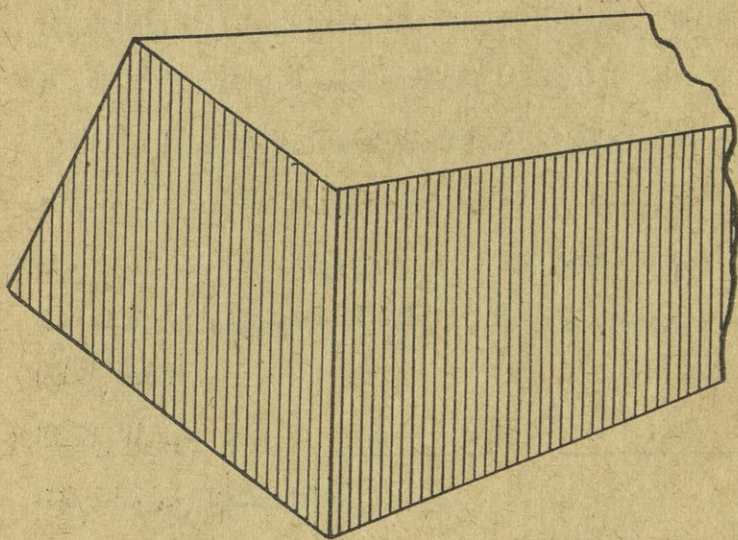
حجم الحجرة = سقتها .
 $١٢ \times ١٨ \times ٦ \frac{١}{٢}$ متراً مكعباً .
 $= ١٤٠٤$ أمتار مكعبة .
حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع .



(مثال ٣) إذا اعتبرنا أن قنطرة خزان أسوان جسم منشوري مصمت لا عيون فيه طوله كيلومتران ، وارتفاعه $\frac{1}{4}$ من الأمتار ؟ وعرضه من أعلى $\frac{1}{4}$ أمتار ، ومن الأسفل $\frac{1}{4}$ من الأمتار ، فما حجم ما يحتويه من البناء ؟

العمل

نعتبر طول الخزان ارتفاعا للمنشور ، كما نعتبر إحدى نهايتي الخزان قاعدة المنشور وشكلها كما هو موضح من المعلومات شبه منحرف .



(ش ٢٤)

∴ طول الضلعين المتوازيين لقاعدة المنشور $= \frac{1}{4} \times 6 = \frac{1}{4}$ من الأمتار
والبعد بينهما $\frac{1}{4}$ من الأمتار .

∴ مساحة القاعدة = $\frac{1}{4} \times (\frac{1}{4} \times 24 + \frac{1}{4} \times 4) \times \frac{1}{4} \times 28$ متراً مربعاً .

∴ حجم البناء = $\frac{1}{4} \times 29 \times \frac{1}{4} \times 28 \times 2000$ متر مكعب .

= ٨٢٦٥٠٠ متر مكعب .

تمرين ١٤

(١) كم لتراً من الماء تملأ حوضاً على شكل متوازي المستطيلات طوله

$\frac{1}{4}$ متراً وعرضه ٢٥ متراً وعمقه ٢٧٥ متراً ؟

(٢) إناء على شكل متوازي المستطيلات مفتوح من أعلى يسع ٢٦ و ٢٥ لتراً

من الماء فإذا علم أن بعدى قاعدته من الداخل ٢٥ و ٣٠ من السنتيمترات

فما ارتفاعه من الداخل ؟

(٣) منشور ثلاثي قائم قاعدته مثلث قائم الزاوية طولاً ضلعي القائمة فيه

٨ و ٦ من السنتيمترات وحجمه ٣٦٠ سم^٣ فما ارتفاعه ؟

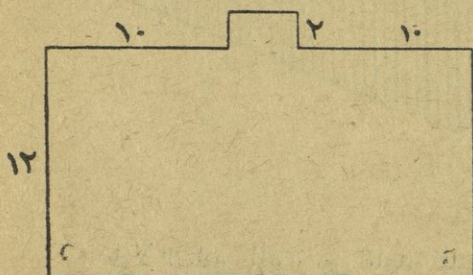
(٤) كم قالباً من الحجر تلزم لبناء حائط طوله ١٦ متراً وسمكه $\frac{3}{4}$ متر وارتفاعه

٤ أمتار إذا كانت أبعاد القالب ٥٠ و ٢٠ و ٢٠ من السنتيمترات ؟

(٥) علبة كبريت تسع ٧٠ عوداً طول كل عود ٥ سم ومقطعه مربع ، طول

ضلعه مليمتراً ؛ أوجد سعة العلبة مع العلم بأن الكبريت يشغل $\frac{7}{8}$ فضاءها

الداخلي فقط .



(٦) الشكل المرسوم يمثل

مقطع قطعة من الخشب

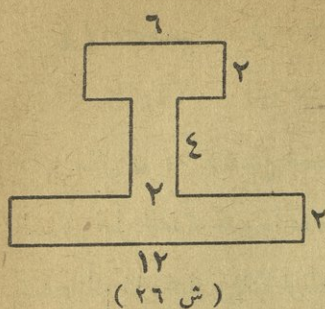
طولها متران أوجد وزن

هذه القطعة إذا كان وزن

السنتيمتر المكعب منها

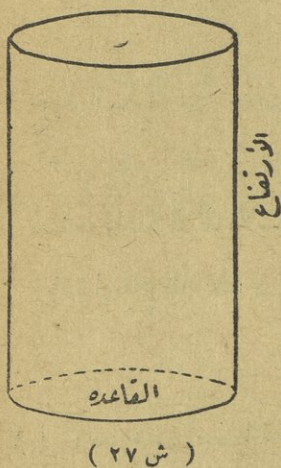
٩٠٠ جرام .

٢٤ سم
(٢٥ ش)



(٧) الشكل الآتي يمثل مقطع قضيب من الصلب . أوجد وزن ١٠٠ متر من هذا القضيب إذا علم أن وزن السنتيمتر المكعب ٨.٥ مم (الأبعاد مبينة على الرسم بالسنتيمترات) .

حجم الاسطوانة القائمة يساوى مساحة القاعدة في الارتفاع .



فإذا فرض أن طول نصف قطر قاعدة الاسطوانة المبينة في الشكل ٧ سم وارتفاع الاسطوانة ٢٥ سم كان حجمها $\frac{22}{7} \times 7^2 \times 25 = 3850$ سم وعلى العموم إذا كان طول نصف قاعدتها نق سم وكان ارتفاع الاسطوانة ع سم كان حجمها $\text{ط} \times \text{ع} \times \frac{22}{7}$

(مثال ٤) كم متراً مكعباً تلمر لردم بئر أسطوانية الشكل ارتفاعها ١٦ متراً وقطر قاعدتها ٢٥ من الأمتار مع العلم بأن ط = ٣,١٤٢

المـمـل

حجم البئر = مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع .

$$\text{ط} \times \frac{22}{7} \times \text{ع} =$$

$$= 3,142 \times \frac{22}{7} \times \frac{22}{7} \times 16 \text{ متراً مكعباً .}$$

$$= 78,050 \text{ من الأمتار المكعبة .}$$

وهو المقدار اللازم لردم البئر .

٤٤ - حجم الكرة = حاصل ضرب $\frac{4}{3}$ ط $\times$ مكعب نصف القطر
 أى $\frac{4}{3}$ ط نق^٣

(مثال ٥) كرة من الحديد قطرها ٦ بوصات وضعت في إناء اسطوانى الشكل قطر قاعدته قدم واحدة به كمية من الماء فإذا غمرت الكرة تماماً تحت سطح الماء فما مقدار زيادة ارتفاع الماء فى الإناء ؟

العمل

حجم الكرة = حجم الماء الذى حلت محله
 $\frac{4}{3}$ ط نق^٣ = $\frac{4}{3}$ $\times \frac{22}{7} \times ٢٧ \times$ بوصة مكعبة .
 مساحة قاعدة الإناء الاسطوانى $= \frac{22}{7} \times ٦ \times ٦ \times$ بوصة مربعة
 زيادة ارتفاع الماء $= ٤ \times ٢٢ \times \frac{9}{7} \times \frac{7}{6 \times 6 \times ٢٢}$ بوصة = ١ بوصة

تمرين ١٥

- (١) أوجد حجم أسطوانة قطرها ١٢ سم وارتفاعها ٢١ سم .
- (٢) إناء مكعب الشكل طوله ٢٠ سم وضع فيه مقدار من الماء ثم غمرت فيه أسطوانة من النحاس قطر قاعدتها ٨ سم وارتفاعها ٦ سم فارتفع الماء إلى آخر الإناء فكم لترأ مقدار الماء الذى وضع فى الإناء ؟
- (٣) بالون كروى قطره ٢١ قدما . أوجد حجمه (ط $= \frac{22}{7}$) .
- (٤) أوجد النسبة بين حجم كرة وحجم أسطوانة مع العلم بأن كلا من قطر الأسطوانة وارتفاعها يساوى قطر الكرة يساوى ٥ سم مثلاً .
- (٥) إذا علمت أن النسبة بين قطر الأرض وقطر القمر هى ١١ : ٣ فما النسبة بين حجميهما ؟
- (٦) إذا اتحد نصف كرة واسطوانة فى القاعدة والارتفاع فما النسبة بين حجميهما ؟

- (٧) كم كرة من الرصاص ، قطر كل منها سنتيمتر ، يمكن صنعها من قرص قطره ١٢ سم وسمكه ٣ سم ؟
- (٨) كم متراً مكعباً من غاز الاستصباح تملأ مستودعاً غازياً اسطوانياً قطره ٦ و١٢ متراً وارتفاعه ١٢ متراً (ط = $\frac{22}{7}$) ؟
- (٩) ما حجم اسطوانة نصف قطر قاعدتها ٥٣٢ سم وارتفاعها ٨ و٤ سم (ط = $\frac{22}{7}$) ؟
- (١٠) أوجد حجم اسطوانة محيط دائرة قاعدتها ٣ و٨ متراً وارتفاعها ١ $\frac{1}{4}$ متر (ط = $\frac{22}{7}$) ؟
- (١١) ما ارتفاع الاسطوانة التي حجمها ٦٩٣ و٣ من الديسيمترات المكعبة وقطر قاعدتها ٤٢ سم (ط = $\frac{22}{7}$) ؟

تمرين ١٦

تمارين متنوعة على الحجوم

- (١) ما عمق الخندق اللازم حفره حول قطعة أرض مستطيلة الشكل طولها ٨٠ ياردة وعرضها ٦٠ ياردة إذا كان عرضه ٩ أقدام وأريد أن يوضع ما يستخرج منه على سطح هذه القطعة ليرفع مستواها بقدر ٧ و٣ بوصة ؟
- (٢) إناء اسطوانى الشكل فيه مقدار من الماء أضيف إلى ما فيه ٢٧ لتراً فامتلاً الإناء فإذا كان قطر قاعدته ٧٥ سم ومقدار الماء الذى وضع فيه يساوى $\frac{3}{8}$ مقدار ما كان فيه أولاً فما ارتفاع هذا الإناء ؟ (ط = $\frac{22}{7}$) ؟
- (٣) ماسورة من الرصاص طولها ٣ أمتار ، ونصف قطرها الخارجى $7\frac{1}{4}$ سم وسمكها $\frac{1}{4}$ سم أوجد وزنها مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من الرصاص ١١ و٢ سم (ط = $\frac{22}{7}$) .

(٤) حوض على شكل متوازي المستطيلات طوله ٥ أقدام وعرضه ٤ أقدام وارتفاعه $\frac{3}{4}$ قدم وضع به ١١٠ قوالب من الطوب ثم صب فيه ماء حتى وصل سطح الماء إلى حافة الحوض . فإذا كان الطوب يمتص $\frac{1}{11}$ من حجمه وكانت أبعاد كل قالب ٩ بوصات ٦ بوصات ٣ بوصات ٦ بوصات $\frac{2}{3}$ بوصة فما مقدار الماء الذي صب في الحوض ؟

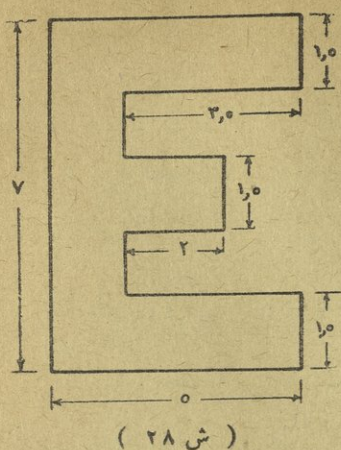
(٥) إناء من النحاس على شكل نصف كرة لا قاعدة لها قطرها الخارجى قدم واحدة وسمكها بوصة . أوجد وزن الإناء إذا كان وزن البوصة المكعبة من النحاس $\frac{1}{4}$ ٥ أوقية (ط = $\frac{22}{7}$) .

(٦) حوض على شكل متوازي مستطيلات طول قاعدته ٤٩ بوصة وعرضها $\frac{3}{4}$ ١٤ بوصة به كمية من الماء غمرت فيها كرة من الحديد قطرها ١٤ بوصة والمطلوب معرفة مقدار ما ارتفعه سطح الماء في الإناء من وضع الكرة فيه (ط = $\frac{22}{7}$) .

(٧) منشور قائم مصنوع من الخشب ارتفاعه ٤٥ سم وقاعدته على شكل معين طولاً قطريه ٢٥ سم ١٦ سم أوجد وزن المنشور مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من الخشب المصنوع منه ٠٠٦ من الجرام .

(٨) جسم على شكل اسطوانة دائرية قائمة ، مركب عليها نصف كرة تتحد قاعدتها مع قاعدة الاسطوانة فإذا كان نصف قطر قاعدة الاسطوانة ٢٥ من الأقدام وارتفاع الاسطوانة ٨٥ من الأقدام . فأوجد حجم الجسم (ط = ٣١٤) .

(٩) حلقة من الحديد نصف قطرها الداخلى ٨٥ سم ونصف قطرها الخارجى ١٠٥ سم وسمكها ٣ سنتيمترات أوجد وزن الحلقة مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من الحديد ٧٥ من الجرامات (ط = ٣١٤) .



(١٠) عمل حرف E من الخشب الذى وزن السنتيمتر المكعب منه ٠.٧٥ من الجرام فإذا كانت أبعاد قاعدة الحرف بالسنتيمترات كما هو مبين فى الشكل وسمك الحرف $\frac{1}{4}$ سم فأوجد وزنه .

(١١) كرة مجوفة من النحاس نصف قطرها الداخلى ١٠.٥ سم ونصف قطرها

الخارجى ١٤ سم أوجد وزنها مع العلم بأن وزن السنتيمتر المكعب من النحاس ٨.٥ (ط $= \frac{22}{7}$) .

(١٢) اسطوانة من النحاس نصف قطر قاعدتها ١٧.٥ سم وارتفاعها ٢٠ سم صهرت وعملت كرات من النحاس نصف قطر كل منها ٢.٥ سم أوجد عدد الكرات الناتجة .

الباب الرابع

٥٤ — تطبيقات متنوعة على الجذرين التربيعي والتكعيبي في المساحات
والحجوم السابقة

(لاحظ أن $٢٧١ = ٥٠٤١$)

(مثال ١) حديقة مربعة الشكل مساحتها ٣٠ فداناً يراد إحاطتها بسور من
الخشب . فكم متراً يكون طول هذا السور ؟

العمل

$$\left[\begin{array}{l} \text{الجواب إجمالاً} = ٤٠٠٠ \times ٣٠ \div ٤ \text{ متراً} \\ \gg ١٢٠٠٠٠ \div ٤ = \\ ٣٠٠ \times ٤ = \\ ١٢٠٠ = \text{متراً ويجب أن يكون الجواب أكبر من ذلك} \end{array} \right]$$

$$\therefore \text{المساحة} = ٣٠ \times \frac{٢٥٢٠٠}{٦} = ١٢٦٠٢٥ \text{ متراً مربعاً}$$

$$\therefore \text{طول ضلع المربع} = \sqrt{١٢٦٠٢٥} \text{ متراً}$$

$$\text{متراً} \quad ٥٠٤١ \times ٢٥ =$$

$$\text{متراً} \quad ٢٧١ \times ٢٥ =$$

$$\text{متراً} \quad ٧١ \times ٥ =$$

$$\text{متراً} \quad ٣٥٥ =$$

$$\text{طول السور} = \text{طول المحيط}$$

$$\text{متراً} \quad ٣٥٥ \times ٤ =$$

$$\text{متراً} \quad ١٤٢٠ =$$

(مثال ٢) ما الزمن الذي يستغرقه رجل سرعته ٦ ك . م في الساعة في الطواف حول قطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٣٦ فداناً وعرضها $\frac{2}{3}$ طولها؟

العمل

$$\left[\begin{array}{l} \text{طول المستطيل إجمالاً} = \sqrt{\frac{1}{3} \times 4000 \times 36} \\ \text{المساحة} = \frac{480000}{36} = 13333.33 \text{ متر تقريباً} \end{array} \right]$$

$$= 151230 \text{ متراً مربعاً}$$

$$= \text{الطول} \times \frac{2}{3} \text{ الطول}$$

$$= \frac{2}{3} \times \text{مربع الطول}$$

$$= \frac{10 \times 151230}{3} = \therefore \text{مربع الطول}$$

$$= 504100 \text{ متر مربع}$$

$$= \sqrt{504100} = \therefore \text{الطول}$$

$$= \sqrt{210 \times 271} \text{ متراً}$$

$$= 71 \times 10 = 710 \text{ متراً}$$

$$= 710 \times \frac{2}{3} = 213 \text{ متراً} \therefore \text{العرض}$$

$$= 2(213 + 710) \therefore \text{طول محيط القطعة}$$

$$= 1846 \text{ متراً}$$

$$= \frac{1846}{60} = 30.77 \text{ متر في الدقيقة} \therefore \text{السرعة}$$

$$= \frac{1846}{30.77} = 59.99 \text{ دقيقة} \therefore \text{الزمن اللازم}$$

(مثال ٣) قطعة من النحاس على شكل متوازي المستطيلات أبعاده ٧٠ و ٤٥ و ٥ من السنتيمترات سحبت على هيئة أسطوانة طولها ١٥٤ متراً فما طول قطرها (ط = $\frac{22}{7}$) ؟

العمل

$$\begin{aligned}
 & \text{حجم متوازي المستطيلات} = ٨٠ \times ٤ \times ٥ \text{ سم}^3 \\
 & \therefore \text{حجم متوازي المستطيلات} = \text{حجم الاسطوانة} \\
 & \therefore \text{مساحة قاعدة الاسطوانة} = \frac{٥ \times ٤ \times ٨٠}{١٠٠ \times ١٥٤} \text{ سم}^2 \\
 & \therefore \frac{٢٢}{٧} \times \frac{٢}{٧} = \frac{٨}{٧٧} \\
 & \therefore \frac{٧}{٢٢} \times \frac{٨}{٧٧} = \frac{٢}{٢١١} \text{ سم}^2 \\
 & \therefore \frac{٢}{٢١١} = \frac{٢}{٢١١} \\
 & \therefore \frac{٢}{١١} = \frac{٢}{١١} \\
 & \therefore \text{قطر قاعدة الاسطوانة} = \frac{٢ \times ٢}{١١} = \frac{٤}{١١} \text{ سم}
 \end{aligned}$$

(مثال ٤) أسطوانة من الحديد بها ١٩٨٠ لتراً من الماء وارتفاع الماء الموجود بها ٩٢٥٧٥ من الأمتار . وإذا كان قطر قاعدتها الخارجى $٥٦ \frac{٤}{٢٣}$ من السنتيمترات فما سمك الحديد (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

العمل

$$\begin{aligned}
 & \therefore \text{حجم الماء في الاسطوانة} = ١٩٨٠ \text{ لتراً وارتفاعه } ٩٢٥٧٥ \text{ متراً تكون مساحة} \\
 & \text{قاعدة الاسطوانة} = \frac{١٠ \times ١٠ \times ١٠ \times ١٩٨٠}{١٠٠ \times ٩٢٥٧٥} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٢٢}{٧} \\
 & \therefore \frac{٧}{٢٢} \times \frac{١٠ \times ١٠ \times ١٩٨٠}{٢٢ \times ٩٢٥٧٥} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٢٢}{٧} \\
 & \therefore \frac{٩٠٠٠٠٠}{١٣٢٢٥} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٢٢}{٧} \\
 & \therefore \frac{٢(٣٠٠)}{٢(٢٣ \times ٥)} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٢٢}{٧} \\
 & \therefore \frac{٦٠٠}{٢٣} = \frac{٢٠٠}{١١٥} \\
 & \therefore \frac{٢}{٢٣} = \frac{٢}{٢٣}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{نصف القطر الداخلى} = ٢٦ \frac{٢}{٣٣} \text{ سم}$$

$$\text{» » الخارجى} = \frac{٥٦ \frac{٤}{٣٣}}{٢} \text{ سم}$$

$$= ٢٨ \frac{٢}{٣٣} \text{ من السنتيمترات}$$

$$\therefore \text{سمك الحديد} = ٢٨ \frac{٢}{٣٣} - ٢٦ \frac{٢}{٣٣} = ٢ \text{ سم}$$

(مثال ٥) إنشاء أسطوانى الشكل يسع ٥٠٢٤٠ لترًا وارتفاعه يساوى قطر قاعدته فإذا كانت النسبة التقريبية ٣ و ١٤ فما طول ارتفاعه ؟

العمل

نفرض أن قطر قاعدة الإناء ل سم

فيكون ارتفاعه ل سم أيضاً

ونصف قطر قاعدته $\frac{ل}{٢}$ من السنتيمترات

$$\text{ويكون حجمه} = ط \times \left(\frac{ل}{٢}\right)^2 \times ل$$

$$\therefore ١٠٠٠ \times ٥٠٢٤٠ = \frac{ل^3}{٤} \times ٣,١٤$$

$$\therefore ل^3 = \frac{٤ \times ٣١٠ \times ٥٠٢٤٠}{٣,١٤} \text{ سم}^3$$

$$= ١٠ \times ٦٤٠٠٠ \text{ سم}^3$$

$$= ١٠ \times ١٠ \times ٦٤٠ \text{ سم}^3$$

$$= ١٠ \times ١٠ \times ٦٤ \text{ سم}^3$$

$$= ٤٠٠ \text{ سم}$$

(مثال ٦) كرة جوفاء مصنوعة من الحديد وزنها ٦٧٩١ و ٤ أوقية وقطرها

الخارجى ٢٠ من البوصات فما سمكها إذا علم أن زنة البوصة المكعبة من الحديد

$$٤,٢ من الأوقيات وأن ط = \frac{٢٢}{٧} ؟$$

العمل

نفرض أن نصف قطرها الداخلى هو من البوصات .
 فيكون حجمها من الداخل $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10^3$ من البوصات المكعبة .
 وحجمها الخارجى $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10^3$ من البوصات المكعبة .
 وحجم الحديد الذي فيها $= \frac{179104}{22} = 1617$ من البوصات المكعبة .
 ∴ حجمها من الداخل عبارة عن حجمها الكلى مطروحاً منه حجم الحديد .

$$\therefore \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10^3 = 1617 - \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 10^3$$

وبضرب طرفى المتساوية $\times \frac{3}{22}$ ينتج أن

$$\frac{4 \times 3 \times 1617}{22 \times 4} - 10^3 = \frac{4 \times 3 \times 1617}{22 \times 4}$$

$$\frac{3087}{8} - 1000 =$$

$$\frac{4913}{8} =$$

$$\therefore 10^3 = \frac{4913}{8} = 8\frac{1}{8} \text{ بوصة}$$

$$\therefore \text{سمك الحديد} = 10 - 8\frac{1}{8} = 1\frac{7}{8} \text{ بوصة}$$

تمرين ١٧

(١) أوجد ضلع المربع بالمليمترات إذا كانت مساحته تكافئ مجموع مساحتي

مربعين طول ضلع الأول ٥١٣ م. من المتر وطول ضلع الثانى ٦٨ و ٤ سم .

(٢) مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعى الزاوية القائمة ٧٥٦ م وطول الآخر

٦٧٢ م فما طول ضلع المربع المساوى له فى المساحة ؟

(٣) فى كم من الوقت يسير رجل حول حقل مربع الشكل مساحته ١٣٦٨٩ ياردة

مربعة إذا علم أن سرعة الرجل $4\frac{1}{4}$ ميل فى الساعة ؟

(٤) مستطيل ومربع متكافئان فى المساحة وطول المستطيل وعرضه هما على

الترتيب ٣٧ و ٦٢ و ٣٢ و ١٢ متراً ، أوجد طول ضلع المربع .

(٥) حقل مربع الشكل مساحته ٤٦٦٥٦ م^٢ محاط من جميع جهاته بطريق منتظم العرض مساحته ٢٦٢٨ م^٢ أوجد عرض الطريق .

(٦) حقل مستطيل الشكل مساحته ٦١٢٥٠ م^٢ فإذا كان طوله ضعف عرضه فما طول محيطه ؟

(٧) حقل مستطيل الشكل نسبة طوله : عرضه كنسبة ٧ : ٢ ومساحته ٩٧٥٧٤٤ متراً مربعاً أوجد تكاليف إحاطة هذا الحقل بسور إذا كان المتر منه يتكلف ١٥ قرشاً .

(٨) بلغت نفقات سور من الحديد حول قطعة أرض مربعة الشكل مساحتها ١١٩٠٢٥ م^٢ مبلغاً قدره ٢٣٧٠٥ جنيهاً مصرياً . والمطلوب معرفة نفقات سور من نوع السور الأول يحيط بقطعة أرض مستطيلة الشكل مساحتها ٤٢١٣٥ م^٢ إذا علم أن عرضها $\frac{٢}{٥}$ طولها (٢٨٠٩ = ٢٥٣) .

(٩) مربع طول قطره ٤٠ متراً فما طول محيط المستطيل الذى يساويه فى المساحة والذى طوله ضعف عرضه ؟

(١٠) إذا كان عرض طريق منتظم يحيط بقطعة أرض مربعة الشكل هو $١\frac{١}{٢}$ من الأمتار وكانت مساحة القطعة الكلية المكونة من قطعة الأرض والطريق ٤٨٤ م^٢ فما تكاليف رصف هذا الطريق بحجارة إذا كانت نفقات رصف المتر المربع ٩ قروش ؟

(١١) فناء مستطيل الشكل طوله ١١٢ م وعرضه ٦٣ م حول إلى فناء آخر مربع الشكل يساويه فى المساحة وذلك بإنقاص طوله وإطالته فى عرضه فما مقدار هذه الإطالة وذلك الإنقاص ؟

(١٢) إذا فرشت أرض حجرة مستطيلة الشكل طولها ٣ أمثال عرضها ببساط عرضه ٧٥ سم وبمن المتر منه $\frac{١}{٤}$ ٤٠ قرشاً وبلغت التكاليف ٢٥٩٢ قرشاً فما طول هذه الحجرة ؟

(١٣) حجرة طولها ضعف عرضها فرشت أرضها ببساط ثمن المتر المربع منه ٣٠ قرشاً فبلغت التكاليف ٧٣٥ قرشاً ودهنت حوائطها بطلاء تكاليف المتر المربع منه $\frac{1}{4}$ ٤ قروش وكانت تكاليف ذلك $\frac{1}{4}$ ٣٤٦ قرشاً فما ارتفاع هذه الحجرة ؟

(١٤) إذا وضعت في وسط حجرة مربعة الشكل مساحتها ٦٤ م^٢ سجادة مربعة الشكل أيضاً ثمن المتر المربع منها ٨٠ قرشاً ثم فرشت المسافة الباقية بمشمع ثمن المتر المربع منه ١٥ قرشاً وكان ثمن السجادة والمشمع معاً ٣٣ جنياً مصرياً ، فما عرض المسافة المفروشة مشمعاً ؟

(١٥) قطعة أرض مربعة الشكل داخلها بركة على هيئة دائرة بحيث تمس أضلاع المربع فإذا كانت مساحة البركة ١٣٨٦ م^٢ فما مساحة الأجزاء الداخلة الغير المغمورة بالماء (ط = $\frac{22}{7}$) ؟

(١٦) مكعب حجمه ٥٩٣١٩ سم^٣ فما طول حرفه ؟

(١٧) إذا كان حجم حوض مكعب الشكل $\frac{22}{7}$ ٢٣٤٥ بوصة مكعبة فأوجد مساحة قاعدته (٣١ = ٢٩٧٩١) .

(١٨) إذا كان حجم المكعب ١١٠٥٩٢ سم^٣ فأوجد مجموع مساحات أوجهه .

(١٩) حوض مكعب الشكل يسع مازنته ٤٢٧ و ٨٣٦٥ كيلو جراماً من الماء أوجد ارتفاع الجدر من الداخل .

(٢٠) ثلاثة مكعبات من المعدن مساحة أحد أوجه الأول ١٤٤ سم^٢ ومساحة أحد أوجه الثاني ٢٥٦ سم^٢ ومساحة أحد أوجه الثالث ٤٠٠ سم^٢ فإذا أذيت هذه المكعبات الثلاثة وصنع من مادتها مكعب واحد فأوجد مساحة أحد أوجه المكعب الجديد .

(٢١) بيع ثلث ما بمخزن من القمح بسعر الإردب ١٦٠ قرشاً ، وبيع النصف بسعر الإردب ١٥٠ قرشاً والباقي بسعر الإردب ١٣٩ قرشاً . فبلغ الثمن كله ١١٣٦ و ٣٥ جنيهاً . فما أبعاد هذا المخزن إذا علم أنها تتناسب مع الأعداد ١٢ ٦ ١١ ٦ ٩ (الإردب = ١٩٨ لتراً) .

(٢٢) حجرة تسع ٤٣٩٤ قدما مكعبة من الهواء . فإذا كان طولها ضعف عرضها وعرضها يساوى ارتفاعها فأوجد نفقات فرش أرضية الحجرة ببساط ثمن الyarde المربعة منه $\frac{1}{4}$ من الشلنات .

(٢٣) كرة حجمها ٣٨٨٠٨ سم^٣ . فما نصف قطرها (ط = $\frac{22}{7}$) .

(٢٤) كرة جوفاء مصنوعة من النحاس وزنها ٣٩٥٦ و ٤ من الأوقيات ، ونصف قطرها الخارجى ٦ بوصات . فما سمكها إذا علم أن زنة البوصة المسكبة من هذا النحاس ٥ أوقيات (ط = ٣ و ١٤) ؟

الباب الخامس

المتوسط الحسابي

٤٦ — إذا قيل لنا إن تاجراً باع في خمسة أيام متوالية بالمبالغ الآتية :

٢٢٠ ٦ ٣٥٠ ٦ ٤٨٤ ٦ ١١٦ ٦ ٢٠٠ من القروش بالترتيب ، فإن

مجموع ما يكون قد باع به في الخمسة الأيام هو :

$$٢٢٠ + ٣٥٠ + ٤٨٤ + ١١٦ + ٢٠٠ = ١٣٧٠ \text{ قرشاً .}$$

ويقال إن المتوسط الحسابي لما باع به في اليوم الواحد من تلك الأيام

$$\text{الخمسة هو } \frac{١٣٧٠}{٥} = ٢٧٤ \text{ قرشاً .}$$

٤٧ — تعريف : أى أن المتوسط الحسابي لعدة مقادير من نوع واحد هو خارج

قسمة مجموع تلك المقادير على عددها . وعلى ذلك فمجموع تلك المقادير

يساوى حاصل ضرب عددها في المتوسط الحسابي لها .

٤٨ — كثيراً ما يستعمل المتوسط الحسابي (ويطلق عليه لفظ « متوسط » فقط

للاختصار) في الإحصائيات والمشاهدات العملية كعرفة متوسط محصول

القدان الواحد من القطن في قطعة أرض أو متوسط درجات الحرارة

في مدة معينة أو متوسط مواليد أو وفيات مدينة معينة أو متوسط أعمار

التلاميذ في فصل ما .. الخ كما سيتضح من الأمثلة الآتية :

(مثال ١) بلغت درجة الحرارة عند الظهر في القاهرة في أربعة أيام متتالية

$$٢١,٧ ٦ ٢٤,٨ ٦ ٢٦,٧ ٦ ٢٧,٢ \text{ من الدرجات المئوية .}$$

أوجد متوسط درجة الحرارة في القاهرة عند الظهر في هذه الأيام الأربعة .

العمل

مجموع درجات الحرارة :

$$= ٢١,٧ + ٢٤,٨ + ٢٦,٧ + ٢٧,٢ \text{ من الدرجات المئوية}$$

$$= ١٠٠,٤ \text{ من الدرجات المئوية.}$$

$$\text{متوسط درجة الحرارة} = \frac{١٠٠,٤}{٤} = ٢٥,١ \text{ من الدرجات المئوية.}$$

(مثال ٢٦) في يوم ٢ يناير سنة ١٩٣٠ بين بارومتر مرصد حلوان أن الضغط الجوي في الساعة السادسة صباحاً كان ٧٥٦,٧ من المليمترات وفي الظهر كان ٧٥٦,١ من المليمترات وفي الساعة السادسة مساءً كان ٧٥٤,١ من المليمترات وفي نصف الليل ٧٥٤,٣ من المليمترات فمتوسط الضغط الجوي بالمليمترات في ذلك اليوم حسب هذه المقاييس الأربعة ؟

العمل

يلاحظ أن المئات والعشرات في كل من هذه الأعداد متحدة ، وعلى ذلك فلا داعي لإيجاد المتوسط الحسابي بوجودها ويقتصر على إيجاد المتوسط الحسابي للجزء غير المشترك وهما الآحاد وال خانة العشرية الأولى

$$\text{ويكون المتوسط} = ٧٥٠ + \frac{٦٩٧ + ٦٩١ + ٤٩١ + ٤٩٣}{٤} \text{ من المليمترات}$$

$$= ٧٥٠ + \frac{٢١٧٢}{٤}$$

$$= ٧٥٠ + ٥٤٣$$

$$= ٧٥٥,٣$$

(مثال ٣) متوسط عشرة أعداد ٢٠ ومتوسط السبعة الأعداد الأولى منها ١٧
فما متوسط الثلاثة الأعداد الأخيرة ؟

العمل

$$\text{مجموع العشرة أعداد} = 10 \times 20 = 200$$

$$\text{» السبعة أعداد الأولى} = 7 \times 17 = 119$$

$$\text{» الثلاثة أعداد الأخيرة} = 200 - 119 = 81$$

$$\text{متوسط الأعداد الثلاثة الأخيرة} = 81 \div 3 = 27$$

(مثال ٤) متوسط درجة الحرارة في ١٥ يوماً من شهر ما ٣٠ درجة ومتوسط

درجة الحرارة في العشرة الأيام الأولى منها ٣٢ درجة ومتوسط درجة

الحرارة في الثمانية الأيام الأخيرة منها ٢٦ درجة . فإذا كانت درجة

حرارة اليوم الثامن $\frac{2}{5}$ درجة حرارة اليوم التاسع ودرجة حرارة اليوم

التاسع تساوى درجة حرارة اليوم العاشر ، فما درجة الحرارة في كل

من الأيام الثامن والتاسع والعاشر ؟

العمل

$$\text{مجموع درجات الحرارة في ١٥ يوماً} = 10 \times 30 = 300 \text{ درجة (١)}$$

$$\text{» » » » } 10 \text{ أيام الأولى} = 10 \times 32 = 320 \text{ » (٢)}$$

$$\text{» » » » } ٨ \text{ أيام الأخيرة} = ٨ \times ٢٦ = ٢٠٨ \text{ » (٣)}$$

من (٢) 6 (٣) يكون مجموع درجات الحرارة في الخمسة عشر يوماً كلها مضافاً

إليها درجات الحرارة في اليوم الثامن والتاسع والعاشر المتكررة

$$= 320 + 208 = 528 \text{ درجة}$$

مجموع درجات الحرارة في اليوم الثامن والتاسع والعاشر $= 528 - 300 = 228$ درجة

النسبة بين درجات الحرارة في اليوم الثامن والتاسع والعاشر $= 3 : 5 : 5$

$$\therefore \text{درجة الحرارة في اليوم الثامن} = \frac{3 \times 228}{13} = 18 \text{ درجة}$$

$$\therefore \text{درجة الحرارة في كل من التاسع والعاشر} = \frac{5}{13} \times 228 = 30 \text{ درجة}$$

(مثال ٥) ما ثمن اللتر الواحد من مزيج مكون من ٢٥٠ لتراً من شراب ثمن اللتر منه ٣٦ ملياً و ٤٠٠ لتر من نوع آخر منه ثمن اللتر منه ٤٥ ملياً و ١٠٠ لتر من نوع ثالث منه ثمن اللتر منه ٣٠ ملياً ؟

العمل

$$\therefore \text{ثمن الصنف الأول} = ٢٥٠ \times ٣٦ = ٩٠٠٠ \text{ ملياً}$$

$$» \text{ثمن النصف الثاني} = ٤٠٠ \times ٤٥ = ١٨٠٠٠$$

$$» \text{ثمن النصف الثالث} = ١٠٠ \times ٣٠ = ٣٠٠٠$$

$$\therefore \text{ثمن المزيج وقدره ٧٥٠ لتراً (بالجمع)} = ٣٠٠٠٠$$

$$\therefore \text{ثمن اللتر الواحد} = ٧٥٠ \div ٣٠٠٠٠ = ٤٠ \text{ ملياً}$$

(مثال ٦) مدرسة ابتدائية بها ٨٠ تلميذاً بالسنة الأولى و ٧٠ تلميذاً بالسنة

الثانية و ٦٠ تلميذاً بالسنة الثالثة و ٤٦ تلميذاً بالسنة الرابعة فإذا نجح

منهم في الامتحان النهائي $\frac{٢}{٣}$ ٧٣٪ من تلاميذ السنة الأولى و ٨٠٪

من تلاميذ السنة الثانية و ٥٥٪ من تلاميذ السنة الثالثة و ٩١ $\frac{١٥}{٣٣}$ ٪

من تلاميذ السنة الرابعة ، فما هي نسبة النجاح في الفرق الأربع ؟

العمل

$$\text{عدد الناجحين في السنة الأولى} = \frac{٧٣ \frac{٢}{٣} \times ٨٠}{١٠٠} = \frac{٢٩٥ \times ٨٠}{١٠٠ \times ٤} = ٥٩ \text{ تلميذاً}$$

$$» \text{الثانية} = \frac{٨٠}{١٠٠} \times ٧٠ = ٥٦$$

$$» \text{الثالثة} = \frac{٥٥}{١٠٠} \times ٦٠ = ٣٣$$

$$» \text{الرابعة} = \frac{٩١ \frac{١٥}{٣٣} \times ٤٦}{٢٣ \times ١٠٠} = ٤٤$$

$$\text{جملة الناجحين} = ٥٩ + ٥٦ + ٣٣ + ٤٤ = ١٩٢$$

$$\text{النسبة المئوية في الفصول} = \frac{١٩٢}{٢٥٦} \times ١٠٠ = ٧٥$$

أي أن الناجحين ٧٥ ٪ من تلاميذ المدرسة

ملاحظة : يلاحظ أن النسبة التي حصلنا عليها لا تساوى متوسط النسب
المثوية للنجاح في السنوات الأربع . وذلك لأن أعداد التلاميذ
في هذه السنوات ليست متساوية .

تمرين ١٨

(١) دخل تاجر في أربعة أيام متوالية هو :

شطن جنيه	بنس شطن جنيه	بنس شطن جنيه	بنس شطن جنيه	شطن جنيه
٦	٧	٤	٦	١٠

أوجد متوسط دخله في اليوم .

(٢) ستة إخوة أعمارهم ٩ ١٧ ٦ ٢ ١٣ ٦ ١١ ٨ ٦ ١٠ ٦ ٥ ٧
شهر سنة

٧ ٤ فما متوسط أعمارهم ؟

(٣) متوسط ١٠ أعداد ١٥ ومتوسط السبعة أعداد الأولى منها ١٢ ، فما متوسط
الثلاثة أعداد الأخيرة ؟

(٤) بلغ متوسط إيراد رجل في ١٢ يوماً ١٧ جنياً ومتوسط إيراده في الأربعة
الأيام الأولى ١٥ جنياً ومتوسط إيراده في السبعة الأيام الأخيرة ١٩ جنياً
فما إيراده في اليوم الخامس ؟

(٥) استغرق قطار في قطع مسافة طولها ٥٤٩ ميلاً مدة ١٠ ساعات و ١٠ دقائق
ووقف في أثناء هذه الفترة مدة ١٥ دقيقة بإحدى المحطات و ٩ دقائق
بمحطة أخرى و ٥ دقائق في كل من ٦ محطات أخريات ودقيقتين في كل
من ٨ محطات ، فما متوسط سرعته في المدة كلها وما متوسط سرعته في
المدة التي سارها فعلاً ؟

(٦) متوسط ثلاثة أعداد ٥٥ ومتوسط الأول والثاني ٤٠ ومتوسط الأول
والثالث ٦٠ ، فما متوسط الثاني والثالث ؟

(٧) تاجر بلغ متوسط مكسبه في كل يوم من الخمسة عشر يوماً الأولى من شهر يناير ٤٨٠ قرشاً وفي كل يوم من الخمسة عشر يوماً الأخيرة منه ٣٦٠ قرشاً ومتوسط مكسبه في كل يوم من أيام الشهر كله ٤٠٠ قرش ، فهل كسب أو خسر في اليوم السادس عشر من هذا الشهر وما مقدار ذلك ؟

(٨) توظف ٣٢ شخصاً فكان متوسط عمر ثلاثة منهم ٢٠ سنة ومتوسط عمر أربعة غيرهم ٢١ سنة ومتوسط عمر اثني عشر غير هؤلاء ٢٢ سنة ومتوسط عمر ١٢ آخرين ٢٣ سنة وعمر الشخص الباقي ٢٤ سنة ، فما متوسط عمر الشخص الواحد من الذين توظفوا جميعاً ؟

شهر سنة

(٩) فصل به ٢١ تلميذاً متوسط أعمارهم ٨ ١٦ ومتوسط أعمار الأحد عشر

شهر سنة

تلميذاً الأول ١٦ سنة ومتوسط أعمار الأحد عشر تلميذاً الآخرين ٢ ١٧

فما عمر التلميذ الحادي عشر ؟

(١٠) متوسط درجة الحرارة في المدة من يوم ٩ إلى يوم ١٥ من شهر ما (بما في ذلك

هذان اليومان) ٣٦ و ٦ درجة ومتوسطها من يوم ١٠ إلى يوم ١٦ من الشهر

نفسه ٣٥ و ٩ درجة . فإذا كانت درجة الحرارة يوم ٩ هي ٢٠ و ٥ ° ، فما درجة

الحرارة يوم ١٦ من هذا الشهر ؟

(١١) كان متوسط درجة الحرارة في أيام الاثنين والثلاثاء والأربعاء من أسبوع ما

٢٦ و ٥ درجة وكان متوسطها في أيام الثلاثاء والأربعاء والخميس ٢٧ درجة

فإذا كانت درجة الحرارة في يوم الخميس ٣٠ درجة ، فما هي درجة حرارة

كل يوم من الأيام الباقية إذا علم أن درجة حرارة يوم الثلاثاء $\frac{15}{11}$ من درجة

حرارة يوم الاثنين ؟

(١٢) متوسط درجات تلميذ في ١٠ علوم ١٦ و ٤ ومتوسط الستة علوم الأولى

منها $16\frac{1}{4}$ ومتوسط الخمسة علوم الأخيرة ١٦ و ٢ ودرجة العلم الخامس $\frac{11}{4}$

من درجة العلم السادس ، فما متوسط الأربعة علوم الأولى على حدها ؟

(١٣) أربعة أعداد متوسط الأول والثاني والثالث منها ١٩ ومتوسط الثاني والثالث والرابع ٣٣ ومتوسط الثالث والرابع والأول ٢٨ ومتوسط الرابع والأول والثاني ٣١ ، فما هي الأعداد الأربعة وما متوسطها ؟

(١٤) متوسط ستة أعداد ٣٠ ومتوسط الأربعة أعداد الأولى منها ٢٥ ومتوسط الثلاثة الأخيرة ٣٢ فما متوسط الثاني والرابع والسادس إذا علم أن النسبة بينهما كنسبة ٢ : ١ : ٣ ؟

(١٥) مجموع درجات تلاميذ فصلين بمدرسة ما ٨٤٠٠ درجة ومتوسط درجات التلميذ بالفصل الأول ١٨٠ درجة وبالفصل الثاني ١٦٠ درجة ، فما عدد تلاميذ كل فصل إذا كانت نسبة عدد تلاميذ الفصل الأول إلى عدد تلاميذ الفصل الثاني كنسبة ٢ : ٣ ؟

(١٦) اشترى رجل ٣٠ رطلا من الشاي بسعر الرطل ٢٠ قرشاً و ٥٠ رطلا من نوع آخر بسعر الرطل ٢٤ قرشاً ثم خلط النوعين معاً فبكم يبيع الرطل من الخليط كي يكسب ٢٠ ٪ ؟

(١٧) خلط تاجر ثلاثة أنواع من البن وكانت النسبة بين ما أخذه من النوع الأول وما أخذه من النوع الثاني وما أخذه من النوع الثالث هي ٥ : ٢ : ٣ فإذا كان ثمن الرطل من كل منها هو ٤ و ٥ و ٦ من القروش على الترتيب ، فما ثمن تكاليف الرطل من الخليط وما الثمن الذي يبيعه به لكي يكسب ٢٥ ٪ ؟

(١٨) اشترى بدال مقداراً من الشاي بسعر الرطل ٢٠ قرشاً ثم اشترى نصف هذا المقدار من نوع آخر بسعر الرطل ٣٠ قرشاً ثم مقداراً ثالثاً يعادل مجموع ما اشتراه من النوعين الأولين بسعر الرطل ٢٠ قرشاً . فإذا خلط الثلاثة المقادير معاً فبكم يبيع الرطل من الخليط كي يكسب ٢٠ ٪ ؟

(١٩) إذا خلطت كميّتان متساويتان من الشاي من نوعين مختلفين ثمن الأوقية من الأول قرشان ومن الثاني $١\frac{٢}{٣}$ من القروش وبيعت الأوقية من الخليط

بسر $2\frac{1}{2}$ من القروش فكان المكسب الكلى ٣ جنيهات مصرية ، فكم رطلا بيعت ؟

(٢٠) صهرت ثلاثة معادن أوزانها على الترتيب ٢٠١ ١٠٦ ١٠٦ و١٥ من الباوندات وعملت منها سبيكة لم يتغير حجمها ولا وزنها عن مجموع أحجام وأوزان القطع الأصلية . فإذا علم أن القدم المكعبة تزن من كل منها على الترتيب ١٢٠ و ٦٦ و ٦٣ و ٤٦ و ٢٣ من الباوندات ، فما وزن القدم المكعبة من من السبيكة الجديدة ؟

(٢١) أودع رجل ٤٠٠ جنيه في مصرف بسعر ٥٪ في السنة وأودع ٥٠٠ جنيه في مصرف آخر بسعر $3\frac{1}{2}$ ٪ أوجد السعر الذى إذا وضع به المبلغين معاً لحصل على نفس الربح السنوى الذى كان يحصل عليه في الحالة الأولى .

(٢٢) بلغ عدد المتقدمين لامتحان الشهادة الابتدائية في السنوات ١٩٣١ و ١٩٣٢ و ١٩٣٣ و ١٩٣٤ و ١٩٣٥ و ١٩٣٦ على الترتيب ١٤١٤٧ تلميذاً و ١٣٦٥٩ تلميذاً و ١٤٥٠٣ تلميذاً و ١٣١٧٦ تلميذاً و ١٤٥٢٩ تلميذاً و ١٣٤١٥ تلميذاً . وكانت نسبة عدد الناجحين في الدور الأول ٥٢ و ٤٪ و ٤٦ و ١٪ و ٦٥ و ٧٪ و ٤٤ و ٦٪ و ٦٢ و ٨٪ و ٧١ و ٥٪ على الترتيب أوجد النسبة المئوية للناجحين في السنوات الست .

(٢٣) تقدم لامتحان شهادة الدراسة الثانوية قسم ثان ٢٨٩٣ تلميذاً و ٣٤٩٤ تلميذاً و ٤٩٩٠ تلميذاً و ٤١٣٦ تلميذاً و ٥١٢٩ تلميذاً و ٥٢١٢ تلميذاً في السنوات ١٩٣١ و ١٩٣٢ و ١٩٣٣ و ١٩٣٤ و ١٩٣٥ و ١٩٣٦ على الترتيب وكانت النسبة لعدد الناجحين في الدور الأول ٤١ و ٤١٪ و ٤٠ و ٤٢٪ و ٤١ و ٤١٪ و ٤٢ و ٤٣٪ و ٤٢ و ٤٣٪ على الترتيب أوجد النسبة المئوية للناجحين في السنوات الست ؟

٤٩ — من الأمثلة السابقة يلاحظ الطالب أن المتوسط الحسابي لجملة أعداد

يزيد على بعض الأعداد وينقص عن بعضها الآخر (وقد يساوى بعضها)

فمثلا المتوسط الحسابي للأعداد ١ ٢ ٦ ٨ ٩ ٦ يساوى $\frac{١+٢+٦+٨+٩+٦}{٦} = ٥$

وهذا المتوسط يزيد على كل من ١ ٢ ٦ وينقص عن كل من ٨ ٩ ٦

ويلاحظ أن مجموع الأعداد ١ ٢ ٦ ٨ ٩ ٦ $= ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥ + ٥$

ومعنى هذا أن مجموع الأربعة الأعداد المفروضة = مجموع أربعة أعداد متساوية

كل منها يساوى المتوسط وهذا لا يكون إلا إذا كان مجموع مايزيده المتوسط عن

الأعداد التى تكون أقل منه يساوى بالضبط مجموع ماينقصه المتوسط عن الأعداد

التي تكون أكبر منه كي تعوض الزيادة النقص

وترى هنا مجموع زيادات المتوسط عن الأعداد التى أقل منه

$$(٢ - ٥) + (١ - ٥) =$$

$$٣ + ٤ =$$

$$٧ =$$

وترى نقص المتوسط عن الأعداد التى هى أكبر منه

$$(٥ - ٩) + (٥ - ٨) =$$

$$٤ + ٣ =$$

$$٧ =$$

مثال آخر : متوسط الأعداد ١ ٢ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٤ هو $\frac{١+٢+٦+٧+٨+٩+١٤}{٧} = ٥$

$$٧ = \frac{٣٥}{٥} =$$

ومجموع زيادات هذا المتوسط عن الأعداد الأقل منه

$$٨ = (٥ - ٧) + (١ - ٧) =$$

ومجموع نقص المتوسط عن الأعداد الأكبر منه

$$٨ = (٧ - ١٤) + (٧ - ٨) =$$

والمجموعتان متساويتان . ويلاحظ أن أحد الأعداد وهو ٧ يساوى المتوسط تماماً وهذه الخلاصة تساعدنا في حل كثير من المسائل كما في الأمثلة الآتية :
(مثال ٥) اشترى تاجر عدداً من الساعات . عشرون منها بسعر الواحدة ١٥٠ قرشاً والباقي بسعر الواحدة ١٨٠ قرشاً ووجد أن متوسط ثمن الساعة في الكمية التي اشتراها كلها يساوى ١٦٠ قرشاً ، فما عدد الساعات التي اشتراها ؟

العمل

نقص ثمن الساعة من العشرين ساعة عن المتوسط $10 = 150 - 160$
النقص الناشئ في العشرين ساعة كلها $200 = 20 \times 10 =$
زيادة ثمن الساعة الواحدة في الباقي عن المتوسط $20 = 160 - 180$
وبما أن النقص الكلى يجب أن يساوى الزيادة الكلية
∴ عدد الساعات الباقية $= \frac{200}{20} = 10$ ساعات
∴ عدد الساعات التي اشتراها كلها $= 10 + 20 = 30$ ساعة

(مثال ٢) مشى رجل فقطع في الدقيقة الأولى من تحركه ٥ أمتار وفي الدقيقة الثانية ٧ أمتار وفي الثالثة ٩ أمتار وفي الرابعة ١١ متراً وفي الخامسة ١٣ متراً وفي السادسة ١٥ متراً ثم استمر يقطع في كل دقيقة تالية ١٥ متراً مدة أخرى من الزمن ، فإذا علم أن متوسط ما قطعه في الدقيقة مدة تحركه كلها ١٢ متراً فأوجد المدة التي سار فيها بسرعه الأخيرة

العمل

نقص ما قطعه في الدقيقة الأولى عن المتوسط $12 = 5 - 12 = 7$ أمتار
» » » » $12 = 7 - 12 = 5$ أمتار
» » » » $12 = 9 - 12 = 3$ أمتار
» » » » $12 = 11 - 12 = 1$ متر

النقص الكلى $= ٧ + ٥ + ٣ + ١ = ١٦$ متراً .

زيادة ما سار به في الدقيقة الخامسة عن المتوسط $= ١٣ - ١٢ = ١$ متر

زيادة ما سار به في كل دقيقة من المدة الباقية $= ١٥ - ١٢ = ٣$ أمتار

∴. النقص الكلى يجب أن يساوى الزيادة الكلية .

∴. $١٦ = ١ +$ الزيادة في المدة المطلوبة .

∴. $١٥ =$ الزيادة في المدة المطلوبة .

∴. الزيادة في الدقيقة الواحدة ٣ أمتار .

∴. عدد الدقائق $= ١٥ \div ٣ = ٥$ دقائق .

(مثال ٧) عشرون عاملاً بعضهم من الرجال والبعض الآخر من الأولاد يأخذون

أجراً قدره ١٤٤ قرشاً في اليوم ، فإذا علم أن أجرة الرجل في اليوم

١٠ قروش وأجرة الولد ٣ قروش . فما عدد كل من الرجال والأولاد؟

العمل

متوسط أجرة العامل في اليوم $= \frac{١٤٤}{٢} = ٧٢$ من القروش

» » زيادة أجرة الرجل على المتوسط $= ٧٢ - ١٠ = ٦٢$ »

» » نقص أجرة الولد عن المتوسط $= ٧٢ - ٣ = ٦٩$ »

∴. الزيادة الكلية يجب أن تساوى النقص الكلى .

∴. $٦٩ \times$ عدد الرجال $= ٦٢ \times$ عدد الأولاد .

∴. $\frac{٦٩}{٦٢} = \frac{\text{عدد الرجال}}{\text{عدد الأولاد}}$

$\frac{٢}{٣} =$

∴. عدد الرجال $= \frac{٢}{٣} \times ٦٩ = ١٢$ رجلاً

وعدد الأولاد $= \frac{٢}{٣} \times ٦٩ = ٨$ أولاد

(مثال ٨) مزج رجل نوعين من شراب ثمن اللتر من النوع الأول ٣٠ مليا .
و ثمن اللتر من النوع الثانى ٤٢ مليا وكان ثمن اللتر من المزيج ٣٧ مليا
فما النسبة التى تكون بها هذا المزيج ؟

العمل

∴ مكسب الرجل فى المتر من النوع الأول $= 37 - 30 = 7$ مليات
و خسارته فى اللتر من النوع الثانى $= 42 - 37 = 5$
فلكى تكون الخسارة الكلية معادلة للمكسب الكلى يجب أن يأخذ
من النوع الأول ٥ لترات لكل سبع لترات يأخذها من الثانى .

تمرين ١٩

(١) جيش مكون من ١٢٠٠٠ جندى بعضهم من المصريين والباقي من السودانيين
فإذا كان متوسط طول السودانى ٥ أقدام ١٢ و بوصة ومتوسط طول
المصرى ٥ أقدام ١٠ و بوصات ومتوسط طول العسكرى فى الجيش كله
٥ أقدام ١٠ و $\frac{3}{4}$ بوصة فما عدد كل من المصريين والسودانيين ؟

(٢) اشترى تاجر نوعين من السكر الأول مقداره ٦٠ أقة بسعر الأقة ٣٠ مليا
واشترى الثانى بسعر الأقة ٢٧ و ٥ مليا فوجد أن متوسط ثمن الأقة من الكمية
كلها ٢٩ مليا . فما عدد الأفاق التى اشتراها كلها ؟

(٣) متوسط درجات التلاميذ فى فصل ما فى أحد الامتحانات ١٨٠ درجة
ولوغاب عن الامتحان السبعة التلاميذ الآخرين الذين متوسط درجاتهم
١٥٠ لأصبح متوسط درجات كل واحد من الباقين ١٩٠ درجة ،
فما عدد تلاميذ هذا الفصل ؟

(٤) وضع رجل مبلغ ٢٤٠٠ جنيه فى مصرف بسعر ٥ ٪ فى السنة ووضع مبلغاً
آخر فى مصرف آخر بسعر ٤ ٪ فى السنة فوجد أنه قد حصل على ربح منهما

يعادل الربح السنوى الذى يحصل عليه لو وضع البالغين معاً بسعر $\frac{4}{7}$ %
فى السنة ، أوجد مبلغه الكلى .

(٥) جيش مكون من ١٣٦٠٠ رجل بعضهم من السود والبعض الآخر من البيض
فإذا كان متوسط قامة الرجل من السود ٥ أقدام ٦ ٧٤ و ١٠ بوصة
ومتوسط قامة الرجل من البيض ٥ أقدام ٦ ٨٨ و ٩ بوصة ومتوسط قامة
الرجل فى الجيش كله ٥ أقدام ٦ ١٢ و ١٠ بوصة فما عدد الرجال البيض
فى الجيش ؟

(٦) صندوق به عدد من الساعات متوسط ثمن كل ساعة ٧٥ قرشاً ولما وضع
فيه ٤ ساعات أخرى ثمنها ٤٥ ٦ ٨٠ و ٥٥ ٦ ٦٠ قرشاً نزل متوسط ثمن
الساعة إلى ٧٢ قرشاً ، فكم ساعة أصبحت فى الصندوق ؟

(٧) كيس من النقود يحتوى على ١٠٠ قطعة من نوعين مختلفين من النقود
قيمتها كلها ١١٠٠ قرش ، فإذا علم أن النوعين المذكورين هما الريال
والقطعة ذات الخمسة قروش ، فما عدد قطع كل نوع ؟

(٨) فصلان أ و ب فى مدرسة ما متوسط عمر التلميذ فى أ : $1\frac{2}{5}$ سنة
ومتوسط عمر التلميذ فى الفصل ب : $1\frac{1}{4}$ سنة ، انتقل خمسة تلاميذ
متوسط عمرهم ١٢ سنة من الفصل ب إلى الفصل أ فأصبح بذلك متوسط
عمر التلميذ فى الفصل أ : $1\frac{1}{4}$ سنة ومتوسط عمره فى الفصل ب : $1\frac{1}{4}$ سنة
فما عدد تلاميذ كل فصل على حدة ؟

(٩) مدرسة بها ٥ فصول بالسنة الأولى متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٣٢ تلميذاً
و ٤ فصول بالسنة الثانية متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٣٥ تلميذاً
و ٤ فصول بالسنة الثالثة متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٢٠ تلميذاً
و ٥ فصول بالسنة الرابعة متوسط عدد تلاميذ كل فصل ٣٦ تلميذاً فما عدد
فصول السنة الخامسة إذا علم أن متوسط عدد تلاميذ الفصل فيها ٢٥ تلميذاً
وأن متوسط عدد تلاميذ الفصل بالمدرسة كلها ٣٠ تلميذاً ؟

(١٠) قطع رجل في كل من الخمس دقائق الأولى من تحركه ١٢ متراً ثم أخذت سرعته تزداد ١٢ متراً في الدقيقة عن التي قبلها لمدة ٥ دقائق ثم بقيت سرعته ثابتة كما هي في الدقيقة العاشرة من تحركه وبعد مدة من الزمن وجد أن متوسط ما قطعه في الدقيقة في المدة كلها $١٨\frac{1}{4}$ متراً . فما الزمن الذي استغرقه في السير بسرعته الأخيرة ؟

شهر سنة

(١١) متوسط أعمار تلاميذ أحد الفصول ١٠ ١٦ ولما استجد في هذا الفصل

شهر سنة شهر سنة شهر سنة

٣ تلاميذ أعمارهم ٥ ١٦ ٢٦ ١٥ ١١ ١٤ أصبح متوسط أعمار التلاميذ

شهر سنة

في الفصل ٨ ١٦ فما عدد تلاميذ هذا الفصل قبل التحاق المستجدين ؟

(١٢) ٧ عمال يشتغلون في عمل معين وتدفع أجرتهم باعتبار $٢\frac{1}{4}$ قرش في كل

ساعة يشتغلها الرجل الواحد فإذا بلغت أجرتهم في ٤٨ أسبوعاً ٣٤٨ جنيهاً

وكان متوسط ما اشتغله كل من اثنين فيهم ٤٤ ساعة في الأسبوع ومتوسط

ما اشتغله كل من اثنين آخرين ٣٨ ساعة في الأسبوع ، فما متوسط عدد

الساعات التي اشتغلها كل من الثلاثة الرجال الباقين في الأسبوع ؟

(١٣) دخل موظف الخدمة عند ما بلغت سنه ٢١ عاماً وأخذ يتناول مرتباً سنوياً

قدره ١٨٠ جنيهاً لمدة ٥ سنوات ثم أخذ راتبه يزداد ٢٤ جنيهاً مصرياً

كل سنتين لمدة الـ ١٠ سنوات التالية ثم بقي بعد ذلك ثابتاً لم يتغير لمدة

معينة ترك بعدها الخدمة فوجد أن متوسط ماهيته مدة توظيفه كلها

٢٤٦ جنيهاً سنوياً فكم عمره عند ما ترك الخدمة ؟

(١٤) خلط تاجر ١٢ رطلاً من الشيكوريا ثمن الرطل منها قرشان مع مقدار من

البن ثمن الرطل منه ٨ قروش أوجد مقدار البن إذا علم أن ثمن الرطل من

المخلوط ٦ قروش .

(١٥) لدى تاجر ١٨٠ إردباً من القمح الذي ثمن الإردب منه ١٦٢ قرشاً فكم إردباً من الذي ثمنه ١٢٩ قرشاً يضيفها إلى ما عنده حتى إذا باع الإردب من الخليط بمبلغ ١٦٨ قرشاً يكسب $\frac{162}{168} \%$ ؟

(١٦) اشترى رجل ٤٠ أقة من السكر بمبلغ ١٠٦ من القروش بعضها بسعر الأقة ٣ قروش والبعض الآخر بسعر الأقة ٢٥ ملياً فما عدد أقق كل نوع ؟

(١٧) عمل تاج وزنه $\frac{1}{4}$ ٦٤ من الأوقيات من خليط من الذهب والفضة ووجد أن حجم هذا التاج بوساطة الماء الذي يزيغه ٨٠٥ من البوصات المكعبة فإذا كانت البوصة المكعبة من الذهب تزن ١٠ و ٢٥ من الأوقيات والبوصة المكعبة من الفضة تزن ٥ و ٧٥ من الأوقيات فما مقدار كل من الذهب والفضة في هذا التاج ؟

(١٨) اشترى تاجر مقداراً من القطن ربهه بسعر القنطار ٣٠٠ قرش وثلاثة بسعر القنطار ٤٠٠ قرش وخمسه بسعر القنطار ٢٠٠ قرش والباقي دفع ثمنه ٤٨ جنيهاً مصرياً . فإذا كان متوسط ثمن القنطار في الكمية كلها ٣٠٢ و ٥٠ قرش فكم قنطاراً اشترى ؟

٥٠ - مسائل على التقسيم التناسبي*

١ - المطلوب تقسيم ١٠٥٠ جنيه بين ٦ أ ب بحيث يكون نصف نصيب أ معادلاً $\frac{2}{3}$ نصيب ب

العمل

$$\therefore \text{نصف نصيب أ يعادل } \frac{2}{3} \text{ نصيب ب}$$

$$\therefore \text{نصيب أ} = \frac{4}{3} \text{ نصيب ب}$$

$$\therefore \text{النسبة بين نصيبى أ ب} = ٤ : ٣$$

$$\therefore \text{نصيب أ} = \frac{4}{7} \times ١٠٥٠ = ٦٠٠ \text{ جنيهات}$$

$$\text{نصيب ب} = \frac{3}{7} \times ١٠٥٠ = ٤٥٠ \text{ جنيه}$$

٢ - يراد تقسيم مبلغ ٢٨٥ جنيهًا بين ٦ أ ب ٦ ح بحيث يأخذ أ $\frac{9}{19}$ ما يأخذ ب ٦ ح معًا أو يأخذ $\frac{7}{8}$ ما يأخذ ب ٦ ح معًا ، فكم يكون نصيب كل منهم؟

العمل

$$\therefore \text{أ يأخذ } \frac{9}{19} \text{ من نصيبى ب ٦ ح معًا فهو يأخذ } \frac{9}{19} \text{ من مجموع الأنصبة}$$

$$\text{أى } \frac{9}{19} \times ٢٨٥ = ١٣٥ \text{ جنيهًا}$$

$$\therefore \text{ب يأخذ } \frac{7}{8} \text{ مجموع نصيبى أ ب ٦ ح فهو يأخذ } \frac{7}{15} \text{ من مجموع الأنصبة}$$

$$\text{أى } \frac{7}{15} \times ٢٨٥ = ١٣٣ \text{ جنيهًا}$$

$$\therefore \text{نصيب ح} = ٢٨٥ - ١٣٥ - ١٣٣ = ١٨ \text{ جنيهًا}$$

٣ - $\frac{2}{3}$ تركة قسم بين أخ وأخت بنسبة ٩ : ٧ فكان نصيب الأخ يزيد

على نصيب الأخت بمقدار $١٧٢٨ \frac{8}{15}$ جنيهًا أوجد $\frac{9}{11}$ من هذه التركة

* يحسن تدريب التلاميذ على حل بعض هذه التمارين كإعادة لمقرر المدارس الابتدائية من جهة وكتحضير لمسائل الشركات من جهة أخرى .

العمل

$$\text{نصيب الأخ} = \frac{9}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{8} \text{ التركة كلها}$$

$$\text{نصيب الأخت} = \frac{7}{16} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{24} \text{ التركة كلها}$$

$$\text{نصيب الأخ يزيد على نصيب الأخت بمقدار } \frac{2}{8} - \frac{7}{24} = \frac{1}{12} \text{ من التركة كلها}$$

وهذا يعادل $1728 \frac{8}{10}$ جنيهاً

$$\therefore \text{التركة كلها} = 1728 \frac{8}{10} \times \frac{12}{1} \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \frac{9}{16} \text{ من التركة} = 1728 \frac{8}{10} \times \frac{9}{16} \times 12 \text{ جنيهاً}$$

$$= 6482 \text{ جنيهاً.}$$

٤ — بدأت أم وطفلاها في رحلة طويلة . وكان مجموع أعمارهم في اليوم الذي بدأوا فيه الرحيل ٣٥ سنة والنسبة بين أعمارهم ٣٥٦ : ٣٩ : ٢٥ وفي يوم وصولهم كانت النسبة بين عمرى الأم والولد الأكبر ٧٢٨ : ٩٤ أوجد المدة التي استغرقتها الرحلة :

العمل

في بدء الرحيل كانت النسبة بين أعمارهم ٣٥٦ : ٣٩ : ٢٥

$$\therefore \text{مجموع أعمارهم } ٣٥ \text{ سنة يكون عمر الأم} = \frac{356 \times 35}{420} = 29 \frac{2}{3} \text{ سنة}$$

$$6 \text{ عمر الولد الأكبر} = \frac{39 \times 35}{420} = 3 \frac{1}{4} \text{ سنة}$$

$$6 \text{ عمر الولد الأصغر} = \frac{35 \times 35}{420} = 2 \frac{1}{2} \text{ سنة}$$

$$\text{الفرق بين عمر الأم والولد الأكبر} = 29 \frac{2}{3} - 3 \frac{1}{4} = 26 \frac{5}{12} \text{ سنة}$$

$$\text{النسبة بين عمرى الأم والولد الأكبر يوم الوصول} = 728 : 94$$

فإذا فرض أن ٧٢٨ يمثل عمر الأم فإن ٩٤ تمثل عمر الولد الأكبر .

$$\text{ويكون } 728 - 94 = 634 \text{ يمثل الفرق بين عمريهما ولكن هذا الفرق}$$

ثابت وهو $26 \frac{5}{12}$ سنة

$$\therefore 634 \text{ تمثل } 26 \frac{5}{12} \text{ سنة}$$

∴ ٧٢٨ تمثل $\frac{٧٢٨}{٦٣٤} \times ٢٦\frac{٥}{١٢} = ٣٠\frac{١}{٣}$ سنة

وهذا عمر الأم يوم الوصول

∴ عمرها في بدء الرحلة كان $٢٩\frac{٢}{٣}$ سنة

∴ الرحلة استغرقت $٣٠\frac{١}{٣} - ٢٩\frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$ سنة = ٨ أشهر

تمرين (٢٠)

(١) قسم مبلغ ٢٤٣ من الجنيهات بين ا ٦ ب ٦ ح بحيث يأخذ ا $\frac{٤}{٢٧}$ نصيب ب ويأخذ ب $\frac{٤}{٣}$ مجموع نصيبى ا ٦ ح أوجد نصيب كل منهم .

(٢) مجموع عمرى ا ٦ ب الآن ٦٦ سنة ومنذ ١٥ سنة كانت النسبة بين عمريهما ٤ : ٥ أوجد عمر كل منهما الآن .

(٣) ترك رجل لأولاده الأربعة مبلغاً قسم بينهم بنسبة $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٣} : \frac{١}{٤} : \frac{١}{٥}$ فكان نصيب الأخير ٣٦٠٠ جنيه أوجد نصيب كل من الآخرين .

(٤) قسم مبلغ ١٨٠ جنيهاً بين ا ٦ ب ٦ ح بحيث يأخذ ا ثلاثة أمثال ما يأخذه ب وأن يأخذ ب ٦ ح معاً نصف ما يأخذه ا .

(٥) رجل وامرأة وولد يعملون عملاً يأخذون عليه أجراً قدره ٣٠٧ قروش بحيث يشتغل الرجل ٩ أيام والمرأة ١٠ أيام والولد ١٢ يوماً والنسبة بين مقادير العمل الذى يعمل كل منهم فى اليوم تساوى $\frac{١}{٢} : \frac{١}{٣} : \frac{١}{٥}$ أوجد كم يكون نصيب كل منهم من هذا المبلغ .

(٦) قسم مبلغ ١٣٣٠ جنيهاً بين ا ٦ ب ٦ ح ٥ بحيث كان نصيب ب $\frac{٦}{٧}$ نصيب ا ونصيب ح $\frac{١}{١١}$ من نصيب ب ونصيب ٥ نصف مجموع نصيبى ب ٦ ح أوجد ما يستحقه كل منهم من هذا المبلغ .

(٧) المطلوب تقسيم مبلغ ١٠٧ جنيهات بين ١٥ رجلاً ٦ ١٧ امرأة ٦ ٨ أولاد بحيث يكون نصيب المرأة ٣ أمثال نصيب الولد ٦ $\frac{١٣}{١١}$ من نصيب الرجل

(٨) أوصى رجل أن تقسم تركته بحيث يأخذ ١ نصفها ويأخذ ٢ ثلثها ويأخذ ٣ ربعها . بين أن هذا مستحيل . وإذا كانت تركته تبلغ $\frac{9}{1226}$ جنيها فكم يكون نصيب كل من ١ ٦ ٦ ٦ ٦ بحيث تكون النسبة بين أنصبتهم $\frac{1}{4} : \frac{1}{3} : \frac{1}{2}$ ؟

(٩) تركة قسمت بحيث أخذ ١ خمسها وقسم الباقي بين ثلاثة آخرين بنسبة ١:٢:٣ . فإذا كان أصغر هذه الأنصبة ٥٣٧٥ جنيهاً فكم كانت التركة الأصلية ؟

(١٠) النسبة بين مبلغ ١ ٦ ٦ كنسبة ٣ : ٧ ولو أعطى ٣٤٥ جنيهاً إلى ١ لأصبحت النسبة ٣ : ٥ فما مبلغ كل منهما ؟

(١١) يملك ٩١ نعاج لكل ٥ يملكها ٦ وثمان النعجة من نعاج ١ ١٢٥ قرشاً وثمان النعجة من نعاج ٦ و١٦٢ من القروش . فإذا علم أن ثمن قطيع ١ يزيد $\frac{9}{8}$ من الجنيهاً على ثمن قطيع ٦ فكم نعجة يملكها كل ؟

(١٢) إذا بلغت أجرة ٤٥ امرأة في ٤٨ يوماً ٢٠٧ جنيهاً فكم رجلاً يمكن تشغيلهم ١٦ يوماً بأجرة تبلغ $\frac{2}{3}$ جنيهاً إذا علم أن أجرة الرجل في اليوم ضعف أجرة المرأة ؟

الشركات

- ٥٢ — تعريف : الشركة عقد بين اثنين أو أكثر يلتزم به كل من المتعاقدين وضع جزء من رأس مال للقيام بعمل مشترك بينهم وتقسيم الربح أو الخسارة التي تنشأ عنه بينهم .
- ويراعى في تقسيم الأرباح والخسارة بين الشركاء ثلاثة أمور :
- (١) رأس المال الذي دفعه كل منهم .
 - (٢) المدة التي مكثها رأس مال كل شريك .
 - (٣) المجهود الخاص الذي بذله واحد أو أكثر من الشركاء في إنجاح العمل .

٥٣ — سنين فيما يلي طريقة حل هذا النوع من المسائل :

(مثال ١) اشترك ثلاثة في تجارة ودفع الأول من رأس مالها ٥٠٠٠ جنيه ودفع الثاني ٢٤٠٠ جنيه ودفع الثالث ٣٦٠٠ جنيه وبعد سنة كان ربح التجارة ٢٢٠٠ جنيه فما مكسب كل شريك ؟

العمل

∴ رأس المال الكلى = ٥٠٠٠ + ٢٤٠٠ + ٣٦٠٠ = ١١٠٠٠ جنيه

وربحه = ٢٢٠٠ »

∴ ربح كل جنيه منه = $2200 \div 11000 = \frac{1}{5}$ »

∴ مكسب الأول = $5000 \times \frac{1}{5} = 1000$ جنيه
 ٦ » الثاني = $2400 \times \frac{1}{5} = 480$ »
 ٦ » الثالث = $3600 \times \frac{1}{5} = 720$ »

ملاحظة : مكسب كل واحد منهم متناسب لرأس المال الذى دفعه
 (مثال ٢) ح ٦ و ٦ هـ كوتوا شركة تجارية دفع فيها ح رأس مال قدره ٣٠٠٠ جنيه ودفع و ٢٥٠٠ جنيه ودفع هـ ١٥٠٠ جنيه واتفقوا على أن يقوم هـ بإدارة الشركة وأن يأخذ فى نظير ذلك $\frac{1}{8}$ الأرباح السنوية وأن يقسم الباقي من الأرباح بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا كان جميع ما خص هـ من الأرباح ٢٥٠ جنيهًا ، فما مقدار ما أخذه كل من ح ٦ و ٦ منها ؟

العمل

∴ ما يأخذه هـ نظير إدارته للشركة = $\frac{1}{8}$ الربح

∴ ما يقسم عليهم بنسبة رؤوس أموالهم = $\frac{7}{8}$ »

وهذا يقسم بنسبة ٣٠٠٠ : ٢٥٠٠ : ١٥٠٠

أى بنسبة ٦ : ٥ : ٣

∴ جميع ما خص هـ من الأرباح $\frac{1}{8} + \frac{2}{14} \times \frac{7}{8} = \frac{9}{16}$ من الربح

الكلى وهذا يعادل ٢٥٠ جنيهاً

الربح الكلى $\frac{9}{16} \div 250 = 800$ جنيهاً
 ما أخذه ح $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ من $\frac{7}{8}$ ∥ ٨٠٠ = ٣٠٠ »
 ما أخذه و $\frac{2}{14} = \frac{1}{7}$ من $\frac{7}{8}$ ∥ ٨٠٠ = ٢٥٠ جنيهاً

(تمرين ٢١)

(١) اشترك ٤ أشخاص في تجارة دفع الأول ١٢٨٠ جنيهاً والثاني ١٠٠٠ جنيهاً

والثالث ١٦٤٠ جنيهاً والرابع ٥٠٠ جنيهاً وبلغت أرباحهم في نهاية السنة

١١٠٥ جنيهاً ، فما نصيب كل واحد من هذه الأرباح ؟

(٢) اشترك أ ب ح في تجارة دفع أ ٧٠٠ جنيهاً ب ٨٤٠ جنيهاً وبلغت

أرباح الشركة ٤٢٢٥ من الجنيهاً ، فإذا كان ما خص ح من هذه

الأرباح ١٧٢٢٥ من الجنيهاً ، فما مقدار ما دفعه ح وما مقدار نصيب

كل من أ ب ح من الأرباح ؟

(٣) اشترك ح و د في تجارة دفع ح ٢٥٠٠ جنيهاً و د ٤٠٠٠ جنيهاً وبلغت

خسارتهما في آخر السنة ٥٢٠ جنيهاً خصمت من رأس المال ثم اشترك

معهما هـ ودفع ٤٥٠٠ جنيهاً وفي آخر السنة الثانية بلغت أرباحهم

١١٧٩ جنيهاً ، فما مقدار ما يأخذه كل منهم من هذه الأرباح ؟

(٤) كوّن رجلان شركة تجارية وكان رأس مال الأول فيها ١٧٥٠ جنيهاً

ورأس مال الثاني ٢٠٠٠ جنيهاً واتفقا على أن يقوم الأول بإدارة الشركة

وأن يأخذ في مقابل ذلك $\frac{2}{9}$ الأرباح وأن يقسم الباقي من الأرباح بينهما

بنسبة رأس مال كل منهما ، فإذا كان جميع ما خص الأول من الأرباح

٧١١ جنيهاً فما مقدار ما خص الثاني منها ؟

(٥) شريكان لهما في تجارة ٤٥٠ ٦ ٧٥٠ جنيهًا وكان أولهما يدير الشركة ويأخذ في مقابل ذلك ١٠٪ من الأرباح والباقي منها يوزع بين الشريكين بنسبة رأس مال كل منهما فإذا كان جميع ما خص الثاني من الأرباح $\frac{1}{4}$ ١٥٧ من الجنيهاً فما مقدار ما أخذه الأول منها؟

(٦) ح ٦ و ٦ هـ كونوا شركة تجارية دفع ح فيها رأس مال قدره ٩٠٠ جنيهه ودفع و ١٢٠٠ جنيهه ودفع هـ ١٦٠٠ جنيهه واتفقوا على أن يقوم ح بإدارة الشركة وأن يأخذ في نظير ذلك ٢٠٪ من الأرباح وأن يوزع باقي الأرباح بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا كان ما خص ح من الأرباح ٣٦٥ جنيهًا فما مقدار ما أخذه كل من و ٦ هـ منها؟

(٧) اشترك رجلان في تجارة دفع الأول ١٣٥٠ جنيهًا ودفع الثاني ٧٥٠ جنيهًا واتفقا على أنهما يقسمان ٤٠٪ من الأرباح مناصفة بينهما لاشتراكهما في الإدارة والباقي يقسم بينهما بنسبة رأس مال كل منهما فإذا كان نصيب أحدهما يزيد على نصيب الآخر بمقدار ٤٥ جنيهًا فما ربح كل منهما؟

(٨) اشترك أ و ب في عمل تجارى دفع أ ٥٠٠٠ جنيهه و ب ٦٠٠٠ جنيهه وبلغ ربح الشركة ٢٨٠٠ جنيهه فإذا خص أ بمبلغ من المال نظير قيامه بالعمل ثم قسم الباقي من الربح بينهما بنسبة رأس مال كل منهما وكان نصيب ب مساويا $\frac{2}{3}$ نصيب أ فكم أخذ أ نظير إدارته العمل؟

(٩) كون ثلاثة شركاء شركة تجارية دفع الأول فيها ١٦٨٠ جنيهًا والثاني ٢٤٠٠ جنيهه والثالث ٣١٢٠ جنيهًا واتفقوا على أن يقوم الأول بإدارة الشركة وأن يأخذ في نظير ذلك ١٠٪ من الأرباح وأن يقسم الباقي منها بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا كان جميع ما خص الأول من الأرباح في نهاية السنة ٥٤٢,٥ جنيهه فما مقدار يأخذه كل من الثاني والثالث منها؟

(١٠) اشترك ثلاثة أشخاص في تجارة ودفع الأول ٧٢٠٠ جنيه والثاني ٥٦٠٠ جنيه والثالث ٦٤٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ الأول $\frac{1}{4}$ ١٣ ٪ من الأرباح قبل توزيعها في نظير إدارته العمل ولا يتحمل شيئاً من الخسارة فإذا كانت الشركة قد خسرت في نهاية السنة الأولى ١٢٠٠ جنيه خصمت من رأس مال الثاني والثالث ثم ربحت في نهاية السنة الثانية ٣٠٠٠ جنيه فما مقدار ما خص كلا من الأرباح ؟

(١١) اشترك ح ٦ و في تجارة ودفع ح فيها ٢٥٠٠ جنيه ودفع د ٤٠٠٠ جنيه فبلغت خسارتهما في آخر السنة ٥٢٠ جنيه خصمت من رأس مالهما ثم اشترك معهما ه بمبلغ ٤٥٠٠ جنيه فبلغت أرباحهم في نهاية السنة الثانية ٢٣٥٨ جنيه فما نصيب كل واحد من هذه الأرباح ؟

(١٢) أربعة شركاء وضعوا في تجارة ٨٠٠ ٦ ١٠٠٠ ٦ ٩٠٠ ٦ ١٠٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ الأول لقيامه بإدارة الشركة ٧٥ ٪ من باقي الأرباح بعد دفع ١٥٠ جنيهًا مرتبًا سنوياً للثاني في نظير مراقبته العمل وأن الباقي بعد ذلك يقسم بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فما مقدار ما يأخذه كل من الثاني والثالث والرابع إذا كان كل ما أخذه الأول ٥٥ جنيهًا ؟

(١٣) اشترك شخصان في شراء منزل ودفع الأول $\frac{17}{24}$ من الثمن ودفع الثاني الباقي منه ثم باعاه بخسارة قدرها ٩٦ جنيهًا فما مقدار خسارة كل منهما ؟

(١٤) أشهر إفلاس أحد التجار وكان مدينًا لثلاثة بيوت تجارية الأول بمبلغ ٢٦٦ جنيهًا والثاني بمبلغ ٤٢٤ جنيهًا والثالث بمبلغ ٦٥٠ جنيهًا وقد قومت ممتلكاته بمبلغ ٤٠٢ جنيه فكيف يكون نصيب كل دائن ؟

مثال (٣) اشترك ثلاثة رجال في شركة وضع الأول ٢٠٠٠ جنيه ووضع الثاني ١٥٠٠ جنيه ثم بعد ستة أشهر وضع مبلغا آخر قدره ٨٠٠ جنيه ووضع الثالث ١٢٠٠ جنيه غير أنه بعد مضي شهرين سحب مبلغ ٢٠٠ جنيه فإذا بلغت الأرباح في نهاية السنة ١٠٣٦ جنيه فما نصيب كل منهم؟

العمل

ربح مبلغ الأول ٢٠٠٠ جنيه لمدة سنة يعادل ما يربحه في شهر واحد
مبلغ $٢٠٠٠ \times ١٢ = ٢٤٠٠٠$ جنيه

و ربح مبلغ الثاني ١٥٠٠ جنيه لمدة سنة و ٨٠٠ جنيه لمدة ٦ شهور
يعادل ما يربحه في شهر واحد مبلغ $١٥٠٠ \times ١٢ + ٨٠٠ \times ٦ = ٢٢٨٠٠$ جنيه

و ربح مبلغ الثالث ١٢٠٠ لمدة شهرين ، (١٢٠٠ - ٢٠٠) لمدة ١٠ أشهر يعادل ما يربحه في شهر واحد مبلغ $١٢٠٠ \times ٢ + ١٠٠٠ \times ١٠ = ١٢٤٠٠$ جنيه

∴ تقسم الأرباح بنسبة ٢٤٠٠٠ : ٢٢٨٠٠ : ١٢٤٠٠
أى بنسبة ٦١ : ٥٧ : ٣١

∴ نصيب الأول من الأرباح $= \frac{٦١}{١٤٨} \times ١٠٣٦ = ٢٤٠$ جنيه
و نصيب الثاني من الأرباح $= \frac{٥٧}{١٤٨} \times ١٠٣٦ = ٣٩٩$ جنيه
و نصيب الثالث من الأرباح $= \frac{٣١}{١٤٨} \times ١٠٣٦ = ٢١٧$ جنيه

مثال (٤) استأجر رجلان مرعى بمبلغ ٥٤ جنيه ووضع الأول ٢٣ حصانا لمدة ٢٧ يوما ووضع الثاني ٢١ حصانا لمدة ٣٩ يوما فما مقدار ما يدفعه كل منهما من هذا الإيجار؟

العمل

∴ ما يأكله ٢٣ حصاناً في ٢٧ يوماً يعادل ما يأكله في يوم واحد

$$٢٣ \times ٢٧ \text{ حصاناً} = ٦٢١ \text{ حصاناً}$$

كذلك ما يأكله ٢١ حصاناً في ٣٩ يوماً يعادل ما يأكله في يوم واحد

$$٢١ \times ٣٩ \text{ حصاناً} = ٨١٩ \text{ حصاناً}$$

∴ يقسم الإيجار بين الرجلين بنسبة ٦٢١ : ٨١٩ أى بنسبة ٦٩ : ٩١

$$\left. \begin{array}{l} \text{∴ ما يدفعه الأول من الإيجار} = \frac{٦٩}{١٦٠} \times ٥٤ = ٢٣,٢٨٥ \text{ جنيهًا} \\ \text{ما يدفعه الثاني من الإيجار} = \frac{٩١}{١٦٠} \times ٥٤ = ٣٠,٧١٥ \text{ جنيهًا} \end{array} \right\} \text{الجواب}$$

تمرين ٢٢

(١) اشترك ثلاثة أشخاص في تجارة ووضع الأول ٣٠٠ جنيه لمدة ١١ شهراً

ووضع الثاني ٦٥٠ جنيه لمدة ٨ شهور والثالث ٥٠٠ جنيه لمدة ٣ شهور

واكتسبوا ٢١٠ جنيهات فما مقدار ما خص كل واحد من الربح؟

(٢) فتح شخص محلاً تجارياً برأس مال قدره ٦٠٠ جنيه وبعد ٣ أشهر شاركه

آخر بمبلغ ٣٠٠ جنيه وبعد مضي ٦ أشهر من تاريخ تأسيس المحل دفع كل

واحد منهما ٣٠٠ جنيه وبعد سنة ونصف من الابتداء بلغ الربح ٣٧٥ جنيهًا

فما نصيب كل واحد من ذلك؟

(٣) اشترك ثلاثة رجال في تجارة لمدة سنة ودفع الأول في الابتداء ٢٠٠٠ جنيه

ودفع الثاني ٥٠٠٠ جنيه ودفع الثالث ٤٠٠٠ جنيه . وبعد ثلاثة أشهر

من تاريخ تأسيس الشركة أضاف الأول إلى رأس ماله ٥٠٠ جنيه وبعد

٤ أشهر من التأسيس أيضاً سحب الثاني ٣٠٠ جنيه وفي نهاية السنة بلغ

الربح الكلي ٢٦٨٢ جنيهًا فكم يخص كلا منهم من هذا الربح؟

(٤) اشترك ا ب في تجارة ووضع كل منهما ٧٥٠ جنيهاً وبعد ٤ أشهر انضم إليهما ح وفي نهاية السنة وزعت الأرباح عليهم بالتساوي فكم كان رأس مال ح ؟

(٥) ابتداء ا عملاً تجارياً برأس مال قدره ٨٠٠ جنيته وبعد ٤ أشهر انضم إليه ب برأس مال ١٤٠٠ جنيته وبعد ذلك بشهرين انضم إليهما ح وكانت الأرباح في نهاية السنة ١٣٦٨ جنيهاً خص ح منها ٤٣٢ جنيهاً فكم كان رأس ماله ؟

(٦) اشترك ا ب ح في تجارة ابتداء ا بمبلغ ٢٠٠٠ جنيته أما ب فدفع في الابتداء ٣٠٠٠ جنيته ثم دفع بعد ٤ أشهر ١٠٠٠ جنيته و ح دفع في الابتداء ٤٠٠٠ جنيته ثم بعد ٩ أشهر سحب ١٠٠٠ جنيته من رأس ماله وفي آخر السنة بلغت أرباحهم ٨٤٧٥ جنيهاً فما مقدار ما خص كل واحد منهم من هذه الأرباح ؟

(٧) اشترك ٣ أشخاص في تجارة فبلغت أرباحهم ٣٢٨٥٥ جنيته فإذا كان رأس مال الأول ١١٢٠ جنيهاً ومكث في التجارة ١٢ شهراً ورأس مال الثاني ١٢٣٠ جنيهاً والثالث ١٢٦٠ جنيهاً. وكان نصيب الأول من الأرباح ١١٥٠٢ جنيته والثاني ١١٠٧ جنيته فما الزمن الذي مكثه كل من رأس مال الثاني والثالث في التجارة ؟

(٨) ابتداء ا عملاً تجارياً برأس مال قدره ٤٠٠٠ جنيته وبعد ٤ شهور انضم إليه ب بمبلغ ٣٠٠٠ جنيته وبعد ذلك بشهرين انضم إليهما ح بمبلغ ٥٠٠٠ جنيته وفي نهاية السنة قسمت الأرباح وكانت نصيب ح منها $\frac{1}{4}$ ٥٨١ جنيته فما نصيب كل من ا ب منها ؟

(٩) اشترك ا ب ح في تجارة ودفع الأول من رأس مالها $\frac{2}{3}$ ٦٦٦ من الجنيهاً أما ب فدفع أولاً ٥٠٠ جنيته ثم أبلغها بعد ٧ شهور إلى $\frac{2}{3}$ ٧٦٦ من الجنيهاً ودفع ح في أول الأمر ٨٠٠ جنيته ثم أنقصها إلى ٣٠٠ جنيته

بعد ٣ أشهر وبعد مضي سنة من تأسيس الشركة كان نصيب ب من الأرباح يزيد على نصيب ح منها بمقدار $\frac{1}{4}$ ٥٣ جنيهًا فما مقدار ما خص أ من الأرباح؟

(١٠) اشترك أ ب و ح في تجارة ودفع أ مبلغ ٦٥٠٠ جنيه ب ٨٥٠٠ جنيه و ح ١٥٠٠٠ جنيه وبعد مضي ٤ أشهر سحب كل واحد منهم ١٠٠٠ جنيه من رأس ماله واستمرت الشركة بعد ذلك ٨ أشهر فبلغت أرباحها ٢١٨٤ جنيهًا فما مقدار ما خص كل واحد من الأرباح؟

(١١) فتح أ محلات تجارية برأس مال ٤٥٠ جنيهًا وبعد ٤ أشهر شاركه ب بمبلغ ٣٠٠ جنيه ثم بعد شهرين آخرين شاركهما ح بمبلغ ٥٠٠ جنيه غير أنه بعد مضي شهرين من اشتراكه سحب مبلغ ٢٥٠ جنيهًا من رأس ماله وفي نهاية السنة زاد نصيب أ من الأرباح على نصيب ب بمقدار ٧٥ جنيهًا فما هي الأرباح وما نصيب كل منهما؟

(١٢) كون أ ب شركة تجارية ووضع كل منهما رأس مال قدره ٢٠٠٠ جنيه واتفقا على أن يأخذ أ ٥٠٠ جنيه سنويًا نظير إدارة الشركة وبعد ٨ شهور أضاف ب إلى رأس ماله ١٠٠٠ جنيه فكان نصيبه من الأرباح في آخر السنة ٣٥٠ جنيهًا فماذا كان نصيب أ منها؟

(١٣) ثلاثة من تجار الماشية استأجروا مرعى واحدًا بمبلغ ٦٦ جنيهًا في السنة ووضع الأول ٨ بقرات لمدة ١٠ أشهر ووضع الثاني ٧ بقرات لمدة ١٢ شهرًا ووضع الثالث ٢٠ بقرة لمدة ٥ أشهر فما مقدار ما يدفعه كل واحد من الإيجار؟

(١٤) استأجر أ ب مرعى لمدة ١٠ أشهر بمبلغ ١٥٠ قرشًا في الشهر الواحد فإذا وضع أ ١٤ بقرة لمدة ٩ أشهر فكم بقرة يمكن ب أن يضعها مدة الشهر الباقي إذا دفع مبلغًا أقل مما دفعه أ بستة جنيهات؟

تمرين ٢٣

مسائل متنوعة على الشركات

(١) تاجر مدين لأربعة دائنين بالمبالغ الآتية :

٢٨٩ ٣٨١ ٦ ٢٤٢ ٦ ١٧٦ جنيتهاً على التعاقب فإذا أفلس التاجر ووجد عند عمل التصفية أن قيمة تجارته ٦٢٦ جنيتهاً ثم أعطى السمسار القائم بعمل التصفية من ذلك قيمة أتعابه ووزع الباقي على الدائنين بنسبة مبالغهم فخص الدائن الأول ١٢٥ و ٨٠٠ جنيتهاً فأوجد قيمة أتعاب السمسار الذى قام بعمل التصفية ؟

(٢) كون ثلاثة أشخاص شركة فدفع الأول ١٢٠٠ جنيهه ودفع الثانى ١٥٠٠ جنيهه ودفع الثالث ١٦٠٠ جنيهه واشتروا أن يؤخذ ٢٠ ٪ من الأرباح السنوية ويقسم عليهم بالتساوى فى نظير إدارة العمل ويقسم الباقي بينهم بنسبة رأس مال كل منهم فإذا بلغ نصيب الأول من جملة الأرباح فى سنة ما ١٨٧ جنيتهاً فأوجد نصيب كل من الآخرين .

(٣) شرع رجل فى عمل تجارى برأس مال قدره ١٥٦٠ جنيتهاً وبعد مدة من الزمن انضم إليه أخوه برأس مال قدره ١٨٦٠ جنيتهاً ثم بعد مدة أخرى من الزمن انضم إليه ابن عمه برأس مال قدره ٢٤٢٠ جنيتهاً وبعد مضى سنة بلغت الأرباح ٦٩٣ جنيتهاً أخذ منها الأخ ١٩٧ و ٧٨٠ جنيتهاً وأخذ منها ابن العم ١٨٦ و ٣٤٠ جنيتهاً فإذا علم أن نصيب الرجل الأول بصفته مديراً للشركة يساوى نصف الأرباح التى خست رأس ماله فأوجد عدد الأشهر التى بعدها انضم ابن العم إلى الشركة .

(٤) اشترك أ ب ب مبلغين النسبة بينهما كنسبة ٣ : ٤ وبعد أربعة أشهر سحب أ $\frac{2}{5}$ و ب $\frac{3}{8}$ مبلغيهما على الترتيب وقد وجد فى آخر السنة أن الأرباح ٦٢٤ جنيتهاً فما مقدار ما يأخذه كل منهما من هذه الأرباح ؟

(٥) دفع ١ في تجارة ٢١٢ جنيهاً ثم شاركه ب بمبلغ ١٢٧٢ جنيهاً وفي نهاية السنة وجد أن ماخص ب من الأرباح يعادل ٣ أمثال ماخص ا منها فبعد كم شهر من تأسيس التجارة اشترك ب ؟

(٦) اشترك ا ب ٦ ح في تجارة ودفعوا ٥٠٠ ٦ ٤٠٠ ٦ ٣٠٠ من الجنيهاً على الترتيب وبعد أربعة أشهر أضاف ح مبلغاً إلى رأس ماله وفي نهاية السنة بلغت الأرباح ٦٢٤ جنيهاً خص ب منها ١٦٠ جنيهاً فما هو المبلغ الذي أضافه ح ؟

(٧) اشترك ا ب ٦ ح في تجارة ومكث رأس مال ا فيها ٨ أشهر وأخذ نصف الأرباح ومكث رأس مال ب ١٠ أشهر وأخذ ثلث الأرباح ودفع ح ١٠٠٠ جنيهاً ومكث السنة بأكملها وأخذ $\frac{1}{4}$ الأرباح فما هو رأس مال كل من ا ب ؟

(٨) أسس ا ب مشروعاً تجارياً وكان نصيب رأس مال ا ضعف رأس مال ب وبعد مضي ستة أشهر سحب ا ربع رأس ماله وبعد مضي سنة من تاريخ تأسيس المشروع انضم إليهما ح برأس مال قدره ٧٥٠ جنيهاً وبعد مضي سنتين من تاريخ تأسيس المشروع بلغت أرباحهم ١٤٤٠ جنيهاً خص ح منها ١٨٠ جنيهاً فما مقدار رأس مال ب ؟

(٩) استأجر ثلاثة رجال ا ب ٦ ح مرعى بمبلغ ٣٦ جنيهاً وقد وضع ا في هذا المرعى ٨ خيول ووضع ب ١٣ ثوراً ووضع ح ٢٢ نعجة فإذا علم أن نسبة تكاليف رعى الحصان والثور والنعجة تساوى ٣ : ٢ : ١ فكم يجب أن يدفع كل من إيجار هذا المرعى ؟

(١٠) استأجر ثلاثة رجال ا ب ٦ ح مرعى لمدة شهر فوضع ا ١٩ ثوراً مدة ٢٥ يوماً ووضع ب ٦٩ ثوراً مدة ٦ أيام ووضع ح ١٥٣ ثوراً لمدة ٣ أيام فإذا بلغ إيجار هذا المرعى ١٣ و ٤٨ جنيهاً فكم يجب أن يدفع كل منهم ؟

(١١) استأجر شخصان مرعى بمقدار ١٠١ و ٤٠٠ جنيه و وضع الأول فيه ١٥ ثوراً لمدة ٦ أشهر و ٥٤ نعجة لمدة شهرين و وضع الثانى ٦ أحصنة و ٤٨ ثوراً لمدة ٣ أشهر فإذا كان كل ٣ أحصنة و ٣ نعاج تأكل معاً بقدر ما تأكله ٥ ثيران و ما يأكله ثوران قدر ما تأكله ٧ نعاج فما حصة كل من الشخصين فى إيجار المرعى ؟

(١٢) اشترك ثلاثة فلاحين فى مرعى فأنزل الأول به ٢٥ حصاناً لمدة ٢٠ يوماً وأنزل الثانى ١٦ بغلاً لمدة ١٨ يوماً وأنزل الثالث ٢٠ ثوراً لمدة ١٦ يوماً فإذا دفع الأول مبلغاً يزيد ٣٢٠ قرشاً على نصف ما دفعه الآخران و علم أن ما يكفى ٣ ثيران يكفى ٤ من البغال أو يكفى ٥ من الخيل فى نفس الزمن فكم دفع كل منهم ؟

(١٣) استأجر أ ب و ح أرضاً للصيد بها مدة الشهور الثلاثة : سبتمبر و أكتوبر و نوفمبر بمبلغ ٤٢ جنيهاً و ٧٩٠ ملياً فما مقدار ما يدفعه كل منهم من هذا الإيجار إذا علم أن أ باشر الصيد بها مدة ١٠ أيام من كل شهر و ب مدة ٨ أيام من سبتمبر و ١٥ من أكتوبر و ١٦ يوماً من نوفمبر و ح مدة ١٤ يوماً من سبتمبر و ١٠ أيام من أكتوبر و ٢٠ يوماً من نوفمبر وأن الصيد فى اليوم من سبتمبر يعادله فى يومين من أكتوبر أو ٣ من نوفمبر ؟

(١٤) اشترك محمد و على فى تجارة فدفع محمد ٧٠٠ جنيه و دفع على ٦٠٠ جنيه و اتفقا على أن يقوم محمد بإدارة الشركة نظير نسبة مئوية معينة من الأرباح الكلية و بعد مضى ٤ شهور من بدء الشركة شاركهما إبراهيم فدفع ٤٠٠ جنيه و قبل شروط الاتفاق السابقة وفى نهاية السنة من بدء الشركة كانت الأرباح الكلية ٢٥٠ جنيهاً و كان نصيب محمد منها ١٢٠ جنيهاً فكم فى المائة من الأرباح كان نصيب محمد نظير إدارته العمل ؟

(١٥) اشترك ا ب و ح في تجارة فوضع ا ٨٠٠ جنيه و ب ١٠٠٠ جنيه و ح ٧٥٠ جنيهاً و بعد ٥ شهور أضاف الأول ٢٠٠ جنيه و بعد ٥ شهور أخرى سحب الثاني مبلغاً من رأس ماله وأضاف الثالث ٤٣٠ جنيهاً وقد اتفقوا على أن يقوم الثالث بإدارة الشركة نظير نسبة مئوية معينة من الأرباح ثم يقسم باقي الأرباح بينهم بنسبة رؤوس الأموال مع مراعاة التغير الذي طرأ عليها فوجدوا في نهاية السنة الأولى أن أنصبتهم من الأرباح متساوية والمطلوب إيجاد ما سحبه الثاني والنسبة المئوية لما أخذه الثالث من الأرباح نظير إدارته الشركة .

(١٦) اشترك ا ب و ح في تجارة فدفع الأول ٦٣٠٠ جنيه والثاني ٥٠٠٠ جنيه والثالث ٦٠٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ ا ١٠٪ من الأرباح قبل توزيعها نظير إدارته العمل وألا يتحمل شيئاً من الخسارة فإذا كانت الشركة قد خسرت في نهاية السنة الأولى ١١٠٠ جنيه خصمت من رأس مال ب و ح ثم ربحت في نهاية السنة الثانية ٣٦٠٠ جنيه وصفيت أعمال الشركة . أوجد ما آل إليه حينئذ رأس مال كل من الشركاء الثلاثة .

البَابُ السَّابِعُ

٥٤ — مسائل على الربح البسيط للاعادة *

(مثال ١) ما هو السعر الذى إذا وضع به مبلغ ١٣٥٠ جنيهاً ليربح ربهاً بسيطاً لمدة $٥\frac{٣}{٤}$ سنة تكون جملته فى نهاية المدة $١٦٢١\frac{١١}{١٦}$ من الجنيهاً ؟

العمل

$$\text{الربح الكلى} = ١٦٢١\frac{١١}{١٦} - ١٣٥٠ = ٢٧١\frac{١١}{١٦} \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{الربح فى السنة الواحدة} = ٢٧١\frac{١١}{١٦} \div ٥\frac{٣}{٤} \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{ربح المائة جنيهاً فى السنة الواحدة} = \frac{٢٧١\frac{١١}{١٦} \times ١٠٠}{٥\frac{٣}{٤} \times ١٣٥٠} = ٣\frac{١}{٢} \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{السعر} = ٣\frac{١}{٢} \% \text{ فى السنة}$$

(مثال ٢) أوجد الزمن الذى يؤول فيه مبلغ $٤٨٨\frac{١}{٦}$ جنيهاً بالربح البسيط بسعر ٣% فى السنة إلى جملة قدرها $٥٠٦\frac{٢٤٧}{٤٨٠}$ جنيهاً .

العمل

$$\text{الربح الكلى} = ٥٠٦\frac{٢٤٧}{٤٨٠} - ٤٨٨\frac{١}{٦} = ١٨\frac{٤٩}{١٦٠} \text{ جنيهاً}$$

$$\therefore \text{الزمن} = \frac{١٠٠ \times ١٨\frac{٤٩}{١٦٠}}{٣ \times ٤٨٨\frac{١}{٦}} = ١\frac{١}{٤} \text{ سنة}$$

(مثال ٣) أودع مبلغ من المال بالربح البسيط فى مصرف لمدة ٣ سنوات فبلغت جملته $٢٦٨\frac{٤}{٥}$ جنيهاً وبلغت جملته فى نهاية ٧ سنوات $٣٠٧\frac{١}{٥}$ جنيهاً أوجد المبلغ والسعر .

(١) يحسن تدريس التلاميذ على حل بعض هذه التمارين كاعادة لقرى المدارس الابتدائية من جهة وكتمهيد لمسائل الربح المركب والحظيطة من جهة أخرى .

العمل

$$\begin{aligned} \text{ربح المبلغ في ٤ سنوات} &= ٣٠٧ \frac{1}{2} - ٢٦٨ \frac{4}{5} = ٣٨ \frac{2}{5} \text{ جنيهاً} \\ \therefore \text{الربح لمدة ٣ سنوات} &= \frac{3}{4} \times ٣٨ \frac{2}{5} = ٢٨ \frac{4}{5} \text{ جنيهاً} \\ \therefore \text{رأس المال} &= ٢٦٨ \frac{4}{5} - ٢٨ \frac{4}{5} = ٢٤٠ \text{ جنيهاً} \\ \therefore \text{ربح المائة جنية في السنة} &= \frac{100}{٣ \times ٢٤٠} \times ٢٨ \frac{4}{5} = ٤ \text{ جنيهات} \\ &\therefore \text{السعر } ٤ \text{ } \%. \end{aligned}$$

(مثال ٤) يقتصد موظف ٥٠ جنيهاً سنوياً يودعها بالربح البسيط في مصرف في أول يناير من كل سنة أوجد كم يكون لهذا الرجل في المصرف بعد دفع الدفعة الرابعة مباشرة مع العلم بأن السعر ٥ % في السنة .

العمل

$$\begin{aligned} &\text{آخر دفعة لم تحسب عليها أرباح بعد فقيمتها ٥٠ جنيهاً} \\ &\text{الدفعة التي قبلها حسب عليها أرباح سنة } ٥٠ \text{ قيمتها } \frac{٥ \times ٥٠}{100} + ٥٠ \\ &\text{الدفعة التي قبل هذه تحسب عليها أرباح سنتين } ٥٠ \text{ قيمتها } \frac{٢ \times ٥ \times ٥٠}{100} + ٥٠ \\ &\text{الدفعة التي قبل هذه تحسب عليها أرباح ٣ سنوات } ٥٠ \text{ قيمتها } \frac{٣ \times ٥ \times ٥٠}{100} + ٥٠ \\ &\text{جملة ما للرجل في المصرف .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{٣ \times ٥ \times ٥٠}{100} + ٥٠ \right) + \left(\frac{٢ \times ٥ \times ٥٠}{100} + ٥٠ \right) + \left(\frac{٥ \times ٥٠}{100} + ٥٠ \right) + ٥٠ = \\ &= ٥٠ + ٥٢ \frac{1}{2} + ٥٥ + ٥٧ \frac{1}{2} = ٢١٥ \text{ جنيهاً} \end{aligned}$$

تمرين ٢٤

(١) أودع شخص ٥٠٠ جنية في مصرف في أول أغسطس سنة ١٩٣٦ وكان السعر $٢ \frac{1}{4} \%$ في السنة وفي يوم ١٣ أكتوبر من السنة نفسها تغير الربح فصار $٣ \frac{1}{4} \%$ وفي ٢٠ مايو سنة ١٩٣٧ زاد السعر إلى ٤ % فأوجد ما آل إليه مبلغ هذا الرجل في يوم أول أغسطس سنة ١٩٣٧

- (٢) مبلغان الفرق بينهما ٥٠٠ جنيه أودعا في مصرفين أحدهما بسعر ٤ ٪ /
والآخر بسعر ٥ ٪ / فكان الربح البسيط لأحدهما لأى زمن يساوى الربح
البسيط للآخر في نفس الزمن فأوجد المبلغين .
- (٣) اقترض رجل مبلغ ١٠٠٠٠ جنيه بسعر ٤ ٪ / في السنة وكان يسدد في نهاية
كل سنة ٨٠٠ جنيه منها أرباح الدين في مدة السنة والباقي من أصل
الدين أوجد ما آل إليه الدين في نهاية ٣ سنوات .
- (٤) مملكة مدينة بمبلغ ٥٨٩٠٠٠٠ و ٠٠٠ جنيه تدفع عليها ربها سنوياً بسعر
٥ ٪ / فإذا كانت تسدد للدائنين سنوياً ٤٠٠٠٠ و ٠٠٠ جنيه جزء منها
أرباح للدين في تلك السنة والباقي لاستهلاك جزء من الدين فأوجد ما آل
إليه الدين في نهاية ٣ سنوات .
- (٥) اشترى تاجر بضاعة بمبلغ ١٠٥٠ جنيهًا باعها بعد شرائها بمدة ٦ شهور بمبلغ
٨٦٧ جنيهًا أوجد مقدار خسارته إذا علم أنه كان يستطيع استثمار ثمن
الشراء بسعر ٨ ٪ / في السنة
- (٦) مع رجل ٤٠٠٠ جنيه أقرض منها ٥٠٠ جنيه بسعر $\frac{1}{4}$ ٪ / في السنة
٦٠٠٠ جنيه بسعر ٤ ٪ / في السنة فما هو السعر الذى يجب أن يقرض
به الباقي حتى يكون ربحه الكلى معادلاً $\frac{1}{4}$ ٪ / من مبلغه الأصيل ؟
- (٧) الربح البسيط لمبلغ معين بسعر $\frac{1}{4}$ ٪ / في السنة لمدة سنتين ، ٤ أشهر
يزيد ٦٣ جنيهًا على ربحه البسيط بسعر ٥ ٪ / في مدة ٩ أشهر وسنة واحدة
فما هو هذا المبلغ ؟
- (٨) أودع مبلغان من المال مجموعهما $\frac{1}{4}$ ١٩٤٦ جنيهًا أصغرها بسعر ٤ ٪ /
في السنة والأكبر بسعر $\frac{1}{4}$ ٪ / في السنة وفي نهاية ١٨ شهرًا كان مجموع
ربحيهما $\frac{39}{100}$ ١٢٥ جنيهًا أوجد هذين المبلغين .
- (٩) اشترى رجل منزلاً و ٥ أفدنة بسعر ٤٤٠٠ جنيهه وأجر المنزل بمبلغ ١٥٠ جنيهًا
في السنة وبني ثلاثة بيوت على الأرض التي اشتراها وبلغت تكاليف

بناء البيت الواحد ١٨٠٠ جنيه أوجد المبلغ الذى يجب أن يؤجر به البيت الواحد من البيوت الجديدة بحيث يحصل على ٥٪ أرباحاً سنوية من المبالغ التى صرفها بعد خصم $\frac{1}{4}$ الأيراد نظير الإصلاحات .

(١٠) مبلغان من المال الفرق بينهما ٥ جنيهات وضع الأكبر بسعر $\frac{1}{4} \cdot ٣$. والأصغر بسعر $\frac{1}{4} \cdot ٤$. فى السنة فإذا بلغت جملتهما فى نهاية سنة $\frac{3}{4} \cdot ٩٨$ جنيهاً فما المبلغان ؟

(١١) أعطى والد ابنه الأكبر فى يوم ٢٣ يونيه سنة ١٨٨٩ مبلغ ٣٠٠٠ جنيه وأعطى ابنه الثانى فى ٢٣ ديسمبر سنة ١٨٨٩ مبلغ ١٠٠٠ جنيه وتوفى هذا الرجل فى إبريل سنة ١٨٩١ تاركاً أمواله توزع بالتساوى بين أولاده الثلاثة على أن يدخل فى هذا التوزيع المبلغ الذى وضعه لكل من ولديه وربحه البسيط بسعر ٥٪ فى السنة حتى يوم تسوية الحساب فإذا عملت التسوية يوم ٢٣ يونيه سنة ١٨٩١ وكان المبلغ الذى تركه الرجل ٦٧٣٤ جنيهاً ، أوجد كم يكون نصيب الأولاد الثلاثة .

(١٢) أودع مبلغ بالربح البسيط لمدة $\frac{1}{4} \cdot ٣$ سنة فصارت جملته ٢٨٥ جنيهاً ، فإذا علم أن الربح البسيط يعادل $\frac{1}{10}$ من رأس المال فأوجد كلاً من السعر ورأس المال .

(١٣) مبلغ تصير جملته بعد ١٦ سنة ضعف رأس المال ، فكم كان السعر الذى حسب به الربح البسيط ؟

(١٤) مبلغ تصير جملته فى ١٠ سنوات بالربح البسيط بسعر $\frac{1}{4} \cdot ٣$. فى السنة ٥٠٦ جنيهات إنكليزية و ١٥ شلناً و $\frac{1}{4}$ بنساً ، أوجد عدد السنين التى تمر بعد ذلك حتى تصير الجملة ٧٠٣ جنيهات إنكليزية و ١٦ شلناً و $\frac{3}{4}$ بنساً

(١٥) فى أول يناير سنة ١٩٣٥ أودع شخص ٣٦٥٠ جنيهاً فى مصرف بسعر ٥٪ فى السنة ثم سحب أرباحه فى ٥ فبراير من السنة نفسها وفى يوم آخر أودع مبلغ ٢١٩٠ جنيهاً فى نفس المصرف بنفس السعر ثم سحب أرباحه

في ٦ سبتمبر من السنة نفسها فبلغ مجموع ربحيهما ٣٠ و ١ جنيهها فما تاريخ اليوم الذي أودع فيه المبلغ الثاني ؟

(١٦) أوجد تاريخ اليوم الذي أودعت فيه ٧٣٠٠ جنيهه بسعر ٥ ٪ في السنة يكون الربح البسيط في يوم ٨ مايو سنة ١٩٣٧ مبلغ ٨٠ جنيهًا

الربح المركب

١ — استخرج الجملة والربح من غير استعمال القانون :

٥٥ — إذا اقترض شخص مبلغًا من مصرف أو غيره فإنه يدفع فائدة تسمى الربح نظير انتفاعه بهذا القرض .

ويدفع الربح كل سنة أو كل نصف سنة أو كل ربع سنة على حسب الاتفاق بين الدائن والمدين . ويقدر عن وحدة الزمن بنسبة مئوية من المبلغ المقرض يقال لها « السعر »

إذا لم يدفع الربح بل أضيف كل سنة (أو نحوها) إلى رأس المال ليكون رأس مال جديد فحينئذ يسمى الربح مركبًا .

٥٦ — لنوضح الآن طريقة حساب الربح المركب والجملة ورأس المال بالأمنلة الآتية :

(مثال ١) ما هي الجملة التي يؤول إليها مبلغ ٦٢٥٠ جنيهًا إذا وضع في مصرف بالربح المركب بسعر ٤ ٪ في السنة لمدة ثلاث سنوات ؟

العمل

ربح الجنيه الواحد في السنة = ٠,٠٤ من الجنيه

∴ رأس المال الأصلي في السنة الأولى = ٦٢٥٠ جنيهًا

∴ ربحه في السنة الأولى = ٢٥٠ جنيهًا (وهو يساوى ٠,٠٤ × ٦٢٥٠)

∴ جملة المبلغ في نهاية السنة الأولى

أورأس المال للسنة الثانية = ٦٥٠٠ (بالجمع)
 ويكون ربحه في السنة الثانية = ٢٦٠ جنيهاً (وهو = ٠.٠٤×٦٥٠٠)
 ∴ جملة المبلغ في نهاية السنة الثانية

أورأس المال للسنة الثالثة = ٦٧٦٠ جنيهاً (بالجمع)
 ويكون ربحه في السنة الثالثة = ٢٧٠.٤ جنيهاً (وهو = ٠.٠٤×٦٧٦٠)
 ∴ بالجمع تكون الجملة في نهاية السنة الثالثة = ٧٠٣٠.٥ جنيهاً

٦ الربح المركب في المدة كلها = $٧٠٣٠.٥ - ٦٢٥٠ = ٧٨٠.٤$ جنيهاً
 ٥٧ — ملاحظات :

(١) الجملة في نهاية السنة الأولى هي رأس المال للسنة الثانية ، والجملة في نهاية السنة الثانية هي رأس المال للسنة الثالثة وهكذا .

(٢) الربح للسنة الأولى بسيط لأنه ربح رأس المال الأصلي ، أما الربح في السنة الثانية فمركب من ربح رأس المال الأصلي و ربح ربحه للسنة الأولى . والربح في السنة الثالثة مركب أيضاً من ربح رأس المال الأصلي و ربح أرباحه . وعلى ذلك نرى أن الربح يتزايد سنة فسنة تبعاً لزيادة رأس المال والفرق بين أى ربحين متتاليين هو ربح أولهما .

(٣) الفرق بين جملتين متتاليتين هو ربح أولاهما

(مثال ٢) أوجد ما يؤول إليه مبلغ ٢٥٠٠٠ جنيه بعد سنتين بسعر الربح المركب ٦ ٪ في السنة إذا كان الربح يحسب كل نصف سنة

العمل

[الجملة بالإجمال = $٢٥٠٠٠ \times ١.١٢ = ٢٨٠٠٠$ جنيه تقريباً]

السعر = ٦ ٪ في السنة أى ٣ ٪ في نصف السنة وعدد المدد = ٤

∴ رأس المال في المدة الأولى :

جنيه	جنيه	
	٢٥٠٠٠	=
وهو $٢٥٠٠٠ \times ٠,٠٣ =$	٧٥٠	= ربحه في المدة الأولى
		جملة المدة الأولى ورأس المال
	٢٥٧٥٠	= في المدة الثانية (بالجمع)
وهو $٢٥٧٥٠ \times ٠,٠٣ =$	٧٧٢,٥	= ربحه في المدة الثانية
		جملة المدة الثانية ورأس
	٢٦٥٢٢,٥	= المال في المدة الثالثة (بالجمع)
وهو $٢٦٥٢٢,٥ \times ٠,٠٣ =$	٧٩٥,٦٧٥	= ربحه في المدة الثالثة
		جملة المدة الثالثة ورأس المال
	٢٧٣١٨,١٧٥	= في المدة الرابعة (بالجمع)
وهو $٢٧٣١٨,١٧٥ \times ٠,٠٣ =$	٨١٩,٥٤٥٢٥	= ربحه في المدة الرابعة
		∴ الجملة الكلية في نهاية المدة = ٢٨١٣٧,٧٢٠٢٥
		= ٢٨١٣٧' جنيهاً و ٧٢٠ ملياً تقريبا

(مثال ٣) ما الفرق بين الربح المركب والربح البسيط لمبلغ ٤١٨,٦٢٥ جنيهاً بسعر ٣,٥٪ في السنة لمدة سنتين إذا علم أن الأرباح تضاف كل نصف سنة .

العمل

الأرباح تضاف ٤ مرات بسعر (٣,٥ ÷ ٢) ./. = ١,٧٥ ./. في كل مدة .
رأس المال في المدة الأولى = ٤١٨,٦٢٥ جنيهًا .

$$\left. \begin{array}{l} ٤١٨,٦٢٥ \times ٠,٠١ = ٤,١٨٦٢٥ \\ ٤١٨,٦٢٥ \times ٠,٠٠٧ = ٢,٩٣٠٣٨ \\ ٤١٨,٦٢٥ \times ٠,٠٠٠٥ = ٠,٢٠٩٣١ \end{array} \right\} = \text{ربحه في المدة الأولى} = ٧,٣٢٥٩٤$$

رأس المال للمدة الثانية = ٤٢٥,٩٥٠٩٤

$$\left. \begin{array}{l} ٤٢٥,٩٥٠٩٤ \\ ٢,٩٨١٦٥ \\ ٠,٢١٢٩٨ \end{array} \right\} = \text{ربحه في المدة الثانية}$$

رأس المال للمدة الثالثة = ٤٣٣,٤٠٥٠٨

$$\left. \begin{array}{l} ٤٣٣,٤٠٥٠٨ \\ ٣,٠٣٣٨٤ \\ ٠,٢١٦٨٠ \end{array} \right\} = \text{ربحه في المدة الثالثة}$$

رأس المال للمدة الرابعة = ٤٤٠,٩٨٩٦٧

$$\left. \begin{array}{l} ٤٤٠,٩٨٩٦٧ \\ ٣,٠٨٦٩٣ \\ ٠,٢٢٠٤٩ \end{array} \right\} = \text{ربحه في المدة الرابعة}$$

الجملة الكلية = ٤٤٧,٧٠٦٩٨

٦. رأس المال = ٤١٨,٦٢٥

٧. الربح المركب = ٣٠,٠٨١٩٨

٨. الربح البسيط = ٢٩,٣٠٣٧٥ = $\frac{٤١٨,٦٢٥}{١} \times ٢ \times ٣,٥$

٩. الفرق = ٠,٧٧٨٢٣ = ٧٧٨ مليا الجواب

تمرين ٢٥

- (١) أوجد ما يتوَل إليه مبلغ
- (١) ٦٨٠٠ جنيه بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ في السنة
- (ب) ٢٣٨٠ جنيهًا بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ في السنة
- (ح) ٢٤٠٠ جنيه بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ في السنة
- (د) ٥٧٦٠ جنيهًا بعد سنتين بسعر الربح المركب ٥ ٪ في السنة
- (٢) أوجد الربح المركب لمبلغ ٢٤٠٠ جنيه في مدة ٤ سنوات بسعر الربح ٦ ٪ في السنة
- (٣) أوجد الربح المركب لمبلغ ٤٥٠ جنيهًا في مدة ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٤ ٪ في السنة
- (٤) أوجد الربح المركب لمبلغ ٥١٦ جنيهًا في مدة سنتين بسعر الربح المركب ٤ ٪ في السنة مع العلم بأنه يحسب كل نصف سنة
- (٥) وضع رجل ٣٦٠٠ جنيه في مصرف سعر الربح فيه ٢,٧٥ ٪ في السنة فإذا ترك الرجل أرباحه تنضم في نهاية كل سنة إلى رأس المال ووضع في نهاية السنة الأولى على ماله في المصرف مبلغًا آخر قدره ٨١ جنيهًا وسحب في نهاية السنة الثانية ١٥٦ و ٧٥ من الجنيهات فما مقدار ما للرجل في المصرف في نهاية السنة الثالثة ؟
- (٦) أوجد الفرق بين الربح المركب والربح البسيط لمبلغ ٢٥٠٠ جنيه في مدة سنتين بسعر الربح المركب ٤ ٪
- (٧) أوجد الفرق بين الربحين المركب والبسيط لمبلغ ٢٠٠٠ جنيه في مدة ١٦ شهرًا بسعر ٦ ٪ في السنة مع العلم بأن الأرباح تحسب كل ٤ أشهر
- (٨) يدفع شخص في مصرف التوفير ٤٠٠ جنيه في أول كل سنة لمدة ٤ سنوات فما مقدار ما للرجل في المصرف في نهاية السنة الرابعة إذا كان سعر الربح المركب ٣ ٪ في السنة ؟

٢ — استخراج الجملة ورأس المال بالقانون

٥٨ — يمكن الحصول على الجملة في حساب الربح المركب بطريقة أخرى

وذلك بأن نبحت أولاً عما تتول إليه الوحدة من رأس المال في المدة المعلومة بالسعر المفروض ثم نضرب الناتج في عدد وحدات رأس المال هكذا

(مثال ١) ما هي الجملة التي يتول إليها مبلغ ٦٨٠٠ جنيه بسعر الربح المركب

٥ ٪ في السنة لمدة ٣ سنوات ؟

العمل

∴ ربح الجنيه الواحد من رأس المال في السنة = ٠.٠٥ جنيه

∴ ما يتول إليه الجنيه الواحد في سنة = ١ + ٠.٠٥ = ١.٠٥ جنيه

أى أن جملة الجنيه في نهاية السنة الأولى = ١.٠٥ جنيه

= رأس مال السنة الثانية

∴ ما يتول إليه الجنيه من رأس المال في نهاية السنة الثانية

= رأس مال السنة الثانية × جملة الجنيه في سنة

= ١.٠٥ × ١.٠٥ = ١.١٠٢٥ جنيه

= رأس مال السنة الثالثة

∴ ما يتول إليه الجنيه من رأس المال في نهاية السنة الثالثة

= رأس مال السنة الثالثة × جملة الجنيه في سنة

= ١.١٠٥ × ١.٠٥ = ١.١٦٠٢٥ جنيه

∴ ما يتول إليه مبلغ ٦٨٠٠ جنيه في نهاية المدة

= ١.١٦٠٢٥ × ٦٨٠٠

= ١.١٥٧٦٢٥ × ٦٨٠٠

= ٧٨٧١٨٥ جنيه

(٤) جملة مبلغ ٧٠٠٠٠٠٠ جنيه لمدة سنتين بسعر الربح المركب ٦٪ في السنة ويحسب كل ٦ أشهر .

(٥) الربح المركب لمبلغ ٨٠٠ جنيه لمدة سنتين بسعر ٣ و ٢٥٪ في السنة .
٦٠ — حساب رأس المال .

(مثال ٣) ما هو المبلغ الذي بلغت جملته ٥٨٤٩ و ٢٩٢٨ جنيهًا بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٤٪ في السنة ؟

العمل

$$ح = م^2$$

$$٥٨٤٩ و ٢٩٢٨ = م \times ١٠٤ \text{ جنيه}$$

$$ومنه م = ٥٨٤٩ و ٢٩٢٨ \div ١٠٤ \text{ جنيه}$$

$$= ٥٠٠٠ \text{ جنيه}$$

تنبيه : على الطالب أن يبين في كراسته عمليات الضرب والقسمة في حل جميع المسائل .

(مثال ٤) ما هو المبلغ الذي يربح ربحاً مركباً قدره ٨٨ و ٧٤ جنيهًا في مدة سنتين بسعر ٨٪ في السنة

العمل

$$١٠٠ \text{ جملة الجنيه في سنتين} = ١٠٨ = ١٦٦٤ \text{ جنيه}$$

$$٠٠ \text{ ربح الجنيه في سنتين} = ١٦٦٤ - ١ = ١٦٦٤ \text{ من الجنيه}$$

$$٠٠ \text{ المبلغ المطلوب} = ٧٤ و ٨٨ \div ١٦٦٤ = ٤٥٠ \text{ جنيهًا}$$

تمرين ٢٧

(١) ما رأس المال الذي آلت جملته إلى ٦٧٢ و ٤٧٨٠ جنيهًا بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٤٪ في السنة ؟

(٢) ما رأس المال الذى صارت جملته ٢٤٠ و ٧٧٧٩ جنيهًا بعد ٤ سنوات بسعر الربح المركب ٥ ٪ فى السنة ؟

(٣) ما رأس المال الذى صارت جملته ٨٨٨ و ٥٠٦١ جنيهًا بعد ٣ سنوات بسعر الربح المركب ٤ ٪ فى السنة

(٤) ما رأس المال الذى إذا ربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ فى السنة تصير جملته بعد سنة ونصف ٧٩٥٩ و ٠٦ من الجنيهات مع العلم بأن الأرباح تحسب كل ستة أشهر ؟

(٥) ما رأس المال الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٢٨ و ٩٧٩ بعد ٣ سنوات بسعر ٢ ٪ فى السنة الأولى ٥ و ٣ ٪ فى السنة الثانية ٤ و ٤ ٪ فى السنة الثالثة

(٦) ما رأس المال الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٤٨ و ٢٤ جنيهًا بعد سنتين بسعر ٤ ٪ فى السنة ؟

(٧) ما رأس المال الذى يربح ربحاً مركباً قدره ٤٨ و ٩٣ جنيهًا بعد ٣ سنوات بسعر ٤ ٪ فى السنة ؟

٦١ — أمثلة متنوعة على الربح المركب :

(مثال ٥) أودع مبلغان متساويان فى مصرف بسعر ٦ ٪ فى السنة لمدة سنتين وكانت الأرباح تضاف للأول سنوياً وتضاف للثانى كل نصف سنة وبذلك زاد ربح المبلغ الثانى على ربح المبلغ الأول ٨٨١ و ١٩٠ جنيهًا فى نهاية المدة فما قيمة كل من المبلغين ؟

العمل

٠٠ جملة الجنيه فى الحالة الأولى = ١ و ٠٦ جنيه

٦ » » » » الثانية = ٣ و ١ »

∴ فرق جملتي الجنيه في المدة كلها .

وهو فرق الربحين أيضاً = ١٠٣ - ١٠٦ من الجنيه

$$= ١٠٣٦ - ١٠٢٥٠٨٨١ \text{ من الجنيه}$$

$$= ٠٠٠١٩٠٨٨١ \text{ من الجنيه}$$

$$\frac{١٩٠٨٨١}{٠٠٠٩٠٨٨١} = \text{المبلغ المطلوب}$$

$$= ١٠٠٠٠٠ \text{ جنيه}$$

(مثال ٦) وضع مبلغ في مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر معين فإذا كانت

جملته بعد مضي ٣ سنوات ٧٠٣٠٤ جنيهًا وبعد ٤ سنوات

٧٣١١٦١٦ جنيهًا فما السعر وما المبلغ؟

العمل

$$(١) ∴ \text{ربح رأس مال السنة الرابعة} = ٧٣١١٦١٦ - ٧٠٣٠٤$$

$$= ٢٨١٢١٦ \text{ جنيهًا}$$

$$\text{رأس مال السنة الرابعة} = \text{الجملة بعد ٣ سنوات}$$

$$= ٧٠٣٠٤ \text{ جنيهًا}$$

$$∴ \text{ربح الجنيه الواحد في السنة الرابعة} = ٢٨١٢١٦ \div ٧٠٣٠٤$$

$$= ٠٠٤ \text{ من الجنيه}$$

$$= ٠.٤ \text{ في السنة} \quad ∴ \text{السعر}$$

$$(ب) ∴ \text{جملة الجنيه في ٣ سنوات} = ١٠٤$$

$$= ١٢٤٨٦٤ \text{ جنيه}$$

$$∴ \text{المبلغ المطلوب} = ١٢٤٨٦٤ \div ٧٠٣٠٤$$

$$= ٦٢٥٠ \text{ جنيهًا}$$

(مثال ٧) ما المبلغ الذي يبلغ الفرق بين ربحيه المركب والبسيط لمدة ٣ سنوات

بسر ٥٪ في السنة ٧٦٢٥ من الجنيهات؟

العمل

٠. الربح المركب للجنيه الواحد في ٣ سنوات $= ١٠٥٠٠ - ١$ من الجنيه
 » $= ٠٠٧٦٢٥٠٠$
 » $= ٠٠٥٠٠ \times ٣$ الربح البسيط له في المدة نفسها
 » $= ٠٠١٥٠٠$
 » $= ٠٠١٥٧٦٢٥ - ٠٠١٥٠٠$ الفرق ربحي الجنيه الواحد
 » $= ٠٠٠٧٦٢٥٠٠$
 » $= ٠٠٠٧٦٢٥٠٠ \div ٧٠٦٢٥٠٠$ المبلغ المطلوب
 » $= ١٠٠٠$ جنيه

(مثال ٨) اقترض رجل مبلغ ٩٦ و ١٨٧٢ جنيهاً بسعر الربح المركب ٤ ٪ في السنة وتعهّد بسداد القرض وأرباحه على ثلاث دفعات متساوية ، الأولى في نهاية السنة الأولى والدفعة الثانية في نهاية السنة الثانية والثالثة في نهاية السنة الثالثة فما قيمة الدفعة الواحدة ؟

العمل

- نفرض أن قيمة كل دفعة ١ جنيه .
 ٠. رأس مال الدفعة الأولى $= \frac{١}{١٠٤}$ من الجنيه
 » $= \frac{١}{٢(١٠٤)}$ رأس مال الدفعة الثانية
 » $= \frac{١}{٣(١٠٤)}$ رأس مال الدفعة الثالثة
 مجموع رؤوس الأموال للدفعات الثلاث .

$$= \frac{١}{٢(١٠٤)} + \frac{١}{٣(١٠٤)} + \frac{١}{١٠٤}$$

$$= \frac{٢١٢١٦}{٣(١٠٤)}$$
 وهذا ما يعادل المبلغ الأصلي
 وهو ٩٦ و ١٨٧٢ جنيهاً

$$\begin{aligned} \therefore \text{قيمة الدفعة} &= \frac{10.4 \times 187296}{291216} \text{ جنيهاً} \\ &= 600 \times (10.4) \text{ جنيهاً} \\ &= 674918 \text{ من الجنيهاً} \end{aligned}$$

(مثال ٩) وضع شخص مبلغاً في مصرف ليربح ربحاً مركباً فكان ربح السنة الثانية ٥٢ جنيهاً وربح السنة الثالثة ٥٤ و٠٨ جنيهاً فما السعروما المبلغ ؟

العمل

$$\begin{aligned} \text{ربح مبلغ } 52 \text{ جنيهاً في مدة سنة} &= 54.08 - 52 = 2.08 \text{ من الجنيهاً} \\ \text{السعر} &= \frac{2.08}{52} \times 100 = 4\% \\ \text{نفرض أن رأس مال الشخص جنيته.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{ربح الجنيته في السنة الثانية} &= 10.4 \times 0.04 = 0.416 \text{ من الجنيهاً} \\ \text{رأس المال الأصلي} &= \frac{52}{0.416} = 1250 \text{ جنيهاً} \end{aligned}$$

(مثال ١٠) ما المبلغ الذي ربحه البسيط في ٣ سنوات ٦٠ جنيهاً وربحه المركب في مدة سنتين ٤٠ و٨ من الجنيهاً ؟

العمل

$$\begin{aligned} \text{ربح السنة الأولى} &= 60 \div 3 = 20 \text{ جنيهاً} \\ \text{ربح السنة الثانية} &= 40.8 - 20 = 20.8 \text{ جنيهاً} \\ \text{ربح مبلغ } 20 \text{ جنيهاً في سنة} &= 20.8 - 20 = 0.8 \text{ من الجنيته} \\ \therefore \text{ربح الجنيته الواحد في السنة} &= \frac{0.8}{20} \text{ من الجنيته} \\ \text{فتكون } 20 \text{ جنيهاً ربحاً في السنة لمبلغ } &= \frac{20}{0.8} \times 0.8 = 500 \text{ جنيته} \end{aligned}$$

تمرين ٢٨

(مسائل متنوعة على الربح المركب)

(١) وضع مبلغ من المال في مصرف ليربح ربحاً مركباً لمدة ٣ سنوات وكان سعر الربح في السنة الأولى ٠.٣٪ وفي السنة الثانية ٠.٤٪ وفي السنة الثالثة ٠.٥٪ فإذا علم أن هذا الربح المركب للمبلغ يزيد بمقدار ٣٥٧ قرشاً على ربحه البسيط لمدة ٣ سنوات بسعر ٠.٤٪ في السنة فأوجد المبلغ .

(٢) اقترض رجل مقدراً من المال بالربح المركب لمدة ٣ سنوات وكان السعر للسنة الأولى ٠.٦٪ في السنة وفي السنة الثانية ٠.٥٪ في السنة وفي السنة الثالثة ٠.٤٪ في السنة فإذا كانت جملة المبلغ الذي دفعه في نهاية السنة الثالثة هي ١٤٤٦ و ٩ من الجنيهات فما هو المبلغ المقترض ؟

(٣) ما هو المبلغ الذي إذا وضع بالربح البسيط لمدة ٣ سنوات بسعر ٠.٥٥٪ في السنة تزيد جملة ١٨ $\frac{٧}{١٦}$ من الجنيهات على ما لو وضع بالربح المركب بسعر ٠.٥٪ في السنة للمدة عينها .

(٤) الفرق بين الربح المركب والبسيط لمبلغ ما لمدة سنتين بسعر ٥.٤٪ في السنة هو ١٦٨٠ و ٧٥ من الجنيهات فما المبلغ ؟

(٥) وضع مبلغ في مصرف ليربح ربحاً مركباً لمدة ٤ سنوات بسعر ٠.٥٪ في السنة وكان الربح في السنة الثالثة يزيد عليه في السنة الثانية بمقدار ٢٦ و ٢٥ من الجنيهات فما مقدار الربح الكلى وما المبلغ ؟

(٦) وضع مبلغ في مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٠.٤٪ في السنة فإذا كان الربح في السنة الثالثة يزيد عليه في السنة الأولى بمقدار ٦٣٧٥ و ٦ من الجنيهات فما المبلغ ؟

(٧) إذا كانت جملة مبلغ ما بعد سنتين هي ٩٢٦ و ١ من الجنيهاً وبعد ثلاث سنوات هي ٩٧٢ و ٤٠٥ من الجنيهاً بحساب الربح المركب فما هو السعر وما المبلغ؟

(٨) إذا كانت جملة مبلغ ما بعد ٣ سنوات بالربح المركب هي ١٠٢٩٠ من الجنيهاً وفي أربع سنوات ١٠٨٠ و ٤٥ من الجنيهاً فما هو السعر وما المبلغ؟

(٩) ما هو المبلغ الذي لو ربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ في السنة لكان ربحه في سنتين ٥٣٠ و ٤ من الجنيهاً؟

(١٠) ما هو المبلغ الذي لو ربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ في السنة لكان ربحه في السنة الثالثة ١٨٣٧ و ٥ من الجنيهاً؟

(١١) مبلغ وضع ربحه بسعر ٣ ٪ في السنة وخمسه بسعر ٣ و ٥ ٪ في السنة والباقي بسعر ٤ ٪ في السنة فبلغ ربحه المركب بعد سنتين ٨٦ و ٧٣ من الجنيهاً فكم كان ذلك المبلغ؟

(١٢) رأس مال ١ يزيد على رأس مال ب بمقدار $\frac{1}{4}$ من رأس مال ب فإذا وضع ب رأس ماله بالربح المركب لمدة ٣ سنوات بسعر ٥ ٪ في السنة فما سعر الربح البسيط الذي يضع به ١ رأس ماله حتى تتساوى المجمتان في نهاية الثلاث سنوات؟

(١٣) قسم مبلغ ٦٣٧٥ جنيهاً إلى جزئين بحيث إذا وضع كل منهما في مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٤ ٪ في السنة تكون جملة الأول بعد ٣ سنوات مساوية جملة الثاني بعد سنتين.

(١٤) اقترض رجل مبلغاً قدره ٢٠٣٠ جنيهاً على أن يسدده هو وأرباحه المركبة على دفعتين متساويتين يدفع الأولى في نهاية السنة الأولى ويدفع الثانية في نهاية السنة الثانية من اقتراضه للمبلغ فإذا كان سعر الربح المركب ٣ ٪ في السنة فما مقدار كل دفعة؟

- (١٥) اقترض مبلغ ودفع هو وأرباحه المركبة على دفعتين متساويتين في سنتين متتاليتين من تاريخ القرض وكان مقدار الدفعة الواحدة ٨٨٢ جنيهاً فإذا كان السعر ٥ ٪ في السنة فما المبلغ المقترض ؟
- (١٦) أوصى والد أن تقسم تركته البالغ قدرها ١٥٤٥٤٥ جنيهاً بين أولاده الثلاثة الذين أعمارهم ١٧ و ١٨ و ١٩ سنة بحيث إذا وضع كل منهم نصيبه في مصرف ليربح كل منهم ربحاً مركباً بسعر ٣ ٪ في السنة تكون المبالغ التي يأخذونها عند بلوغ كل منهم سن ٢١ سنة متساوية فما نصيب كل منهم ؟
- (١٧) وضع مبلغ ٧٨١٢٥ جنيهاً في مصرف لمدة سنتين بسعر ٤ ٪ في السنة بحساب الربح المركب فما مقدار نقص الربح في حالة إضافته سنوياً عنه في حالة إضافته كل نصف سنة ؟
- (١٨) ما رأس المال الذي لو وضع ليربح ربحاً مركباً لكان ربحه في السنة الثانية ٤٢٠ جنيهاً وفي السنة الثالثة ٤٤١ جنيهاً ؟
- (١٩) ما المبلغ الذي بلغ ربحه المركب في السنة الثانية ٣١٨ جنيهاً وفي السنة الثالثة ٣٣٧,٠٨ جنيهاً ؟
- (٢٠) ما المبلغ الذي بلغ ربحه البسيط في مدة ٣ سنوات ٣٦٠ جنيهاً و ربحه المركب في سنتين ٢٤٦ جنيهاً ؟
- (٢١) ما المبلغ الذي بلغ ربحه البسيط في مدة سنتين ٣٠٠ جنيه و ربحه المركب بنفس السعر و بنفس المدة ٣٠٩ جنيهات ؟
- (٢٢) إذا كان الربح المركب لمبلغ ما في سنتين ٦١٢ جنيهاً وكانت نسبة ربح السنة الأولى إلى ربح السنة الثانية تساوى ٢٥ : ٢٦ فما السعر وما المبلغ وما جملته بعد ٣ سنوات ؟
- (٢٣) وضع رجل مبلغاً من المال في مصرف بسعر ٥ ٪ في السنة واضطر في آخر السنة الأولى أن يسحب ٢٠٠ جنيه وأبقى الباقي بسعر ٦ ٪ في

السنة وفي نهاية الثانية أضاف ٧٦٠ جنيهاً لما له في المصرف وصادف أن ارتفع السعر وقتئذ إلى ٨ ٪ في السنة فإذا أصبح له في آخر السنة الثالثة ٥٤٠٠ جنيهاً فما مبلغه الأصلي ؟

(٢٤) أودع رجل في مصرف مبلغاً من المال ليربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ في السنة وبعد مضي سنتين أضاف لما له في المصرف ٧٩٥ جنيهاً وصادف أن تغير السعر فصار ٥ ٪ في السنة وبعد سنة من ذلك سحب ٣٦٥ جنيهاً وقد نزل السعر حينئذ فصار ٤ ٪ في السنة وبعد مضي ١ ٪ سنة من بدء الإيداع وجد أن ما صار له في المصرف ٢٤٠ و ٢٩٧٠ جنيهاً فكم كان مبلغه ؟

(٢٥) وضع مبلغ في مصرف بسعر الربح المركب ٤ ٪ في السنة فزادت أرباحه المركبة في آخر السنة الثالثة على أرباحه المركبة في آخر السنة الثانية بمقدار ٨٦,٥٢٨ جنيهاً فما المبلغ ؟

(٢٦) بلغت جملة مبلغ وضع في مصرف بالربح المركب لمدة ٢ ٪ سنة ٢٧٥٨,٠٨ جنيهاً فإذا علم أن ربحه في النصف السنة الأخير ٥٤٠,٨ و ٥٤٠ جنيهاً فما المبلغ وما السعر (الأرباح تضاف سنوياً)

(٢٧) أودع رجل مبلغاً من المال في مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٥ ٪ في السنة وبعد سنتين أضاف ١٨٠ جنيهاً وترك كل ما أصبح له بسعر ٤ ٪ في السنة وفي آخر السنة الثالثة من بدء الإيداع سحب ٨٦٠ جنيهاً مما صار له في المصرف وقد تغير السعر يوم السحب فأصبح ٦ ٪ في السنة والمطلوب معرفة المبلغ الأصلي إذا علم أن جملة ما أصبح له في المصرف بعد ٤ ٪ سنة من بدء الإيداع يساوي ٩٢٨٠ و ٣ جنيهاً .

الخطيطة الخارجية أو الخطيطة التجارية :

٦٢ — تمهيد : في المعاملات التجارية لا تدفع الديون عادة نقداً بل تدفع بعد أجل معين ويحرر التاجر على نفسه ما يسمى وثيقة أو كميالة يتعهد فيها بالدفع في موعد معين .

مثلاً : إذا اشترى خياط أقمشة من تاجر وكانت قيمة هذه الأقمشة ٢٠٠ جنيه فإن ما يتبع عادة هو أن يتسلم الخياط البضاعة ويتعهد بدفع القيمة بعد مدة معينة ولتكن ستة أشهر مثلاً ويكتب على نفسه وثيقة (كميالة) على الصورة الآتية :

مليم
جنيه ٢٠٠

مأثنان من الجنيهات فقط

في يوم ٢٥ فبراير سنة ١٩٣٦ ندفع بموجب هذه الوثيقة إلى تحت إذن التاجر (فلان) المبلغ المرقوم بعاليه وقدره مأثنان جنيه مصري لا غير ممن بضاعة تسلمناها والدفع بالقاهرة والتقاضى أمام المحاكم الأهلية وإذا تأخرنا عن السداد في الميعاد المحدد نكون ملزمين بدفع المبلغ مع الفوائد باعتبار المائة ٩ في السنة من تاريخ الاستحقاق لغاية تمام السداد وللدائن الحق في تحويل هذا المبلغ لمن يشاء بدون توقف على رضائنا ؟

تحريراً في ٥ أغسطس سنة ١٩٣٥

الخياط

(فلان)

ضمان المبلغ الموضح بهذه علينا في الميعاد وبعد الميعاد بدون إحالة على المضمون وللدائن المذكور الحق في مطالبتنا وحدنا دون مطالبة المدين أو مطالبة معنا وهذا ضمان علينا للاعتماد ؟

في تاريخه ٢٥ أغسطس سنة ١٩٢٥

الضامن

(فلان)

وهذه الوثيقة يجب أن تسدد في ٢٥ فبراير المحدد للتسديد (وفي بعض الأحوال يسمح للمدين بمهلة قدرها ٣ أيام) .

٦٣ — ويلاحظ أن أهم النقاط التي يعنى بذكرها في الوثيقة هي ما يأتي :

(١) اسم الدائن .	(٥) موعد الدفع .
(٢) اسم المدين .	(٦) مكان الدفع .
(٣) اسم الضامن .	(٧) التصريح بتحويل الدين .
(٤) مقدار الدين .	(٨) جهة التقاضى .

وبعد تسليم الوثيقة يكون لتاجر الأقمشة إحدى الطريقتين للتصرف فيها :
الأولى : أن يحتفظ بالوثيقة حتى الموعد المحدد ثم بردها للخياط مقابل تسلم المبلغ فوراً .

والثانية : أن يبيعها لأى مصرف في أى تاريخ قبل الموعد المحدد . فإذا فرض أنه حولها إلى مصرف قبل موعدها بأربعة شهور مثلاً فإن المصرف لا يدفع له كل المبلغ المكتوب في الوثيقة بل يخصم منها مبلغاً بسعر معين عن الأربعة الأشهر الباقية وذلك نظير انتظاره هذه المدة فإذا اعتبر السعر ٣ ٪ في السنة فإن المصرف يخصم من الوثيقة $200 \times \frac{3}{100} \times \frac{4}{12} = 2$ جنيه ويعطى التاجر $200 - 2 = 198$ جنيهاً ويسمى المبلغ الذى يخصم بهذه الطريقة (٢ جنيه) بالخطيطة التجارية أو الخطيطة الخارجية^(٢) ويسمى هذا المبلغ المكتوب في الوثيقة (٢٠٠ جنيه) القيمة الاسمية لها والمبلغ الذى تسلمه التاجر ١٩٨ جنيهاً القيمة الحالية التجارية .

وهاك صورة من صور الوثائق المستعملة في الأعمال التجارية .

(١) وهاك نوع آخر من الخطيطة يسمى الخطيطة الداخلية ولكنها غير مستعملة عملياً ولذلك صرف النظر عن شرحها .

٤٠٤٠٠ قروش صحيحة أميرية

فقط مبلغ وقدره أربعة وأربعون ألفاً واربعمائة قرش لا غير

في يوم أول يناير سنة ١٩٣٥ ندفع بموجب هذه الوثيقة إلى وتحت إذن التامير (ب)

المبلغ المرقوم بعاليه وقدره أربعة وأربعون ألفاً واربعمائة قرش لا غير

من بمصاعير تسلمناها والدفع بالقاهرة والتقاضى أماسم المحاكم الأهلية وإذا تأخرنا عن السداد في الميعاد المحدود نكون ملزمين بدفع المبلغ مع الفوائد باعتبار المائة تسعة في السنة من تاريخ الاستحقاق لغاية تمام السداد وللمائى الحق في تحويل هذا المبلغ لمن يشاء بدون توقف على رضائنا من التامير

(١) نحريراً في أول أكتوبر سنة ١٩٣٤

ضمان المبلغ الموضح بهذا علينا في الميعاد وبعد الميعاد بدون إحالة على المضمون وللمائى المذكور الحق في مطالبتنا وحدنا دون مطالبة المدين أو مطالبة معنا وهذا ضمان علينا للاعتداد من الضامون (ج)

في تاريخ

(مثال ٣) ما القيمة الاسمية لوثيقة تستحق الدفع بعد ٣ أشهر إذا كانت قيمتها الحالية التجارية ٢٥٨٧ جنيهاً بسعر الخطيطة ٢ ٪ في السنة ؟

العمل

∴ ح . خ للجنه في المدة المفروضة = $0.02 \times \frac{3}{12} = 0.005$ من الجنه

∴ القيمة الحالية التجارية للجنه الواحد = $1 - 0.005 = 0.995$ »

∴ القيمة الاسمية المطلوبة = $2587 \div 0.995 = 2600$ جنيه

تمرين ٢٩

(١) ما الخطيطة التجارية والقيمة الحالية التجارية

(١) لوثيقة بمبلغ ٧٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد ٧٣ يوماً إذا كان سعر الخطيطة $\frac{3}{4}$ ٪ في السنة ؟

(ب) لوثيقة بمبلغ ١٨٦٥ جنيهاً تستحق الدفع بعد ٣ أشهر إذا كان سعر الخطيطة ٥ ٪ في السنة ؟

(ج) لوثيقة بمبلغ ٣٧٣ جنيهاً تستحق الدفع بعد ٦ أشهر إذا كان سعر الخطيطة ٥ ٪ في السنة ؟

(٢) حجزت الخطيطة التجارية لوثيقة تستحق الدفع بعد ١٤٦ يوماً بسعر ٨٥ ٪ في السنة فكانت ٤٤٢ قرشاً فما هي القيمة الاسمية للوثيقة ؟

(٣) وثيقة تستحق الدفع بعد ٩ أشهر حجزت خطيطةها التجارية بسعر ٨ ٪ في السنة فكانت ٢٤٠ قرشاً فما هي قيمتها الاسمية ؟

(٤) حجزت الخطيطة التجارية لوثيقة تستحق الدفع بعد ١٠٠٠ يوم بسعر ٤٥ ٪ في السنة فكانت ١٨٩ قرشاً فما هي قيمتها الحالية التجارية ؟

(٥) ما القيمة الاسمية لوثيقة تستحق الدفع بعد ٨ أشهر إذا بلغت قيمتها الحالية التجارية ٥٦٨ جنيهاً بسعر الخطيطة ٨ ٪ في السنة ؟

(٦) وثيقة تستحق الدفع بعد ٢٩٢ يوماً بيعت بمبلغ ٤١٧٦ قرشاً بعد خصم الحطيطة التجارية بسعر ٩ ٪ في السنة فما هي قيمتها الاسمية ؟

(٧) وثيقة تستحق الدفع في يوم ١٤ أغسطس سنة ١٩٣٢ بيعت في يوم ٨ يناير من السنة نفسها بمبلغ ٨٧٣٠ قرشاً بعد أن خصمت حطيطةها التجارية بسعر ٥ ٪ في السنة فكم كانت قيمتها الاسمية ؟

(٨) وثيقة تستحق الدفع في ٢ أغسطس سنة ١٩٣٣ بيعت في ٩ مارس من السنة نفسها بمبلغ ٥٧٩٦ جنيهاً بعد خصم حطيطة تجارية بسعر ٨٥ ٪ في السنة فما مقدار الحطيطة ؟

(مثال ٤) وثيقة بمبلغ ٨٥٠ جنيهاً حجرت حطيطةها التجارية بسعر ٤ ٪ في السنة فكانت ١٨ جنيهاً فما هي المدة الباقية على استحقاق الوثيقة ؟

العمل

٠٠ ربح الجنيه الواحد في سنة = ٠٠٤ من الجنيه

٠٠ ربح مبلغ الوثيقة في سنة = ٠٠٤ × ٨٥٠ = ٣٤ جنيهاً

٠٠ المدة الباقية على استحقاقها = ١٧ ÷ ٣٤ = ١ سنة أي ٦ أشهر

(مثال ٥) إذا كانت الحطيطة التجارية لوثيقة بمبلغ ٥٤٠ جنيهاً تستحق الدفع

بعد ٤ أشهر هي ٩ جنيهاً فما هو سعر الحطيطة ؟

العمل

٠٠ ربح الجنيه الواحد في ٤ أشهر = ٩ ÷ ٥٤٠ = ١ ٪ من الجنيه

٠٠ ربح الجنيه الواحد في سنة = ١ ٪ × ١٢ = ٠٠٥ من الجنيه

٠٠ السعر = ٥ ٪ في السنة

تمرين ٣٠

- (١) الخطة التجارية لوثيقة بمبلغ ٢٥٠٠ جنيه هي ٧٥ جنيهاً فإذا كان السعر ٩٪ في السنة فما هي المدة الباقية على استحقاق الوثيقة؟
- (٢) الخطة التجارية لوثيقة بمبلغ ٤٢٠٠ جنيه هي ٨٤ جنيهاً فإذا كان السعر ٨٪ في السنة فما هي المدة الباقية على استحقاق الوثيقة؟
- (٣) أوجد اليوم الذي بيعت فيه وثيقة تستحق الدفع في يوم ٨ مايو سنة ١٩٣٣ إذا كانت قيمتها الاسمية ٧٣٠٠ جنيه وحطيطها التجارية بسعر ٥٪ في السنة ٨٠ جنيهاً .
- (٤) وثيقة بمبلغ ١٨٢٥ جنيهاً بلغت حطيطها التجارية بسعر ٥٪ في السنة ٢٢٥٠ جنيهاً في أول يناير سنة ١٩٣٢ ففي أي يوم كانت تستحق الدفع؟
- (٥) وثيقة بلغت قيمتها الحالية التجارية ٧٨٩٨ قرشاً في أول يناير سنة ١٩٣٣ بعد خصم حطيطه تجارية بسعر ٦٪ في السنة قدرها ١٣٢ قرشاً ففي أي يوم كانت تستحق الدفع؟
- (٦) وثيقة بمبلغ ٦٥٠٠ جنيه بيعت في ٦ مارس سنة ١٩٣٢ وكانت تستحق الدفع في ١٨ مايو من السنة نفسها فإذا كانت الخطة التجارية ٥٢ جنيهاً فما هو سعرها؟
- (٧) وثيقة بمبلغ ٣٢٨٥٠ قرشاً بلغت قيمتها التجارية ٣٢٦٦١ قرشاً في ٢٩ أكتوبر سنة ١٩٣٣ وكانت تستحق الدفع في ٣١ ديسمبر من السنة نفسها فما سعر الخطة التجارية؟
- (٨) وثيقة بمبلغ ٦٥٠٠ جنيه تستحق الدفع في أول أكتوبر سنة ١٩٣٣ بيعت في يوم ٨ مايو من السنة نفسها بمبلغ ٦٢٧٩ جنيهاً بعد خصم الخطة التجارية فما سعرها؟
- (٩) وثيقة بمبلغ ١٤٦٠ جنيهاً تستحق الدفع في يوم أول نوفمبر سنة ١٩٣٣ بيعت في يوم ٣ أغسطس من السنة نفسها فكانت حطيطها التجارية ١٨ جنيهاً أوجد السعر؟

تمارين ٣١

تمارين متنوعة على الخطيطة

- (١) وثيقة بمبلغ ٧٢٩ جنيهًا تاريخها ١٨ مايو تستحق الدفع بعد ٤ شهور حوّلت إلى مصرف في ٧ يوليو من السنة نفسها فخصم منها خطيطة خارجية بسعر ٥ ٪ في السنة فكم يتسلم حاملها ؟
- (٢) وثيقة بمبلغ ١٨١٢ جنيهًا تاريخها ١٣ يوليو ومدتها ٥ أشهر حوّلت في أول أكتوبر على مصرف فخصم خطيطة خارجية بسعر $\frac{1}{4}$ ٪ في السنة أوجد مبلغ الخطيطة .
- (٣) وثيقة بمبلغ ٣٢٨ جنيهًا حررت بتاريخ ٢٧ أغسطس لمدة ٦ شهور حوّلت في ٣ سبتمبر إلى مصرف خصم خطيطة خارجية بسعر ٥ ٪ في السنة وأخذ $\frac{1}{4}$ ٪ من القيمة الاسمية عمولة تحصيل زيادة على الخطيطة فكم جنيهًا تسلم حاملها ؟
- (٤) ١ مدين إلى ب بمبلغ ٣٠٠ جنيهه ويريد أن يؤجل الدفع ستة شهور فطلب ب من أ أن يحمر له وثيقة يدفعه بعد ستة شهور ولكن إذا حول حالاً إلى مصرف تكون قيمته الحالية التجارية ٣٠٠ جنيهه فما هو المبلغ الذي يكتب في الوثيقة ؟ (ت حسب الخطيطة بسعر ٨ ٪ في السنة).
- (٥) وثيقة بمبلغ ٥٠٥٠ جنيهًا إنكليزيًا تاريخها ٣٠ مارس تدفع بعد ٦ شهور بلغت قيمتها الحالية في ١٩ يوليو من السنة نفسها ٤٩١١ جنيهًا إنكليزيًا وشلنين و ٦ بنس فكم كان سعر الخطيطة ؟
- (٦) خصم مصرف ٥ جنيهات خطيطة خارجية على وثيقة قيمتها الاسمية ٢٢٠ جنيهًا تستحق الدفع بعد سنتين . فإذا جعل سعر الخطيطة ثلاثة أمثاله في الحالة الأولى فما القيمة الاسمية لو وثيقة قيمتها الحالية نفس القيمة الحالية للأولى وزمنها نفس زمن الأولى ؟

(٧) شخص معه وثيقة بمبلغ ١٧٨٥ جنيها تستحق الدفع بعد ٨ شهور يراد تغييرها بأخرى تستحق الدفع بعد ٣ سنوات ، فما القيمة الاسمية التي تكتب في الوثيقة الثانية إذا كان سعر الخطيطة الخارجية هو ٥٪ في السنة ؟

(٨) وثيقتان إحداهما بمبلغ ٣٠٠ جنيها تستحق الدفع بعد ٨ شهور وأخرى بمبلغ ٢٠٠ جنيها تستحق الدفع بعد ٩ شهور ، غيرتا بوثيقة واحدة تستحق الدفع بعد سنتين و ٦ شهور فما القيمة الاسمية لهذه الوثيقة إذا كان سعر الخطيطة الخارجية ٤٪ في السنة ؟

(القيمة الحالية للوثيقة الجديدة تساوى مجموع القيمتين الحاليتين للوثيقتين الأوليتين)

(٩) رجل عليه وثيقتان الأولى بمبلغ ٣٠٠ جنيها تستحق الدفع بعد $2\frac{1}{4}$ من السنين والأخرى بمبلغ ٤٢٠ جنيهاً تستحق الدفع بعد ستة أشهر ، استبدل بهما وثيقة واحدة تستحق الدفع بعد سنة و ٨ أشهر . أوجد القيمة الاسمية للوثيقة الجديدة مع احتساب الخطيطة الخارجية بسعر ٦٪ في السنة في جميع الحالات .

(١٠) كان مع رجل وثيقتان ، الأولى بمبلغ ٣٦٥٠ جنيهاً تستحق الدفع في ٥ فبراير سنة ١٩٣٥ و باعها في أول يناير من السنة نفسها ، والثانية تستحق الدفع في ٦ سبتمبر من السنة عينها . فإذا كان مجموع الخطيطين الخارجيةتين هو ٣٠١ و أن القيمة الاسمية للوثيقة الثانية $\frac{2}{3}$ القيمة الاسمية للأولى والسعر في كل حالة ٥٪ في السنة ففي أى يوم باع الوثيقة الثانية ؟

(١١) مصرف خصم خطيطة تجارية بسعر $7\frac{1}{4}$ ٪ في السنة من وثيقة بمبلغ معين ولكنه وجد أنه يربح ٨٪ على النقود التي دفعها ، فما الزمن الباقي على استحقاق هذه الوثيقة ؟

(١٢) وثيقتان مجموع مبلغيهما ٢٨٠٠ جنيها والأولى تستحق الدفع بعد ٣ شهور والثانية بعد ٥ شهور . فإذا بلغ مجموع خطيطتيهما الخارجيتين ٥٨ جنيهاً وكان السعر ٦٪ في السنة . فما القيمة الحالية التجارية لكل منهما ؟

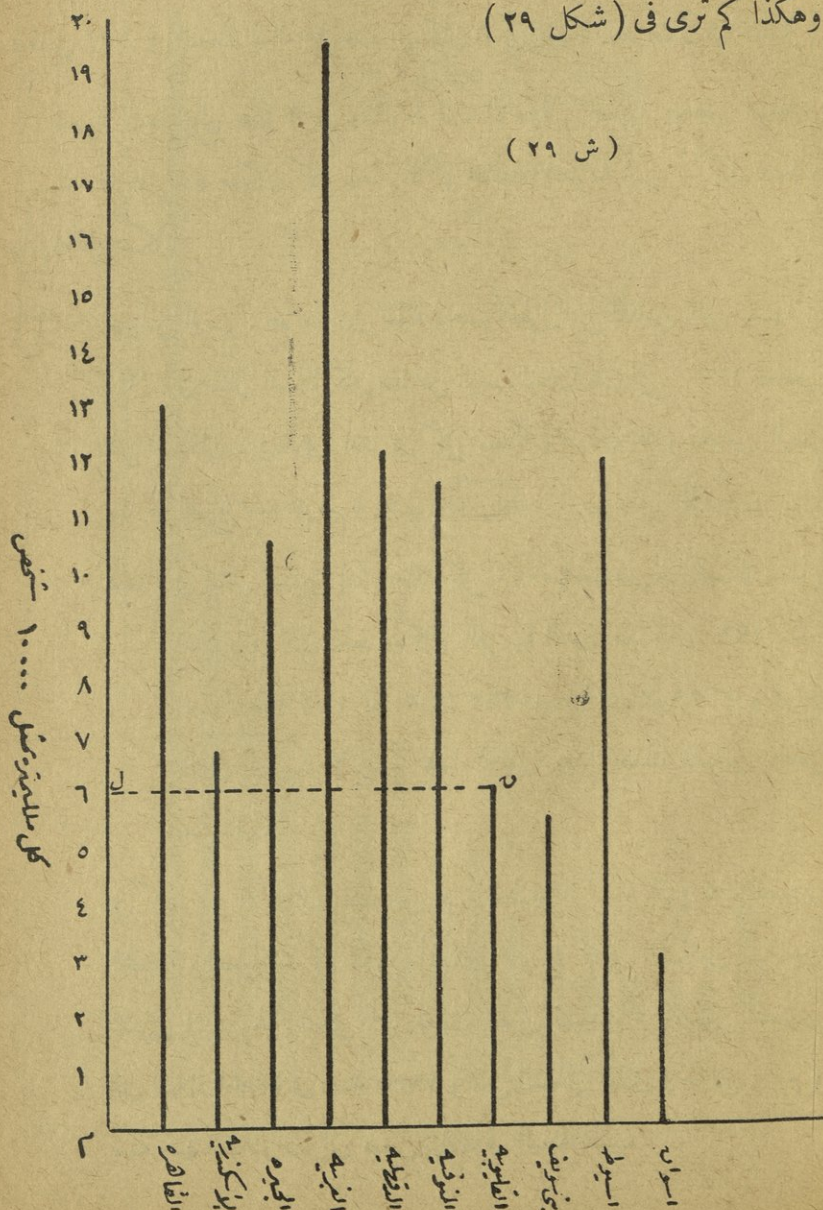
∴ عدد سكان القاهرة يمثل بعمود طوله = ١٣,١ سم

٦ » الإسكندرية » = ٦,٨ سم

٦ » البحيرة » = ١٠,٦ سم

٦ » الغربية » = ١٩,٦ سم

وهكذا كم ترى في (شكل ٢٩)



(٤) رسمنا إلى اليسار عموداً م صه مبينا عليه ما تدل عليه الارتفاعات المختلفة من أعداد السكان و بذلك يستغنى عن كتابة ارتفاع كل عمود أو عدد السكان الذى يدل عليه ؟ إذ يمكن إيجاد ذلك برسم مستقيم من نهاية العمود موازياً م سه فيقابل م صه فى النقطة الدالة على عدد السكان الذى يمثله (أنظر د ل فى الشكل) بمجرد النظر إلى هذا الرسم ومقارنة تلك الأطوال بعضها ببعض نستطيع بسهولة مقارنة عدد سكان كل مديرية أو محافظة ومعرفة أيها أكثر سكاناً وأيها أقل سكاناً

٦٦ — مقياس الرسم : هو ما تدل عليه وحدة الطول من المقادير التى تمثلها . مثلاً : فى المثال السابق كان مقياس الرسم مليمترًا عن كل ١٠٠٠٠ شخص من السكان . وبدهى أننا فى كل مسألة لابد أن نختار مقياس الرسم مناسباً للفراغ المعد للرسم ويجب دائماً تكبير الرسم بقدر الإمكان فمثلاً : فى المثال السابق إذا جعلنا كل ١٠٠٠٠ شخص من السكان تمثل بمليمترين كان عدد سكان الغربية الذى هو ١٩٦٠٠٠٠ يمثل بعمود طوله $196 \times 2 = 392$ مليمتر أى ٣٩٢ سم والفراغ الذى لدينا لا يسع هذا الطول ولذا جعلنا القياس أصغر من ذلك

فى كثير من الأحيان يستعاض عن الخطوط الرأسية التى تمثل المقادير المختلفة بمستطيلات كى تكون أكثر وضوحاً كما فى الشكلين المرافقين اللذين يمثل أولهما (شكل ٣٠) كميات القطن الصادرة من القطن المصرى إلى البلاد المختلفة فى سنة ١٩٣٥ ويمثل الشكل الثانى (شكل ٣٠ م) قيمة جملة الصادرات إلى بعض الممالك فى السنة نفسها

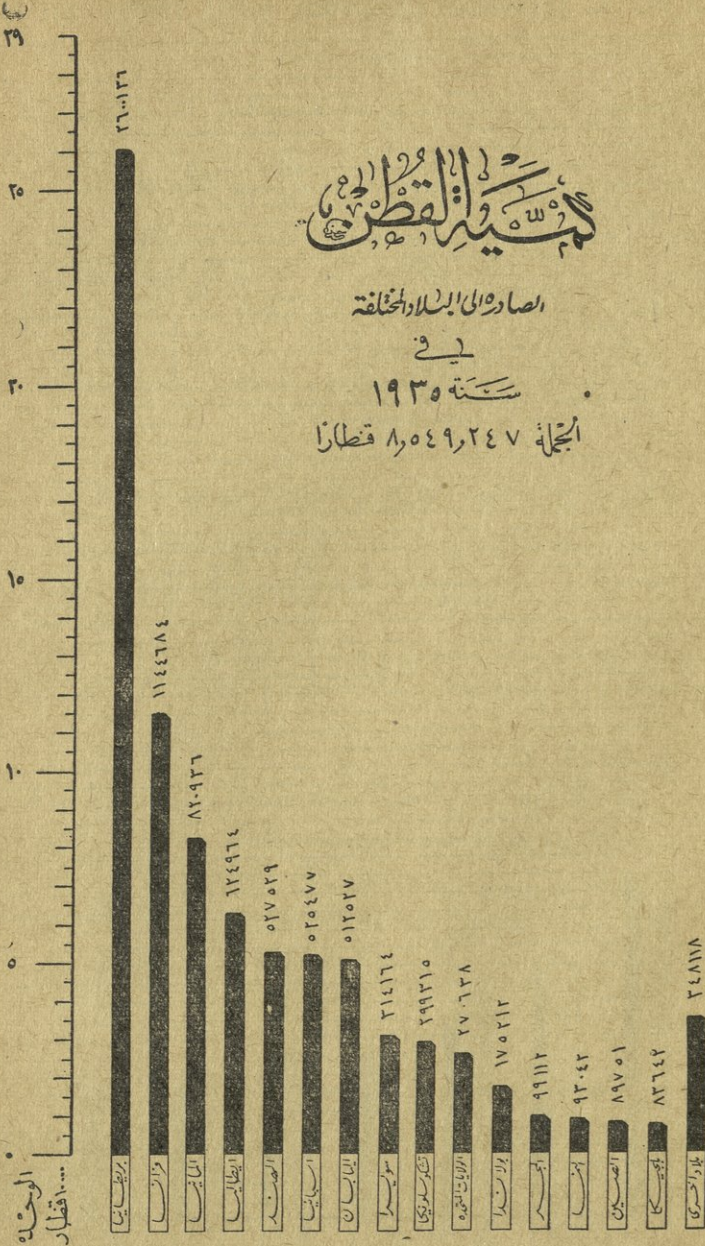
مملكة البحرين

الصادرة الى البلاد المختلفة

في

سنة ١٩٣٥

الجملة ١,٥٤٩,٢٤٧ قطاراً



قيمة الصادرات لكل من الممالك الرئيسية. ١٩٣٥

Valeur des exportations de chaque pays important. 1935



تمرين ٣٢

باختيار مقاييس الرسم المناسبة ، مثل كلا من الجداول الآتية بالرسم :

(١) قيمة ما تصدر من مصر في سنة ١٩٣٥ من بعض الأصناف :

الصفة	القطن السكاريديس	الأشموني	أنواع أخرى من القطن	الأرز	بذرة القطن	الكسب	البصل
القيمة بملايين الجنيهات ...	٤,٣	١٥,٨	٧,٣	٠,٧	٢	٠,٨	٠,٧

(٢) قيمة الواردات إلى القطر المصري من بعض الممالك في السنة نفسها :

المملكة	انجلترا	الهند	اليابان	فرنسا	إيطاليا	ألمانيا	الولايات المتحدة
قيمة الواردات بملايين الجنيهات ...	٧,٤	٠,٧	٣,٩	١,٧	١,٨	٢,٩	١,٧

(٣) قيمة جملة الصادرات من القطر المصري إلى بعض الممالك في السنة نفسها .

المملكة	انجلترا	فرنسا	ألمانيا	إيطاليا	الولايات المتحدة	سويسرا	اليابان
قيمة الصادرات بملايين الجنيهات ...	١٢,٦	٣,٨	٢,٨	٢,٣	١,٤	١	١,٨

(٤) مصروفات بعض الوزارات كما قدر في ميزانية السنة المالية ١٩٣٥ — ١٩٣٦

الوزارة	المعارف	التجارة والصناعة	الصحة	الداخلية	الحقانية	الأشغال	الحربية
المصروفات بملايين الجنيهات ...	٣,٤	١,٨	١,٧	٤,٥	١,٧	٦,٥	١,٦

(٥) ما تنتجه بعض مصادر إيراد الحكومة المصرية كما قدر في ميزانية السنة

المالية ١٩٣٥ — ١٩٣٦

المصدر	اموال مقررة	الجارك	التمغة	رسوم قضائية	البريد	ارباح النقود	السكك الحديدية
الإيراد بملايين الجنيهات	٦,٤	١,٥	١,٦	١,٩	٠,٨	١,٤	١,٣

(٦) تعداد بعض الحكومات الأجنبية حسب إحصائية سنة ١٩٢٧

الجنسية	بريطانيا	فرنسا	إيطاليا	تركيا	يونانيا
العدد بالآلاف	٣٤	٢٤	٥٢	٩	٧٦

(٧) متوسط محصول الفدان الواحد من القمح في سنة ١٩٣٢ في بعض

مديرية القطر :

المديرية	جرجا	أسيوط	الحيزة	القليوبية	المنوفية	الشرقية	الدقهلية	الغربية	البحيرة
متوسط المحصول بالأردب	٦,٥	٦,٥	٥,٦	٥,٧	٥,٩	٤,٩	٤,٦	٤,٦	٤,٤

(٨) بيان إجمالي عن المساحات بالفدان المشغولة ببعض المزروعات في السنة

الزراعية ١٩٣٢ — ١٩٣٣ مقدره تلك المساحات بآلاف الأفدنة :

القطن	...	...	...	١٨٠٠	القمح	...	...	...	...	١٣٧٠
قصب السكر	...	...	...	٧٠	القول	...	...	...	...	٤٧٠
الذرة الرفيعة	...	...	...	١٨٠	الشعير	...	...	...	...	٢٨٠
الأرز	...	...	...	٣٢٠						

٢ — تمثيل العلاقة بين كميتين متغيرتين

٦٧ — تعريف : إذا ارتبطت كميتان بعضهما ببعض بحيث إذا تغيرت قيمة إحداهما تغيرت قيمة الأخرى تبعاً لها تسمى الأولى بالمتغيرة الأصلية وتسمى الثانية بالمتغيرة التابعة .

مثلاً :

- (١) ثمن قطعة من القماش مرتبط بطولها فإذا تغير الطول تغير الثمن .
 (٢) ربح مبلغ ما في مدة معينة يتوقف على السعر الذي يحسب به الربح فإذا زاد السعر زاد الربح .
 ففي هذين المثالين :

(١) طول القطعة هو المتغيرة الأصلية ، والثمن المتغيرة التابعة

(٢) السعر هو المتغيرة الأصلية والربح المتغيرة وهكذا .

٦٨ — من المرغوب فيه في كثير من الأحوال أن نتبع التغير الذي يطرأ على كمية ما لما يمكن أن نستنتجه من النتائج المفيدة من ملاحظة ذلك والرسم البياني إحدى الوسائل التي تعيننا على ذلك بسهولة وبسرعة كما يتبين من المثال الآتي :

(مثال) الجدول الآتي يبين أعلى درجة للحرارة في القاهرة في الخمسة عشر يوماً الأولى في شهر إبريل سنة ١٩٢٩

تاريخ اليوم	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥
النهاية العظمى لدرجة الحرارة	٢٤	٢٤	٢٦	٣٠	٣٤	٣٤	٢٣	٢٧	٢٣	٢٢	٢٥	٣٠	٣٤	٢٧	٢٦

والمطلوب تمثيل تغير درجة الحرارة تبعاً لتغير الأيام بالرسم البياني

الطريقة

(١) نأخذ ورقة ونرسم عليها خطين مستقيمين متعامدين أحدهما أفقي م س ويسمى بالمحور الأفقي والآخر رأسي م ص ويسمى المحور الرأسي وتسمى نقطة تقاطعهما م بنقطة الأصل (شكل ٣١)

(٢) نأخذ على م س أبعاداً متساوية يمثل كل منها يوماً ولتكن المسافة بين كل اثنين سنتيمتراً واحداً. ثم نرقمها بالأرقام ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ الخ الدالة على تاريخ اليوم

(٣) في نهاية كل قسم من الأقسام السابقة نقيم عموداً موازياً للمحور م ص

(٤) وبمقياس رسم مناسب نقيس على كل من الأعمدة المرسومة بعداً مناسباً لدرجة الحرارة المعلومة لذلك اليوم .

فمثلاً : كانت أعلى درجة حرارة في اليوم الأول ٢٤ فأخذنا البعد ١٢ سم ليمثلها أى أن كل نصف سنتيمتر يمثل درجة حرارة واحدة وكذلك في اليوم الثالث كانت أعلى درجة حرارة ٢٦ فأخذنا على العمود المرسوم من رقم ٣ البعد ١٣ سم ليمثل هذه الدرجة وهكذا .

(٥) نصل نهايات هذه الأعمدة بمستقيمت على التوالي ، أى نصل نهاية العمود الأول بنهاية العمود الثاني ونهاية العمود الثاني بنهاية العمود الثالث وهكذا . وبذلك نحصل على الخط المنكسر المبين بالرسم .

وهو يبين لنا بطريقة أوضح تغير درجة الحرارة من هبوط وارتفاع من يوم إلى آخر . فكلما هبط الخط المنكسر دل ذلك على هبوط درجة الحرارة ، وكلما ارتفع دل على ارتفاع درجة الحرارة . ويسمى هذا الخط بالخط البياني

نلاحظ كما سبق أننا لا نضع طول كل عمود أو ما يدل عليه من درجة الحرارة في الرسم بل نكتفي بتقسيم المحور الرأسي م ص ووضع الأرقام عليه



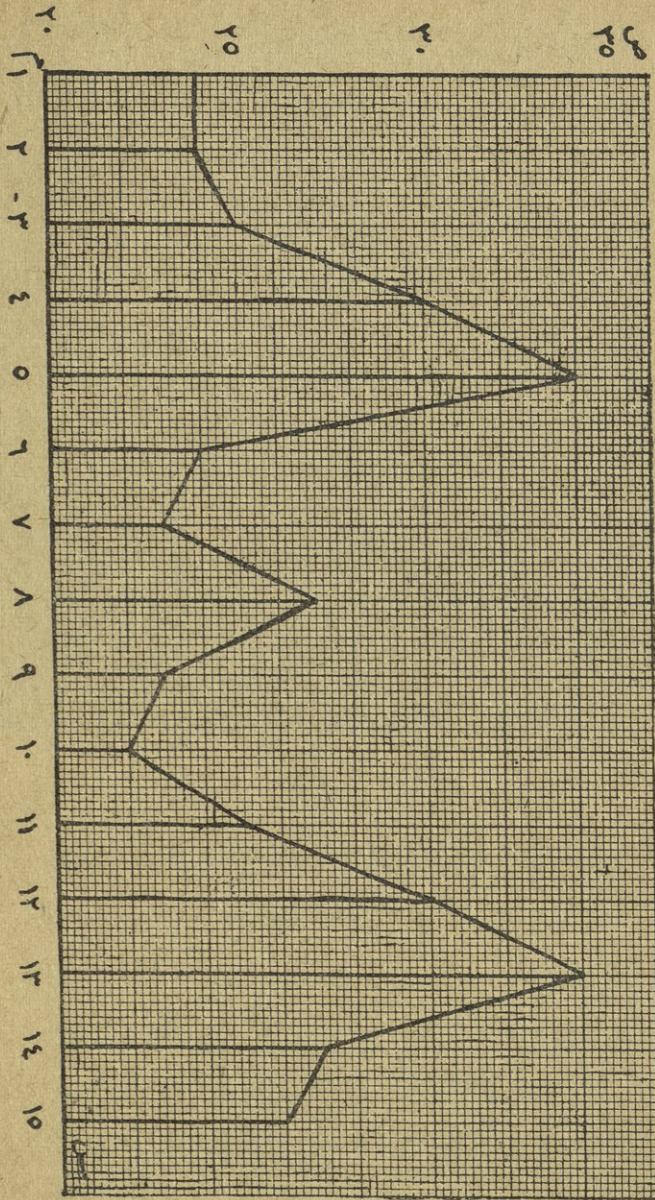
شكل (٣١)

٦٩ — ملاحظة : في الشكل (٣١) قسمنا درجة الحرارة على المحور م ص

باعتبار أن الصفر يقع عند نقطة الأصل م
ولكن بما أن أقل درجة للحرارة في المدة المعلومة هي ٢٢ وهي درجة
يوم ١٠ فكان من الممكن — وهذا هو المستحسن دائماً — أن نقيس
درجة الحرارة على م ص باعتبار أن م تقابل درجة ٢٠ ثم نقيس على
م ص ما يزيد على ٢٠ أي ٤ درجات لليوم الأول وهكذا في باقي
الأعمدة الأخرى

وبديهي أن ذلك لا يغير في شكل الخط البياني مطلقاً كما هو ظاهر من
الشكل (٣٢) بل يكون من شأنه توفير الفراغ الكبير بين م ص والخط

البياني ، ويمكننا أيضاً من تكبير الرسم إذا أردنا ذلك وقد جعلنا في الشكل أيضاً نقطة م على المحور الأفقي م دلالة على تاريخ اليوم الأول



(شكل ٣٢) درجات الحرارة (كل سنتيمتر نصف درجة)

تمرين ٢٣

من الرسم المبين في شكل ٣٢ اذ كر :

(١) تاريخ كل من الأيام التي ارتفعت فيها النهاية العظمى لدرجة الحرارة عن اليوم السابق

(٢) تاريخ كل من الأيام التي انخفضت فيها النهاية العظمى لدرجة الحرارة عن اليوم السابق .

(٣) ما الذى تلاحظه في الخط البياني حينما :

(ا) ترتفع درجة الحرارة كثيراً في يوم عن اليوم السابق .

(ب) ترتفع قليلا .

(ح) تنخفض كثيراً .

(د) تنخفض قليلا .

(هـ) تبقى ثابتة .

مثل لكل حالة .

٧٠ - استعمال الورق المقسم إلى مربعات .

في المثال السابق قد اضطررنا لرسم كل الخطوط الرأسية وقسنا عليها الأطوال المطلوبة . ولكن يسهل علينا العمل كثيراً اذا استعملنا الورق المقسم الى مربعات وهو المقسم الى سنتيمترات مر بعة ومليمترات مر بعة . وباستعمال هذا الورق نستغنى عن القياس إذ يكفي عد الأقسام بين الخطوط المتوازية ، وكذلك نستغنى عن رسم الخطوط الرأسية ويكتفى فقط بوضع النقطة في موضعها في نهاية كل عمود ثم نصل هذه النقط بالتتالى كما في المثال السابق :

٧١ - تعريف : تتعين أى نقطة على الورق مثل د تعيناً تاماً بالنسبة للمحورين الرأسى والأفقى متى عرف بعدها الأفقى عن المحور (ص) ويسمى

بالاحداثى الأفقى وكذلك بعدها الرأسى عن المحور م س ويسمى بالاحداثى الرأسى ، ويسمى البعدان معاً إحداثى النقطة د .

٣ — تطبيقات على الرسم البيانى

٧٢ — من أهم التطبيقات على الرسم البيانى تمثيل الاحصائيات والملاحظات العامة والظواهر الطبيعية كتعداد السكان والنسب المئوية للناجحين فى امتحان ما وكالتغير فى مقياس النيل وكالتغير فى درجات الحرارة والضغط وغيرها ، وسنبين ذلك بالأمثلة الآتية :

(مثال ١) ارسم الخط البيانى الذى يمثل التغيرات فى متوسط ثمن القنطار من القطن من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٢٦ على حسب المبين فى الجدول الآتى :

السنة	١٢	١٩	٣٧	٣٨	٣٧	٨٧	٣٤	٣٤	٣٠	٣٩	٣٩	٣٠	٣٠	٣٠
متوسط ثمن القنطار بالريال	١٢	١٩	٣٧	٣٨	٣٧	٨٧	٣٤	٣٤	٣٠	٣٩	٣٩	٣٠	٣٠	٣٠

الطريقة

(١) تمثل السنوات على المحور الأفقى م س بأن نجعل كل نصف سنتيمتر يمثل

سنة ونقطة م تقابل سنة ١٩١٤

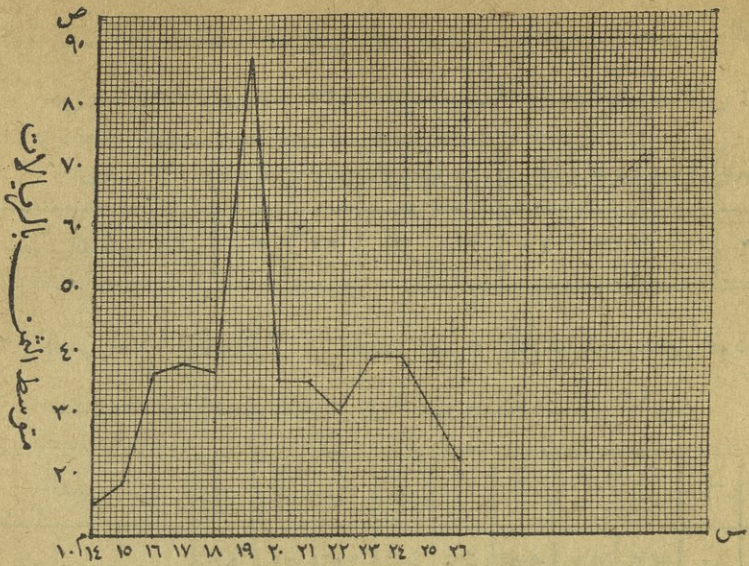
(٢) تمثل متوسط الثمن بالريالات على المحور الرأسى م ص وليكن كل ملليمتر

يمثل ريالاً واحداً ونقطة م تقابل ١٠

(٣) نعين النقط التى تمثل رؤوس الأعمدة على حسب الطريقة الموضحة آنفاً .

(٤) نصل هذه النقط بخط منكسر كما هو مبين فى الشكل الآتى :

فيكون هو الخط البيانى المطلوب .



السنوات

(شكل ٣٣)

تمرين ٣٤

(١) من الرسم السابق (مادة ٧٢) اذكر :

أولاً — تاريخ كل من السنوات التي ارتفع فيها متوسط سعر القطن
عن السنة التي قبلها

ثانياً — تاريخ كل من السنوات التي انخفض فيها متوسط سعر القطن
عن السنة التي قبلها

ثالثاً — ما الذي نلاحظه في الخط البياني حينما :

(أ) يرتفع سعر القطن كثيراً في السنة السابقة

(ب) يرتفع قليلاً

(ج) ينخفض كثيراً

(د) ينخفض قليلاً

(هـ) يبقى ثابتاً لا يتغير

مثل لكل حالة

(٢) ارسم الخط البياني الذي يمثل التغيرات في متوسط ثمن القنطار من القطن من سنة ١٩٣٥ إلى سنة ١٩٣٢ على حسب المبين في الجدول الآتي :

السنة	١٩٣٥	١٩٣٦	١٩٣٧	١٩٣٨	١٩٣٩	١٩٣٠	١٩٣١	١٩٣٢
متوسط ثمن القنطار بالريالات	٣٠	٢٢	٣٠	٢٦	٢٠	١٢	١٠	١٢

(٣) ارسم الخط البياني الدال على النسبة المئوية للتلاميذ المودعين تقودا في صندوق التوفير بإحدى المدارس في الشهور المبينة بالجدول الآتي :

الشهر	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
النسبة المئوية	٤٥	٥٤	٦٥	٧٨	٨٦	٩٥	٩٢	٩٢	٨٤	٧٥

(٤) ارسم الخط البياني الدال على النسبة المئوية للطلبة الناجحين في الحساب في امتحان شهادة الدراسة الابتدائية من سنة ١٩١٠ إلى سنة ١٩١٧ وذلك من الجدول الآتي :

السنوات	١٩١٠	١٩١١	١٩١٢	١٩١٣	١٩١٤	١٩١٥	١٩١٦	١٩١٧
النسبة المئوية	٧٥	٧٠	٥٥	٨٠	٨٠	٦٥	٦٨	٧٢

(٥) يبين الجدول الآتي ثمن الإردب من القمح في شهر يونيه من كل سنة فارسم خطأً بيانياً يبين كيفية تغير ثمن الإردب من القمح بين سنة ١٩١٤ وسنة ١٩٢١

السنوات	١٩١٤	١٩١٥	١٩١٦	١٩١٧	١٩١٨	١٩١٩	١٩٢٠	١٩٢١
الثن بالفروش	١٨٠	١٩٥	٣٦٥	٤٧٠	٤٨٠	٤٥٠	٣٨٠	٣٢٠

(٦) ارسم الخط البياني الدال على كيفية اختلاف مقادير القطن في ضيعة خلال المدة من سنة ١٩١٢ إلى سنة ١٩٢٣ باستخدام الجدول الآتي :

السنة	القطن بالقناطير	السنة	القطن بالقناطير
١٩١٢	٦٠	١٩١٨	٧٤
١٩١٣	٦٩	١٩١٩	٧٥
١٩١٤	٧٢	١٩٢٠	٧٧
١٩١٥	٦٨	١٩٢١	٦٥
١٩١٦	٥٠	١٩٢٢	٤٨
١٩١٧	٧٥	١٩٢٣	٥١

(٧) ارسم الخط البياني الذي يمثل قيمة محصول القطن في القطر المصري من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٣٢ من الجدول الآتي :

السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات	السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات	السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات	السنة	قيمة المحصول بملايين الجنيهات
١٩١٤	١٥	١٩١٩	٩٧	١٩٢٤	٥٧	١٩٢٩	٣٥
١٩١٥	١٨	١٩٢٠	٤١	١٩٢٥	٤٩	١٩٣٠	٢٠
١٩١٦	٣٩	١٩٢١	٣٠	١٩٢٦	٣٣	١٩٣١	١٣
١٩١٧	٤٨	١٩٢٢	٤٢	١٩٢٧	٣٦	١٩٣٢	١٢
١٩١٨	٣٥	١٩٢٣	٥٢	١٩٢٨	٤٢		

(٨) الجدول الآتي يبين متوسط محصول الفدان من قناطير القطن في السنوات من ١٩٢١ إلى ١٩٣٢

ارسم خطأً بيانياً يدل على تغيير محصول الفدان من القطن في المدة المذكورة

السنة	متوسط محصول الفدان من قناطير القطن	السنة	متوسط محصول الفدان من قناطير القطن	السنة	متوسط محصول الفدان من قناطير القطن
١٩٢١	٣,٤	١٩٢٥	٤,١	١٩٢٩	٤,٦
١٩٢٢	٣,٧	١٩٢٦	٤,٣	١٩٣٠	٤
١٩٢٣	٣,٨	١٩٢٧	٤	١٩٣١	٣,٨
١٩٢٤	٤,١	١٩٢٨	٤,٦	١٩٣٢	٤,٥

(٩) ارسم الخط البياني الذي يمثل مقادير محصول القطن في مصر من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٣٢ من الجدول الآتي :

السنة	المحصول مقدراً بملايين القناطير	السنة	المحصول مقدراً بملايين القناطير	السنة	المحصول مقدراً بملايين القناطير
١٩١٤	٦,٣	١٩٢١	٤,٣	١٩٢٨	٨,١
١٩١٥	٤,٦	١٩٢٢	٦,٧	١٩٢٩	٨,٥
١٩١٦	٥,٠	١٩٢٣	٦,٥	١٩٣٠	٨,٣
١٩١٧	٦,٣	١٩٢٤	٧,٣	١٩٣١	٦,٤
١٩١٨	٤,٨	١٩٢٥	٨	١٩٣٢	٥
١٩١٩	٥,٥	١٩٢٦	٧,٧		
١٩٢٠	٦,٠	١٩٢٧	٨,١		

(١٠) ارسم الخط البياني الدال على النسبة المئوية للناجحين في امتحان شهادة الدراسة الثانوية قسم ثان بقسميها الأدبي والعلمي في الدور الأول من سنة ١٩٢٧ إلى سنة ١٩٣٦ مأخوذة من الجدول الآتي :

السنة	١٩٢٧	١٩٢٨	١٩٢٩	١٩٣٠	١٩٣١	١٩٣٢	١٩٣٣	١٩٣٤	١٩٣٥	١٩٣٦
النسبة المئوية	٣٤	٣٠	٤١	٣٧	٤١	٤٠	٤٢	٤١	٤٥	٤٢

(مثال ٢) ارسم الخط البياني الذي يمثل العلاقة بين عمر التلميذ ومتوسط وزنه من الجدول الآتي :

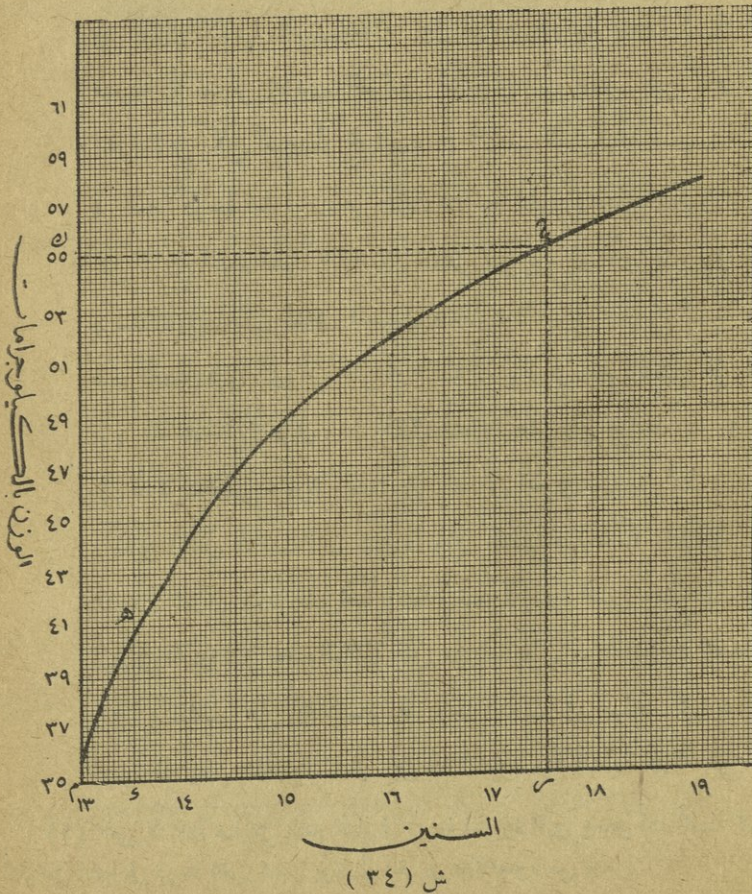
السن	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
متوسط الوزن بالكيلوجرامات	٣٦	٤٤	٤٨,٨	٥٢	٥٤,٢	٥٦,٣	٥٧,٨

الطريقة

(١) تمثل السن على المحور الأفقي م س بأن نجعل كل ٢ سنتيمتر تمثل سنة واحدة و م تقابل ١٣ سنة .

(٢) تمثل الوزن على المحور الرأسى م ص بأن نجعل كل نصف سنتيمتر يمثل كيلوجراماً واحداً و م تقابل ٣٥ كيلوجراما .

(٣) نعين النقط كالمعتاد ونصلها بخط منكسر .
فيكون هو الخط البياني المطلوب .



٧٣ — لا بد أن يكون الطالب قد لاحظ فرقاً كبيراً بين الخط البياني في المثالين
المبينين بشكلى ٣١ ٦ ٣٣ والخط البياني في المثال الأخير شكل ٣٤
فالخط البياني في كل من المثالين الأولين كان غير منتظم فتارة ينخفض
وتارة يرتفع بدون رابط معلوم وأما الخط البياني في المثال الثالث فإنه
سلس منتظم يحصل فيه التغير تدريجياً وليس فيه تغيرات فجائية تارة
بالانخفاض وأخرى بالارتفاع كما في الخططين الأولين والسبب في ذلك
هو ما يأتى :

في المثالين الأولين لم تكن هناك علاقة تذكر بين الكيتين المتغيرتين
ففي المثال الأول كانت العلاقة بين درجة الحرارة وبين تاريخ اليوم
ضعيفة لا تذكر بجانب العوامل الأخرى التى تعمل على تغير درجة
الحرارة فلم يكن تغيير تاريخ اليوم هو السبب الوحيد أو السبب الأكبر
في تغير درجة الحرارة وعلى ذلك فدرجة الحرارة تكاد تكون مستقلة
عن تاريخ اليوم فهى ترتفع وتنخفض من يوم إلى آخر بدون رابط^(١)
وكذلك في المثال الثانى فليست هناك علاقة بين تاريخ السنة وبين
سعر القطن فيها أى أن تاريخ السنة لا يؤثر في سعر القطن بل الذى
يؤثر فيه عوامل أخرى وعلى ذلك فسعر القطن غير مرتبط بتاريخ السنة
بل تارة ينخفض وتارة يرتفع من سنة إلى أخرى بدون رابط .

وأما في المثال الثالث فإن متوسط وزن التلميذ مرتبط ارتباطاً تاماً بسنه
فمتوسط الوزن يزداد تدريجياً بانتظام تبعاً لازدياد السن وعلى ذلك فالخط
البياني الذى يمثل هذه العلاقة كان منتظماً خالياً من التغيرات الفجائية .
وإذا لم تقتصر على إيجاد متوسط وزن التلميذ في نهاية كل سنة بل
أوجدناه أيضاً جملة مرات فيما بين ذلك ووضعنا النقط الدالة على ذلك

(١) نحن لا نتكلم هنا على التغير العام في درجة الحرارة الذى يحصل أثناء السنة كلها بل
نتكلم على التغير في درجة الحرارة من يوم إلى آخر في فترة قصيرة من الزمن .

على الورق فإننا نرى انتظام الخط البياني بطريقة أوضح لأن هذه النقطة تقع على منحن بدل خط منكسر .

ولذلك يجب في مثل هذه الحالة — أى حينما يكون هناك ارتباط بين الكميتين

المتغيرتين — وعلى ذلك يكون التغير في الخط البياني تدريجياً — أن نصل النقطة التي تحصل عليها بخط منحن بدل خط منكسر .

وقد رسمنا مثل هذا الخط في المثال الأخير (راجع الشكل ٣٤) وفي هذه الحالة يكون للخط البياني فائدة هامة أخرى وهى أنه بواسطته يمكن معرفة مقادير تقريبية لإحدى الكميتين المتغيرتين عند معرفة ما يقابلها من الكمية الأخرى غير المقادير المعلومة أصلاً .
فمثلاً في المثال السابق .

(١) لمعرفة متوسط وزن التلميذ الذى سنه ١٣ سنة ونصف .

(ب) لمعرفة سن التلميذ الذى متوسط وزنه ٥٥ و ٢ من الكيلوجرامات ،
نجرى الأعمال الآتية .

(١) ١ — نأخذ النقطة و على م سم بحيث يكون م و ممثلاً ١٣ و ٥ سنة .

٢ — نقيم عموداً على م سم من و حتى يقابل الخط المنحنى فى ه
فيكون ه و ممثلاً للوزن المطلوب وهو ٤٠ و ٤ من الكيلوجرامات .

(ب) ١ — نقيس على المحور م صه البعد م ك ليمثل ٥٥ و ٢ كيلوجراما
أى أن م ك = (٥٥ و ٢ - ٣٥) = ٥ = ١٠١ ملليمتر .

٢ — نرسم ك د موازياً م سم فيقابل المنحنى فى د ثم نرسم د م
موازياً م صه ومقابلاً م سم فى م فيكون م ممثلاً السن المطلوبة
وهى ١٧ و ٥ سنة .

على ذلك فإن إحداثي أية نقطة على الخط البياني يدلان على السن ومتوسط
الوزن المقابل لها .

٧٤ — ملاحظة : لاستعمال الطريقة السابقة لاستنباط المقادير المقابلة

لمقادير أخرى بين كميتين متغيرتين يجب أن تكون الكميتان مرتبطتان إحداهما بالأخرى ، كما يجب أن تكون النقط المعلومة على الخط البياني متقاربة غير متباعدة كي يمكن الرسم بدقة ويكون قريباً من شكله الحقيقي بقدر الإمكان .

(مثال ٣) قيس طول ظل شخص في أوقات مختلفة من يوم ما فوجد كما هو مبين في الجدول الآتي :

الوقت بالساعات				صباحاً	الظهر	بعد الظهر			
٨	٩	١٠	١١	١٢	١	٢	٣	٤	
١٤٠	٨٨	٦٤	٥٠	٤٥	٥٠	٦٤	٨٨	١٤٠	طول الظل بالسنتيمترات

إرسم الخط البياني الذي يمثل العلاقة بين الوقت وطول الظل في ذلك اليوم ومنه أوجد :

(١) طول الظل حينما كانت الساعة ١٠ والدقيقة ٣٠ صباحاً .

(٢) كم كانت الساعة حينما كان طول الظل ٦٨ سم .

الطريقة

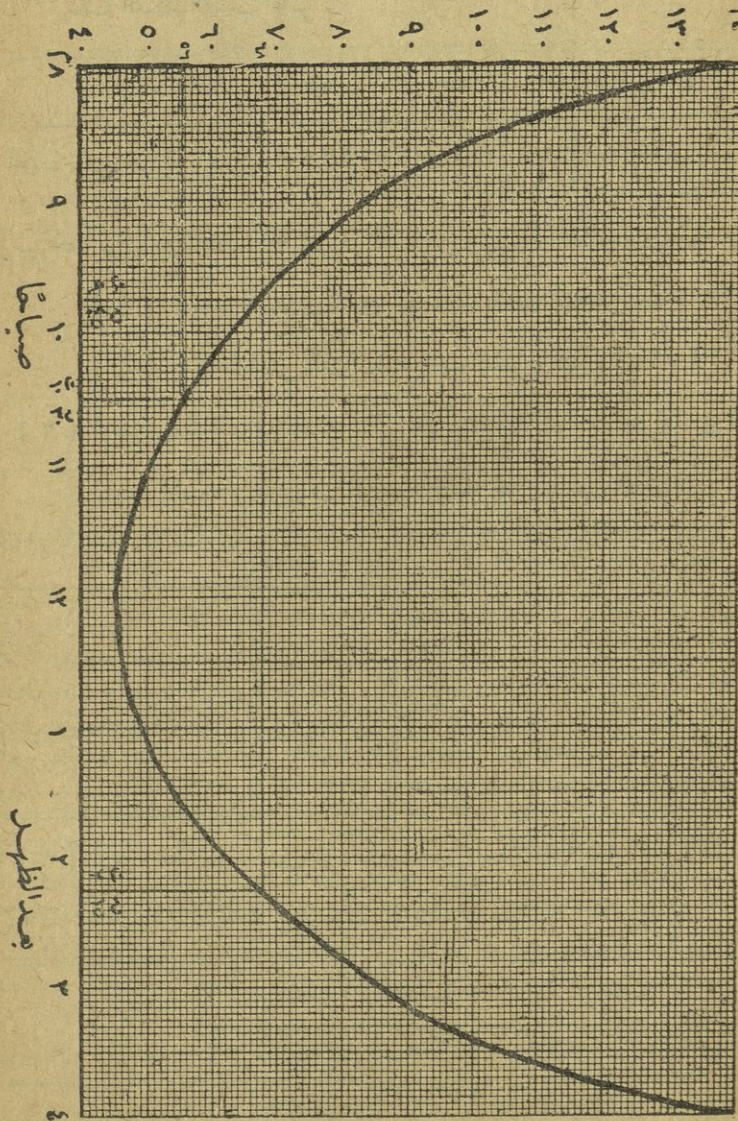
عيننا النقط ورسمنا الخط البياني المار بها كالمعتاد وكما هو مبين في (الشكل ٣٥) وبالطريقة السابقة أيضاً نجد أنه :

ق ت

(١) حينما كانت الساعة ٣٠ صباحاً كان طول الظل = ٥٦ سم .

(٢) كان طول الظل ٦٨ سم مرتين :

الاولى — حينما كانت الساعة ٤٥ ق
 ٩ صباحا . ت
 الثانية — حينما كانت الساعة ١٥ ق
 ٢ بعد الظهر . ت
 كما هو مبين في الشكل .



تمرين ٣٥

(١) الجدول الآتي يبين القسط السنوي الذي تطلب إحدى شركات التأمين دفعه ممن يريد التأمين على حياته بمبلغ ١٠٠٠ جنيه تدفع عند مماته مقدراً ذلك القسط حسب العمر :

العمر بالسنة	١٥	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٤٥
القسط بالقروش	١٦٥٠	١٩٥٠	٢٤٠٠	٢٩٥٠	٣٦٥٠	٤٦٥٠	٦٩٠٠

ارسم خطأ بيانياً يوضح العلاقة بين عمر الشخص وبين القسط السنوي ومنه استنبط:

(١) القسط السنوي الذي يجب أن يدفعه شخص عمره ٢٨ سنة .

(ب) عمر الشخص الذي يدفع قسطاً سنوياً قدره ٥٢٥٠ قرشاً .

(٢) ارسم الخط البياني الذي يمثل تغير متوسط درجة الحرارة في القاهرة مقيسة بترموتر مئوى في الأشهر المختلفة من الجدول الآتي :

الشهر	درجة الحرارة	الشهر	درجة الحرارة
يناير	١٢,٢	يوليه	٢٨,٢
فبراير	١٤,٢	أغسطس	٢٩,٧
مارس	١٧,٢	سبتمبر	٢٥,٥
أبريل	٢٠,٨	أكتوبر	٢٣,٢
مايو	٢٤,١	نوفمبر	١٨,٩
يونيه	٢٧	ديسمبر	١٤,٥

(٣) ارسم خطأ بيانياً يدل على كيفية تغير درجة الحرارة في يوم كانت درجة الحرارة فيه كما هو مدون في الجدول الآتي :

الوقت	صباحا	الظهر	مساء
٨	٩	١٠	١١
١١	١٢	١٣	١٤
١٢	١٣	١٤	١٥
١٣	١٤	١٥	١٦
١٤	١٥	١٦	١٧
١٥	١٦	١٧	١٨
١٦	١٧	١٨	١٩
١٧	١٨	١٩	٢٠
١٨	١٩	٢٠	٢١
١٩	٢٠	٢١	٢٢
٢٠	٢١	٢٢	٢٣
٢١	٢٢	٢٣	٢٤
٢٢	٢٣	٢٤	٢٥
٢٣	٢٤	٢٥	٢٦
٢٤	٢٥	٢٦	٢٧
٢٥	٢٦	٢٧	٢٨
٢٦	٢٧	٢٨	٢٩
٢٧	٢٨	٢٩	٣٠
٢٨	٢٩	٣٠	٣١
٢٩	٣٠	٣١	٣٢
٣٠	٣١	٣٢	٣٣
٣١	٣٢	٣٣	٣٤
٣٢	٣٣	٣٤	٣٥
٣٣	٣٤	٣٥	٣٦
٣٤	٣٥	٣٦	٣٧
٣٥	٣٦	٣٧	٣٨
٣٦	٣٧	٣٨	٣٩
٣٧	٣٨	٣٩	٤٠
٣٨	٣٩	٤٠	٤١
٣٩	٤٠	٤١	٤٢
٤٠	٤١	٤٢	٤٣
٤١	٤٢	٤٣	٤٤
٤٢	٤٣	٤٤	٤٥
٤٣	٤٤	٤٥	٤٦
٤٤	٤٥	٤٦	٤٧
٤٥	٤٦	٤٧	٤٨
٤٦	٤٧	٤٨	٤٩
٤٧	٤٨	٤٩	٥٠
٤٨	٤٩	٥٠	٥١
٤٩	٥٠	٥١	٥٢
٥٠	٥١	٥٢	٥٣
٥١	٥٢	٥٣	٥٤
٥٢	٥٣	٥٤	٥٥
٥٣	٥٤	٥٥	٥٦
٥٤	٥٥	٥٦	٥٧
٥٥	٥٦	٥٧	٥٨
٥٦	٥٧	٥٨	٥٩
٥٧	٥٨	٥٩	٦٠
٥٨	٥٩	٦٠	٦١
٥٩	٦٠	٦١	٦٢
٦٠	٦١	٦٢	٦٣
٦١	٦٢	٦٣	٦٤
٦٢	٦٣	٦٤	٦٥
٦٣	٦٤	٦٥	٦٦
٦٤	٦٥	٦٦	٦٧
٦٥	٦٦	٦٧	٦٨
٦٦	٦٧	٦٨	٦٩
٦٧	٦٨	٦٩	٧٠
٦٨	٦٩	٧٠	٧١
٦٩	٧٠	٧١	٧٢
٧٠	٧١	٧٢	٧٣
٧١	٧٢	٧٣	٧٤
٧٢	٧٣	٧٤	٧٥
٧٣	٧٤	٧٥	٧٦
٧٤	٧٥	٧٦	٧٧
٧٥	٧٦	٧٧	٧٨
٧٦	٧٧	٧٨	٧٩
٧٧	٧٨	٧٩	٨٠
٧٨	٧٩	٨٠	٨١
٧٩	٨٠	٨١	٨٢
٨٠	٨١	٨٢	٨٣
٨١	٨٢	٨٣	٨٤
٨٢	٨٣	٨٤	٨٥
٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
٨٤	٨٥	٨٦	٨٧
٨٥	٨٦	٨٧	٨٨
٨٦	٨٧	٨٨	٨٩
٨٧	٨٨	٨٩	٩٠
٨٨	٨٩	٩٠	٩١
٨٩	٩٠	٩١	٩٢
٩٠	٩١	٩٢	٩٣
٩١	٩٢	٩٣	٩٤
٩٢	٩٣	٩٤	٩٥
٩٣	٩٤	٩٥	٩٦
٩٤	٩٥	٩٦	٩٧
٩٥	٩٦	٩٧	٩٨
٩٦	٩٧	٩٨	٩٩
٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠
٩٨	٩٩	١٠٠	١٠١
٩٩	١٠٠	١٠١	١٠٢
١٠٠	١٠١	١٠٢	١٠٣
١٠١	١٠٢	١٠٣	١٠٤
١٠٢	١٠٣	١٠٤	١٠٥
١٠٣	١٠٤	١٠٥	١٠٦
١٠٤	١٠٥	١٠٦	١٠٧
١٠٥	١٠٦	١٠٧	١٠٨
١٠٦	١٠٧	١٠٨	١٠٩
١٠٧	١٠٨	١٠٩	١١٠
١٠٨	١٠٩	١١٠	١١١
١٠٩	١١٠	١١١	١١٢
١١٠	١١١	١١٢	١١٣
١١١	١١٢	١١٣	١١٤
١١٢	١١٣	١١٤	١١٥
١١٣	١١٤	١١٥	١١٦
١١٤	١١٥	١١٦	١١٧
١١٥	١١٦	١١٧	١١٨
١١٦	١١٧	١١٨	١١٩
١١٧	١١٨	١١٩	١٢٠
١١٨	١١٩	١٢٠	١٢١
١١٩	١٢٠	١٢١	١٢٢
١٢٠	١٢١	١٢٢	١٢٣
١٢١	١٢٢	١٢٣	١٢٤
١٢٢	١٢٣	١٢٤	١٢٥
١٢٣	١٢٤	١٢٥	١٢٦
١٢٤	١٢٥	١٢٦	١٢٧
١٢٥	١٢٦	١٢٧	١٢٨
١٢٦	١٢٧	١٢٨	١٢٩
١٢٧	١٢٨	١٢٩	١٣٠
١٢٨	١٢٩	١٣٠	١٣١
١٢٩	١٣٠	١٣١	١٣٢
١٣٠	١٣١	١٣٢	١٣٣
١٣١	١٣٢	١٣٣	١٣٤
١٣٢	١٣٣	١٣٤	١٣٥
١٣٣	١٣٤	١٣٥	١٣٦
١٣٤	١٣٥	١٣٦	١٣٧
١٣٥	١٣٦	١٣٧	١٣٨
١٣٦	١٣٧	١٣٨	١٣٩
١٣٧	١٣٨	١٣٩	١٤٠
١٣٨	١٣٩	١٤٠	١٤١
١٣٩	١٤٠	١٤١	١٤٢
١٤٠	١٤١	١٤٢	١٤٣
١٤١	١٤٢	١٤٣	١٤٤
١٤٢	١٤٣	١٤٤	١٤٥
١٤٣	١٤٤	١٤٥	١٤٦
١٤٤	١٤٥	١٤٦	١٤٧
١٤٥	١٤٦	١٤٧	١٤٨
١٤٦	١٤٧	١٤٨	١٤٩
١٤٧	١٤٨	١٤٩	١٥٠
١٤٨	١٤٩	١٥٠	١٥١
١٤٩	١٥٠	١٥١	١٥٢
١٥٠	١٥١	١٥٢	١٥٣
١٥١	١٥٢	١٥٣	١٥٤
١٥٢	١٥٣	١٥٤	١٥٥
١٥٣	١٥٤	١٥٥	١٥٦
١٥٤	١٥٥	١٥٦	١٥٧
١٥٥	١٥٦	١٥٧	١٥٨
١٥٦	١٥٧	١٥٨	١٥٩
١٥٧	١٥٨	١٥٩	١٦٠
١٥٨	١٥٩	١٦٠	١٦١
١٥٩	١٦٠	١٦١	١٦٢
١٦٠	١٦١	١٦٢	١٦٣
١٦١	١٦٢	١٦٣	١٦٤
١٦٢	١٦٣	١٦٤	١٦٥
١٦٣	١٦٤	١٦٥	١٦٦
١٦٤	١٦٥	١٦٦	١٦٧
١٦٥	١٦٦	١٦٧	١٦٨
١٦٦	١٦٧	١٦٨	١٦٩
١٦٧	١٦٨	١٦٩	١٧٠
١٦٨	١٦٩	١٧٠	١٧١
١٦٩	١٧٠	١٧١	١٧٢
١٧٠	١٧١	١٧٢	١٧٣
١٧١	١٧٢	١٧٣	١٧٤
١٧٢	١٧٣	١٧٤	١٧٥
١٧٣	١٧٤	١٧٥	١٧٦
١٧٤	١٧٥	١٧٦	١٧٧
١٧٥	١٧٦	١٧٧	١٧٨
١٧٦	١٧٧	١٧٨	١٧٩
١٧٧	١٧٨	١٧٩	١٨٠
١٧٨	١٧٩	١٨٠	١٨١
١٧٩	١٨٠	١٨١	١٨٢
١٨٠	١٨١	١٨٢	١٨٣
١٨١	١٨٢	١٨٣	١٨٤
١٨٢	١٨٣	١٨٤	١٨٥
١٨٣	١٨٤	١٨٥	١٨٦
١٨٤	١٨٥	١٨٦	١٨٧
١٨٥	١٨٦	١٨٧	١٨٨
١٨٦	١٨٧	١٨٨	١٨٩
١٨٧	١٨٨	١٨٩	١٩٠
١٨٨	١٨٩	١٩٠	١٩١
١٨٩	١٩٠	١٩١	١٩٢
١٩٠	١٩١	١٩٢	١٩٣
١٩١	١٩٢	١٩٣	١٩٤
١٩٢	١٩٣	١٩٤	١٩٥
١٩٣	١٩٤	١٩٥	١٩٦
١٩٤	١٩٥	١٩٦	١٩٧
١٩٥	١٩٦	١٩٧	١٩٨
١٩٦	١٩٧	١٩٨	١٩٩
١٩٧	١٩٨	١٩٩	٢٠٠
١٩٨	١٩٩	٢٠٠	٢٠١
١٩٩	٢٠٠	٢٠١	٢٠٢
٢٠٠	٢٠١	٢٠٢	٢٠٣
٢٠١	٢٠٢	٢٠٣	٢٠٤
٢٠٢	٢٠٣	٢٠٤	٢٠٥
٢٠٣	٢٠٤	٢٠٥	٢٠٦
٢٠٤	٢٠٥	٢٠٦	٢٠٧
٢٠٥	٢٠٦	٢٠٧	٢٠٨
٢٠٦	٢٠٧	٢٠٨	٢٠٩
٢٠٧	٢٠٨	٢٠٩	٢١٠
٢٠٨	٢٠٩	٢١٠	٢١١
٢٠٩	٢١٠	٢١١	٢١٢
٢١٠	٢١١	٢١٢	٢١٣
٢١١	٢١٢	٢١٣	٢١٤
٢١٢	٢١٣	٢١٤	٢١٥
٢١٣	٢١٤	٢١٥	٢١٦
٢١٤	٢١٥	٢١٦	٢١٧
٢١٥	٢١٦	٢١٧	٢١٨
٢١٦	٢١٧	٢١٨	٢١٩
٢١٧	٢١٨	٢١٩	٢٢٠
٢١٨	٢١٩	٢٢٠	٢٢١
٢١٩	٢٢٠	٢٢١	٢٢٢
٢٢٠	٢٢١	٢٢٢	٢٢٣
٢٢١	٢٢٢	٢٢٣	٢٢٤
٢٢٢	٢٢٣	٢٢٤	٢٢٥
٢٢٣	٢٢٤	٢٢٥	٢٢٦
٢٢٤	٢٢٥	٢٢٦	٢٢٧
٢٢٥	٢٢٦	٢٢٧	٢٢٨
٢٢٦	٢٢٧	٢٢٨	٢٢٩
٢٢٧	٢٢٨	٢٢٩	٢٣٠
٢٢٨	٢٢٩	٢٣٠	٢٣١
٢٢٩	٢٣٠	٢٣١	٢٣٢
٢٣٠	٢٣١	٢٣٢	٢٣٣
٢٣١	٢٣٢	٢٣٣	٢٣٤
٢٣٢	٢٣٣	٢٣٤	٢٣٥
٢٣٣	٢٣٤	٢٣٥	٢٣٦
٢٣٤	٢٣٥	٢٣٦	٢٣٧
٢٣٥	٢٣٦	٢٣٧	٢٣٨
٢٣٦	٢٣٧	٢٣٨	٢٣٩
٢٣٧	٢٣٨	٢٣٩	٢٤٠
٢٣٨	٢٣٩	٢٤٠	٢٤١
٢٣٩	٢٤٠	٢٤١	٢٤٢
٢٤٠	٢٤١	٢٤٢	٢٤٣
٢٤١	٢٤٢	٢٤٣	٢٤٤
٢٤٢	٢٤٣	٢٤٤	٢٤٥
٢٤٣	٢٤٤	٢٤٥	٢٤٦
٢٤٤	٢٤٥	٢٤٦	٢٤٧
٢٤٥	٢٤٦	٢٤٧	٢٤٨
٢٤٦	٢٤٧	٢٤٨	٢٤٩
٢٤٧	٢٤٨	٢٤٩	٢٥٠
٢٤٨	٢٤٩	٢٥٠	٢٥١</

(٤) الجدول الآتى يبين الأعداد الدالة على درجة رطوبة الجو فى الساعات المختلفة فى يوم ما : إرسم خطأً بيانياً يوضح التغير فى درجة الرطوبة فى خلال هذا اليوم :

الوقت	نصف الليل				صباحاً				الظهر				مساءً			
	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	٢	٤	٦	٨
درجة الحرارة	٦٠	٦٤	٦٧	٦٩	٦٣	٤٨	٣٦	٣١	٣١	٣٥	٤٣	٥٣	٥٩			

ثم استنتج من الرسم الوقت الذى كان فيه العدد الدال على درجة الرطوبة ٥٠

(٥) يبين الجدول الآتى متوسط وزن الولد فى سنين مختلفة من عمره .

العمر بالسنين	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤
الوزن بالأرطال	٦٠	٦٥	٦٩	٧٣	٧٨	٨٤	٩٢

أوجد بواسطة الرسم البيانى متوسط وزن الولد الذى عمره ١٢,٥ من السنين

(٦) الجدول الآتى يبين حجم مقدار من الماء بالسنتيمترات المكعبة فى درجات الحرارة المختلفة :

الحجم بالسنتيمترات المكعبة ...	١٦٠	١٥٦	١٥٢,٥	١٥٠	١٤٨,٥	١٤٨,٥	١٥١	١٥٤	١٦٠
درجة الحرارة المثوية	٦—	٤—	٢—	صفر	٢	٦	٨,٥	١٠,٥	١٤

إرسم الخط البيانى الذى يربط التغير فى الحجم بالتغير فى درجة الحرارة ثم أوجد منه درجة الحرارة التى يكون فيها الماء فى كثافته العظمى (أى حجمه أقل ما يمكن) .

(٧) الجدول الآتى يبين منتهى ضغط بخار الماء فى درجات الحرارة المبينة :

درجة الحرارة	٠	١	٢	٤	٥	٦	٨	١٠	١١	١٢	١٣	١٥
الضغط سم زئبق	٠.٤٦	٠.٤٩	٠.٥٣	٠.٦١	٠.٦٥	٠.٧٠	٠.٧٨	٠.٩١	٠.٩٨	١.٠٤	١.١١	١.٢٧

ارسم الخط البيانى الذى يدل على هذا الارتباط ومنه أوجد .

أولاً — الضغط عند ما تكون درجة الحرارة ٧٠.٥°

ثانياً — درجة الحرارة عند ما يكون منتهى الضغط ٠.٨٧ سم زئبق .

(٨) الجدول الآتى يبين أوقات غروب الشمس فى القاهرة فى الأيام المذكورة بعد :

تاريخ اليوم ...	مايو ١	مايو ١٠	مايو ٢٠	مايو ٣٠	يونيه ١٠	يونيه ٢٠	يونيه ٣٠	يوليه ١٠	يوليه ٢٠	يوليه ٣٠	أغسطس ١٠
وقت الغروب ...	٦ ٣١	٦ ٣٧	٦ ٤٣	٦ ٤٩	٦ ٥٥	٦ ٥٨	٧ ٠٠	٧ ٠٩	٧ ١٦	٧ ٢٠	٦ ٤٢

ارسم الخط البيانى الذى يدل على هذا الارتباط ومنه أوجد .

أولاً — وقت الغروب يوم ٢٥ مايو .

ثانياً — التاريخ الذى تغرب فيه الشمس فى الساعة ٦ والدقيقة ٤٨ مساء .

(مثال ٤) ارسم الخط البيانى الذى يمثل العلاقة بين درجة الحرارة بترموتر

سنتجراد ودرجة الحرارة بترموتر فارنهایت من الجدول الآتى :

الدرجة بترموتر سنتجراد	...	...	...	...	صفر	١٠	٢٠	٣٠
الدرجة بترموتر فارنهایت	...	...	...	...	٣٢	٥٠	٦٨	٨٦

ثم أوجد من الرسم :

(١) الدرجة بترموتر فارنهایت المقابلة للدرجة ١٥° بترموتر سنتجراد .

(٢) الدرجة بترموتر سنتجراد المقابلة للدرجة ١٢٢° بترموتر فارنهایت .

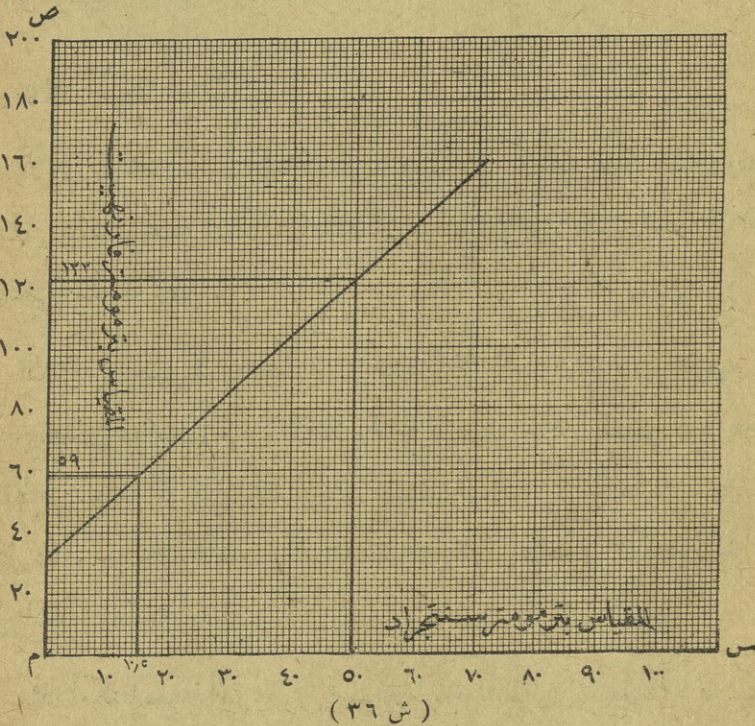
الطريقة

(١) تمثل الدرجات بترموتر سنتجراد على المحور الأفقي ونجعل كل درجة ممثلة بمليمتر .

(٢) تمثل الدرجات بترموتر فارنهایت على المحور الرأسى ونجعل كل درجتين ممثلتين بمليمتر .

(٣) نرسم الخط كالمعتاد .

فنجد خطأ مستقيماً كما فى الشكل الآتى :



بدهى أن المقياسين مرتبط كل منهما بالآخر ولذلك فالخط البياني لا بد أن يكون منتظماً ولكنه فوق ذلك خط مستقيم . ويرجع السبب فى ذلك إلى القاعدة الآتية التى يحسن أن يعرفها الطالب :

الخط البياني الذي يمثل العلاقة بين كميتين متغيرتين يكون مستقيماً إذا كانت كل زيادة في إحدى الكميتين تتناسب مع الزيادة المقابلة لها في الكمية الأخرى . ومعلوم أن الزيادة في إحدى الدرجتين تتناسب مع الزيادة في الأخرى إذ أن كل خمس درجات في ترمومتر سنتجراد تقابلها ٩ درجات في ترمومتر فارنهایت ولذلك فالخط البياني مستقيم .

ومن الرسم نرى أن درجة ١٥ سنتجراد تقابلها درجة ٥٩ فارنهایت ٦ درجة ١٢٢ فارنهایت تقابلها درجة ٥٠ سنتجراد .

٧٥ — ملاحظتان :

الأولى : حينما يكون الخط البياني مستقيماً يكفي أن نجد عليه نقطتين ونصل المستقيم بينهما ويحسن أن تكون النقطتان متباعدتين حتى يكون الخط في اتجاه المستقيم أصغر ما يمكن .

الثانية : حينما يكون الخط البياني منحنياً لا يمكننا أن نمدّه من طرفيه بعد آخر نقطتين معلومتين عليه إلا قليلاً . لأننا لا نعرف شكل المنحنى بعد هاتين النقطتين . وأما إذا كان الخط البياني مستقيماً فيمكننا أن نمدّه بقدر ما نريد وعلى ذلك ففي الحالة الأخيرة يمكننا استنباط مقادير لأحدى الكميتين خارجة على المقادير المعلومة أولاً .

مثلاً أمكننا معرفة الدرجة على ترمومتر سنتجراد المقابلة لدرجة ١٢٢ فارنهایت مع أنه في المعلومات المعطاة لنا كانت أكبر درجة بترمومتر فارنهایت ٨٦ فقط . وأما إذا كان الخط البياني منحنياً فلا يمكننا استنباط مقادير لأحدى الكميتين إلا فيما بين المعلومات المعطاة أصلاً .

تمرين ٣٦

(١) الجدول الآتي يبين العلاقة بين وزن مقدار معين من الشاي وأثمانه المطلوب بيان هذه العلاقة بالرسم البياني :

وزن الأبطال	...	...	...	...	١	$2\frac{1}{3}$	٥
السعر بالقروش	...	...	...	...	١٠	٢٥	٥٠

ومن الرسم أوجد ثمن $3\frac{1}{3}$ رطل $6\frac{1}{3}$ من الأبطال .

(٢) الجدول الآتي يبين درجات الحرارة المئوية وما يقابلها بالدرجات الفرنهيتية .

درجة الحرارة المئوية	...	...	...	...	...	١٠	صفر	١٥	٢٥
درجة الحرارة الفرنهيتية	...	...	...	...	...	١٤	٣٢	٥٩	٧٧

ارسم الخط البياني الذي يدل على هذا الارتباط ومنه أوجد

أولاً — درجة الحرارة الفرنهيتية عند ما تكون الدرجة المئوية ١٢,٥

ثانياً — » » » » المئوية » » الفرنهيتية ٨٧,٥

(٣) الجدول الآتي يبين العلاقة بين الأطوال بالأمتار وما يقابلها بالياردات :

الطول بالمتر	...	...	...	...	...	٦,٤	١٢,٨	١٦	٣٢
الطول بالياردات	...	...	...	...	...	٧	١٤	١٧,٥	٣٥

ارسم الخط البياني الذي يمثل هذه العلاقة ومنه أوجد :

أولاً — عدد الياردات التي في ١٩,٢ من الأمتار .

ثانياً — عدد الأمتار التي في ٢٨ ياردة .

(٤) صنوبر يصب في حوض والجدول الآتي يبين ارتفاع الماء في الحوض في الأوقات المختلفة :

الساعة	...	...	...	ت	ق	ت	ق	ت	ق	ت	ق	ت
الارتفاع بالأقدام	...	...	...	١٠	١٥	١٠	٣٠	١٠	٤٥	١٠	١١	٣٠
	...	...	...	٢٠	٢٥	٣٠	٣٥	٤٠	٥٠			

أولاً - الساعة التي يكون فيها ارتفاع الماء في الحوض ٤٥ قدماً.
ثانياً - ارتفاع الماء في الحوض بالأقدام في الساعة ١٠ والدقيقة ٤٠.

تقریر ۴۷

مسائل متنوعة على الرسم البياني

(١) جاء في الإحصاء السنوى العام لسنة ١٩٣٧ أن سكان القطر المصرى كانوا كما هو مبين بالجدول الآتى فى الأرمئة المذكورة فارسم خطأ بيانياً يمثل العلاقة بين عدد السكان والزمن فى المدة المفروضة .

١٩٣٧	١٩٢٧	١٩١٧	١٩٠٧	١٨٩٧	١٨٨٢	١٨٧٣	١٨٤٦	...	...	...	السنة
١٦	١٤,٢٥	١٢,٧٥	١١,٢٥	٩,٧٥	٦,٧٥	٥,٢٥	٤,٥	...	...	...	العدد بالمليون

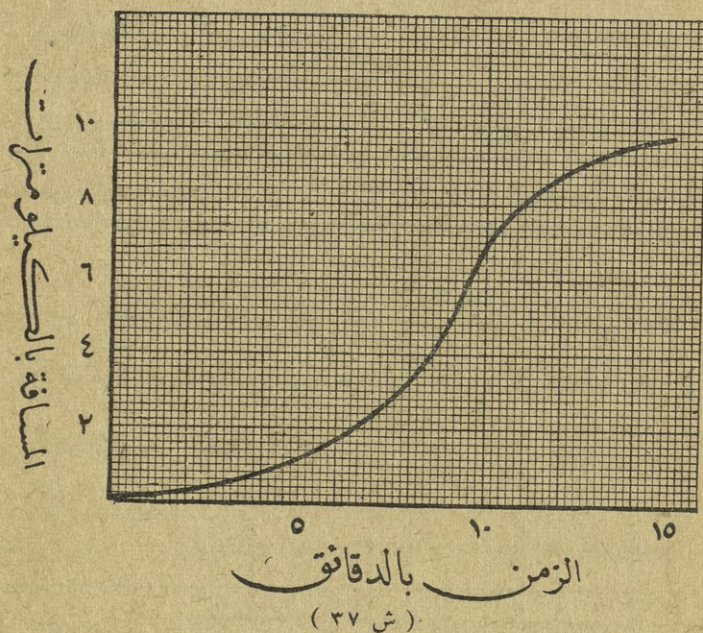
(٢) ارسم الخططين البيانيين اللذين يمثلان قيمة الصادرات من القطر المصري وقيمة الواردات إليه من سنة ١٩١٤ إلى سنة ١٩٣٤ من الجدول الآتي :

السنة	قيمة الصادرات ملايين الجنيهات	قيمة الواردات ملايين الجنيهات	السنة	قيمة الصادرات ملايين الجنيهات	قيمة الواردات ملايين الجنيهات
١٩١٤	٢٦	٢٢	١٩٢٦	٤٢	٥٢
١٩١٦	٣٨	٣١	١٩٢٨	٥٦	٥٢
١٩١٨	٤٥	٥١	١٩٣٠	٣٢	٤٧
١٩٢٠	٨٦	١٠٢	١٩٣٢	٢٧	٢٧
١٩٢٢	٤٨	٤٣	١٩٣٤	٣١	٢٩
١٩٢٤	٦٥	٥١			

واستنتج من هذا الرسم الفرق بين الربحين بعد ٢٢ سنة .

٣٠	٢٥	٢٠	١٥	١٠	٥	٠	
١,٥٠	١,٢٥	١,٠٠	٠,٧٥	٠,٥٠	٠,٢٥	٠	الربح البسيط
٣,٣٢	٢,٣٩	١,٦٥	١,٠٨	٠,٦٣	٠,٢٨	٠	الربح المركب

(٧) الخـط البياني المرسوم في هذا الشكل ٣٧ يمثل المسافات التي قطعها قطار في مدة ١٥ دقيقة . أوجد من الرسم ما يأتي :



- (أ) المسافة التي قطعها القطار في الخمس دقائق الأولى
- (ب) المسافة التي قطعها القطار في الخمس دقائق الثانية
- (ج) المسافة التي قطعها القطار في الخمس دقائق الأخيرة
- (د) متوسط سرعة القطار في كل من المدد المذكورة وكذلك في المدة كلها

(١١) الجدول الآتى يبين عدد سكان مملكة مقدراً بالملايين فى نهاية سنين مختلفة

السنة	١٨٥٠	١٨٥٥	١٨٦٠	١٨٧٠	١٨٨٠	١٨٨٥	١٨٩٠	١٩٠٠	١٩١٠	١٩١٥
السكان بالمليون	٢٠,٤	٢٢,٢	٢٤,٢	٢٩	٣٤,٢	٣٤,٤	٤١	٤٩,٤	٥٧,٨	٦٣,٤

ارسم خطاً بيانياً يمثل هذه العلاقة ومنه أوجد :

أولاً — سكان المملكة فى نهاية سنة ١٨٦٨

ثانياً — السنة التى فى نهايتها يبلغ عدد السكان ٤٦ مليوناً .

(١٢) قذف حجر رأسياً إلى أعلى من سطح الأرض والجدول الآتى يبين الارتفاعات المختلفة للحجر فى نهاية الأزمنة المقابلة .

الزمن بالثانية	$\frac{1}{4}$	١	$1\frac{1}{2}$	٢	$2\frac{3}{4}$	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
الارتفاع بالقدم	١٧	٥٦	٧٢	٨٠	٧٧	٦٥	٤٥

ارسم خطاً بيانياً يمثل هذه التغيرات ثم أوجد منه :

أولاً — ارتفاع الحجر بعد $\frac{1}{4}$ ثانية .

ثانياً — عدد الثوانى التى مضت حتى وصل الحجر إلى أقصى ارتفاعه .

(١٣) الجدول الآتى يبين متوسط الضغط الجوى فى مدينة القاهرة فى كل شهر

من شهور سنة ١٩٢٦ :

الضغط الجوي بالمليمتر	الشهر	الضغط الجوي بالمليمتر	الشهر
٧٥٤,٦	يوليه	٧٦٢,١	يناير
٧٥٥,٩	أغسطس	٧٦١,٤	فبراير
٧٥٩,٧	سبتمبر	٧٥٩,٣	مارس
٧٥٩,٧	أكتوبر	٧٥٩,٣	أبريل
٧٦٠,٧	نوفمبر	٧٥٦,٦	مايو
٧٦١,٧	ديسمبر	٧٥٦,٧	يونيه

ارسم خطأ بيانياً يبين التغير الجوي في شهور هذه السنة .

(١٤) وجد صاحب مطعم أنه إذا أكل عنده ح شخصاً في اليوم بلغت نفقاته (هـ) جنياً وبلغ دخله (و) جنياً في اليوم والجدول الآتي يبين حسابه في بعض الأيام :

٣٦٠	٣٢٠	٢٧٠	٢١٠	ح
٢٣,٤	٢١,٦	١٩,٤	١٦,٧	هـ
٢٩,٨	٢٦,٤	٢١,٢	١٥,٨	و

فبالرسم البياني أوجد كلا من هـ و عندما يأكل عنده ٣٤٠ شخصاً وكم يكون عدد الآكلين في اليوم في حالة ما لا يكسب ولا يخسر؟

(١٥) الجدولان الآتيان يبينان القوة اللازمة لكل من مركبين ١ و ٢ لتوليد سرعة ما

١٦,٧	١٦,١	١٤,٥	١٣,٥	١٢,٥	١٢	١٠	٨	سرعة ...	١
٣٥٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	١٥٠٠	١١٠٠	٩٢٠	٤٠٠	٢٠٠	قوة ...	

١٦,٢	١٦	١٤	١٢,٧	١٠,٧	٨	سرعة ...	ب
٣.٠٠	١٨٠٠	١٩٥٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠	قوة ...	

فعند أى سرعة تتساوى القوتان (استعمل الرسم البياني)

(١٦) الجدول الآتى يبين متوسط سرعة الرياح بالمتري فى الثانية فى الأوقات المختلفة فى أحد أيام شهر أبريل فى مدينة لندن

صباحا						مساء						الساعة
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	
٢,٧	٢,٦	٢,٨	٣,٨	٤,٧	٥,٢	٢,٧	٢,٥	٣,٥	٤,٤	٣,٧	٢,٧	السرعة بالمتري فى الثانية ...

ارسم خطأً بيانياً مكبراً بقدر ما يمكن يبين سرعة الرياح فى الأوقات المختلفة من هذا اليوم

(١٧) يبين الجدول الآتى القيمة التقديرية لمدينة ادنبرج (مقدرة بملايين الجنيهات) فى السنوات المبينة به

١٨٩٥	١٨٩٧	١٨٩٩	١٩٠٠	١٩٠١	١٩٠٣	١٩٠٥	السنة
٢,٢١	٢,٣٤	٢,٤٤	٢,٦٥	٢,٨١	٢,٩٢	٣,٠٩	التقدير بملايين الجنيهات ...

يبين ذلك بالرسم واستنتج من الرسم :

(أ) القيمة التقديرية للمدينة سنة ١٨٩٨

(ب) السنة التى كانت فيها القيمة التقديرية للمدينة تساوى ٢,٨٧ مليون جنيه تقريباً

ونرى أيضاً أن عدد أرقام الجذر التربيعي يساوى نصف عدد أرقام المربع إذا كان هذا العدد زوجياً وإلا فهو نصف العدد الزوجي التالى له

مثلاً : إذا قسمنا العدد ٨٢٨١ أو العدد ١٧٤٢٤ إلى فصول ثنائية مبتدئين من اليمين هكذا ٨٢٨١ أو ١٧٤٢٤ فإن عدد أرقام الجذر التربيعي لكل من هذين العددين يساوى عدد هذه الفصول سواء أكان الفصل الأخير من جهة اليسار محتوياً على رقم واحد أو رقمين

أى أن الجذر التربيعي للعدد الأول يشتمل على رقمين فى حين أن الجذر التربيعي للعدد الثانى يشتمل على ثلاثة أرقام .

$$(٢) \quad \therefore (٢ + ٢) = ٢ + ٢ + ٢$$

$$= ٢ + (٢ + ٢)$$

$$\therefore (٢ + ٢) = ٢ + (٢ + ٢)$$

$$٧ \times (٧ + ٤٠ \text{ ضعف}) = ٤٠ \quad \text{مثلاً : } ٤٧ - ٢$$

$$٥ \times (٥ + ٣٦٠ \text{ ضعف}) = ٣٦٠ \quad ٦ - ٣٦٥$$

$$٣ \times (٣ + ٤١٥٠ \text{ ضعف}) = ٤١٥٠ \quad ٦ - ٤١٥٣$$

أى أن الفرق بين مربع أى عدد ومربع جزء منه يساوى حاصل ضرب مجموع ضعف هذا الجزء والجزء الباقي فى هذا الجزء الباقي

٦٨ — لتطبيق ما تقدم فى استخراج الجذر التربيعي نمثل بالمثالين الآتيين :

(مثال ١) أوجد $\sqrt{٢٢٠٩٧}$

العمل

(١) نقسم العدد إلى فصول ثنائية مبتدئين من جهة اليمين هكذا ٢٢٠٩

(٢) يؤخذ من ذلك أن الجذر التربيعي مكوّن من رقمين : عشرات وآحاد

(٣) ٢٢ ٠٠٠ محصور بين المربعين المتتاليين ١٦ ٦ ٢٥

٢٢٠٩ ٠٠ » » » ١٦٠٠ ٦ ٢٥٠٠ وجذره محصور بين

العددين ٤٠ ٦ ٥٠

٠٠. الجذر التربيعي = ٤٠ + رقم الآحاد

(٤) فيكون ٢٢٠٩ - ٤٠ = ٢١٦٩ (ضعف ٤٠ + رقم الآحاد) × رقم الآحاد

$$\frac{٦٠٩}{٨٠ + \text{رقم الآحاد}} = \frac{٢٤٠ - ٢٢٠٩}{\text{ضعف ٤٠ + رقم الآحاد}} = \text{رقم الآحاد}$$

٦ ٠٠. رقم الآحاد مقدار صغير بالنسبة إلى ٨٠

٠٠. يمكن إهماله مؤقتاً في المقام ونجرب قسمة ٦٠٩ على ٨٠ لتعيين رقم الآحاد

وبالتجربة نجد أن رقم الآحاد = ٧

$$\text{لأن } ٦٠٩ = ٨٧ \times ٧$$

فيكون الجذر التربيعي المطلوب = ٤٧

وتوضع العملية على الصورة الآتية :

$$(٧ + ٤٠) \quad ٢٢٠٩ \quad (٤٠)$$

$$\begin{array}{r} ١٦٠٠ \\ ٧ + ٨٠) \quad ٦٠٩ \\ \underline{٦٠٩} \\ ٠٠٠ \end{array}$$

(مثال ٢) أوجد ١٣٣٢٢٥١

العمل

بتقسيم العدد إلى فصول ثنائية هكذا ١٣٦٣٢٦٢٥

نرى أن الجذر المطلوب مكوّن من ٣ أرقام : مئات وعشرات وآحاد

الخطوة الأولى : نبحث عن رقم المئات

١٣. محصور بين المربعين المتتاليين ١٦٦٩

١٦٠٠٠٠٠ ٦ ٩٠٠٠٠٠ محصور بين

٤٠٠ ٦ ٣٠٠ الجذر محصور بين

٣. رقم المئات ٣ ويكون الجذر = ٣٠٠ + عدد آخر نبحث عنه وي طرح

٣٠٠ أى ٩٠٠٠٠ من العدد المفروض يكون الباقي ٤٣٢٢٥ ويكون الباقي الأول

وهو ٤٣٢٢٥ = (ضعف ٣٠٠ + عدد آخر) × العدد الآخر نفسه

الخطوة الثانية : نبحث عن رقم العشرات

١٠. العدد الآخر = $\frac{٤٣٢٢٥}{٦٠}$ تقريباً

» ٧٠ =

وبالتجربة نجد أن ٧٠ أكبر من العدد المطلوب

١٠. فنجرب ٦٠

٦٠. ٦٠ (٦٠ + ٦٠٠) = ٣٩٦٠٠ وهو أصغر من ٤٣٢٢٥

١٠. العدد الآخر أكبر من ٦٠ وأقل من ٧٠

أى أنه يساوى ٦٠ + رقم الآحاد وتكون العشرات = ٦٠

١٠. الفرق ٤٣٢٢٥ — ٣٩٦٠٠ ناشئ عن رقم الآحاد

الجذر المطلوب = ٣٦٠ + رقم الآحاد

الخطوة الثالثة : نبحث عن رقم الآحاد

١٠. الفرق ٤٣٢٢٥ — ٦٠ (٦٠ + ٦٠٠) =

١٣٣٢٢٥ — ٣٠٠ — ٦٠ (٦٠ + ٦٠٠) =

١٣٣٢٢٥ — ٣٦٠ =

= (ضعف ٣٦٠ + رقم الآحاد) × رقم الآحاد

= (٧٢٠ + رقم الآحاد) × رقم الآحاد

١٠. رقم الآحاد = $\frac{٣٦٢٥}{٧٢}$ تقريباً

» ٥ =

وبالتجربة نجد أن ٥ هو الرقم المطلوب لأن $٣٦٢٥ = ٧٢٥ \times ٥$

$$٣٦٥ = \overline{١٣٣٢٢٥} \div ٥$$

وتوضح العملية على الصورة الآتية :

$ \begin{array}{r} (٢) \text{ بعد حذف الأصفار} \\ ٣) ١٣٦٣٢٢٥ (٣٦٥ \\ \underline{٩} \\ ٦٦) ٤٣٢ \\ \underline{٣٩٦} \\ ٧٢٥) ٣٦٢٥ \\ \underline{٣٦٢٥} \\ \dots \end{array} $	$ \begin{array}{r} ٣٠٠) ١٣٣٢٢٥ (٥ + ٦٠ + ٣٠٠ (١) \\ \underline{٩٠٠٠} \\ ٤٣٢٢٥ = ٦٠ + ٦٠٠ \\ \underline{٣٩٦٠} \\ ٣٦٢٥ = ٥ + ٧٢٠ \\ \underline{٣٦٢٥} \end{array} $
---	---

٧٩ — يمكننا إيضاح الوضع الأخير في المثال السابق وبيان الخطوات المتتالية

في العمل بما يأتي :

(١) نقسم العدد إلى فصول ثنائية مبتدئين من جهة اليمين هكذا ١٣٦٣٢٢٥

(٢) نبحث عن أكبر مربع في الفصل الأخير ١٣ من جهة اليسار نجده ٩

وجذره التربيعي ٣ فيكون هو الرقم الأيسر في الجذر فنجعل ١٣ مقسوما ٣٦ مقسوماً عليه ثم نطرح ٣ من الفصل الأخير فيكون الباقي ٤

(٣) نزل الفصل الثاني ونضعه على يمين الباقي فيتكون العدد ٤٣٢ ونجعله

مقسوماً ثم نضاعف الرقم الذي وجد من الجذر ونضع الناتج وهو ٦ في المقسوم عليه ونقسم ٤٣ على ٦ فنخرج القسمة ٧

نتصور وضع الرقم ٧ على يمين المقسوم عليه ونجرب ما إذا كان ٧×٦٧

لا يزيد على المقسوم وهو ٤٣٢ ففي هذه الحالة المقسوم أصغر من ٦٧×٧ فلذلك نأخذ الرقم الذي يلي خارج القسمة (٧) في الصغر أي نأخذ ٦ ونتصور وضعه على

يمين الرقم ٦ في المقسوم عليه ونجرب ما إذا كان ٦×٦٦ يساوى أو أصغر من المقسوم ٤٣٢ فنجد أن ٦×٦٦ أصغر من ٤٣٢ فيكون ٦ هو الرقم الثانى فى الجذر .

نضع هذا الرقم على يمين الرقم الأول الذى وجد ونضعه كذلك على يمين الرقم ٦ فى المقسوم عليه ثم نطرح حاصل ضرب ٦×٦٦ من المقسوم ٤٣٢ فالباقى ٣٦ (٤) نزل الفصل الثالث على يمين الباقي فيتكون العدد ٣٦٢٥ فنجعله مقسوما ثم نضاعف الجزء الذى وجد من الجذر ونضع الناتج وهو ٧٢ فى موضع المقسوم عليه نقسم $٣٦٢ \div ٧٢$ نخرج القسمة ٥

نجرب ما إذا كان ٥×٧٢٥ يساوى أو أقل من المقسوم ٣٦٢٥ (فى هذه الحالة $٥ \times ٧٢٥ = ٣٦٢٥$) .

نضع خارج القسمة ٥ على يمين الرقمين اللذين وجدا فى الجذر وكذا على يمين ٧٢ فى المقسوم عليه ونطرح حاصل الضرب ٥×٧٢٥ من المقسوم ٣٦٢٥ فالباقى صفر وانتهت فصول العدد المفروض .

$$(٥) \quad ٣٦٥ = \overline{١٣٣٢٢٥١}$$

من طريقة العمل فى المثالين السابقين واتباع خطوات مماثلة لما تقدم يمكننا استنباط الطريقة العامة لاستخراج الجذر التربيعى لأى عدد مهما كان عدد أرقامه وهى :

الطريقة

يقسم العدد إلى فصول ثنائية من جهة اليمين ثم يستخرج الجذر التربيعى لأكبر مربع منحصرفى الفصل الأخير من جهة اليسار فيكون هو رقم الرتبة اليسرى من الجذر ثم يطرح مربع هذا الرقم من الفصل الأخير .

ينزل على يمين الباقي الفصل الذى يليه ثم يفصل رقم آحاد العدد المتكون ويقسم جميع عشراته على ضعف ناتج الجذر فالخارج إما هو الرقم الثانى للجذر أو أكبر منه .

ولتجربته يوضع على يمين ضعف ناتج الجذر ويضرب العدد المكون من ذلك في نفس هذا الرقم فإن أمكن طرح حاصل الضرب من العدد المكون من الباقي والفصل الذي أنزل على يمينه كان هو الرقم المطلوب وإلا فتعاد التجربة على الرقم الذي ينقص عنه بواحد وهكذا .

ومتى حصلنا على الرقم الثاني للجذر ينزل على يمين الثاني الفصل الثالث من جهة اليسار ويستمر في العمل حتى تنتهي جميع الفصول فيكون الخارج الكلى هو الجذر المطلوب .

تنبيه : إذا لم تكن إحدى عمليات القسمة ممكنة فيوضع في ناتج الجذر صفر ويعتبر ذلك المقسوم باقياً وينزل على يمينه فصل ثان ويستمر في العمل .

(مثال) أوجد الجذر التربيعي للعدد ٣٩٧٩٠٨٦٤

العمل

$$[\text{الجواب إجمالاً} = \overline{٧.٠٠٠٠٠٠٠٤} = ٦٠٠٠ \text{ تقريباً}]$$

لا داعي الآن لذكر الخطوات المتتالية في العمل فسنكتفي بوضع العملية التامة وعلى الطالب تتبع الخطوات

$$\begin{array}{r}
 ٦) \quad ٣٩٧٩٠٨٦٤ \quad (٦٣٠٨ \\
 \underline{٣٦} \\
 ١٢٣ \quad ٣٧٩ \\
 \underline{٣٦٩} \\
 ١٢٦٠٨ \quad ١٠٠٨٦٤ \\
 \underline{١٠٠٨٦٤} \\
 ٦٣٠٧ = \overline{٣٩٧٩٠٨٦٤} \sqrt{} \therefore
 \end{array}$$

٨٠ — في الأمثلة السابقة كانت الأعداد المطلوب استخراج جذورها التربيعية مربعات كاملة ولذلك انتهت العملية في كل حالة بدون باق ولكن من المعلوم أن أغلب الأعداد ليست مربعات كاملة ففي هذه الحالة لا بد أن يتبقى باق بعد استخراج آحاد الجذر التربيعي وحينئذ يمكننا الاكتفاء باستخراج الجزء الصحيح من الجذر مع ذكر الباقي أو يمكننا أن نستمر في عملية استخراج الجذر التربيعي بالحصول على أرقام عشرية للجذر كما سنبينه في المواد الآتية :

(مثال) أوجد أقرب عدد صحيح للجذر التربيعي للعدد ٦٥٧٤٨ .

العمل

٢) ٦٥٧٤٨ (٢٥٧	٢) ٦٥٧٤٨ (٢٥٦
٤	٤
٤٥) ٢ ٥٧	٤٥) ٢ ٥٧
٢ ٢٥	٢ ٢٥
٥٠٧) ٣٢ ٤٨	٥٠٦) ٣٢ ٤٨
٣٥ ٤٩	٣٠ ٣٦
	٢ ١٢

$$٢١٢ + ٢٥٦ = ٦٥٧٤٨ \therefore$$

$$٣٠١ - ٢٥٧ = ٦$$

∴ أقرب عدد صحيح للجذر التربيعي للعدد المفروض هو ٢٥٦

ملاحظة : في المثال السابق إذا طرح الباقي ٢١٢ من العدد المفروض كان الناتج مربعاً كاملاً وهو أكبر مربع منحصر في العدد المذكور كما أنه إذا أضيف العدد ٣٠١ إلى العدد المفروض كان الناتج هو المربع الكامل التالي للعدد المذكور

تمرين ٣٨

(١) أوجد الجذر التربيعي لكل من الأعداد الآتية :

$$(١) \quad ٢٧٠٤ \quad ٥٣٢٩ \quad ٦٥٦١ \quad ٣٤٨١$$

$$(ب) \quad ٥٩٢٩ \quad ٩٦٠٤ \quad ١٧١٦١ \quad ١٥١٢٩$$

$$(ح) \quad ٥٣٨٢٤ \quad ٤٢٠٢٥ \quad ١٠٦٢٧٦ \quad ٣٦٧٤٤٩$$

(٢) ما هو أكبر مربع يقل عن ٣٤٧٩٨٧ وما هو أصغر مربع يزيد عليه ؟

(٣) ما أصغر عدد يطرح مما يأتي ليكون الباقي مربعاً كاملاً :

$$(١) \quad ٧٢٩٤ \quad (ح) \quad ٢٠٧٩٤٥$$

$$(ب) \quad ٥٨٨٤ \quad (س) \quad ٩٢٤٤٣٠$$

(٤) ما أصغر عدد يضاف إلى ما يأتي ليكون الناتج مربعاً كاملاً .

$$(١) \quad ٧٢٩٤ \quad (ح) \quad ١١٩٠١٩$$

$$(ب) \quad ١٤٣٥٦ \quad (س) \quad ٩٢٤٣٧$$

(٥) ما أقرب المربعات الكاملة إلى العدد ٨٧٤٥٢

(٦) ما أقرب المربعات الكاملة إلى العدد ٢٣٤١٧

الجذور التريمية للأعداد والكسور العشرية

٨١ — لاستخراج الجذر التريمي لعدد عشري نستخرج الجذر التريمي

للجزء الصحيح كالعتاد وبعد أن نفرغ من الجزء الصحيح نستمر في العمل بإنزال الأرقام العشرية اثنين اثنين بالطريقة العادية تماماً لنحصل على الأرقام العشرية في الجذر المطلوب .

(مثال) أوجد $\sqrt{٤٦٦,٥٦٧}$

٨٣ — فى المثالين السابقين انتهت عملية الجذر بدون باق لأن كل مقدار كان مرعباً كاملاً وأما إذا لم تنته العملية فيمكننا الاستمرار فى عملية استخراج الجذر للحصول على أى عدد نطلبه من الأرقام العشرية وذلك بأن نضع على يمين العدد العشرى المراد استخراج جذره العدد اللازم من الأصفار ثم ننزل هذه الأصفار اثنين كالمعتاد .

(مثال ١) أوجد $\sqrt{٠.٠٠٣٢١}$ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية

العمل

$$[\text{الجواب بالإجمال} = \sqrt{٠.٠٠٣٢١} = \frac{٠}{١٠٠} = ٠.٠٥ \text{ تقريباً}]$$

$$\begin{array}{r} ٠.٠٥٦٦ \quad (٠.٠٠٣٢١٠٠٠) \\ \underline{٢٥} \\ ٧١٠ \\ \underline{٦٣٦} \\ ٧٤٠٠ \\ \underline{٦٧٥٦} \\ ٦٤٤ \end{array}$$

∴ الجواب = ٠.٠٥٦٦ أى ٠.٠٥٧ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة

أرقام عشرية

ملاحظة : قد حصلنا على رقم عشرى زائد على المطلوب لإمكان تقريب الرقم الأخير المراد ذكره فى الجذر .

(مثال ٢) أوجد $\sqrt{٣}$ بحيث يحتوى الجواب على رقمين عشريين .

العمل

$$\begin{array}{r}
 ١٠٠٠٠٠٠٠٠ (١٠٠٠٠٠٠٠٠) \\
 \underline{1} \\
 ٢٤) ١٠٠ \\
 \underline{96} \\
 ٢٨١) ٤٠٠ \\
 \underline{281} \\
 ٢٨٣٤) ١١٩٠٠ \\
 \underline{11296}
 \end{array}$$

$$\therefore 37 = 1014 \text{ تقريباً .}$$

٨٤ — نلاحظ أن مربع أى كسر عشري يحتوى على ضعف عدد الأرقام العشرية فى الكسر المفروض أى أنه لا بد أن يحتوى على عدد زوجي من الأرقام العشرية ولذلك فإننا فى استخراج الجذر التربيعي لكسر عشري ننزل الأرقام العشرية اثنين اثنين حتى يكون عدد الأرقام العشرية التى يستخرج الجذر المقابل لها زوجياً .

وفى المثال الأولى فى المادة السابقة حينما أنزلنا الفصل الثانى لم ننزل الرقم ١ فقط بل أنزلنا على يمينه صفرًا لنجعل عدد الأرقام زوجياً .

تمرين ٣٩

(١) أوجد الجذر التربيعي للكسور والأعداد العشرية الآتية .

$$(١) ٠,٥٣٢٩ \text{ و } ٣٤١,٤٠٩ \text{ و } ٨٤١,٥٨٠١$$

$$(ب) ٠,٠٠٨٦٨٦٢٤ \text{ و } ٩,٧٩٦٩ \text{ و } ٠,٩١٨٠٩$$

$$(ح) ٢٠,٨٨٤٩ \text{ و } ٢٥,٥٠٢٥ \text{ و } ٠,٠٠٨١٩٠٢٥$$

(٢) أوجد الجذر التربيعي لما يأتي بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية:

$$(١) \quad ٠.٠٦٤٢٦٧ \text{ و } ٠.١٤٨٦٢٨ \text{ و } ٠.٠٠٨٦٢٤$$

$$(ب) \quad ١٧,٣١٢ \text{ و } ٢,٨١٩٤ \text{ و } ٤,٦٧٨٩١$$

(٣) أوجد الجذر التربيعي لما يأتي مقرباً إلى رقمين عشريين :

$$(١) \quad ٢٨,٠٩ \text{ و } ١٧,٤٥٣$$

$$(ب) \quad ٥٢,١٦٧ \text{ و } ١,٠٦ \text{ و } ٢,٥$$

الجذور التريعية للكسور الاعتيادية

٨٥ — سبق أن رأينا بمادة ٢٥ أن الجذر التربيعي لكسر اعتيادي هو كسر آخر بسطه الجذر التربيعي لبسط الكسر الأصلي ومقامه الجذر التربيعي لمقامه وقد سهل تطبيق ذلك في الأمثلة السابق ذكرها لأن كلا من البسط والمقام كان مربعاً كاملاً .

وأما إذا كان المقام وحده مربعاً كاملاً ولم يكن البسط كذلك فإننا نستخرج الجذر التربيعي للبسط بالطريقة العامة ونقسمه على الجذر التربيعي للمقام كما في المثال الآتي :

(مثال) أوجد $\sqrt{\frac{٧}{٩}}$ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية .

العمل

$$\sqrt{\frac{٧}{٩}} = \frac{\sqrt{٧}}{\sqrt{٩}} = \frac{\sqrt{٧}}{٣} = \frac{٢,٣٣٦١}{٣} = ٠,٧٤٥$$

تنبيه — إذا لم يكن الكسر المفروض في أصغر حديه فيجب اختصاره قبل استخراج الجذور .

مثلاً — إذا طلب استخراج الجذر التربيعي للكسر $\frac{٢٥}{٩٩}$ فإننا نختصره أولاً إلى $\frac{٥}{٩}$ ثم نستخرج الجذر التربيعي للكسر الناتج كما في المثال المتقدم .

٨٦ — فإذا لم يكن مقام الكسر مرعاً كاملاً فإن عملية قسمة الجذر التربيعي للبسط على جذر للمقام تكون طويلة سواء أ كان البسط مرعاً كاملاً أم لم يكن .
فمثلاً — إذا أردنا أن نجد $\sqrt{\frac{1}{3}}$ فإننا نجد أن $\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{3} = 1.7320$

وبدهى أن عملية قسمة العدد الأول على الثانى مطوّلة ولذلك نتمتع طريقة أخرى لاختصار العمل بأن نستبدل بهذا الكسر كسراً آخر مساوياً له ومقامه مربع كامل هكذا :

(مثال ١) أوجد $\sqrt{\frac{1}{3}}$ بحيث يكون الجواب محتوياً على رقمين عشريين .

العمل

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times 3}{\sqrt{3} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$$

(مثال ٢) أوجد $\sqrt{\frac{1}{3}}$ بحيث يحتوى الجواب على ثلاثة أرقام عشرية .

العمل

$$\left[\text{الجواب تقريباً} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times 3}{\sqrt{3} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1 \right]$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times 3}{\sqrt{3} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = 1$$

تمرين ٤٠

(١) أوجد الجذر التربيعي لما يأتى :

$$(أ) \sqrt{\frac{1781}{2116}} \quad \sqrt{\frac{1849}{1936}} \quad \sqrt{\frac{3707}{60033}}$$

$$(ب) \sqrt{\frac{2048}{2400}} \quad \sqrt{\frac{74029}{780720}} \quad \sqrt{\frac{144}{169}}$$

$$(ج) \sqrt{\frac{197}{289}} \quad \sqrt{\frac{1}{25}} \quad \sqrt{\frac{41943}{16}}$$

(٢) (أ) أوجد $\sqrt{\frac{1}{3}}$ مقرباً إلى رقم عشري واحد .

(ب) أوجد $\sqrt{\frac{1}{3}}$ مقرباً إلى رقمين عشريين .

تمارين متنوعة لاعادة المقرر

(١)

(١) صندوق مكعب يسع تماما ١٢٥ كرة من الرصاص قطر كل منها ٣ بوصات أوجد كم قدما مكعبة من الرمل تملأ الفراغ الكائن داخل هذا الصندوق بين الكرات .

(٢) بدأ موظف الخدمة وسنه عشرون سنة بمرتب ١٠٠ جنيه سنويا وبقي مرتبه ثابتاً ٣ سنوات ثم زاد المرتب الشهري جنيهين سنوياً لمدة العشر السنوات التالية ثم بقي كما هو حتى استقال وكان متوسط مرتبه مدة خدمته كلها ٢٥٠ جنيهاً سنوياً ، أوجد السن التي استقال فيها .

(٣) الربح المركب لمبلغ ما بسعر ٥ ٪ في السنة لمدة سنتين يزيد على ربحه البسيط لنفس المدة ، و بنفس السعر بمقدار جنيه واحد فما المبلغ ؟

(٤) تاجر يحدد لبضاعته ثمنين أحدهما للدفع فوراً والآخر للدفع المؤجل فإذا علم أن الثمن المؤجل هو $1\frac{1}{4}$ جنيه يخصم منه حطیطة بسعر ٥ ٪ للثمن الفوري فما الثمن الفوري ؟

(٥) اشترك ا ب في تجارة بمبلغين مقدارهما ١٥٠٠٠ جنيه و ٩٠٠٠ جنيه على

الترتيب وبلغ الدخل في نهاية السنة ٥٦٠٠ جنيه وزعت بالطريقة الآتية :

أولاً — ٥ ٪ من الأرباح الكلية تدفع لشركة التأمين .

ثانياً — $\frac{1}{4}$ الأرباح الكلية للمصاريف الثرية .

ثالثاً — يعطى ب نسبة معينة مما تبقى مقابل إدارة العمل .

رابعاً — يقسم الباقي الأخير بعد ذلك بينهما بنسبة رأس مالهما فإذا علم

أن نصيب ا قد بلغ ٢٥٠٠ جنيه فكم كان نصيب ب مقابل إدارة الشركة

(٦) في ٢٧ سبتمبر سنة ١٩٣٤ وضعت عصا رأسية طولها ٦ ديسمترات في أرض فضاء . والجدول الآتي يبين طول ظل هذه العصا في الأوقات المختلفة من النهار :

الوقت بالساعة	ت	ق ت	ق ت	ت	ق ت	ق ت	ت	ق ت	ت
١٠	١٠,٤٠	١١,١٥	١١,٣٠	١١,٤٥	١٢	١٢,٢٠	١	٢,١٥	٢,١٥
طول الظل بالديسمتر	٨,٦	٧,٧٩	٧,٣٥	٧,٢٥	٧,٢٢	٧,٢٢	٧,٣٠	٧,٧٥	٩,٨١

ارسم خطأً بيانياً يمثل طول الظل في الأوقات المختلفة من النهار ومنه أوجد

أولاً — الوقت عند ما كان طول الظل ٨٥ سنتيمتراً

ق ت

ثانياً — طول الظل في الساعة ٤٠ / ١٢

(٢)

(١) كرة معدنية مجوفة قطرها الخارجى ٨ بوصات وسمك معدنها $\frac{1}{4}$ بوصة أوجد وزن المسحوق الذى يملؤها إذا علم أن كل ٢٥ بوصة مكعبة من هذا المسحوق تزن رطلين ؟

(٢) الجدول الآتى يبين درجات الحرارة في أوقات مختلفة في يوم ما في مدينة حلوان

الوقت	صباحاً					مساءً						
	نصف الليل	٢	٤	٦	٨	١٠	الظهر	٢	٤	٦	٨	١٠
درجة الحرارة المئوية ...	١٣,٥	١٢,٥	١١,٥	١١	١٣,٥	١٦,٥	١٩,٨	٢١,٣	٢١	١٩,٥	١٧	١٥

ارسم خطأً بيانياً يمثل ذلك ومنه أوجد :

أولاً — درجة الحرارة عند الساعة التاسعة صباحاً

ثانياً — كم كانت الساعة عند ما كانت درجة الحرارة ١٨ مئوية

(٣) وضع رجل مبلغاً في مصرف فبلغ ربحه في السنة الأولى ٢٠ جنيهاً وبلغ ربحه في السنة الثانية ٢٠ و ٨ جنيهاً فما زيادة ربح السنة الثالثة عن ربح السنة الأولى ؟

(٤) ابتداء محمد عملاً تجارياً برأس مال قدره ٨٥٠٠ جنيه وبعد شهرين اشترك معه أحمد ومحمود فدفعاً ٨٠٠٠ جنيه ٦ و ٧٢٠٠ جنيه على الترتيب إلا أن أحمد لم يمكنه البقاء في الشركة فحسب مبلغه بعد أربعة أشهر من دخوله فيها فإذا زاد نصيب محمد من الأرباح في نهاية السنة عن نصيب محمود ٤٥٠ جنيهاً فما نصيب كل من محمد وأحمد ومحمود من هذه الأرباح ؟

(٥) وثيقة باعها صاحبها « أ » قبل ميعاد استحقاقها بمدة ٦ شهور بسعر الخطيطة الخارجية ٨ ٪ في السنة ثم وضع ما حصل عليه في تجارة مشتركا مع آخر « ب » فكان مجموع مبلغيهما ٦٠٠ جنيه فإذا بلغت الأرباح الكلية للشركة بعد مدة ما ١٢٥ جنيهاً أعطى « أ » منها ٢٠ ٪ نظير إدارته العمل وكان نصيب « ب » من الأرباح ٦٠ جنيهاً فإذا كانت القيمة الاسمية للوثيقة ؟

(٦) في المتوسط يكون عادة مقدار المطر الساقط في شهر مارس هو نفسه في شهر أبريل في إنجلترا وقد حدث في سنة ١٩٢٣ أن زاد المطر الساقط في شهر مارس ٢٠ ٪ عن المتوسط المعتاد ونقص في شهر أبريل ١١ ٪ عن المتوسط المعتاد ولو أنه نقص في شهر مايو ٨ ٪ عن المتوسط المعتاد لكان متوسط سقوط المطر في الأشهر الثلاثة عادياً. أوجد هل سقوط المطر في شهر مايو في إنجلترا في المعتاد أكثر أو أقل منه في شهر أبريل ومقدار ذلك في المائة .

(٣)

(١) قطعة معدنية مصممة على شكل أسطوانة دائرية قائمة ، ارتفاع هذه الأسطوانة يعادل طول نصف قطر قاعدتها ، كسر من الأسطوانة جزء

يعادل $\frac{1}{4}$ من وزنها وسقط هذا الجزء في حوض به ماء وكانت قاعدة الحوض على شكل مربع طول ضلعه ٧ سنتيمترات فإذا علم أن الماء ارتفع في الحوض مقدار سنتيمترين فاحسب طول نصف قطر قاعدة الأسطوانة ($\text{ط} = \frac{22}{7}$).

(٢) شوهدت درجة الحرارة « ح » لقطعة معدنية آخذة في البرودة في مدة مختلفة « ز » في لحظات معينة فوجدت أنها تتغير حسب الجدول الآتي :

٣٨	٢٨	١٩	١٣	٩	٦	٤	٠		« ز » بالدقائق
٦٠	٦٤	٧١	٧٩	٨٧	٩٥	١٠١	١١٣		« ح » مئوية

ارسم الخط الذي يوضح تلك التغيرات ثم استنتج من الشكل :

أولاً — درجة الحرارة بعد ١٦ دقيقة

ثانياً — الزمن الذي بردت فيه القطعة من ٩٥° إلى ٦٥°

(٣) وضع رجل مبلغاً في مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٢٪ في السنة وفي نهاية

السنة الثانية سحب ٣٣ و ٥٠ جنيهاً وترك الباقي في المصرف ليربح بالسعر

الأول وفي نهاية السنة الثانية وجد أن جملة ماله في المصرف ٢٩٣ و ٥٥٦

جنيهاً فما أصل المبلغ الذي وضع في المصرف ؟

(٤) اشترك أ ب و ج في عمل تجارى برؤوس أموال قدرها ٥٠٠ جنية

و ٧٥٠ جنيهاً و ٢٥٠ جنيهاً على الترتيب واتفقوا على أن يقوم « أ » بإدارة

العمل نظير نسبة مئوية معينة من الأرباح الكلية و بعد مضي ٨ شهور

سحب « ب » $\frac{1}{4}$ رأس ماله وانسحب « ج » من الشركة وفي نهاية السنة

من بدء الشركة كانت الأرباح الكلية ٦٤٠ جنيهاً خص « أ » منها ٢٨٠

جنيهاً فكم في المائة من الأرباح الكلية كان نصيب « أ » نظير إدارة العمل

(٥) أوجد $\overline{١٦٠٠٣٠٠٨}$

(٦) يمزج رجل نوعين من الشراب ثمن شراء اللتر من النوع الأول ٢٥ قرشاً

و ثمنه من النوع الثاني ١٥ قرشاً ويفقد ٥٪ من المزيج في عملية المزج

ويبيع المتر من المزيج بسعر ٢٤ قرشاً راجحاً في ذلك ٢٠ ٪ من ثمن الشراء
فما النسبة التي يمزج بها الرجل النوعين ؟

(٤)

(١) اقترض رجل ١٠٠٠ جنيه بالربح المركب بسعر $3\frac{1}{4}$ ٪ في السنة فإذا رد
للدائن ٢٣٥ جنيهًا في نهاية السنة الأولى و٢٣٥ جنيهًا في نهاية السنة الثانية
فكم جنيهًا يدفعها للدائن في السنة الثالثة لينتهى الدين ؟

(٢) إناءان ارتفاعهما متساويان وأحد الاناءين متوازي مستطيلات بعدا قاعدته
٢٨٦١٢ من السنتيمترات والآخر اسطوانة قطرها يساوي ٣٥ سنتيمترًا
والاناءان موضوعان على نضد أفقي ومتصلان عند أسفلهما بأنبوبة قصيرة
رفيعة يمكن إهمال حجمها ومثبت في هذه الأنبوبة صنوبر فإذا كان الصنوبر
مقفلاً وضب في متوازي المستطيلات ماء إلى ارتفاع ٤٤ و٢ سنتيمتر ثم
فتح الصنوبر بعد ذلك (لينتقل جانب من الماء إلى الاناء الآخر) فما هو
الارتفاع الذي يصل إليه الماء في الاسطوانة ؟

(٣) اشترك أ ب في تجارة فدفع أ ٦٠٠٠ جنيه ودفع ب ٤٠٠٠ جنيه واتفقا
على أن توزع الأرباح والخسائر بينهما في نهاية كل سنة بنسبة مبلغيهما
في أول نفس السنة فإذا علم أن أ كان يسحب أرباحه في نهاية كل سنة
وأن ب كان يتركها في التجارة وأن الشركة قدر بحت في نهاية السنة الأولى
١٤٠٠ جنيه وفي نهاية السنة الثانية ١٥٨٤ جنيهًا وخسرت في نهاية السنة
الثالثة ١٧٨٤ جنيهًا فأوجد ما آل إليه رأس مال ب في نهاية هذه المدة ؟

(٤) وثيقتان الأولى بمبلغ $25\frac{20}{97}$ جنيهًا تستحق الدفع في أول مايو سنة ١٩٣٥
والثانية بمبلغ ٢٤٠٠ جنيه تستحق الدفع في يوم ٢٤ سبتمبر سنة ١٩٣٥
وفي يوم ٦ ديسمبر سنة ١٩٣٤ كانت القيمة الحالية للوثيقة الأولى بعد

خصم حطيطة خارجية بسعر $\frac{1}{4} \cdot ٧٠$ في السنة تساوى القيمة الحالية للوثيقة الثانية بعد خصم حطيطة خارجية فأوجد السعر الذى حسبت به الحطيطة الخارجية للوثيقة الثانية ؟

(٥) برهن على أن $٠,٣٠٣٦٠١٧$ ينحصر بين $٠,٥٥٢$ و $٠,١٦٣٣٧٥٧$

(٦) يبين الجدول الآتى البعد عن مصب النيل عند رشيد مقدراً بالكيلومترات والارتفاع عن سطح البحر مقدراً بالأمتار لبعض المدن الواقعة على نهر النيل :

المدينة	رشيد	القاهرة	أسيوط	جرجا	الأقصر	اسوان	وادي حلفا
البعد عن رشيد بالكيلومترات ...	صفر	٢٦٠	٦٦٠	٨٠٠	٩٩٠	١٢١٠	١٥٥٠
الارتفاع عن سطح البحر بالأمتار	صفر	١٥	٤٥	٥٧	٦٨	٨٣	١١٥

ارسم الخط البياني الذى يمثل هذه التغيرات ومنه أوجد ما يأتى :

(أولاً) ارتفاع مغاغة عن سطح البحر إذا علم أنها تبعد ٤٥٠ كيلومتراً

عن رشيد

(ثانياً) بعد الدر عن رشيد إذا علم أن ارتفاع الدر عن سطح البحر ١٠٤ أمتار

(٥)

(١) أوجد الفرق بين $٠,١٦٦٣٧٥٧$ و $٠,٢٩١٦٧٦$

(٢) قسم رجل رأس ماله إلى جزئين أودع الجزء الأول فى مصرف ليربح ربحاً

مربكاً بسعر ٥ ٪ فى السنة واستخدم الجزء الباقي وقدره ٨٧٥ جنيهاً فى

تجارة وكانت التجارة تخسر ٢ ٪ فى كل سنة من قيمتها أول السنة نفسها

فإذا كان ما يؤول إليه رأس مال هذا الرجل فى التجارة وفى المصرف معاً

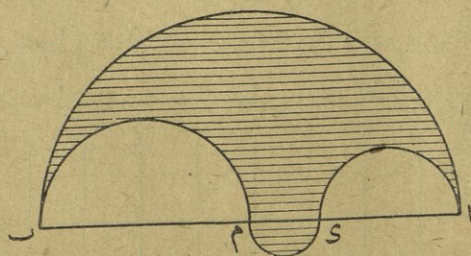
بعد ٣ سنوات هو ١٧٤٣ و ١٧٤٩ جنيهاً فما مقدار رأس ماله ؟

(٣) كتلة معدنية على شكل منشور قائم قاعدته معين طولاً قطريه ٧ سم ٢٦ سم ٨ سم على الترتيب وارتفاعه ١١ سم قطع منها جزء على شكل منشور ثلاثي قائم ارتفاعه هو ارتفاع الكتلة المعدنية ومساحة قاعدته ١٦ سم ٢ سم ثم صهر الجزء الباقي وحول إلى سلك أسطوانى طوله $23\frac{1}{4}$ سم فما قطر هذا السلك إذا علم أن $\pi = \frac{22}{7}$ ؟

(٤) وثيقة بمبلغ ١٨٢٥ و١ جنيهاً تستحق الدفع بعد ست سنوات استبدل بها حاملها ووثيقتين الأولى بمبلغ ١٠٠٠ جنيه تستحق الدفع بعد أربع سنوات والأخرى تستحق الدفع بعد عشر سنوات من تاريخ الاستبدال فإذا علم أن الخطيطة الخارجية محسوبة بسعر ٥ و٣٠٪ فى السنة فاحسب القيمة الاسمية للوثيقة الثانية .

(٥) (١) أوجد باقى طرح العدد الذى جذره التكعيبي ٠,٠٧ من العدد الذى مرعبة ٠,٠٠٥١٨٤ و .

(ب) أوجد أصغر عدد يقسم عليه ٩١٤٧٦ ليكون الناتج مكعباً كاملاً .
(٦) رسم نصف دائرة مركزها م ونصف قطرها م ب ثم أخذت نقطة د على ٢١ ورسمت على ١ د ٢ م ٦ ب ثلاثة أنصاف دوائر كما فى الشكل فإذا كان طول ١ ب ٨٤ سم ٦ م ١٤ سم أوجد مساحة الجزء المظلل .
($\pi = \frac{22}{7}$) .



(شكل ٣٨)

(٦)

(١) وضع مبلغ في بنك لير بح رجلاً مركباً فكانت جملته بعد سنتين ٥٤٠ و ٥٤٠ جنياً

وجملته بعد سنة أخرى ٤٣٢ و ٥٦٢ جنياً فما السعر وما المبلغ ؟

(٢) ما هو المقدار الذي إذا طرح منه ٢ كان مكعب الناتج $\frac{٨٠٤٩٢}{٤٥٦٥٣٣}$ ؟

(٣) رجل معه وثيقتان الأولى بمبلغ ٧٣٠ جنياً تستحق الدفع في ٥ فبراير سنة ١٩٣٧

والثانية تستحق الدفع في ٦ سبتمبر من السنة عينها باعها في أول يناير

من السنة نفسها فإذا كان مجموع الخطيطتين الخارجيتين هو ١٨ و ٣٨

من الجنيئات والقيمة الاسمية للوثيقة الثانية ٦ و ٠ من القيمة الاسمية للأولى

فما هو السعر الذي حسبته به الخطيطتان ؟

(٤) إناء على شكل منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٢٠ سم وقاعدته مثلث قائم

الزاوية ضلعا القائمة فيه ٢٠ و ١٥٦ من السنتيمترات ملئ إلى ثلثيه ماء ثم

سكب ما به في إناءين الأول على شكل اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها

٦٦ سم وقطرها $٨\frac{١}{١١}$ سم فامتلات ثم سكب الماء الباقي في إناء على

شكل متوازي المستطيلات بعدا قاعدته ٦ و ١٨٦ سم فما ارتفاع الماء فيه ؟

(٥) اشترك شخصان في تجارة فدفع الأول ٢٠٠٠ جنبيه ودفع الثاني ١٥٠٠ جنبيه

وبعد شهرين أضاف الأول ٦٠٠ جنبيه وانضم إليهما ثالث بمبلغ ٣٠٠٠ جنبيه

وبعد ثلاثة شهور أخرى أضاف الثاني ١٠٠٠ جنبيه أوجد نصيب كل

واحد منهم من الأرباح الكلية في نهاية العام إذا علم أنها بلغت ٨٠٠ جنبيه

وأن الأول سيأخذ ١٠ ٪ من الأرباح نظير أتعاب الإدارة .

(٦) إذا علم أن محيط أحد المستطيلات ٢٢ متراً فارسم من الجدول الآتي الخط

البياني للارتباط بين مساحة المستطيل وأحد أضلاعه .

طول الضلع المتغير بالأمتار	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
مساحة المستطيل بالأمتار المربعة	٠	١٠	١٨	٢٤	٢٨	٣٠	٣٠	٢٨	٢٤	١٨	١٠	٠

ثم أوجد من الرسم طول كل من الضلعين عند ما تكون مساحة هذا المستطيل أكبر ما يمكن .

(٧)

(١) اقترض رجل مبلغ ٧٠٦٠ جنيهاً وتعهّد أن يسدده هو وأرباحه على قسطين أولهما ومقداره ٢٦٩٠ و١ جنيهاً يدفع في نهاية السنة الثانية من تاريخ القرض والثاني ومقداره ٥١٩٥ و٤٢١ جنيهاً يدفع في نهاية السنة الثالثة فإذا علم أن سعر الربح المركب في السنتين الأولى والثانية ٥ ٪ في السنة فما سعر الربح المركب في السنة الثالثة ؟

(٢) إناءان أولهما على شكل أسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ٧٠ سم ومحيط دائرة قاعدتها $١٠٠ \frac{٤}{٧}$ سم والثاني على شكل منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ٥٠ سم وطول أحد أضلاع قاعدته ١٥ سم وطول العمود النازل على هذا الضلع من رأس المثلث المقابل للضلع ١١ سم مليء الإناءان بعجينة يصنع منها الورق أوجدكم فرخاً من الورق يمكن صنعه من هذه العجينة إذا كان بعدد الفرخ الواحد ٢١ سم ٦٣ سم وسمك كل ٣٠٠ فرخ ٢٥ سم وأن العجينة تفقد ١٥ ٪ من حجمها عند التجفيف (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٣) أى المقدارين أكبر $٧^3 \cdot ٨٥٧٣٧٥$ أم ٩٨٠١٧ ؟

(٤) ارسم الخط البياني الدال على التغيرات التي طرأت على درجات الحرارة في الأزمنة المقابلة لها كما هو مبين بالجدول الآتي :

الزمن بالساعات	نصف الليل	صباحاً					الظهر	مساءً				
		٢	٤	٦	٨	١٠		٢	٤	٦	٨	١٠
درجة الحرارة بالمقياس المئوي	١٠	٩	٨	٢	٩	١٢	١٥	١٨	٢٠	١٩	١٥	١٣

(٥) أسس ١٦٦٠ مشروعاً تجارياً وكان رأس مال ١ ضعف رأس مال ب وبعد مضي ستة أشهر سحب ١ ربع رأس ماله وبعد مضي سنة من تاريخ تأسيس المشروع انضم إليهما ٢ برأس مال قدره ٧٥٠ جنيهاً وبعد مضي سنتين من تاريخ تأسيس المشروع بلغت الأرباح ١٤٤٠ جنيهاً خص منها ١٨٠ جنيهاً فما مقدار رأس مال ب ؟

(٦) وثيقة محررة يوم ١٥ فبراير سنة ١٩٣٥ لمدة ٨ شهور حولت لمصرف مالى يوم ٢٢ مايو من السنة نفسها فدفعت المصرف لحاملها ٥٩٠ جنيهاً و ٤٠٠ مليم فإذا علم أن سعر الحطيطة الخارجية ٠.٤٪ فى السنة فكم كانت قيمتها الاسمية .

(٨)

(١) وضع رجل مبلغاً فى مصرف ليربح ربحاً مركباً بسعر ٠.٥٪ فى السنة وفى نهاية السنة الأولى أضاف إلى ماله فى المصرف ٣٠٠ جنيهاً وانخفض السعر إلى ٠.٤٪ فى السنة وفى نهاية السنة الثالثة سحب ماله فى المصرف ٥٦٧ و ٢ جنيهاً وقد وجد أن جملة ماله فى نهاية السنة الرابعة ٤٥١٥ جنيهاً أوجد المبلغ الذى وضعه فى المصرف أول الأمر .

(٢) إناء على شكل متوازى المستطيلات ارتفاعه ديسيمتران وطول قاعدته $٦\frac{١}{٢}$ سم وعرضها $٥\frac{١}{٢}$ سم ملئ كله بالماء ثم سكب الماء الذى فيه فى إناءين كل منهما على شكل اسطوانة قائمة موضوعين على نضد أفقى واحد ومتصلين عند أسفلهما بواسطة أنبوبة رفيعة يمكن إهمال حجم الماء الذى يملؤها فإذا كان قطراً قاعدتيهما ٦ ٦ ٤ من السنتيمترات على التناظر فاحسب ارتفاع الماء فيهما (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٣) الجدول الآتى يبين العلاقة بين سرعة الريح والضغط الذى يحدثه على الأجسام المعرضة لها مع العلم بأن الضغط مقدر بنقل الباوند على القدم المربعة

٨٠	٧٠	٦٠	٥٠	٤٠	٣٠	٢٠	١٠	٥	سرعة الريح بالأميال في الساعة
٣١,٥	٢٤,١	١٨,٧	١٢,٢	٧,٩	٤,٤	٢	٠,٥	٠,١	الضغط

وضح هذه العلاقة بالرسم البياني واستنتج من الرسم .

(أ) الضغط عند ما تكون سرعة الريح ٤٥ ميلا في الساعة .

(ب) سرعة الريح عند ما يكون الضغط على القدم المربعة ٢١ باوندا .

(٤) اشترك أحمد وعلى وسعيد في تجارة فدفَعَ أحمد ١٢٠٠ جنيه وعلى ١٥٠٠ جنيه

وسعيد ١٠٠٠ جنيه واتفقوا على أن يأخذ الأخير ١٠٪ من أرباح الشركة

نظير إدارته لأعمالها وبعد أربعة شهور أضاف أحمد إلى رأس المال

٣٠٠ جنيه وبعد شهرين آخرين سحب ٣٠٠ جنيه من رأس ماله .

وفي نهاية العام كان جميع ما أخذه سعيد يزيد على نصيب أحمد ٢٠ جنيتها .

أحسب ما أخذه كل منهم .

(٥) وثيقة بمبلغ ٥٠٠ جنيه كانت تستحق الدفع في أول أبريل سنة ١٩٣٤

قدمت للمصرف بتاريخ ١٣ يونيه سنة ١٩٣٣ فحجز منها حطيطة خارجية

ودفع الباقي لحاملها والمطلوب معرفة مادفع لحاملها إذا علم أن السعر الذي

حسب به المصرف الحطيطة الخارجية وهو السعر نفسه الذي إذا وضع به

٤٢٠ جنيتها في مصرف ليربح ربحاً بسيطاً مدة ٥ شهور لبلغ ربحه ٦ جنيهات

(٦) قيست أطوال عدد من الأشخاص ودونت في الجدول الآتي :

١٦٩	١٦٧	١٦٦	١٦٥	١٦٤	١٦٣	١٦٢	١٦١	١٦٠	الأطوال بالسنتيمترات
٢	٢٤	٣٠	٣٣	س	١٧	١١	٨	١	عدد الأشخاص

فإذا علم أن متوسط الشخص الواحد ١٦٥ سم فأوجد قيمة س

(٩)

(١) ثلاثة أعداد حاصل ضرب أولها في ثانيها ٦٠٤٨ وحاصل ضرب ثانيها في ثالثها ٨٠٦٤ وحاصل ضرب ثالثها في أولها ٦٩١٢ فما هي هذه الأعداد ؟

(٢) متوسط درجات تلميذ في اللغات الثلاث في الفترة الأولى ٢٥ ومتوسطه فيها في الفترة الثانية ٣٠ فإذا كان متوسطه في اللغة العربية في الفترتين معا هو ٣٦ وكان متوسطه في اللغة الإنجليزية فيهما أيضاً هو ٢٩ فما درجة اللغة الفرنسية في كل فترة إذا علم أن درجته فيها في الفترة الأولى $\frac{3}{4}$ درجته فيها في الفترة الثانية ؟

(٣) اقترض على من حسن مبلغاً وكتب على نفسه وثيقة بمبلغ ٢٤٠٠ جنيه

تستحق الدفع يوم ٨ أغسطس سنة ١٩٣٥ لكنه في يوم ١٥ مارس

سنة ١٩٣٥ دفع لحسن مما عليه ٨٠٠ جنيه وكتب بالباقي وثيقة أخرى

جديدة تستحق الدفع يوم ٢٠ أكتوبر سنة ١٩٣٥ فأوجد القيمة الاسمية

لهذه الوثيقة مع العلم بأن الخطيطة خارجية محسوبة بسعر ٧٥٪ في السنة

(٤) منشور معدني مصمت قائم ارتفاعه $13\frac{1}{4}$ سم وقاعدته على هيئة شكل

رباعي ا ب ح د وكل من زاويتي ا ب و ا ق قائمة وأطوال أضلاعه ا ب و ب ح و

ح د و د ا هي على الترتيب ١٣ ١٠ ٦ ٨ من السنتيمترات أوجد حجمه

وإذا صهر وحول إلى مكعب فكم تكون المساحة السطحية لهذا المكعب ؟

(٥) الجدول الآتي يبين إحصاء الحوادث التي قامت بإسعافها جمعية الاسعاف

في سنة ١٩٢٩

ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.	ب.ب.ب.
٥١	٣٤	٥٣	٥٠	٤٧	٤٥	٥٤	٤٣	٤٨	٥٢	٤٩	٤٣
٣٧	٣٧	٥٤	٥٢	٥٣	٥٤	٥١	٤٢	٥١	٣٥	٣٤	٣٩

اصابات من الترام
اصابات من
الدراجات

ارسم خطاً بيانياً يوضح هذه العلاقة على ورقة واحدة و بمقياس رسم واحد .

(٦) اشترك محمد وأحمد في محل تجارى فدفَعَ أحمد ٢٢٥٠ جنياً ودفَعَ محمد ٤٥٠٠ جنيهه وبعد ٤ شهور أضاف محمد إلى رأس ماله ٥٠٠ جنيهه وبعد شهرين آخرين سحب أحمد من رأس ماله ٢٥٠ جنياً وفي نهاية السنة كان نصيب محمد من الأرباح يزيد على نصيب أحمد منها بمقدار ٩٧٥٠ جنياً فما نصيب كل منهما من الأرباح

(١٠)

(١) يملك رجل وثيقة تستحق الدفع بعد ١٠ شهور باعها بسعر الخطيطة الخارجية ٩٪ في السنة ثم أضاف إلى ما تحصل عليه مبلغ ٢٠ جنياً ، ثم اشترى بالناتج وثيقة أخرى قيمتها الاسمية ٨٠٠ جنيهه تستحق الدفع بعد ٨ شهور بسعر الخطيطة الخارجية ٧٥٪ في السنة ، أوجد القيمة الاسمية للوثيقة الأولى .

(٢) كرتان قطر إحداها ضعف قطر الأخرى ومجموع حجميهما ١٦١٧ سم^٣ فما نصف قطر كل منهما (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

(٣) اشترك أ و ب في تجارة فدفَعَ أ ١٤٠٠ جنيهه ودفَعَ ب ١٢٠٠ جنيهه واتفقا على أن يدير الشركة على أن يختص بنسبة معينة من جملة الأرباح قبل توزيعها وبعد مضي ٨ شهور من بدء تأسيس الشركة انضم إليهما ج برأس مال قدره ٨٠٠ جنيهه واستمر أ يدير الشركة بنفس الشروط وفي نهاية سنتين من وقت تأسيس الشركة كانت الأرباح الكلية ٥٠٠ جنيهه وكان نصيب أ الكلى ٢٤٠ جنياً فكم في المائة من الأرباح الكلية كانت حصة أ نظير الإدارة ؟

(٤) الجدول الآتي يبين وزن عدة أنابيب صنعت من معدن واحد وذات طول واحد وسمك واحد :

القطر الخارجى للانبوبة بالبوصات	١	١٥	٢	٢٥	٣	٣٥	٤	٤٥	٥
الوزن بمقل الباوند	٤	٨٧	٩٥	١٢٣	١٤٧	١٧٢	١٩٦	٢٢١	٢٤٥

ارسم شكلاً يبين العلاقة بين وزن تلك الأنابيب وقطرها الخارجى ومنه استنتج وزن قطعة من ذلك المعدن نفسه وذلك الطول والسمك وقطرها الخارجى $\frac{1}{4}$ ٣ بوصة .

(٥) اشترى تاجر نوعين من الشاى أحدهما بسعر الرطل ١٨ قرشاً والثانى بسعر الأقة ٦٢ قرشاً فبأي نسبة يخلطهما بحيث يكسب $\frac{4}{5}$ ٢٤ ٪ . إذا باع الكيلوجرام من الخلوط بسعر ٥٣ و ٦ من القروش

(٦) قطعة أرض مساحتها ٢١٦ فداناً على شكل متوازى أضلاع رسمت على الورق بمقياس ٢ سم لكل ١٠٠ قصبة فكان طول ضلعها الأكبر ٨ سم وطول ارتفاعها الأكبر ٤ سم فما هو محيط تلك القطعة بالقصبات وما مساحة قطعة أرض مستطيلة الشكل محيطها يساوى محيط تلك القطعة والنسبة بين بعديها كنسبة ٢ : ٣ ثم أوجد أيضاً مساحة الشكل الذى ترسم به القطعة المستطيلة على الورق بالسنتيمترات المربعة بالمقياس السابق أيضاً (الفدان = $\frac{1000}{3}$ قصبة مربعة)

محتويات الكتاب

صفحة

الباب الأول :

٥	التحليل إلى عوامل ومعنى الأس
٥	قاسم العدد
٥	العدد الأولى
٥	قابلية القسمة على ١٠
٦	» » ٥,٢
٦	» » ٢٥,٤
٧	» » ١٢٥,٨
٨	» » ٣,٩
١٠	» » ٦
١٠	» » ١١
١٢	تمرين ١
١٤	الأعداد الأولية وكيفية معرفتها
١٥	تحليل العدد إلى عوامله الأولية
١٦	تمرين ٢
١٧	معنى الأس والمربع والمكعب
١٨	المربع السكامل
١٩	تمرين ٣
٢٠	الجزر التريبعي
٢١	استخراج الجزر التريبعي بطريقة العوامل
٢٢	تمرين ٤
٢٣	تمرين ٥
٢٤	تمرين ٦
٢٥	الجزر التريبعية للكسور
٢٦	تمرين ٧
٢٦	المكعب والجزر التكعيبي
٢٧	طريقة استخراج الجزر التكعيبي بواسطة العوامل
٣٠	تمرين ٨

صفحة

الباب الثاني :

٣١	المساحات : مساحة المربع
٣٣	مساحة المستطيل
٣٤	تمرين ٩
٣٥	مساحة متوازي الأضلاع
٣٦	» المثلث
٣٦	» شبه المنحرف
٣٧	» المعين
٣٩	تمرين ١٠
٣٩	مساحة أى شكل كثير الأضلاع
٤٢	تمرين ١١
٤٣	مساحة الدائرة
٤٤	تمرين ١٢
٤٦	تمرين ١٣

الباب الثالث :

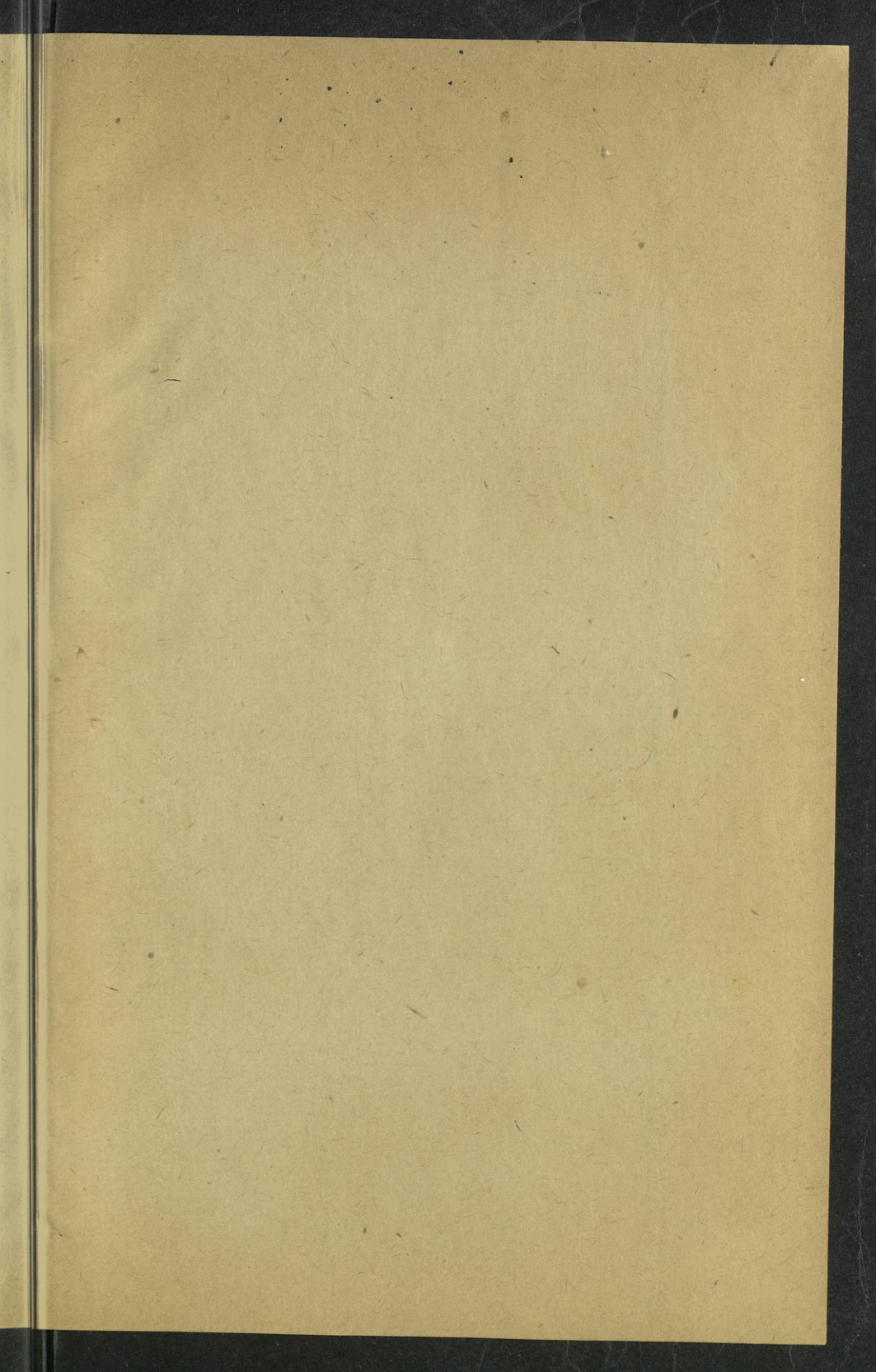
٤٩	الحجوم : حجم المكعب
٥٠	حجم متوازي المستطيلات
٥١	حجم المنشور القائم
٥٢	تمرين ١٤
٥٣	حجم الأسطوانة القائمة
٥٤	حجم الكرة
٥٤	تمرين ١٥
٥٥	تمرين ١٦

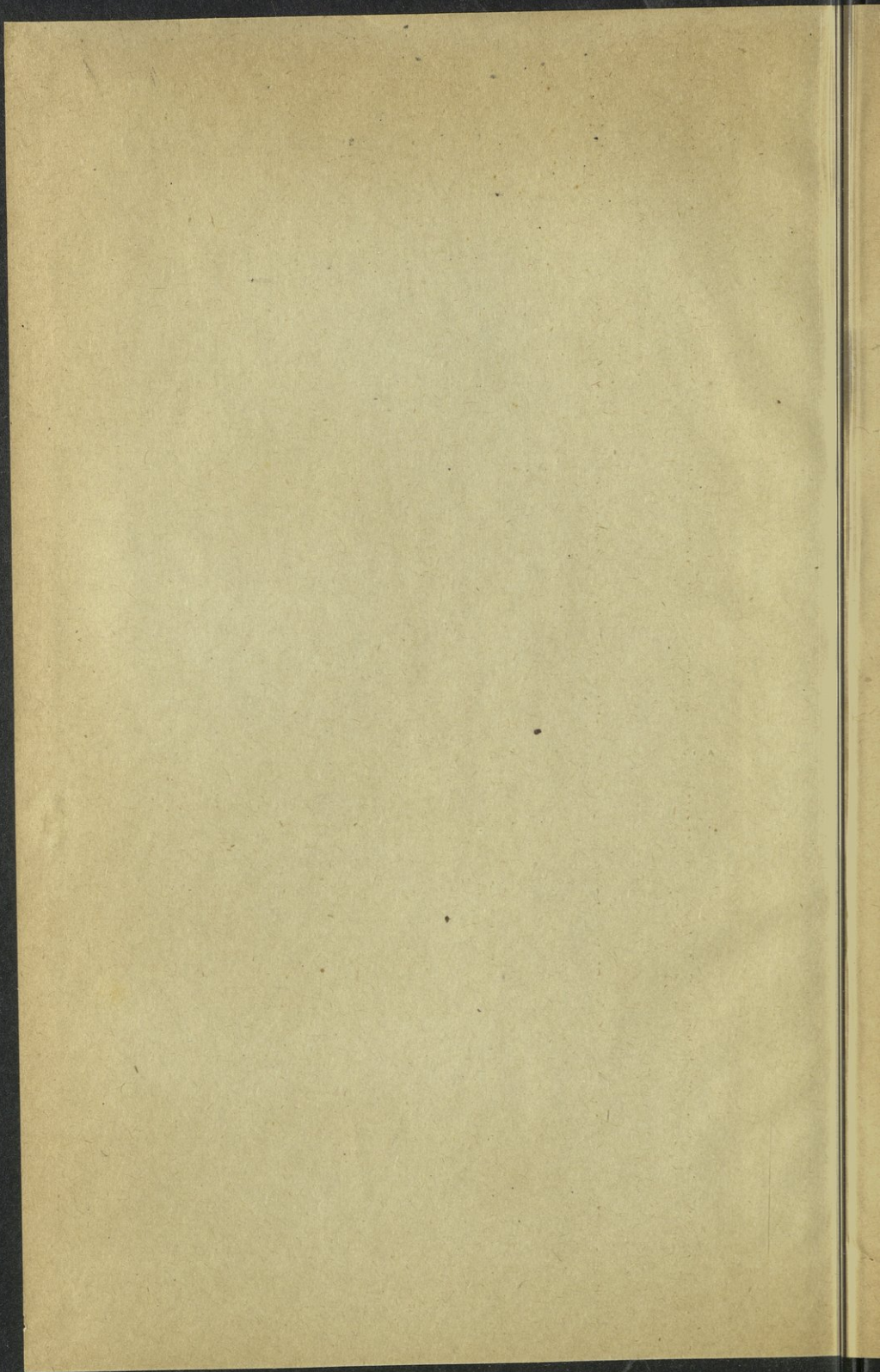
الباب الرابع :

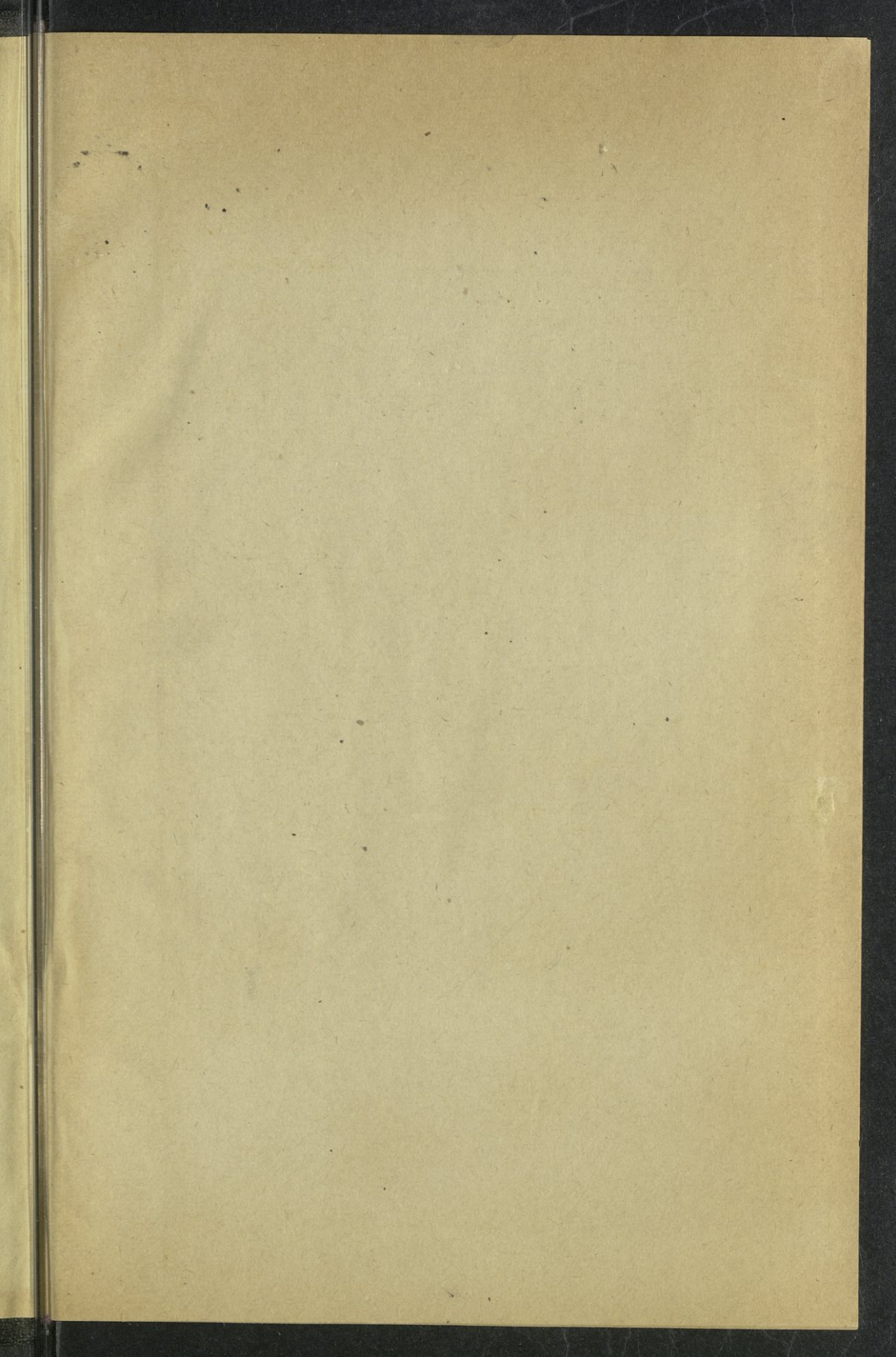
٥٨	تطبيقات متنوعة على الجذرين التربيعي والتكعيبي
٥٨	في المساحات والحجوم
٦٢	تمرين ١٧

الباب الخامس :

٦٦	المتوسط الحسابي
٧٠	تمرين ١٨
٧٧	تمرين ١٩







511:J41hA:v.1:c.1

جواهر، محمد صادة

الحساب للمدارس الثانوية

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES



01026441

American University of Beirut



511

J41hA

v.1

General Library

