كتاب

الجبر الابتدائي

لتلاميذ الصف الثاني من المدارس التجهيزية

والموافق لبرنامج وزارة معارف الجمهورية السورية

المقرر في سنة ١٩٣٢

الجزء الاول

مؤلفيه

الاساتذة

هاشمي هبراوي بركات

كتاب

الجبر الابتدائي

للسنة الصف الثاني من المدارس الثانوية

بقرار لجنة المنهج بوزارة معارف الجمهورية المصرية

الطبعة سنة ١٩٣٣

الجزء الأول

512
H34jA
2v. no 1
DE 1

82
512
H34jA
v.1-2
c.1

كتاب

الجبر الابتدائي

لتلاميذ الصف الثاني من المدارس التجهيزية

والموافق لبرنامج وزارة معارف الجمهورية السورية

المقرر في سنة ١٩٣٢

الجزء الاول

لمؤلفيه

الاساتذة

هاشمي هبراوي بركات

الطبعة الثانية «منقحة»

59921

جميع الحقوق محفوظة

مكتبة

المطبعة الحديثة — دمشق

١٣٥٧ هـ — ١٩٣٨ م

Carl Arney 1946

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARY

بسم الله الرحمن الرحيم

الباب الأول

العمليات الجبرية

البحث الاول

الاعداد الموجبة والسالبة

الفصل الأول

التعاريف والاشارات الجبرية

١ – غاية الجبر : يعرف الجبر بالحساب العام .

وغايته تعميم العمليات الحسابية وايجاد قواعد بسيطة لحل المسائل العددية التي قد يعجز الحساب عن حلها ، واعطاء قوانين (حرفية) عامة تمكننا من حل المسائل التي هي من نوع واحد .

٢ – استعمال الحروف : يوجد في المسائل نوعان من الكميات :

١ً) الكميات المعلومة ، ويرمز لها بالحروف الابجدية ب ، ح ، د ، هـ ، ...

٢ً) الكميات المجهولة . ويرمز لها عادة باحرف الكلمة (سعفص) .

استعمال الحروف في المسائل يمكننا من اجراء المحاكمات بصورة عامة ، فعند ما نستعمل الحرف ب كرمز يدل على كمية معلومة فانه يمثل اي عدد معلوم اردناه .

ونحل المسألة كما لو كان الحرف ب عدداً معلوماً تماماً ؛ فنحل مسألة واحدة ،

نستطيع ان نحل جميع المسائل المشابهة لها بدون اعادة العمليات كلها اذ يكفي ان نبدل في القانون الذي وجدناه ، ب بقيمتها الجديدة .

٣ — الاشارات : الاشارات المستعملة في الجبر هي نفس الاشارات المستعملة في الحساب ولذلك نقسمها الى قسمين :

١ً) الاشارات التي تدلنا على الاعمال الواجب اجراؤها وتسمى اشارات الاعمال وهي :

+ زائد ، للجمع : ب + حـ .

— ناقص ، للطرح : ب — حـ .

× ضرب ، للضرب : ب × حـ او ب . حـ او بحـ .

÷ تقسيم ، للتقسيم : ب ÷ حـ او ب : حـ او $\frac{ب}{حـ}$.

$\sqrt{\ }$ جذر ، للجذر : $\sqrt[3]{ب}$.

٢ً) الاشارات التي تدلنا على العلاقة الموجودة بين الكميات وتسمى اشارات العلائق وهي :

= يساوي : للمساواة : ب = حـ فنقول : ب تساوي حـ .

< اكبر : ب < حـ فنقول : ب اكبر من حـ .

> اصغر : ب > حـ فنقول : ب اصغر من حـ .

≠ لا يساوي : ب ≠ حـ فنقول : ب لا تساوي حـ .

يساوي تقريباً : ب # حـ فنقول : ب تساوي تقريباً حـ .

≤ اكبر او يساوي : ب ≤ حـ فنقول : ب اكبر او تساوي حـ .

≥ اصغر او يساوي : ب ≥ حـ فنقول : ب اصغر او تساوي حـ .

٤ — استعمال الاقواس :

تستعمل الاقواس الثلاثة : ( ) { } [ ] للدلالة على ان كل قوس من هذه الاقواس يمثل عدداً واحداً وهو ناتج العمليات الواجب اجراؤها داخل هذا القوس ، فمثلاً : (ب + حـ) × (د — هـ) .

يدلنا على حاصل ضرب عددين اولهما حاصل جمع ب مع حـ ، وثانيهما حاصل طرح هـ من د ، اي يدلنا على وجوب اجراء عمليتي الجمع ب + حـ والطرح د — هـ ثم ضرب حاصل الجمع في حاصل الطرح فوجود هذه الاقواس ضروري جداً ، اذ لو كتبنا ب + حـ × د — هـ لدلنا ذلك على انه يجب ان نضيف الى العدد ب الجداء حـ × د ثم ان نطرح من المجموع العدد هـ ، وشتان ما بين النتيجتين في الحالة الاولى والحالة الثانية . مثال ذلك :

$$(٥ + ٣) \times (٦ - ٧) = ٨$$

مع ان : $٥ + ٣ \times ٧ - ٦ = ٢٠$

وكذلك لو كان المطلوب اجراء العملية الاتية :

$$٥ \left[٣ + ٦ \left\{ ١ + ٢ (٧ - ٣) \right\} + ٤ (٣ + ٥) \right]$$

فاننا نبدأ بحل المعترضات الصغيرة ( ) ثم المتوسطة { } ثم الكبيرة [ ] فنجد بالتسلسل:

$$٥ \left[٣ + ٦ \left\{ ١ + ٢ \times ٤ \right\} + ٤ \times ٨ \right] ،$$

$$٥ \left[٣ + ٦ \times ٩ + ٣٢ \right] ،$$

$$٥ \left[٣ + ٥٤ + ٣٢ \right] = ٥ \times ٨٩ = ٤٤٥$$

ولنأت الآن بمثال يدلنا على انه باستعمال الحروف يمكننا اختصار جميع المحاكمات ، ولنحل هذا المثال بالحساب اولاً ثم بواسطة الحروف (اي بالجبر) :

مثال : اوجد عددين مجموعهما ٤٠ وفرقهما ٨ ؟

الحل الحسابي : بما ان العدد الصغير يساوي العدد الكبير مطروحاً منه الفرق وهو ٨ يمكننا ان نقول ان المجموع ٤٠ يساوي العدد الكبير مضافاً اليه العدد الكبير ناقصاً ٨ ، اذاً لو اضفنا الى المجموع ٤٠ الفرق ٨ حصل لدينا ضعف العدد الكبير . اذن ضعف العدد الكبير ٤٨ والعدد الكبير ٢٤ ، واذا طرحنا من المجموع ٤٠ العدد الكبير ٢٤ يكون الباقي ١٦ وهو العدد الصغير .

الحل الجبري : لنأخذ المسألة السابقة ولنكتبها بلسان الجبر . لذلك لنفرض ان العدد الكبير س وان العدد الصغير ع ولنكتب ان مجموعهما يساوي ٤٠ وان فرقهما يساوي ٨ فيكون :

$$س + ع = ٤٠$$

$$س - ع = ٨$$

لنجمع طرفي هاتين المساواتين فنجد : $٢ س = ٤٨$

واذا قسمنا الطرفين على ٢ يكون : $س = \frac{٤٨}{٢}$ او ٢٤

والعدد ع يكون : $٤٠ - ٢٤ = ١٦$

فان هذا الحل السريع كما نرى يختصر لنا المحاكمات العديدة عند حل المسألة بصورة حسابية .

ان العمليات التي اجريناها سابقاً لا يبقى لها اثر فيما لو اردنا ان نحل مسألة تشابه المسألة السابقة ولا تفرق عنها الا بالاعداد ٤٠ ، ٨ بل يجب علينا ان نعيد العمليات كلها .

غير ان استعمال الاحرف للدلالة على الكميات المعلومة يمكننا في الجبر من حل جميع المسائل المتشابهة مرة واحدة ، فالمسألة السابقة يكفي وضعها بالصورة الآتية :

مسألة : اوجد عددين مجموعهما يساوي م وفرقهما يساوي ق .

الحل : بنفس الاعتبارات السابقة نجد :

$$س + ع = م$$

$$س - ع = ق$$

وبالجمع نستنتج ان : $٢ س = م + ق$

وبتقسيم الطرفين على ٢ يكون : $س = \frac{م + ق}{٢}$

فاذا طرحنا من العدد الكبير الفرق ق نجد العدد الصغير :

$$ع = \frac{م + ق}{٢} - ق = \frac{م + ق - ٢ق}{٢}$$

وبالنهاية : $ع = \frac{م - ق}{٢}$

وهذا يدلنا على ان العدد الكبير س يساوي نصف المجموع م + ق والعدد الصغير ع يساوي نصف الفرق م — ق فالمساواتان :

$$س = \frac{م + ق}{٢} \quad ، \quad ع = \frac{م - ق}{٢}$$

هما دستوران يدلان على العمليات الواجب اجراؤها على الحرفين م ، ق لنجد المجهولين س ، ع . فاذا اردنا ان نجد بصورة خاصة قيمتي س ، ع في المسألة السابقة لكفى ان نعطي م ، ق القيمتين المفروضتين ، اي ان نجعل :

$$م = ٤٠ \quad ، \quad ق = ٨ \quad \text{فيكون :} \quad س = \frac{٤٠ + ٨}{٢} = ٢٤$$

$$ع = \frac{٤٠ - ٨}{٢} = ١٦$$

وهنا يتضح الفرق العظيم عند استعمال الحروف عوضاً عن الاعداد .

٥ — التركيب الجبري : هو مجموعة حروف واعداد واشارات تدلنا على عمليات مختلفة يراد اجراؤها . وعند ما يكون التركيب الجبري غير حاوٍ على اشارة + او — للدلالة على الجمع او الطرح يسمى حداً واحداً.

٦ — الامثال والاسس : الأمثال هو عدد يوضع امام الحد او الحرف ليضرب فيه ، مثال ذلك : في الحد ٥ ب (الذي يقرأ خمسة ب) العدد خمسة هو امثال الـ ب .

واما الأس فهو عدد يوضع فوق الحرف وعلى يساره ليدلنا على قوة هذا الحرف ، مثال ذلك : الحد $ب^{٣}$ يقرأ باء مكعبة ، فالعدد ٣ هو أس العدد ب . وهذا الرمز $ب^{٣}$ يدل على ب × ب × ب .

ملاحظة: لا يوضع ابداً امثال بين حرفين من حد واحد ، اذ الامثال توضع دائماً امام الحد ، وان الحرف الذي ليس له امثال ولا أس يكون كل من امثاله وأسه واحداً ، اي لا فرق مابين (س) وما بين ١ × س^{١} .

٧ — وحيد الحد: هو تركيب جبري مكون من حرف او عدة حروف لا تفرقها احدى الاشارتين + او — ، مثال ذلك :

$$\text{ب} \ ، \ \frac{\text{ح د}}{\text{هـ}} \ ، \ \text{هـ}^{٢} \text{ ب ك} \sqrt{\text{ط}}$$

٨ — الحد: هو تركيب وحيد الحد مسبوق باحدى العلامتين + او — .

فحدود التركيب الجبري :

$$٧ \text{ ب}^{٢} \text{ ح} - \frac{٩}{٣} \text{ ب}^{٢} \text{ د} + \sqrt{\text{ب ح}}$$

هي : $٧ \text{ ب}^{٢} \text{ ح}$ ، $- \frac{٩}{٣} \text{ ب}^{٢} \text{ د}$ ، $+ \sqrt{\text{ب ح}}$

٩ — كثيرة الحدود: هي تركيب جبري مركب من (حاصل جمع وطرح) وحيدات الحدود ، مثال ذلك :

$$٥ \text{ ب}^{٢} - \frac{٣}{٢} \text{ ح}^{٢} + \frac{٣}{٤} \text{ ب}^{٢} \text{ س} - \frac{٢}{٧} \text{ ع}$$

١٠ — التركيب الجبري الناطق والتركيب الجبري الاصم :

يكون وحيد الحد ناطقاً اذا لم يكن احد حروفه واقعاً تحت الجذر ، وعلى العكس يكون اصماً اذا كان احد حروفه واقعاً تحت الجذر ، فمثلاً الحدان : $\frac{٤ \text{ ب}^{٢} \text{ ح}^{٢}}{٣}$ ،

$\text{ب}^{٢} \text{ ح} \sqrt{٧}$ هما حدان غير اصمين ، واما الحد $\text{ب ح}^{٢} \sqrt{\text{د}}$ فهو حد اصم .

وكذلك تكون كثيرة الحدود غير صماء اذا كانت جميع حدودها غير صماء ، وعلى العكس من ذلك تكون كثيرة الحدود صماء — اذا كان قسم من حدودها اصماً — كما

انه يجب ان نلاحظ انه قد تكون كثيرة الحدود صماء بالنسبة الى احد الحروف وغير صماء بالنسبة للآخر . فكثيرة الحدود : $ب س^{٢} + س \sqrt{ح} + د$ هي غير صماء بالنسبة الى الحرف س ، الا انها صماء بالنسبة الى الحرف ح .

١١ — التركيب الجبري الصحيح : يكون التركيب الجبري صحيحاً اذا لم يكن فيه حرف في المخرج ، وعلى العكس من ذلك يكون التركيب كسرياً .

مثال ذلك : التركيب : $ح ب^{٢} د + \frac{١٧}{٨} ب^{٢} ح د$ هو صحيح ، واما الحد $\frac{٧ ب^{٢} ح}{د}$ فهو كسري .

و كذلك تكون كثيرة الحدود صحيحة وغير صماء اذا كانت حدودها غير كسرية ولا صماء ، ويمكن ان تكون ذات الحدود الكثيرة صحيحة بالنسبة الى حرف ، وصماء بالنسبة الى آخر .

مثال ذلك : $د ب س^{٢} + \frac{ح}{د} س + \sqrt{ب}$ هي تامة بالنسبة الى الحرف س وكسرية بالنسبة الى د وصماء بالنسبة الى الحرف ب .

١٢ — درجة وحيد الحد ودرجة كثيرة الحدود : درجة وحيد الحد بالنسبة لجميع حروفه هي مجموع أسس الحروف المكونة له .

مثال ذلك : درجة وحيد الحد : $\frac{٣}{٤} ب ح^{٢} د^{٢}$ هي السادسة ، اذ ان درجته بالنسبة للحرف ب هي الاولى ، وبالنسبة للحرف ح هي الثالثة ، وبالنسبة للحرف د هي الثانية .

واما درجة كثيرة الحدود بالنسبة لعدة حروف فتساوي درجة الحد الذي تكون درجته اعظم .

مثال ذلك : كثيرة الحدود : $٧ س^{٣} - ٥ س^{٢} ع^{٢} + ٣ س ع - ٤$ هي من الدرجة الرابعة بالنسبة الى س و ع لان اعظم درجة حدفيها بالنسبة الى س و ع

هي درجة الحد الثاني $-٥ س^{٢} ع^{٢}$ ، واما درجتها بالنسبة الى س فقط فهي الثالثة اي درجة الحد الاول $٧ س^{٣}$ ، ومعنى هذا ان درجة ذات الحدود الكثيرة الصحيحة بالنسبة الى حرف هي اكبر أس لهذا الحرف الموجود فيها ، فدرجة ذات الحدود الكثيرة المذكورة آنفاً بالنسبة الى س هي الدرجة الثالثة وبالنسبة الى ع هي الثانية .

وتكون كثيرة الحدود متجانسة بالنسبة لعدة حروف فيما اذا كانت جميع حدودها بالنسبة لهذه الحروف من درجة واحدة .

مثال ذلك : ذات الحدود الكثيرة :

$$٥ ب^{٤} حـ - ٣ ب^{٣} حـ^{٢} + ٢ ب^{٢} حـ^{٣} - ٧ ب حـ^{٤}$$

هي متجانسة بالنسبة الى ب ، حـ ومن الدرجة الخامسة ، لان درجة جميع حدودها بالنسبة الى ب ، حـ هي الدرجة الخامسة .

١٣ — كثيرات الحدود المرتبة : عوضاً عن كتابة كثيرات الحدود كيفما اتفق ، فانه يمكننا ترتيبها اما بالنسبة للأسس المتناقصة ، واما بالنسبة للأسس المتزايدة لاحد الحروف .

مثال ذلك : لتكن كثيرة الحدود :

$$ع^{٢} س^{٢} + ع^{٦} س - ع^{٥} س^{٢} - ع س^{٤}$$

فاذا رتبناها بالنسبة للأسس المتناقصة الى س تأخذ هذا الشكل :

$$- ع س^{٤} + ع^{٢} س^{٣} - ع^{٥} س^{٢} + ع^{٦} س$$

ونرى صدفة في هذا المثال ان كثيرة الحدود اصبحت في آن واحد مرتبة بالنسبة للأسس المتزايدة الى ع ، فكثيرة الحدود المكتوبة بهذا الشكل الاخير تسمى بكثيرة الحدود المرتبة .

وتكون ذات الحدود الكثيرة المرتبة كاملة بالنسبة لحرف ما ، اذا كانت درجة حدودها التي تتوالى بالنسبة لهذا الحرف تتناقص او تتزايد واحداً فواحداً .

فذات الحدود الكثيرة الكاملة بالنسبة الى س والتي من الدرجة ن تحتوي على $ن + ١$ حداً .

الفصل الثاني

الاعداد الموجبة والأعداد السالبة

تمهيد : في الحساب ، طرح العدد ٧ من العدد ٥ غير ممكن .

الا انه اذا اردنا ان نعمم ذلك ، فالجبر يحل هذه المسألة ويرمز الى الناتج بالرمز — ٢ ونكتب : ٥ — ٧ = — ٢ .

فالعدد — ٢ سالب ، واما العدد الحسابي المسبوق باشارة + فيسمى عدداً موجباً ، ومجموعة الاعداد الموجبة والسالبة ، تشكل [الاعداد الجبرية] .

ان ادخال الاعداد السالبة يختصر المسائل التي تظهر لاول وهلة غير قابلة للحل وليس لها معنى ، وتستعمل الاعداد الجبرية في جميع المسائل التي تكون الكميات فيها قابلة للعد اعتباراً من مبدأ معين وباتجاهين مختلفين كالزمن المستقبل والماضي ، او الربح والخسارة ، او المسافات التي يمكن ان تحسب باتجاهين مختلفين اعتباراً من مبدأ معين ، او درجة الحرارة ... الخ .

مثال : لنتصور لاعباً يدل على مقدار ربحه بالاعداد الموجبة ومقدار خسارته بالاعداد السالبة ، ثم لنأخذ العملية المذكورة آنفاً وهي : ٥ — ٧ فهذه تدلنا ان اللاعب ربح ٥ قروش ثم خسر ٧ قروش ، فنتيجة لعبه اذن هي خسارة قرشين ، وندل عليها بالعدد السالب — ٢ الذي يفهمنا معنى المساواة :

$$٥ - ٧ = - ٢$$

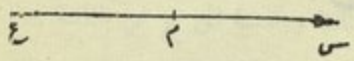
فاذا اردنا ان نقول ان الخسارة — ٧ تضاف الربح + ٥ يمكننا ان نكتب ذلك بوضعنا الاعداد داخل اقواس :

$$(+ ٥) + (- ٧) = + ٥ - ٧ = - ٢$$

١٤ — لنأخذ خطاً مستقيماً مثل س ع ولنأخذ عليه نقطة ثابتة مثل م

(شكل ١) نعتبرها مبدأ لقياس الاطوال على هذا المستقيم .

فاذا اردنا ان نعين على هذا المستقيم موضع نقطة ما مثل ب نلاحظ انه لا يكفي ان نعلم بعدها عن المبدأ م .



(شكل ١)

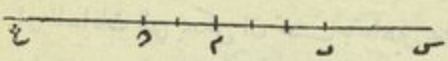
لان النقطة ب يمكنها ان تكون بطرفين مختلفين بالنسبة الى م (على يسار او على يمين النقطة م) .

اذن لتعيين النقطة ب لا يكفي ان نعلم بعد هذه النقطة عن المبدأ م بواسطة عدد حسابي فقط ، بل يجب ان نتحقق ان هذا البعد مأخوذ في الجهة اليمنى او الجهة اليسرى بالنسبة للمبدأ م ، ويتعين ذلك بواسطة اشارة نضعها امام العدد الحسابي.

لذلك نعتبر ان الاعداد المسبوقة باشارة + تدلنا على نقاط واقعة على يمين المبدأ م وان الاعداد المسبوقة باشارة — تدلنا على نقاط واقعة على يسار المبدأ م .

فالاشارة + او — الموضوعة امام العدد الحسابي الذي يعين البعد م ب ليست اشارة جمع او طرح ، بل هي اشارة تبين لنا الجهة التي يجب ان نأخذ فيها هذا البعد .

مثال : النقطة ب الواقعة على بعد + ٣ بالنسبة الى النقطة م (شكل ٢)



(شكل ٢)

تكون واقعة على يمينها وعلى بعد قدره ٣ امثال وحدة الطول ، واما النقطة ح الواقعة على بعد — ٢ بالنسبة الى المبدأ م تكون واقعة على يسار م وعلى بعد يساوي ضعف وحدة الطول . وكثيراً ما نكتب:

$\overline{م\,ب} = +٣$ ونقول : قيمة م ب الجبرية + ٣

$\overline{م\,ح} = -٢$ ونقول : قيمة م ح الجبرية — ٢

فالاعداد ٣ ، ٢ تدلنا على الامتار او الدسيمترات او السانتيمترات حسبما تكون وحدة الطول المتخذة المتر او الدسيمتر او السانتيمتر ، واما الاشارة فتدلنا كما رأينا على الجهة . وينتج من كل ما سبق :

تعريف : ١ً) العدد الموجب هو عدد حسابي مسبوق باشارة + .

٢ً) العدد السالب هو عدد حسابي مسبوق باشارة — .

٣°) العدد الجبري هو عدد موجب او سالب .

اذن : العدد الجبري يتركب من قسمين :

الاول : اشارته : وتكون موجبة او سالبة .

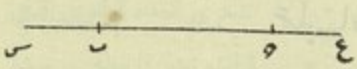
الثاني : عدده الحسابي : وهو الذي نسميه بالقيمة المطلقة لهذا العدد الجبري .

١٥ — القيمة المطلقة للعدد الجبري: القيمة المطلقة للعدد الجبري هي قيمته بدون النظر الى اشارته .

فالعددان الجبريان + ٢ ، — ٢ لهما قيمة مطلقة واحدة ، وهي ٢ .

والعددان الجبريان المتساويان بالقيمة المطلقة والمختلفان بالاشارة يسميان **بالعددين المتناظرين** لانهما يدلان على نقطتين متناظرتين بالنسبة للمبدأ م .

١٦ — قطعة المستقيم ، الشعاع : لنأخذ مستقيما مثل س ع ولنعين عليه اتجاها موجبا وليكن الذاهب من س الى ع ، فيكون معاكسه الذاهب من ع الى س سالبا ، ويصبح المستقيم محورا موجها ، فاذا اخذنا على هذا المحور نقطتين ما مثل ب ، ح المسافة بينهما د (شكل ٣) نحصل على [قطعة مستقيمة] طولها د ، واما الشعاع فهو :



(شكل ٣)

تعريف : الشعاع قطعة مستقيمة موجهة .

اي نميز مبدأها عن منتهاها فعند ما نقول الشعاع ب ح نقصد القطعة المستقيمة التي مبدؤها ب ومنتهاها ح ونرمز للشعاع ب ح بالرمز $\overleftarrow{ب ح}$.

ويجب ان نميز ما بين الشعاع $\overleftarrow{ب ح}$ والشعاع $\overleftarrow{ح ب}$ المتساويين بالقيمة المطلقة والمختلفين بالاتجاه . ويلاحظ في كل شعاع اشياء ثلاثة :

١°) حامله : وهو المحور الذي يمر من مبدئه ومنتهاه .

٢°) طوله : منسوباً لوحدة الطول ، وطوله هذا نسميه بالقيمة المطلقة للشعاع .

٣) اتجاهه : وهو اتجاه المتحرك الذي يذهب من مبدئه الى منتهاه ويقارن هـذا الاتجاه مع الاتجاه الموجب للمحور الحامل .

القيمة الجبرية للشعاع $\overleftarrow{ب حـ}$ (ويرمز لهذه القيمة الجبرية بالرمز $\overline{ب حـ}$) هي عدد جبري قيمته المطلقة تساوي طول $ب حـ$ واشارته + او — وفق ما يتحرك المتحرك الذاهب من ب الى حـ بالاتجاه الموجب او السالب بالنسبة للمحور الحامل ، ويجب دوماً عند كتابة الشعاع ان نبدأ بحرف مبدئه لانه اذا كان مثلاً :

$\overline{ب حـ} = +٣$ يكون: $\overline{حـ ب} = -٣$

نستنتج مما ذكرناه آنفاً ان كل شعاع واقع على محور موجه يقابل عدداً موجباً او سالباً يقيسه ويدل عليه .

وعلى العكس كل عدد موجب او سالب يمكنه ان يقابل شعاعاً قيمته الجبرية تساوي هذا العدد .

الفصل الثالث

عمليات الاعداد الجبرية

١٧ — الجمع — تعريف : ١) مجموع عددين جبريين اشارتهما واحدة هو عدد جبري قيمته المطلقة تساوي مجموع القيمتين المطلقتين للعددين ، واشارته اشارتهما المشتركة .

٢) مجموع عددين جبريين مختلفين بالاشارة هو عدد جبري قيمته المطلقة تساوي الفرق بين القيمتين المطلقتين للعددين ، واشارته اشارة اكبرهما بالقيمة المطلقة .

مثال :

$$(+٣) + (+٥) = +٨$$
$$(-٣) + (-٢) = -٥$$
$$(-٣) + (+٥) = +٢$$
$$(+٣) + (-٥) = -٢$$

للتحقق من صحة هذا التعريف نفتش عن مجموع شعاعين طولاهما العددان الجبريان المراد جمعهما .

ولايجاد مجموع شعاعين نأخذ الشعاع الثاني ونضعه تلو الاول وبالاتجاه المعين باشارته بحيث ينطبق مبدأ الثاني على منتهى الاول ، فالشعاع الذي مبدؤه مبدأ الاول ومنتهاه منتهى الثاني هو مجموع الشعاعين . ففي الامثلة السابقة نجد :

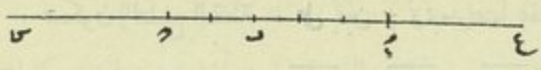
١ً) لايجاد مجموع العددين + ٣ و + ٥ نأخذ شعاعاً طوله + ٣ بالاتجاه الموجب على محور موجه ، ثم نضع الى حذائه شعاعاً آخر طوله + ٥ بالاتجاه الموجب ايضاً ، فيكون المجموع شعاعاً طوله يساوي العدد الموجب + ٨ .

ونلاحظ هنا ان مجموع العددين الموجبين هو عين مجموع عددين حسابيين ، لذلك يمكننا ان نكتب بعد حذف الاقواس :

$$(+٣) + (+٥) = +٣ + +٥ = +٨$$

وسنرى فيما يلي ان جميع الاعداد الموجبة تجري عليها العمليات كأنها اعداد حسابية ولهذا تحذف الاشارة + من امام العدد الموجب اذ ان العدد + ٨ هو نفس العدد ٨ لان اشارة هذا الاخير المقدرة هي + ايضاً .

٢ً) لايجاد حاصل الجمع (— ٣) + (— ٢) نتحرى العدد الجبري الذي يقيس مجموع الشعاعين اللذين طولاهما — ٣ ، — ٢ لذلك نعتبر النقطة م مبدأ لقياس الاطوال على المحور الموجه س ع (شكل ٤) ونعتبر ان الاتجاه الموجب هو الذاهب من س الى ع



(شكل ٤)

فالشعاع $\overline{م ب}$ الذي طوله — ٣ يجب ان يؤخذ على يسار النقطة م وان يكون الطول م ب يساوي ثلاثة امثال وحدة الطول ، ولكي نجمع مع هذا الشعاع م ب الشعاع الذي طوله — ٢ نعتبر نقطة ب التي هي منتهى م ب مبدأ لهذا الشعاع الاخير ، ونأخذ الطول ب د بالاتجاه السالب مساوياً ضعف وحدة الطول ، فالشعاع $\overline{م د}$ الذي مبدؤه م مبدأ الاول ومنتهاه د منتهى الثاني هو مجموع الشعاعين ، و (الشكل ٤) يرينا ان العدد الجبري الذي يقيس $\overline{م د}$ هو عدد سالب قيمته المطلقة تساوي ٥ اي ان :

$$\overline{م\,ب} + \overline{ب\,ح} = \overline{م\,ح} = -٥$$

او : $(-٣) + (-٢) = -٥ = -(٣+٢)$

ويمكننا ان نكتب بصورة ابسط :

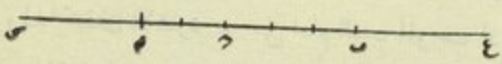
$$(-٣) + (-٢) = -٣-٢$$

فنكتب العددين بالتوالي على ان يكون كل منهما مسبوقاً باشارته . اذن مجموع العددين السالبين -٣ و -٢ هو عدد سالب قيمته المطلقة تساوي مجموع القيمتين المطلقتين للعددين واشارته اشارتهما المشتركة .

٣) لايجاد المجموع :

$$(+٥) + (-٣) = ؟$$

نتحرى العدد الجبري الذي يقيس مجموع شعاعين طولاهما $+٥$ و -٣ وليكن م مبدأ الاطوال على المحور الموجه س ع (شكل ٥) ولنأخذ عليه الشعاع $\overline{م\,ب} = +٥$ واعتباراً من نقطة ب نأخذ الشعاع $\overline{ب\,ح}$ يساوي -٣ فالاشارة $-$ تدلنا على ان هذا البعد يجب ان يؤخذ بالاتجاه السالب ع س وهكذا نعود نحو نقطة م كما لو كان هناك متحرك قام من نقطة م واتجه بالاتجاه الموجب وقطع مسافة قدرها ٥ امتار فوصل الى نقطة ب ثم رجع من ب نحو م وسار مقدار ٣ امتار فوصل الى ح فتكون بالطبع النقطة ح على يمين م وتبعد عنها بمقدار مترين ، اي ان :



(شكل ٥)

$$\overline{م\,ب} + \overline{ب\,ح} = \overline{م\,ح} = +٢$$

ومنها : $(+٥) + (-٣) = +٢$

نرى من هذا انه لا فرق بين جمع -٣ وطرح ٣ اذ يمكننا ان نكتب :

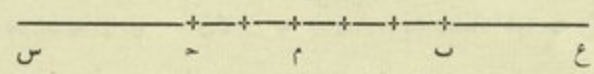
$$(+٥) + (-٣) = ٥-٣ = ٢$$

٤) لايجاد المجموع :

$$(+٣) + (-٥) = ؟$$

نتحرى ايضاً العدد الجبري الذي يقيس مجموع الشعاعين اللذين طولاهما $+٣$ ، -٥

لذلك لنأخذ اعتباراً من نقطة م المفروضة مبدأ (شكل ٦) الشعاع $\overline{م ب}$ يساوي + ٣ ثم الشعاع $\overline{ب ح}$ الذي طوله — ٥ وذلك بان نأخذ اعتباراً من نقطة ب وبالاتجاه السالب ع س طولا يساوي ٥ امثال وحدة الطول فتقع ح على يسار م وعلى



(شكل ٦)

بعد يساوي ضعف وحدة الطول ، فالطول $\overline{م ح}$ الذي هو مجموع الشعاعين $\overline{م ب}$ $\overline{ب ح}$ يقاس بالعدد السالب — ٢ ويمكننا ان نكتب :

$$\overline{م ب} + \overline{ب ح} = \overline{م ح} = -٢$$

$$(+٣) + (-٥) = -٢ = ٣ - ٥$$

نتيجة: ١) يستنتج من تعريف مجموع العددين الجبريين النتائج الآتية :

لايجاد المجموع $(-٣) + (-٢)$ يجب ان نجد مجموع القيمتين المطلقتين للعددين ٣ ، ٢ فايجاد هذا المجموع هو عملية حسابية لا تتبع ترتيب العددين لذلك نجد ان :

$$(-٣) + (-٢) = -(٣ + ٢) = -٥$$ وكذلك :

$$(-٢) + (-٣) = -(٢ + ٣) = -٥$$

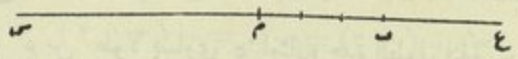
اي ان : $(-٣) + (-٢) = (-٢) + (-٣)$

ويمكننا اتخاذ نفس المحاكمات عند ما يكون العددان ذوي اشارتين مختلفتين، كما انه يمكننا ان نبرهن ايضاً على ان مجموع شعاعين غير تابع لترتيبهما .

نتيجة: ٢) مجموع العددين المتناظرين صفر

في الحقيقة مجموع العددين المتناظرين $(+٣) + (-٣)$ هو عدد ثالث قيمته المطلقة الفرق ما بين القيمتين المطلقتين ، اي : ٣ — ٣ المساوي صفراً وكذلك مجموع الشعاعين المتساويين بالقيمة المطلقة والمختلفين بالاشارة هو صفر ايضاً ، اي

ان : $\overline{م ب} + \overline{ب م} = ٠$



(شكل ٧)

١٨ — تعريف : حاصل جمع الاعداد الجبرية ب ، حـ ، د ، هـ ، ... هو عدد نحصل عليه بالصورة الآتية :

نجمع ب مع حـ فنحصل على حاصل الجمع الجزئي الاول $(ب + حـ)$ [والقوس هنا يدل على اننا استعضنا عن $ب + حـ$ بمجموعهما] ثم نضيف اليه د فنحصل على حاصل الجمع الجزئي الثاني $(ب + حـ + د)$.

ثم نضيف اليه هـ وهكذا ... فالحاصل الاخير هو مجموع الاعداد الجبرية ب ، حـ ، د ، هـ ، ...

١٩ — ملاحظة : يبرهن كما في السابق على ان المجموع $ب + حـ + د + هـ + ...$ غير تابع لترتيب الحدود فيمكن ان نستعيض عن حدين او اكثر من حدود حاصل الجمع بما يساويها ، وذلك بواسطة تغيير مواقع الحدود ، ووضع اي حدين اردنا امام بقية الحدود ، ثم تبديلهما بحاصل جمعهما بمقتضى التعريف ، وهكذا نجري نفس العمل على عدة اعداد اذا اردنا .

مثال : لايجاد المجموع الجبري :

$$٥ + (-٧) + ٣ + (-٢) + ٤ + (-٨)$$

نحذف الاقواس المسبوقة باشارة زائد مع اشارتها المسبوقة بها فيكون :

$$٥ - ٧ + ٣ - ٢ + ٤ - ٨$$

ويمكننا الآن ان نبدل الاعداد الموجبة بمجموعها ، وكذا الاعداد السالبة فنجد:

$$٥ - ٧ + ٣ - ٢ + ٤ - ٨ = (٥ + ٣ + ٤) - (٧ + ٢ + ٨)$$

وهكذا ترجع العملية الى ايجاد مجموع عددين جبريين .

٢٠ — الطرح — تعريف: طرح العدد ح من ب هو ايجاد عدد ثالث اذا اضيف الى ح كان الناتج ب .

فلايجاد حاصل الطرح : ٥ — (— ٣) يجب ان نجد عدداً اذا اضيف اليه — ٣ كان الحاصل ٥ فهذا العدد هو ٥ + ٣ لان ٥ + ٣ — ٣ = ٥

اذاً : ٥ — (— ٣) = ٥ + ٣ = ٨

اي لطرح العدد — ٣ يكفي اضافة نظيره + ٣ مما يدلنا على ان الطرح الجبري لا يدل على النقص دوماً ، كما ان الجمع الجبري لا يدل على الزيادة دوماً ، فلو اضفنا الى العدد ٥ العدد — ٢ يصبح المجموع ٣ .

٢١ — مقارنة الاعداد السالبة :

تعريف : ١ً) يكون العدد ب اكبر من ح اذا كان الفرق ب — ح موجباً .

وبالعكس اذا كان الفرق ب — ح موجباً ، يكون العدد ب اكبر من ح

٢ً) يكون العدد ب اصغر من ح اذا كان الفرق ب — ح سالباً .

وبالعكس اذا كان الفرق ب — ح سالباً يكون العدد ب اصغر من ح .

نستنتج من ذلك انه لمقارنة عددين جبريين ب ، ح يكفي ان نشكل فرقهما [الجبري] ب — ح وان نلاحظ فيما اذا كان هذا الفرق موجباً او سالباً فتكون ب اكبر او اصغر من ح .

لنقارن الآن العدد الموجب + ٣ مع العدد السالب — ٥ فنجد :

٣ — (— ٥) = ٥ + ٣ = ٨

فبما ان هذا الفرق موجب نستنتج من ذلك ان : ٣ > — ٥ .

وبصورة عامة : ليكن ب عدداً موجباً ، و (— ح) عدداً سالباً باعتبار ان الاشارة هنا صريحة ، فيكون :

ب — (— ح) = ب + ح

وبما ان هذا الفرق موجب ايضاً ، اذن ب > — ح ونحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة : ١) كل عدد موجب اكبر من اي عدد سالب .

لنقارن الآن العددين السالبين -٣ ، -٥ فنرى ان :

$$(-٣)-(-٥)=-٣+٥=٢$$

وبما ان هذا الفرق موجب ، اذاً $-٣ > -٥$ ونحصل على النتيجة الآتية :

نتيجة : ٢) في الاعداد السالبة العدد الذي قيمته المطلقة اصغر يكون اكبر ، اي ان العدد السالب يصغر كلما كبرت قيمته المطلقة .

لنرجع الآن الى الفرق $ب - حـ$ ولنفرض ان $حـ$ اصبحت صفراً فيصبح الفرق $ب$.

ويكون : $٣-٠=٣$ موجب . اذن $٣ > ٠$

$(-٣)-٠=-٣$ سالب . اذن $-٣ < ٠$

نتيجة : ٣) كل الاعداد الموجبة اكبر من الصفر ، وكل الاعداد السالبة اصغر من الصفر ، وبالعكس .

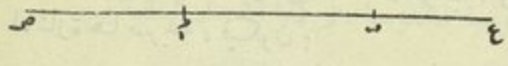
وكما هو معلوم لا نهاية للاعداد الموجبة كما لا نهاية للاعداد السالبة .

٢٢ — الضرب — تعريف: جداء العددين الجبريين $ب$ ، $حـ$ هو عدد جبري ثالث قيمته المطلقة تساوي لجداء القيمتين المطلقتين واشارته + او — حسبما يكون العددان من اشارة واحدة او من اشارتين مختلفتين .

للتحقق من صحة هذا التعريف نفتش عن المسافة س التي يقطعها ، في مدة ن ثانية من الزمن ، ساع يتحرك بحركة مستقيمة منتظمة سرعتها هـ متراً في الثانية .

من المعلوم ان قانون المسافة هو : $س = هـ \times ن$.

فلو فرضنا ان الساعي يتحرك على المحور $ص ع$ (شكل ٨) وان السرعة هـ تكون سالبة عند ما يتحرك هذا المتحرك بالاتجاه السالب الذاهب من ع نحو ص مع انها تكون موجبة عند ما يتحرك بالاتجاه الموجب $ص ع$.



(شكل ٨)

وفرضنا انه عند ما تكون الساعة الثانية عشرة التي نعتبرها مبدأ للزمن ، يكون المتحرك في الموضع م الذي نعتبره مبدأ لقياس الاطوال ؛ ولاحظنا ان ن تكون موجبة او سالبة حسب دلالتها على زمن يأتي بعد الساعة الثانية عشرة او قبلها ، وانه لافرق بين قولنا الساعة الثانية عشرة او الصفر ، لرأينا ان العدد الجبري الذي يقيس الشعاع الذي مبدؤه المبدأ م ونهايته الوضع النهائي للساعي عند ما يتحرك في مدة ن ثانية من الزمن هو : ه × ن ونحصل على الحالات الآتية :

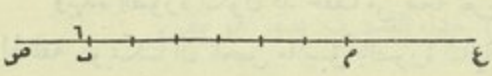
١) اذا كان كل من ه ، ن موجباً يكون الساعي على يمين المبدأ م اي يكون الشعاع المقطوع اعتباراً من المبدأ م في المدة الموجبة ن ، موجباً والعدد الذي يقيس هذا الشعاع الموجب ، موجباً ايضاً ، اي ان :

نتيجة : جداء العددين الموجبين عدد موجب .

وهذا الجداء لا يختلف عن جداء عددين حسابيين .

٢) جداء عدد سالب بعدد موجب : لنفرض ان : ه = — ٢ .

فبما ان السرعة ه سالبة يفهم ان المتحرك يتنقل بالاتجاه السالب ع ص في مدة + ٣ ثوان ينتقل المتحرك من المبدأ م نحو اليسار ، وفي نهاية هذه الثواني الثلاث يكون المتحرك في نقطة ب الواقعة على يسار م (شكل٩) ويبعد عنها بمقدار ٣ امثال السرعة [٢ بالقيمة المطلقة] ، اي على بعد ٦ امتار فيما لو اخذ المتروحدة للطول ويكون:



(شكل ٩)

م ب = — ٦ اي : (— ٢) (+ ٣) = — ٦

نتيجة : جداء عدد سالب بعدد موجب هو عدد سالب .

٣) جداء عدد موجب بعدد سالب : لنفرض ان :

ه = + ٢ ، ن = — ٣

فبما ان السرعة موجبة نفهم ان المتحرك يتحرك بالاتجاه الموجب ص ع وبما ان ن سالبة نفهم انه يجب علينا ان نجد موقع المتحرك قبل ثلاث ثوان اعتباراً من الساعة ١٢ اي قبل وصوله الى المبدأ م . فكل هذا يدلنا على انه في الزمن — ٣ يكون المتحرك على يسار المبدأ م ويبعد عنه بمقدار ٦ امتار اي :

$$(+٢)(-٣) = -٦$$

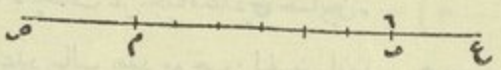
نتيجة : جداء عدد موجب بعدد سالب هو عدد سالب .

٤ً) جداء عدد سالب بعدد سالب : لنفرض ان :

$$ه = -٢ \quad ، \quad ن = -٣$$

فبما ان السرعة سالبة نفهم ان المتحرك يتحرك بالاتجاه السالب ع ص وبما انه في الزمن المفروض صفراً يكون في نقطة م نفهم انه قبل ثلاث ثوان يكون على يمين النقطة م وعلى بعد قدره م ب يساوي ٦ امتار ، وبما ان المسافة $\overline{م ب}$ (شكل ١٠) موجبة فيكون :

$$(-٢)(-٣) = +٦ \quad \text{ومنها :}$$



(شكل ١٠)

نتيجة : جداء عددين سالبين هو عدد موجب .

وبهذه الصورة نكون قد تحققنا من صحة تعريف الضرب المذكور آنفاً بصوره المختلفة . ويمكننا ان نلخص ما سبق بالصورة التالية :

الخلاصة : ١ً) جداء عددين جبريين متحدين بالاشارة ، هو عدد موجب قيمته المطلقة جداء القيمتين المطلقتين .

٢ً) جداء عددين جبريين مختلفين بالاشارة ، هو عدد سالب قيمته المطلقة جداء القيمتين المطلقتين ايضاً .

ومن هذه الخلاصة نحصل على قاعدة ضرب الاشارات التي نلخصها في قولنا :

+ في +	يعطينا	+
− × −	=	+
+ × −	=	−
− × +	=	−

٢٣ — ملاحظة : ١) اذا امعنا النظر في العلاقات :

$$(+٢)(+٣) = +٦$$
$$(-٢)(+٣) = -٦$$
$$(+٢)(-٣) = -٦$$
$$(-٢)(-٣) = +٦$$

نستنتج النتائج الآتية :

١) تتغير اشارة جداء مضروبين اذا غيرنا اشارة احد المضروبين فقط .

٢) لا تتغير اشارة جداء مضروبين اذا غيرنا اشارة كل من المضروبين بآن واحد .

٢٤ — ملاحظة : ٢) جداء العدد ب بالعدد — ١ هو عدد قيمته المطلقة تساوي ب واشارته تخالف اشارة ب ، اعني ان هذا الجداء هو — ب اي نظير العدد ب .

٢٥ — ملاحظة : ٣) جداء عددين جبريين غير تابع لترتيبهما لان كلا من القيمة المطلقة والاشارة لا يتبع الترتيب .

٢٦ — ملاحظة : ٤) جداء العدد ب بصفر هو صفر .

٢٧ — جداء جملة اعداد : لنأخذ ٥ اعداد جبرية مثل : ب ، ح ، د ، هـ ، ل فجداء هذه الاعداد الخمسة هو العدد الناتج من ضرب ب في ح ثم الناتج في د ثم الناتج في هـ ثم الناتج في ل .

٢٨ — تعريف : جداء جملة اعداد هو العدد الناتج من ضرب الاول في الثاني ثم الناتج في الثالث وهكذا حتى الاخير .

٢٩ — القيمة المطلقة لجداء : ان التعريف المذكور سابقاً هو نفس تعريف جداء جملة الاعداد المذكور في الحساب ، وزيادة على ذلك نلاحظ ان القيمة المطلقة لجداء عددين هي جداء قيمتها المطلقة . وبالتعميم نستنتج ان القيمة المطلقة لجداء جملة اعداد هي جداء قيمها المطلقة .

٣٠ — اشارة جداء جملة اعداد : اذا كانت جميع المضاريب موجبة فالجداء يكون موجباً ايضاً .

لنأخذ الجداء ب . حـ . د . هـ . ل فان كانت ب موجبة تكون اشارة الجداء ب حـ كاشارة حـ ، وان كان الجداء الجزئي ب حـ موجباً تكون اشارة الجداء الجزئي الثاني ب حـ د كاشارة د وهكذا . اي ان كل مضروب سالب في المضاريب يغير اشارة الجداء الجزئي ، فاشارة الجداء الاخير تكون اذن + اذا كان عدد المضاريب السالبة زوجياً ، وتكون اشارته سالبة اذا كان عدد المضاريب السالبة فردياً .

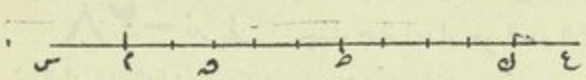
وكذلك اذا كانت ب سالبة فان المضروب السالب الذي يليها يجعل الجداء الجزئي موجباً وترجع هذه الحالة الى سابقتها . ومما سبق نستنتج :

نظرية : يكون جداء جملة مضاريب موجباً اذا كان عدد المضاريب السالبة زوجياً ويكون سالباً اذا كان عدد المضاريب السالبة فردياً .

٣١ — ملاحظة : اذا كان احد المضاريب صفراً يكون الجداء صفراً . واذا كان الجداء صفراً لا بد وان يكون احد المضاريب صفراً ، ومن ذلك نستنتج :

نتيجة : الشرط اللازم الكافي ليكون الجداء صفراً هو ان يكون احد المضاريب (على الاقل) صفراً .

٣٢ — جداء مجموع جبري بعدد — تمرين : لترسم المحور س ع ولنأخذ عليه المبدأ م ولنتصور ساعياً قام من م وسار على س ع بالاتجاه الموجب (شكل ١١) مقدار ٩ امتار فوصل الى ك ثم رجع وسار بالاتجاه السالب مقدار ٧ امتار فوصل الى نقطة ق ثم رجع ايضاً وسار بالاتجاه الموجب ٣ امتار فوصل الى ط فبعد هذا الرجل عن م هو :



(شكل ١١)

$$\text{ص} = +٩ - ٧ + ٣ \text{ متر} \qquad (١)$$

باعتبار ص العدد الجبري الذي يقيس بعد هذا الرجل عن م بالامتار .

لنعتبر الآن الديسيمتر وحدة للطول عوضاً عن المتر فيصبح كل عدد من العلاقة السابقة (١) مضروباً بعشرة ويصبح بعد الرجل عن م هو :

$$١٠\,ص = + ٩ \times ١٠^{دس} - ٧ \times ١٠^{دس} + ٣ \times ١٠^{دس} \qquad (٢)$$

فاذا قارنا ما بين المساواة (١) والمساواة (٢) نرى انه اذا ضربنا جميع حدود مجموع ما بعدد ما ، فان الحاصل (وهو في مثالنا ص) يصبح مضروباً بنفس هذا العدد اي : اذا كان :

$$ص = + ٩ - ٧ + ٣$$

يكون :

$$١٠\,ص = + ٩٠ - ٧٠ + ٣٠$$

لنفرض الآن اننا غيرنا الاتجاه على المحور س ع اي جعلنا الاتجاه الموجب سالباً والسالب موجباً ، فيصبح بعد الرجل وقتئذ عن م هو :

$$-١٠\,ص = -٩٠ + ٧٠ - ٣٠ \qquad (٣)$$

باعتبار وحدة الطول الديسيمتر ، ونرى من هذه العلاقة الاخيرة اننا اذا ضربنا كل حد بـ — ١٠ فان حاصل الجمع ص يصبح مضروباً بـ — ١٠ ايضاً .

وبصورة عامة يمكننا ان نكتب :

$$ن(ب + حـ - د + هـ - ل) = ن\,ب + ن\,حـ - ن\,د + ن\,هـ - ن\,ل$$ ونستنتج :

نتيجة : لضرب مجموع جملة اعداد بعدد نضرب كل حد من هذا المجموع بذاك العدد (وكلمة مجموع هنا تدل على مجموع جبري وهو ما يشمل الجمع والطرح) .

٣٣ — تنبيه : يمكننا ان نكتب المساواة المذكورة آنفاً بالصورة الآتية :

$$ن\,ب + ن\,حـ - ن\,د + ن\,هـ - ن\,ل = ن(ب + حـ - د + هـ - ل)$$ اي :

نتيجة : اذا كان لدينا عدة حدود مشتركة بمضروب واحد فانه يمكننا ان نضع هذا المضروب المشترك خارج قوس كما في الحساب .

٣٤ — جداء مجموعين جبريين : ليكن المطلوب حساب جداء القوسين الآتيين الذي نسميه ك .

$$ك = (ب - حـ + د)(هـ - ل)$$

ولنفرض اننا اجرينا المجموع $ب - حـ + د$ اي ان القوس الاول يدل على عدد واحد (م مثلا) فيكون استناداً على النتيجة السابقة :

$$ك = (ب - حـ + د)هـ - (ب - حـ + د)ل$$

وبتطبيق النتيجة السابقة مرة ثانية نجد :

$$ك = بهـ - حـهـ + دهـ - (بل - حل + دل)$$

ومنها نستنتج ان :

$$ك = بهـ - حـهـ + دهـ - بل + حل - دل$$ اي :

نتيجة : جداء مجموعين جبريين يساوي مجموع الجداءات الناتجة من ضرب كل حدود المضروب الاول بالتوالي بحدود المضروب الثاني .

واذا كتبنا $ك = (ب - حـ + د)(هـ - ل)$ بالصورة الآتية :

$$ك = بهـ - بل - حـهـ + حل + دهـ - دل$$

يمكننا ان نقول :

لايجاد جداء مجموعين نأخذ الحد الاول من المجموع الاول ونضربه بجميع حدود المجموع الثاني ، ثم نأخذ الحد الثاني من المجموع الاول ونضربه بجميع حدود المجموع الثاني وهكذا .

٣٥ - التقسيم - تعريف : في الجبر كما في الحساب خارج قسمة العدد ب على حـ هو عدد ثالث اذا ضرب في حـ نتج ب .

فاذا كان د خارج قسمة ب على حـ اي : $\frac{ب}{حـ} = د$ وجب ان يكون $ب = د \times حـ$.

٣٦ - ايجاد خارج القسمة : لايجاد خارج القسمة يجب ان نعين قيمته المطلقة ثم اشارته .

١ً) بما ان القيمة المطلقة للعدد ب هي جداء القيمة المطلقة للعدد د في القيمة المطلقة

للعدد حـ نستنتج من ذلك ان القيمة المطلقة للعدد د هي خارج قسمة القيمة المطلقة للعدد ب على القيمة المطلقة للعدد حـ .

٢ً) ليكون العدد د موجباً يجب ان يكون الجداء د . حـ (اعني ب) من اشارة حـ . اذن يكون د موجبا اذا كان ب ، حـ متحدين بالاشارة .

واذا كان د سالباً يكون الجداء د حـ (اعني ب) من اشارة مخالفة لاشارة حـ ، اذن يكون د سالبا اذا كان ب ، حـ مختلفين بالاشارة . ومما سبق ينتج :

نتيجة : خارج قسمة ب على حـ هو عدد ثالث قيمته المطلقة تساوي خارج قسمة القيمة المطلقة للعدد ب على القيمة المطلقة للعدد حـ ، وتكون اشارته + او — حسبما يكون العددان ب ، حـ متحدين او مختلفين بالاشارة .

٣٧— ملاحظة : ١ً) كما في الحساب لا يمكن ان يكون المقسوم عليه حـ صفراً ، لان الجداء حـ . د يصبح وقتئذ صفراً مهما كانت د ولا يمكنه ان يساوي ب .

الا انه عندما يتقرب حـ من الصفر وتبقى ب ثابتة فان حاصل قسمة ب على حـ وهو د يتقرب بالقيمة المطلقة الى ∞ .

٢ً) واما اذا كان المقسوم ب صفراً مع ان المقسوم عليه حـ عدد ما ، فان الناتج د يكون صفراً ، لان جداءه في حـ يساوي ب اي صفراً .

٣ً) واما عندما يتقرب كل من ب ، حـ الى الصفر ويصبحان صفراً فان حاصل قسمة ب على حـ يمكن ان يكون اي عدد كان ، لان جداء اي عدد كان بالصفر هو صفر .

ولنلاحظ في النهاية ان د يتقرب من الصفر ايضاً عندما تكون ب ثابتة ، ويكبر حـ حتى يتقرب الى ∞ .

الخلاصة : ١ً) $\frac{\text{عدد}}{\text{٠}} = \infty$

٢ً) $\frac{\text{٠}}{\text{عدد}} = \text{٠}$

٣) $\frac{\cdot}{\cdot} =$ عدداً ما غير معين

٤) $\frac{\text{عدد}}{\infty} = \cdot$

الفصل الرابع

الكسور الجبرية

٣٨— الكسر الجبري — تعريف : في كل ما ذكرناه سابقاً لم نميز ما بين الاعداد التي قيمتها المطلقة اعداد صحيحة ، والتي قيمتها المطلقة اعداد كسرية ، الا اننا نعلم مما مر معنى الكتابة : $+\frac{٢}{٣}$ ، $-\frac{٥}{٢}$ مثلا .

فالعدد $-\frac{٥}{٢}$ هو عدد قيمته المطلقة $\frac{٥}{٢}$ واشارته — موضوعة امام قيمته المطلقة كما كنا نكتب الاعداد — ٥ ، — ٧ .

ويمكننا الآن توسيع معلوماتنا في الاعداد الجبرية الكسرية بالتعريف الآتي :

تعريف : الكسر الجبري هو كسر حسابي صورته ومخرجه عددان جبريان .

مثال : $\frac{(-٢)}{(+٣)}$ ، $\frac{\left(+\frac{٥}{٢}\right)}{(-٤)}$ ، $\frac{\left(-\frac{٧}{٢}\right)}{\left(-\frac{١١}{٣}\right)}$

هي كسور جبرية ، ونجعل هذه الكسور اعداداً كسرية بتطبيق قاعدة التقسيم التي رأيناها سابقاً (بند ٣٦) فنجد ان :

$$\frac{٢}{٣}- = \frac{(٢-)}{(٣+)}$$

$$\frac{٥}{٨}- = \frac{\left(\frac{٥}{٢}+\right)}{(٤-)}$$

$$\frac{٢١}{٢٢}+ = \frac{\left(\frac{٧}{٢}-\right)}{\left(\frac{١١}{٣}-\right)}$$

وهكذا اذا كان لدينا كسور جبرية فانه يمكننا ان نردها الى اعداد جبرية كسرية .

٣٩ — ضرب (او تقسيم) حدي الكسر بعدد ما : ليكن د خارج قسمة العدد ب على حـ فيكون :

$$ب = حـ \cdot د$$

واذا ضربنا الطرفين بالعدد هـ نجد ان :

$$هـ \cdot ب = هـ \cdot حـ \cdot د$$

وبما ان جداء هـ . حـ بالعدد د هو هـ . ب (بند ٣٥) اذن :

$$د = \frac{هـ \cdot ب}{هـ \cdot حـ}$$

ومنها : $\frac{هـ \cdot ب}{هـ \cdot حـ} = \frac{ب}{حـ}$ اذ كل منهما يساوي د .

فبالانتقال من احد طرفي هذه المساواة الى الطرف الآخر نستنتج :

نتيجة : لا تتغير قيمة الكسر الجبري اذا ضربنا او قسمنا حديه على عدد واحد .

٤٠ — وفي الحالة الخاصة : اذا كان المضروب فيه « — ١ » نرى انه يمكننا ان نغير اشارتي حدي كسر ما بدون ان نغير قيمة هذا الكسر .

٤١ — توحيد مخارج الكسور : نستنتج من النتيجة (٣٩) انه يمكننا ان نوحد مخارج الكسور الجبرية بواسطة الطرق المختلفة المذكورة في الحساب .

مثال : لتكن الكسور الجبرية :

$$\frac{ب}{ح} \quad ، \quad \frac{د}{هـ} \quad ، \quad \frac{ل}{ف}$$

فنوحد مخارجها بضرب كل كسر بجداء مخارج الكسور الباقية فيكون المخرج المشترك ح . هـ . ف وتصبح الكسور :

$$\frac{ب\,هـ\,ف}{ح\,هـ\,ف} \quad ، \quad \frac{د\,ح\,ف}{ح\,هـ\,ف} \quad ، \quad \frac{ل\,هـ\,ح}{ح\,هـ\,ف}$$

٤٢ — كيفية جمع الكسور الجبرية : رأينا فيما سبق كيفية توحيد مخارج الكسور ، وسنرى الآن كيف نجد حاصل الجمع الجبري لجملة كسور جبرية وحدت مخارجها . فلحساب المجموع الجبري :

$$ك = \frac{ب}{م} + \frac{ح}{م} - \frac{د}{م} + \frac{هـ}{م}$$

نضرب طرفي هذه المساواة بالمخرج المشترك (الموحد) فنجد :

$$م . ك = ب + ح - د + هـ$$

فاذا فرضنا ان الاعداد ب + ح — د + هـ مجموعة ، يمكننا ان نكتب :

$$م . ك = (ب + ح - د + هـ)$$

وهذه المساواة تدلنا على ان ك هي خارج قسمة (ب + ح — د + هـ) على العدد م .

اي :

$$ك = \frac{ب + ح - د + هـ}{م}$$

ومنها نستنتج :

نتيجة : المجموع الجبري لعدة كسور جبرية موحدة المخارج هو كسر صورته

المجموع الجبري للصور ومخرجه المخرج المشترك .

٤٣ — جداء الكسور الجبرية: لتكن الكسور الثلاثة :

$$\frac{ب}{ح} = ك \quad ، \quad \frac{ب'}{ح'} = ك' \quad ، \quad \frac{ب''}{ح''} = ك''$$

وليكن المراد حساب جداءها .

فمن المساواة الاولى نستنتج : $ب = ك \cdot ح$

ومن الثانية » $ب' = ك' \cdot ح'$

ومن الثالثة » $ب'' = ك'' \cdot ح''$

ففي هذه المساوات الثلاث الجوانب الاولى تساوي الجوانب الثانية ∴ جداء الجوانب الاول يساوي جداء الجوانب الثانية اي :

$$(ب \cdot ب' \cdot ب'') = (ك \cdot ك' \cdot ك'')(ح \cdot ح' \cdot ح'')$$

ومنها : $\frac{ب \cdot ب' \cdot ب''}{ح \cdot ح' \cdot ح''} = ك \cdot ك' \cdot ك'' = \frac{ب}{ح} \cdot \frac{ب'}{ح'} \cdot \frac{ب''}{ح''}$ اي :

نتيجة: جداء جملة كسور جبرية هو كسر صورته جداء الصور ومخرجه جداء المخارج .

٤٤ — تقسيم الكسور الجبرية : لايجاد خارج القسمة :

$$ك = \frac{\left(\frac{ب}{ح}\right)}{\left(\frac{د}{ه}\right)}$$

نضرب المقسوم بمقلوب المقسوم عليه كما في الحساب ، اي ان :

$$ك = \frac{ب}{ح} \times \frac{ه}{د} = \frac{ب \times ه}{ح \times د} = \frac{ب \cdot ه}{ح \cdot د}$$

فهذا الكسر الاخير هو خارج القسمة المطلوب ، اذ لو ضربناه بالكسر $\frac{د}{ه}$ لكان

الناتج حقيقة $\frac{ب}{ح}$ لان :

$$\frac{ب}{ح} = \frac{ب \cdot هـ}{ح \cdot د} \times \frac{د}{هـ} = \frac{ب \cdot هـ \cdot د}{ح \cdot د \cdot هـ}$$ ومنه ينتج :

نتيجة : لحساب خارج قسمة كسرين جبريين نضرب المقسوم بمقلوب المقسوم عليه .

ملاحظة : يمكننا في العمليات الاربعة للكسور ان نضع اي عدد صحيح اردنا بشكل كسر وذلك بأن نعتبر مخرجه + ١ اي ان : $ب = \frac{ب}{١}$

الفصل الخامس

القوى وخواصها

٤٥ — تعريف : قوة العدد ب هي حاصل ضرب عدة مضاريب كل مضروب منها يساوي ب وعدد هذه المضاريب يدل على **درجة القوة** .

مثال : قوة العدد الجبري ب من الدرجة ن هي حاصل ضرب ن مضروباً كل مضروب منها يساوي ب .

عملية الضرب التي نستعملها لحساب القوى تسمى **بالرفع** ، فرفع العدد ٣ للقوة الخامسة هو حساب $٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ \times ٣ = ٢٤٣$.

والعدد الموجب التام ن يسمى **أُس القوة** ونرمز الى قوة ب التي من الدرجة ن بالرمز $ب^{ن}$ الذي نقرؤه ب قوة ن .

٤٦ — من تعريف جداء جملة اعداد ومن البندين (٢٨ ، ٣٠) نحصل على النتائج الآتية :

١ً) القيمة المطلقة للعدد ب^{ن} هي القوة ن للقيمة المطلقة الى العدد ب .

٢ً) اذا كان الأس عدداً زوجياً تكون القوة ب^{ن} موجبة سواء أكانت ب موجبة او سالبة .

٣ً) واذا كان الأس ن فردياً تكون اشارة ب^{ن} كاشارة ب .

خواص القوى

٦٧ — جداء جملة قوى لعدد ما: لحساب الجداء :

ك = ب^{٥} . ب^{٣} . ب^{٤}

نستند على تعريف القوة فنكتب :

ك = ب ب ب ب ب . ب ب ب . ب ب ب ب

اي ان : ك = الى ٥ + ٣ + ٤ = ١٢ مضروباً كل مضروب منها يساوي ب . اذن ك تساوي حسب تعريف القوة الى ب^{١٢} اي ان :

ك = ب^{٥} . ب^{٣} . ب^{٤} = ب^{١٢}

وبنفس الطريقة نجد ان : ب^{٣} . ب^{٧} . ب^{٦} = ب$^{٣+٧+٦}$ = ب^{١٦} اي :

الخاصة الاولى : جداء عدة قوى لعدد واحد يساوي لهذا العدد مرفوعاً لقوة أسها يساوي مجموع أسس المضاريب :

اي ان : ب^{ن} . ب^{ل} . ب^{ط} = ب$^{ن+ل+ط}$

٦٨ — قوة جداء جملة اعداد: لحساب القوة الخامسة للجداء ب . حـ . د

اي لحساب :

$$(ب \cdot حـ \cdot د)^{٥} = ب^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot د^{٥} \cdot ب^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot د^{٥} \cdot ب^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot د^{٥}$$

نستند على الخاصة القائلة بان حاصل الضرب لا يتغير بتغيير ترتيب المضاريب فنقرب الحروف المتشابهة من بعضها فنجد :

$$(ب حـ د)^{٥} = ب^{٥} \cdot ب^{٥} \cdot ب^{٥} \cdot ب^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot حـ^{٥} \cdot د^{٥} \cdot د^{٥} \cdot د^{٥} \cdot د^{٥} \cdot د^{٥}$$

ونجد في النهاية ان : $(ب حـ د)^{٥} = ب^{٥} حـ^{٥} د^{٥}$ فنستنتج الخاصة التالية :

الخاصة الثانية : لرفع جداء جملة مضاريب لقوة ما نرفع كل مضروب من هذه المضاريب لتلك القوة .

٩ ـ قوة القوة : لرفع $ب^{٤}$ الى القوة الخامسة نسمي حاصل الرفع ك فنجد بالتسلسل ان :

$$ك = (ب^{٤})^{٥} = ب^{٤} \cdot ب^{٤} \cdot ب^{٤} \cdot ب^{٤} \cdot ب^{٤} = ب^{٤+٤+٤+٤+٤}$$

$$ب = ب^{٤ \times ٥} = ب^{٢٠}$$

ومنها نستنتج :

الخاصة الثالثة : لرفع $ب^{ح}$ الى قوة ل نرفع ب الى القوة ح . ل اي ان :

$$\left(ب^{ح}\right)^{ل} = ب^{ح.ل}$$

وعلى العكس : $ب^{ح.ل} = \left(ب^{ح}\right)^{ل} = \left(ب^{ل}\right)^{ح}$.

٥٠ ـ خارج قسمة قوتين لعدد واحد : لحساب خارج القسمة : $ك = \frac{ب^{ق}}{ب^{هـ}}$

نميز ثلاثة احوال :

١ً) ق اكبر من هـ .

مثال : لحساب $ك = \frac{ب^{٧}}{ب^{٢}}$ نقول اذا لاحظنا ان : $٧ = ٥ + ٢$

وتذكرنا ان : $ب^{٧} = ب^{٥} \cdot ب^{٢}$ يمكننا ان نكتب :

$$ك = \frac{ب^{٥} \cdot ب^{٢}}{ب^{٢}} = ب^{٥} = ب^{٧-٢}$$

٢ً) ق اصغر هـ .

مثال : لحساب $ص = \frac{ب^{٤}}{ب^{٧}}$ يمكننا بنفس الطريقة ان نكتب :

$$ص = \frac{ب^{٤}}{ب^{٤} \cdot ب^{٣}} = \frac{١}{ب^{٣}} = \frac{١}{ب^{٧-٤}}$$

وكثيراً ما نستعيض عن الرمز $\frac{١}{ب^{٣}}$ بالرمز $ب^{-٣}$ الذي نقرؤه ب قوة ناقص ٣

٣ً) ق يساوي هـ . وعندئذ يكون $ب^{ق} = ب^{هـ}$ ويكون $ك = ١$

ونستنتج من ذلك النتائج الاتية :

الخاصة الرابعة : ١ً) اذا كان ق > هـ فخارج قسمة $ب^{ق}$ على $ب^{هـ}$ هو: $ب^{ق-هـ}$

٢ً) اذا كان ق > هـ فخارج قسمة $ب^{ق}$ على $ب^{هـ}$ هو: $\frac{١}{ب^{ق-هـ}}$

٣ً) اذا كان ق = هـ فخارج قسمة $ب^{ق}$ على $ب^{هـ}$ هو: ١

٥١ — حالة خاصة: اذا كان ق = هـ فان الفرق ق — هـ يساوي الصفر . ولذلك اذا طبقنا على هذه الحالة الخاصة ، الطريقة المذكورة في الحالة الاولى ق > هـ نصل الى النتيجة الاتية :

$$\text{ن}^{\text{ق}} \div \text{ن}^{\text{ق}} = \text{ن}^{\text{ق}-\text{ق}} = \text{ن}^{\text{ق}} \div \text{ن}^{\text{ق}} = ١$$

مثال: $\text{ن}^{٢} \div \text{ن}^{٢} = \text{ن}^{٢-٢} = \text{ن}^{٠} = ١$

فالشكل $\text{ن}^{٠}$ ليس له معنى بنفسه وبشرحه استناداً على ما مر نجد ان $\text{ن}^{٠} = ١$ مهما كانت ن شريطة ان تكون ن غير الصفر .

٥٢ — الخلاصة: ان النظريات المذكورة آنفاً تلخص بالدساتير الاتية الواجب حفظها غيباً وهي:

١) $\text{ن}^{\text{ق}} \cdot \text{ن}^{\text{ل}} \cdot \text{ن}^{\text{هـ}} = \text{ن}^{\text{هـ}+\text{ق}+\text{ل}}$

٢) $(\text{ن}^{\text{حـ}})^{\text{د}} = \text{ن}^{\text{حـ د}}$

٣) $\left(\frac{\text{هـ}}{\text{ن}}\right)^{\text{ق}} = \frac{\text{هـ}^{\text{ق}}}{\text{ن}}$

٤) $\left\{\begin{array}{ll} \frac{\text{ن}^{\text{ق}}}{\text{ن}^{\text{هـ}}} = \text{ن}^{\text{ق}-\text{هـ}} & \text{بفرض } \text{ق} > \text{هـ} \\ \frac{\text{ن}^{\text{ق}}}{\text{ن}^{\text{هـ}}} = \frac{١}{\text{ن}^{\text{هـ}-\text{ق}}} & \text{بفرض } \text{ق} < \text{هـ} \\ \frac{\text{ن}^{\text{ق}}}{\text{ن}^{\text{هـ}}} = \text{ن}^{٠} = ١ & \text{بفرض } \text{ق} = \text{هـ} \end{array}\right.$

* * *

الفصل السادس

الجذور الحسابية

٥٣ — تعريف : جذر العدد ك من القوة ن [ونرمز له بالرمز $\sqrt[ن]{ك}$] هو العدد الذي اذا رفع الى القوة ن كان الناتج ك .

اي يكون س $= \sqrt[ن]{ك}$ فيما لو كان $س^{ن} = ك$.

ولندرس الآن الحالات المختلفة التي يمكن أن تصادف .

الحالة الاولى : ك عدد موجب ، فسواء أكان ن زوجياً او فردياً فانه يمكننا دوماً (ولو بصورة تقريبية) ان نجد عدداً اذا رفع الى القوة ن اعطانا ك .

وزيادة على ذلك ، اذا كان ن **عدداً زوجياً** فانه يوجد عددان متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالاشارة ، اذا رفع كل منهما الى القوة ن كان الناتج ك .

بالحقيقة لنفرض ان ب عدد موجب لو رفع الى القوة ن اعطانا العدد الموجب ك

اي لنفرض ان : $ب^{ن} = ك$

فبما ان ن عدد زوجي يكون ايضاً : $(-ب)^{ن} = ك$

اذن يمكننا ان نكتب : $\sqrt[ن]{ك} = \pm ب$ (زائد او ناقص ب)

مثال :

$\sqrt{٢٥} = \pm ٥$ لان : $(+٥)^{٢} = (-٥)^{٢} = ٢٥$

الحالة الثانية : ك عدد سالب : بما ان القوى [الزوجية او الفردية] للعدد الموجب

هي اعداد موجبة دوماً ، وبما ان ك عدد سالب فلا يوجد اذن عدد موجب لو رفع الى القوة ن اعطانا ك السالبة مهما كانت ن .

كذلك اذا كان ن زوجياً فلا يوجد عدد سالب لو رفعناه الى القوة ن اعطانا العدد السالب ك .

واما اذا كان ن فردياً فانه يوجد عدد سالب دوماً (ولو بصورة تقريبية) لو رفع الى القوة ن اعطانا العدد السالب ك .

وهكذا نرى انه لايوجد عدد موجب او سالب يساوي $\sqrt{-٤}$ او $\sqrt[٤]{-١٦}$

ولكن $\sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$.

٥٤ — الخلاصة :

الحالة الاولى : ك > ٠

١ً) ن عدد فردي : ك له جذر موجب .

مثال : $\sqrt[٣]{٨} = ٢$

٢ً) ن عدد زوجي : ك له جذران متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالاشارة .

مثال : $\sqrt{٤} = \pm ٢$

الحالة الثانية : ك < ٠

١ً) ن عدد فردي : ك له جذر سالب .

مثال : $\sqrt[٣]{-٢١٦} = -٦$

٢ً) ن عدد زوجي : ك ليس له جذر .

خواص الجذور الحسابية

٥٥ — تمهيد: سنفرض في جميع المحاكمات والاثباتات التالية ان الكمية ك موجبة ، وسنأخذ دائماً قيمة الجذر مسبوقة باشارة + .

اعني اننا لا نأخذ الا الاعداد الموجبة التي اذا رفعت الى القوة ن تعطينا ك ، وهذه الاعداد الموجبة هي التي نسميها **القيم الحسابية للجذور** .

فهكذا اذا فرضنا العدد ك موجباً ، تكون القيمة الحسابية للجذر $\sqrt[ن]{ك}$ هي العدد الموجب الذي لو رفع الى القوة ن اعطانا ك .

وللبرهان على النظريات المتعلقة بالجذور الحسابية نستخدم في اكثر الاحيان الخواص الاتية :

١ً) العددان الموجبان المتساويان لهما قوتان متساويتان ، اي ان قوة الاول من درجة ما تساوي قوة الثاني من نفس الدرجة .

٢ً) اذا تساوت قوتان من درجة واحدة لعددين موجبين كان هذان العددان متساويين .

٥٦ — نظرية: الجذر النوني لجداء جملة اعداد يساوي جداء الجذور النونية للمضاريب . [جذر الجداء يساوي جداء الجذور] .

البرهان: للبرهنة على ان :

$$\sqrt[ن]{ب \times جـ \times د} = \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{جـ} \times \sqrt[ن]{د}$$

يكفي ان نتحقق من صحة تساوي جانبي هذه المساواة ، وللتحقق من ذلك نرفعها

الى قوة واحدة ولتكن ن فنجد بعد الرفع (بند ٤٨) ان هذه المساوات اصبحت :

$$ب_{حـ د} = ب \times حـ \times د$$

مما يدلنا (بند ٥٥) على صحة هذه النظرية وهو المطلوب .

٥٧ — تطبيقات : جداء جملة جذور دليلها واحد : ان النظرية السابقة تمكننا من حساب جداء الجذور الاتية :

$$\sqrt[ن]{ا} \times \sqrt[ن]{حـ} \times \sqrt[ن]{د}$$

بعملية جذر واحدة اذ رأينا ان :

$$\sqrt[ن]{ا} \times \sqrt[ن]{حـ} \times \sqrt[ن]{د} = \sqrt[ن]{ا_{حـ د}}$$

اذن لضرب جملة جذور من [دليل واحد] نضرب الاعداد الموضوعة تحت الجذر ونضع اشارة جذر واحدة .

مثال :

$$\sqrt{٢} \times \sqrt{٣} = \sqrt{٣ \times ٢} = \sqrt{٦}$$

$$\sqrt{٢} \times \sqrt{٨} = \sqrt{٨ \times ٢} = \sqrt{١٦} = ٤$$

$$\sqrt[ن]{ا} \times \sqrt[ن]{حـ} = \sqrt[ن]{ا_{حـ}}$$

حالة خاصة : $\sqrt{٥} \times \sqrt{٥} = ٥$ وكذلك : $\sqrt[ن]{ا} \cdot \sqrt[ن]{ا} = ب$

٥٨ — تطبيقات ثانية : ادخال احد المضاريب تحت الجذر او اخراج احد المضاريب من تحت الجذر . نرى حسب النظرية السابقة ان :

$$\sqrt[ن]{ب_{حـ د}} = \sqrt[ن]{ب^{ن}} \times \sqrt[ن]{حـ د} = ب \sqrt[ن]{حـ د}$$

اذن لاخراج مضروب من تحت الجذر الذي دليله ن يجب ان نأخذ الجذر النوني لهذا المضروب .

وبصورة خاصة لاخراج احد المضاريب من تحت الجذر التربيعي نأخذ الجذر التربيعي لهذا المضروب .

مثال : $\sqrt[3]{١٢} = \sqrt[3]{٣ \times ٤} = ٢\sqrt[3]{٣}$

وعلى العكس : لادخال مضروب تحت جذر دليله ن نرفع هذا المضروب الى القوة ن ثم نضربه بالمجذور .

وبصورة خاصة لادخال مضروب تحت الجذر التربيعي نربع هذا المضروب اولاً ثم نضربه بالمجذور .

مثال : $٢\sqrt{٢,٢٥} = \sqrt{٢,٢٥ \times ٤} = \sqrt{٩} = ٣$

٥٩ — نظرية : الجذر النوني لكسر ما يساوي الجذر النوني لصورة مقسوماً على الجذر النوني للمخرج .

البرهان: يجب ان نبرهن على ان :

$$\sqrt[ن]{\frac{ب}{ح}} = \frac{\sqrt[ن]{ب}}{\sqrt[ن]{ح}}$$

فلكي نتحقق من تساوي جانبي هذه المساواة نرفعها الى القوة ن فنجد ان هذه المساواة اصبحت بعد الرفع : $\frac{ب}{ح} = \frac{ب}{ح}$ وهذا يدلنا (بند ٥٥) على صحة هذه النظرية وهو المطلوب .

٦٠ — تطبيقات : تقسيم الجذرين المتساويين بالدرجة : ان النظرية السابقة تبرهن لنا على ان :

$$\frac{\sqrt[ن]{ب}}{\sqrt[ن]{ح}} = \sqrt[ن]{\frac{ب}{ح}}$$

ولكن الطرف الاول من هذه المساواة ليس الا خارج قسمة الجذرين [المتساويين بالدليل] . اذن :

لتقسيم جذرين متساويين بالدليل نقسم الاعداد الموضوعة تحت الجذر ونضع اشارة جذر واحدة .

مثال :

$$\sqrt{٣} = \sqrt{\frac{٦}{٢}} = \frac{\sqrt{٦}}{\sqrt{٢}}$$

$$٢ = \sqrt{٤} = \sqrt{\frac{٨}{٢}} = \frac{\sqrt{٨}}{\sqrt{٢}}$$

فهنا التقسيم اولاً ، ثم اخذ الجذر خير من اخذ جذر الصورة على حدة وجذر المخرج على حدة ثم التقسيم .

وبالعكس بما ان : $\sqrt{\frac{ب}{ح}} = \frac{\sqrt{ب}}{\sqrt{ح}}$ نجد مثلا ان :

$$\frac{٤}{٥} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٢٥}} = \sqrt{\frac{١٦}{٢٥}}$$

فهنا جذر الصورة على حدة وجذر المخرج على حدة خير من التقسيم اولاً ثم اخذ الجذر .

٦١ — ملاحظة : لتقسيم حاصل جمع جملة اعداد على عدد ما نقسم اولاً الاعداد التي ليست واقعة تحت الجذر ، ثم نقسم الاعداد الواقعة تحت الجذر بعد ان نرفع المقسوم عليه الى قوة الجذر الذي نقسمه .

وبصورة خاصة لتقسيم عدد موضوع تحت الجذر التربيعي على عدد آخر يجب ان نقسم على مربع المقسوم عليه .

مثال :

$$\frac{ب^{٢} + \sqrt{ب^{٤} ح^{٢}} - \sqrt{ب^{٢} ح^{٤}}}{ب^{٢}} = \frac{ب^{٢}}{ب^{٢}} + \sqrt{\frac{ب^{٤} ح^{٢}}{ب^{٤}}} - \sqrt{\frac{ب^{٢} ح^{٤}}{ب^{٤}}} = ب + ح - \frac{ح^{٢}}{ب}$$

٦٢ – نظرية : لرفع جذر الى قوة ما نرفع العدد الموضوع تحت الجذر .

البرهان : يجب ان نبرهن على ان : $(\sqrt[ن]{ب})^{هـ} = \sqrt[ن]{ب^{هـ}}$

فبحسب تعريف الرفع نجد ان :

$$(\sqrt[ن]{ب})^{هـ} = \underbrace{\sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{ب} \times \sqrt[ن]{ب} \cdots \sqrt[ن]{ب}}_{\text{هـ مرة}}$$

وبما ان الطرف الثاني ليس الا جذوراً متساوية الدليل نجد (بند ٥٧) ان :

$$(\sqrt[ن]{ب})^{هـ} = \sqrt[ن]{ب \times ب \times ب \times ب \times \cdots ب} = \sqrt[ن]{ب^{هـ}}$$

وهو المطلوب .

مثال : $(\sqrt{٢})^{٣} = \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} = \sqrt{٨}$

حالة خاصة : $(\sqrt[ن]{ب})^{ن} = \sqrt[ن]{ب^{ن}} = ب$ فمثلا : $(\sqrt[٣]{٣})^{٣} = ٣$

٦٣ – نظرية : لاخذ الجذر النوني للعدد $ب^{هـ}$ يكفي ان نقسم الأس هـ على ن .

البرهان : يجب ان نبرهن على ان : $\sqrt[ن]{ب^{هـ}} = ب^{\frac{هـ}{ن}}$

فللبرهان يكفي ان نتحقق من تساوي جانبي هذه المساواة . لذلك لنرفع جانبيها الى القوة ن فنجد ان هذه المساواة اصبحت بعد الرفع :

$$ب^{\frac{هـ}{ن} \times ن}$$

$$ب^{هـ} = ب \quad \text{اي :} \quad ب^{هـ} = ب^{هـ}$$

مما يدل على صحة هذه النظرية (بند ٥٥) ، وهو المطلوب .

تنبيه : بنفس الطريقة نجد ان :

$$\sqrt[ن]{ب^{هـ} \times ح^{ق}} = \sqrt[ن]{ب^{هـ}} \cdot \sqrt[ن]{ح^{ق}} \cdot \sqrt[ن]{د^{ق}} = ب^{\frac{هـ}{ن}} \times ح^{\frac{ق}{ن}} \times د^{\frac{ق}{ن}}$$

٦٤ — ملاحظة : نفرض في النظرية السابقة ان جميع الاسس قابلة للقسمة على ن والا يصبح الاس كسرياً . كما نلاحظ :

بصورة خاصة انه لاخذ الجذر التربيعي لجداء جملة مضاريب نقسم اسس هذه المضاريب على ٢ .

مثال :

$$\sqrt{ب^{٤} \times ح^{٦} \times د^{٢}} = ب^{٢} \times ح^{٣} \times د$$

٦٥ — نظرية : الجذر الهائي للجذر النوني للعدد ب هو جذر دليله هـ ن لنفس العدد ب [اي ان دليل الجذر يساوي جداء الدليلين] .

البرهان : يجب ان نبرهن على ان :

$$\sqrt[هـ]{\sqrt[ن]{ا}} = \sqrt[هـ ن]{ا}$$

فهذه المساواة صحيحة اذ لو رفعنا طرفيها الى القوة هـ ن لرأينا ان حاصل رفع الجانب الاول يساوي ب ، وكذلك حاصل رفع الجانب الثاني يساوي ب ايضاً .

لنرفع اولاً طرفي هذه المساواة الى القوة هـ فنجد :

$$\sqrt[ن]{ا}^{هـ ن} = ا^{هـ}$$

ثم لنرفع طرفي هذه المساواة الى القوة ن فنجد بالتسلسل :

$$ب = \sqrt[هـ]{ب^{هـ}}^{ن} = ب^{\frac{هـ ن}{هـ ن}} = ب \quad \text{وهو المطلوب .}$$

٦٦ — نتيجة : يمكن ان نبدل ترتيب دليلي الجذر بان نكتب :

$$\sqrt[ه]{\sqrt[ن]{ا}} = \sqrt[ن]{\sqrt[ه]{ا}}$$

اذ كل من الجانبين يساوي : $\sqrt[ه ن]{ا}$

٦٧ — نتيجة : النظرية السابقة تساعدنا على استخراج الجذر الذي دليله مشكل من المضاريب الاولية ٢ ، ٣ .

مثال : لحساب $\sqrt[٦]{ا}$ نلاحظ ان : $٦ = ٢ \times ٣$ فيكون :

$$\sqrt[٦]{ا} = \sqrt[٣]{\sqrt[٢]{ا}}$$

اي نأخذ اولاً الجذر التربيعي للعدد ب ثم نأخذ الجذر التكعيبي للناتج او :

بصورة ثانية :

$$\sqrt[٦]{ا} = \sqrt[٢]{\sqrt[٣]{ا}}$$

اي نأخذ الجذر التكعيبي الى ب اولاً ، ثم الجذر التربيعي للناتج .

٦٨ — نظرية : لا تتغير قيمة الجذر الحسابي اذا ضربنا الدليل بعدد ما وضربنا أس العدد الموضوع تحت الجذر بنفس هذا العدد .

البرهان : لنبرهن على ان :

$$\sqrt[ن]{ا^{م}} = \sqrt[ن د]{ا^{م د}}$$

في الحقيقة يمكن كتابة هذه المساواة (بند ٦٧) بالشكل :

$$\sqrt[ن]{ا^{م}} = \sqrt[د]{\sqrt[ن]{ا^{د}}}$$

فاذا رفعنا طرفي هذه المساواة الى القوة م واستندنا على النظرية (بند ٦٣) نجد بالتسلسل:

$$ن_{هـ} = \sqrt[د]{ن_{هـ د}} = ن_{\frac{هـ د}{د}} = ن_{هـ}$$

مما يدلنا على صحة النظرية المذكورة وهو المطلوب .

٦٩ — تطبيقات : كيفية جعل الجذور من دليل واحد : استناداً على النظرية السابقة نجعل الجذور المختلفة من دليل واحد ، فاذا اخذنا مثلاً الجذرين : $\sqrt[٢]{أ}$ ، $\sqrt[٣]{أ}$ وضربنا دليل الجذر الاول بالعدد ٣ نجد :

$$\sqrt[٢]{أ} = \sqrt[٦]{أ^{٣}}$$

وكذلك اذا ضربنا دليل الجذر الثاني بالعدد ٢ نجد :

$$\sqrt[٣]{أ} = \sqrt[٦]{أ^{٢}}$$

وهكذا نكون جعلنا الجذرين من دليل واحد وهو ٦ ، وهذه العمليات تشبه تماماً العمليات المذكورة في توحيد مخارج الكسور ، ويكون دليل الجذور الجديد بمثابة المخرج المشترك (الموحد) .

مثال آخر : لتوحيد ادلة الجذور :

$$\sqrt[٦]{أ} \quad ، \quad \sqrt[٣]{أ} \quad ، \quad \sqrt[٩]{أ}$$

نأخذ المثل المشترك البسيط لها وهو ١٨ لخارج قسمة ١٨ على ٦ هو ٣ ، لذلك نضرب دليل الجذر الاول بالعدد ٣ فيكون :

$$\sqrt[٦]{أ} = \sqrt[١٨]{أ^{٣}}$$

وكذلك نضرب دليل الجذر الثاني بالعدد $\frac{١٨}{٢} = ٩$ كما نضرب دليل الجذر الثالث بالعدد $\frac{١٨}{٩} = ٢$ فنجد :

$$\sqrt[٣]{أ} = \sqrt[١٨]{أ^{٦}} \quad ؛ \quad \sqrt[٩]{أ} = \sqrt[١٨]{أ^{٢}}$$

ونكون قد جعلنا هذه الجذور من دليل واحد وهو ١٨ .

ملاحظة : ان التطبيقات السابقة تفيدنا في تسهيل بعض الحسابات الجذرية .

مثال :

$$\sqrt{أ^{٦} \times أ^{٢} \times أ^{٢}} = \sqrt{أ^{٦} \times أ^{٢} \times أ^{٢}} = \sqrt{أ^{٦}} \times \sqrt{أ^{٢}} \times \sqrt{أ^{٢}} = أ^{\frac{٦}{٦}} \times أ^{\frac{٢}{٢}} \times أ^{\frac{٢}{٢}} = أ^{١+١+١} = أ^{٣}$$

$$\sqrt[٦]{أ^{٦}} = ن$$

٧٠ — الجذور الكسرية — حذف الجذور من المخرج : في الكسور الجذرية نسعى دوماً لحذف الجذور من المخرج (لان التقسيم على القيمة التقريبية للجذر صعب جداً) .

وسنقتصر عملياتنا في ما يلي على الكسور التي في مخارجها جذور تربيعية فقط ، مميزين الحالتين الآتيتين :

الحالة الاولى : في المخرج جذر واحد فقط .

مثال : اذا كان لدينا الكسر : $\frac{ب}{\sqrt{حـ}}$ فيمكننا ان نضرب حديه بالعدد $\sqrt{حـ}$ فنجداً كسراً يكافيء الاول ويكون :

$$\frac{ب}{\sqrt{حـ}} = \frac{ب \times \sqrt{حـ}}{\sqrt{حـ} \times \sqrt{حـ}} = \frac{ب\sqrt{حـ}}{حـ}$$

ونكون هكذا قد خلصنا المخرج من الجذر . كما نستنتج القاعدة الآتية :

قاعدة : لحذف الجذر من مخرج كل كسر من الشكل : $\frac{ب}{\sqrt{حـ}}$ نضرب حديه بمخرجه $\sqrt{حـ}$.

مثال :

(١) $\frac{ر}{\sqrt{٣}} = \frac{ر\sqrt{٣}}{٣}$

$$٢) \quad \frac{س}{\sqrt{٢}} = \frac{س \sqrt{٢}}{٢}$$

الحالة الثانية : في المخرج جذران او جذر وعدد ليس واقعاً تحت الجذر ،

ان الخاصة التي سنطبقها هنا هي الخاصة الحسابية الآتية :

جداء مجموع عددين في فرقهما يساوي الفرق بين مربعيهما .

اي ان :

$$(\sqrt{أ} + \sqrt{ح})(\sqrt{أ} - \sqrt{ح}) = ب - ح$$

وكذلك :

$$(ب + \sqrt{ح})(ب - \sqrt{ح}) = ب^{٢} - ح$$

فكل من المقدارين $(\sqrt{أ} + \sqrt{ح})$ ، $(\sqrt{أ} - \sqrt{ح})$ يسمى بمزاوج الآخر .

وكذلك المقداران : $(ب + \sqrt{ح})$ ، $(ب - \sqrt{ح})$ هما مقداران كل منهما مزاوج صاحبه ، واستناداً على هذه الخاصة السابقة نستنتج القاعدة الآتية :

قاعدة : لحذف الجذور الموجودة في مخارج الكسور ذات الشكل :

$$\frac{د}{\sqrt{أ} \pm \sqrt{ح}} \quad \text{او :} \quad \frac{د}{ب \pm \sqrt{ح}}$$

نضرب حدي الكسر بمزاوج مخرجه .

امثلة :

$$١) \quad \frac{د}{\sqrt{أ} + \sqrt{ح}} = \frac{د(\sqrt{أ} - \sqrt{ح})}{ب - ح}$$

$$٢) \quad \frac{د}{\sqrt{أ} - \sqrt{ح}} = \frac{د(\sqrt{أ} + \sqrt{ح})}{ب - ح}$$

٣) $\frac{د}{ب + \sqrt{ح}} = \frac{د(ب - \sqrt{ح})}{ب^٢ - ح}$

٤) $\frac{د}{ب - \sqrt{ح}} = \frac{د(ب + \sqrt{ح})}{ب^٢ - ح}$

٥) $\frac{٤}{\sqrt{٧} - \sqrt{٥}} = \frac{٤(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})}{٧ - ٥} = ٢(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})$

٧١ — القوى الكسرية: برهنا في ما سبق (بند ٦٣) على ان :

$$\sqrt[ن]{ب^{هـ}} = ب^{\frac{هـ}{ن}}$$

وفرضنا ان هـ قابلة للقسمة على ن ، الا انه لتعميم فكرة الاسس نفرض الآن ان هـ غير قابلة للقسمة على ن فتحدث لدينا الاسس الكسرية ونحصل على التعريف الآتي :

تعريف: الرمز $ب^{\frac{هـ}{ن}}$ يدل على $\sqrt[ن]{ب^{هـ}}$

مثال : $ب^{\frac{٢}{٣}} = \sqrt[٣]{ب^٢}$

وسنرى (بند ٧٣) ان هذا التعريف يتفق تمام الاتفاق مع جميع القواعد التي رأيناها في بحث القوى الصحيحة ، وان هذه القواعد يمكن ان تطبق عند ما تكون الأسس كسرية .

٧٢ — القوى السالبة: يمكننا ان نرقى درجة ثانية في التعميم فندخل في مبحث الأسس السالبة التي نعرفها بالتعريف الآتي :

تعريف : الرمز $ب^{-ن}$ يدل على $\frac{١}{ب^ن}$ فهذا التعريف الجديد لا يتضارب ايضاً بصورة مطلقة مع جميع القواعد والنظريات التي رأيناها في القوى الصحيحة الموجبة كما سنرى ذلك (بند ٧٣) .

ولنبرهن الان على انه يمكن ان نضرب حدي الأس الكسري بعدد ما بدون ان تتغير قيمة القوة .

١ً) لنأخذ القوة $ب^{\frac{هـ}{جـ}}$ ولنفرض ان الاس $\frac{هـ}{جـ}$ موجب ،

ولنبرهن على ان :

$$ب^{\frac{هـ}{جـ}} = ب^{\frac{هـ د}{جـ د}}$$

فبحسب التعريف نرى ان :

$$ب^{\frac{هـ}{جـ}} = \sqrt[جـ]{ب^{هـ}}$$

ونحن نعلم (بند ٦٨) انه يمكن ان نضرب القوة هـ والدليل جـ بعدد واحد مثل د بدون تغيير القيمة الاصلية للجذر. اي :

$$ب^{\frac{هـ}{جـ}} = \sqrt[جـ]{ب^{هـ}} = \sqrt[جـ د]{ب^{هـ د}}$$

ولكن حسب التعريف ايضاً :

$$\sqrt[جـ د]{ب^{هـ د}} = ب^{\frac{هـ د}{جـ د}}$$

اذن : $ب^{\frac{هـ}{جـ}} = ب^{\frac{هـ د}{جـ د}}$ وهو المطلوب .

٢ً) لنفرض ان الاس سالب ، وان اشارته ظاهرة . ولنبرهن على ان :

$$ب^{-\frac{هـ}{جـ}} = ب^{-\frac{هـ د}{جـ د}}$$

فحسب التعريف نجد بالتسلسل :

$$ب^{-\frac{هـ}{جـ}} = \frac{١}{ب^{\frac{هـ}{جـ}}} = \frac{١}{\sqrt[جـ]{ب^{هـ}}} = \frac{١}{\sqrt[جـ د]{ب^{هـ د}}} = \frac{١}{ب^{\frac{هـ د}{جـ د}}} = ب^{-\frac{هـ د}{جـ د}}$$

وهو المطلوب .

ولبرهن الان على ان النظريات المتعلقة بالقوى التامة ، هي صحيحة عند ما تكون القوى كسرية موجبة او سالبة .

٧٣— نظرية : ١) جداء قوتين مختلفتين لعدد واحد يساوي هذا العدد مرفوعاً لأس مساوٍ لمجموع الأسين .

البرهان : لنبرهن على ان :

$$ن^{\frac{هـ}{ج}} \times ن^{\frac{ق}{د}} = ن^{\frac{هـ}{ج} + \frac{ق}{د}}$$

فبمقتضى التعريف :

$$ن^{\frac{هـ}{ج}} = \sqrt[ج]{ن^{هـ}} \quad \cdots \quad (١)$$

$$ن^{-\frac{ق}{د}} = \frac{١}{ن^{\frac{ق}{د}}} = \frac{١}{\sqrt[د]{ن^{ق}}} \quad \cdots \quad (٢)$$

فمن العلاقتين (١) ، (٢) نجد :

$$ن^{\frac{هـ}{ج}} \times ن^{-\frac{ق}{د}} = \frac{\sqrt[ج]{ن^{هـ}}}{\sqrt[د]{ن^{ق}}}$$

فاذا وحدنا دليل الجذرين نجد :

$$\sqrt[ج]{ن^{هـ}} = \sqrt[جد]{ن^{هـد}}$$

و

$$\sqrt[د]{ن^{ق}} = \sqrt[جد]{ن^{قج}}$$

ومنها يكون :

$$ن^{\frac{هـ}{ج}} = ن^{\frac{ق}{د}} \times ن^{-\frac{ق}{د}} = \frac{\sqrt[د]{ن^{هـ د}}}{\sqrt[د]{ن^{ق ج}}} = \sqrt[د]{ن^{هـ د - ق ج}}$$

$$ن^{\frac{هـ}{ج}} = ن^{\frac{ق}{د}} \quad \text{وهو المطلوب .} \qquad \frac{هـ د - ق ج}{ج د}$$

مثال :

$$ن^{\frac{١}{٢}} \times ن^{-\frac{١}{٣}} = ن^{\frac{١}{٢} - \frac{١}{٣}} = ن^{\frac{١}{٦}} = \sqrt[٦]{ن}$$

وحقيقة :

$$\frac{\sqrt[٢]{ن}}{\sqrt[٣]{ن}} = \frac{\sqrt[٦]{ن^{٣}}}{\sqrt[٦]{ن^{٢}}} = \sqrt[٦]{ن}$$

نظرية : ٢) لنبرهن على ان :

$$\left(ن^{\frac{هـ}{ج}}\right)^{د} = ن^{\frac{هـ د}{ج}}$$

البرهان : بحسب التعريف :

$$ن^{\frac{هـ}{ج}} = \sqrt[ج]{ن^{هـ}} \quad \text{اذن :}$$

$$\left(ن^{\frac{هـ}{ج}}\right)^{د} = \left(\sqrt[ج]{ن^{هـ}}\right)^{د} = \sqrt[ج]{ن^{هـ د}} = ن^{\frac{هـ د}{ج}}$$

وهو المطلوب .

نظرية : ٣) لنبرهن ايضاً على ان :

$$\left(\frac{\text{هـ}}{\text{ج}}\right)^{\frac{\text{ق}}{\text{د}}} = \text{ن}^{\frac{\text{هـ ق}}{\text{ج د}}}$$

وفي الحقيقة :

$$\left(\frac{\text{هـ}}{\text{ج}}\right)^{\frac{\text{ق}}{\text{د}}} = \sqrt[\text{د}]{\left(\frac{\text{هـ}}{\text{ج}}\right)^{\text{ق}}} = \sqrt[\text{ج د}]{\text{ن}^{\text{هـ ق}}} = \text{ن}^{\frac{\text{هـ ق}}{\text{ج د}}}$$

وهو المطلوب .

وهكذا يمكننا ان نبرهن على ان جميع النظريات المذكورة في القوى الموجبة هي صحيحة عند ما تكون القوى كسرية موجبة او سالبة .

امثلة :

المثال الاول : $\text{ن}^{\frac{٢}{٢}} \times \text{ن}^{-\frac{٢}{٢}} = \text{ن}^{\frac{٢}{٢} - \frac{٢}{٢}} = \text{ن}^{٠} = ١$

وبصورة ثانية :

$$\text{ن}^{\frac{٢}{٢}} \times \text{ن}^{-\frac{٢}{٢}} = \sqrt[٢]{\text{ن}^{٢}} \times \frac{١}{\sqrt[٢]{\text{ن}^{٢}}} = \frac{\sqrt[٢]{\text{ن}^{٢}}}{\sqrt[٢]{\text{ن}^{٢}}} = ١$$

المثال الثاني : $\left(\text{ن}^{\frac{٢}{٢}}\right)^{٢} = \text{ن}^{\frac{٢}{٢} \times ٢} = \text{ن}^{٢}$

وبصورة ثانية :

$$\left(\text{ن}^{\frac{٢}{٢}}\right)^{٢} = \left(\sqrt[٢]{\text{ن}^{٢}}\right)^{٢} = \text{ن}^{٢}$$

المثال الثالث : $\frac{\text{ن}^{\frac{٢}{٢}}}{\text{ن}^{\frac{١}{٢}}} = \text{ن}^{\frac{٢}{٢} - \frac{١}{٢}} = \text{ن}^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{\text{ن}}$

وبصورة ثانية :

$$\sqrt{ن} = \sqrt[٤]{ن^{٢}} = \frac{\sqrt[٤]{ن^{٣}}}{\sqrt[٤]{ن^{١}}} = \frac{ن^{\frac{٣}{٤}}}{ن^{\frac{١}{٤}}}$$

٧٩ — تطبيقات : استناداً على مامر نستطيع ان نجري عمليات الجذور المختلفة الدليل بواسطة القوى الكسرية .

مثال : لاجراء العملية الاتية :

$$ك = \sqrt{ن} \times \sqrt[٣]{ن^{٢}} \times \sqrt[٦]{ن^{٥}}$$ نكتب :

$$ك = ن^{\frac{١}{٢}} \times ن^{\frac{٢}{٣}} \times ن^{\frac{٥}{٦}} = ن^{\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} + \frac{٥}{٦}}$$

او : $$ك = ن^{\frac{١٢}{٦}} = ن^{٢}$$

تمارين

احسب الكميات الاتية :

١] ب = ٨ − ١٤ − (− ١٣ + ٢٥ − ١٠٣) + (٢٢٨ − ١٥٦)

٢] حـ = − ٢٢ (١٠ + ٧ − ٢٥) + ٢٢ (١٥ − ٨ + ٣)

٣] د = ٧ × ٢٢ + ٣٨١٤ − ٧ × ٣ + ٧ × ٦١

٤] هـ = ٢٥ (− ٨) × ١٥ (− ٢١) × ٤٣

احسب بطريقتين مختلفتين الكميات الاتية :

٥] ب = (٣٥ − ١٢ + ٣) (١٦ − ٩)

٦] حـ = (٢٢٥ − ٣ + ١٢) (− ١٢ + ٢٧)

٧] احسب القيمة العددية للكميات الجبرية :

٣ ب^{٢} − ٥ ب حـ + ٦ ب^{٢} حـ^{٢} ؛ ١٥ ب^{٢} حـ^{٢} + ٢ ب^{٣} حـ^{٢} −
ب^{٥} + حـ^{٥} ؛ (ب − حـ)^{٢} + (حـ − ٢ ب)^{٢} − (٥ ب − ٢ حـ)

عندما تأخذ ب ، حـ القيم التالية :

ب = ٢ ، حـ = − ٢ ؛ ب = − ٤ ، حـ = ٣ ؛
ب = − ٣ ، حـ = − ٥ .

٨] احسب القيمة العددية لمجموع الكسور :

$$\frac{ب\,حـ}{د} + \frac{حـ\,د}{ب} + \frac{ب\,د}{حـ} + \frac{١}{ب} + \frac{١}{حـ} + \frac{١}{د}$$

عندما تأخذ ب ، حـ ، د القيم التالية :

١) ب = ١ حـ = ٢ د = ٣
٢) ب = − ١ حـ = − ٢ د = ٣
٣) ب = − ١ حـ = ٢ د = − ٣

٩] احسب القيمة العددية للكمية :

$س^{٥} - ٥ س^{٤} ع + ١٠ س^{٢} ع^{٢} - ١٠ س^{٢} ع^{٤} - ع^{٥}$

عند ما تأخذ س ، ع القيم العددية التالية .

$س = ٣ ، ع = ٢$ ؛ $س = -٥ ، ع = ٤$ ؛

$س = ١٠ ، ع = -١٠$

١٠] احسب القيمة العددية للكمية :

$$\frac{ب^{٤} م + ب م^{٤}}{ب م (ب + م) - ب^{٢} + ٢ ب م + م^{٢}}$$

عند ما يكون :

$ب = ٢ ، م = -٥$ او $ب = -\frac{٢}{٣} ، م = -\frac{٣}{٤}$

١١] احسب القيمة العددية للكمية :

$$\left(\frac{س^{٢} + س ع}{س^{٤} + ع}\right) \left(\frac{س}{س - ع} - \frac{ع}{س + ع}\right)$$

عند ما يكون : ١ً) $س = -٩$ $ع = ١$

٢ً) $س = -١٥$ $ع = -١٢$

١٢] اوجد القيمة العددية للكسر :

$$\frac{س + \frac{٢ س}{س - ٣}}{س - \frac{٢ س}{س + ٣}}$$

عند ما يكون : $س = -\frac{٥}{٣}$

١٢] احسب القيمة العددية للكمية :

$$[(س + ١) ع - (س - ١)]^{٢} - [(ع + ١) س - (ع - ١)]^{٢}$$

عند ما يكون :

س = $\frac{٣}{٢}$ ، ع = $\frac{٢}{٣}$ ؛ س = − ١ ، ع = + ١

١٤] احسب القيمة العددية للكمية :

$-(٢ب^{٢})^{٤}+(-٢ب^{٤})^{٢}-(-٣ب^{٦})^{٢}-(-٥ب^{٤})^{٢}$

اذا علم ان : ب = ٢

١٥] احسب الكميات الآتية فيما اذا فرضنا ان :

$\sqrt{٢}$ = ١,٤٤١ ، $\sqrt{٣}$ = ١,٧٣٢ ، $\sqrt{٥}$ = ٢,٢٣٦ ،

$\sqrt{٦}$ = ٢,٤٤٦

١٦] س = $\frac{١٠-\sqrt{٢}}{٥+\sqrt{٢}}$

١٧] ع = $\frac{٢٥-٨\sqrt{٣}}{١٥-٢\sqrt{٣}}$

١٨] ف = $\frac{١٥-\sqrt{٦}}{٧-٢\sqrt{٣}}$

١٩] ص = $\frac{(٣-\sqrt{٥})(٤+\sqrt{٥})(٧-\sqrt{٥})}{١٤-٤\sqrt{٥}}$

٢٠] هل العددان : $\sqrt{١٠-٥\sqrt{٥}}$ ، $٣-\sqrt{٥}$ متساويان ؟

٢١] اعد نفس السؤال للعددين :

$\sqrt{٤٢+١٠\sqrt{١٧}}$ ، $٥+\sqrt{١٧}$

٢٢] اذا فرض ان : $ب^{٢}-ح$ مربع كامل ، اختصر :

$$\frac{\sqrt{ب+\sqrt{ح}}}{ب-\sqrt{ح}}$$

٢٣] احسب : $\sqrt{\frac{\sqrt{٥}+٣}{\sqrt{٥}-٣}} + \sqrt{\frac{\sqrt{٥}-٣}{\sqrt{٥}+٣}}$

٢٤] احسب : $\sqrt{\frac{\sqrt{٦}+٢}{\sqrt{٦}-٢}} + \sqrt{\frac{\sqrt{٦}-٢}{\sqrt{٦}+٢}}$

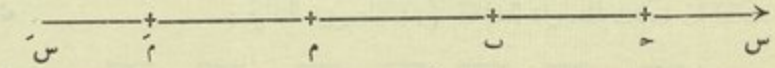
البحث الثاني

تطبيقات الاعداد الجبرية

الفصل الأول

تعيين نقطة على محور

٧٥ — تمهيد : لتكن النقطة ب الواقعة على المحور س َ س (شكل ١٢)



(شكل ١٢)

ففاصلتها بالنسبة الى المبدأ م الواقع على هذا المحور، هو العدد الحسابي الذي يقيس الطول م ب والمسبوق باشارة + اذا كانت ب على يمين م ، او باشارة — اذا كانت ب على يسار م .

تعريف : فاصلة النقطة ب بالنسبة للمبدأ م هو العدد الجبري الذي يقيس القيمة الجبرية للشعاع $\overleftarrow{م ب}$ (بند ١٦) . فلو فرضنا ان العدد الجبري د هو فاصلة النقطة ب يكون : $د = \overline{م ب}$.

٧٦ — حساب طول شعاع بدلالة فاصلة مبدئه ومنتهاه :

ليكن الشعاع $\overleftarrow{ب ح}$ المحمول على المحور س َ س ولنفرض ان فاصلة مبدئه $\overline{م ب} = ب َ$ وفاصلة منتهاه $\overline{م ح} = ح َ$ فلحساب طول الشعاع $\overline{ب ح}$ بدلالة ب َ ، ح َ نقول :

الحل : لنتصور متحركاً يسير على المحور س َ س (شكل ١٢) ويقوم من نقطة م فيرسم اولاً الشعاع م ب ثم الشعاع ب ح فتكون فاصلة هذا المتحرك مساوية لمجموع الشعاعين $\overline{م ب}$ ، $\overline{ب ح}$ من جهة ومساوية الى الشعاع $\overline{م ح}$ من جهة ثانية .

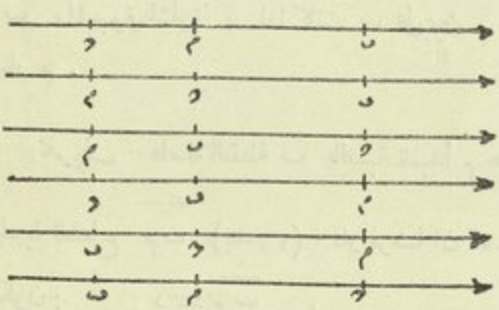
اذن : $\overline{م ب} + \overline{ب ح} = \overline{م ح}$ لان كلا من الجانبين يمثل بعد المتحرك عن م وهذه العلاقة صحيحة مهما كان الوضع النسبي للنقط الثلاث م ، ب ، ح فاذا بدلنا $\overline{م ب}$ ، $\overline{م ح}$ بقيمتيهما نجد : $\overline{ب َ} + \overline{ب ح} = \overline{ح َ}$.

فبما ان $\overline{ح َ}$ يساوي لمجموع $\overline{ب َ}$ مع $\overline{ب ح}$ نستنتج ان :

$$\overline{ب ح} = \overline{ح َ} - \overline{ب َ}$$ اي :

نظرية : القيمة الجبرية لشعاع محمول على محور تساوي فاصلة منتهاه ناقص فاصلة مبدئه .

٧٧ — ملاحظة: يمكن ان نتحقق من صحة ما ذكرناه سابقاً بالاشكال الستة الآتية ، التي تجمع جميع الاحوال الممكنة (شكل ١٣) .



(شكل ١٣)

فاما ان يكون $\overline{م ب}$ موجباً وتكون ح في هذه الحالة على يسار م او بين م ، ب او على يمين ب .

واما ان يكون $\overline{م ب}$ سالباً فيحدث لدينا ثلاث حالات جديدة بالنسبة لموقع ح . في جميع هذه الاحوال الستة نرى دائماً بكل سهولة ان :

$$\overline{م ب} + \overline{ب ح} = \overline{م ح}$$

٧٨ — علاقة شال Ghasles : لنضع على محور ما وكيفما اتفق الامر ،

النقط : ب ، حـ ، د ، هـ ، ل ، ف ، ق ولنتصور متحركاً يتحرك من نقطة ب ويرسم الشعاع ب حـ ثم يرسم الشعاع حـ د ثم الشعاع د هـ ثم الشعاع هـ ل ثم الشعاع ل ف واخيراً الشعاع ف ق فتكون فاصلة هذا المتحرك بالنسبة الى المبدأ ب هي :

$$\overline{ب حـ} + \overline{حـ د} + \overline{د هـ} + \overline{هـ ل} + \overline{ل ف} + \overline{ف ق}$$

من جهة . ومن جهة ثانية هذه الفاصلة تساوي $\overline{ب ق}$ ايضاً ، اذن يمكننا ان نكتب :

$$\overline{ب حـ} + \overline{حـ د} + \overline{د هـ} + \overline{هـ ل} + \overline{ل ف} + \overline{ف ق} = \overline{ب ق} \quad (١)$$

وهذه العلاقة صحيحة مهما كانت اوضاع النقط المأخوذة على المحور ، (ويمكننا ان نتحقق من صحتها بتبديل كل شعاع بفاصلة منتهاه ناقص فاصلة مبدئه) .

واذا لاحظنا الآن ان :

$$\overline{ب ق} = - \overline{ق ب}$$

يمكننا ان نكتب المساواة السابقة (١) بالصورة التالية :

$$\overline{ب حـ} + \overline{حـ د} + \overline{د هـ} + \overline{هـ ل} + \overline{ل ف} + \overline{ف ق} + \overline{ق ب} = ٠$$

فهذه العلاقة الصحيحة مهما كانت اوضاع النقط المأخوذة على المحور ، تسمى **بالعلاقة الشاملة** .

٧٩ — ملاحظة : اذا فرضنا ان النقط : ب ، حـ ، د ، هـ ، .... معينة على المحور بفواصلها بَ ، حَ ، دَ ، هَ ، .... بالنسبة لمبدأ ما منتخب على هذا المحور . فان العلاقة المذكورة تكتب :

$$(حَ - بَ) + (دَ - حَ) + (هَ - دَ) + (لَ - هَ) + (فَ - لَ) + (قَ - فَ) + (بَ - قَ) = ٠$$

ونرى هنا حقيقة ان الجانب الاول يساوي الصفر .

٨٠ — تغيير المبدأ على المحور : ليكن المحور سَ س (شكل ١٢) ولتكن ب نقطة واقعة عليه فاصلتها بَ ، ثم لنأخذ على هذا المحور النقطة مَ التي

فاصلتها د ، ولنتحر الان فاصلة النقطة ب بالنسبة الى المبدأ الجديد مَ . فيجب ان نجد اذن طول الشعاع مَ ب ، فبحسب النظرية (٧٦) نرى ان :

$$\overline{\text{مَ ب}} = \overline{\text{م ب}} - \overline{\text{م مَ}}$$

فاذا سمينا بً فاصلة النقطة ب بالنسبة الى المبدأ الجديد مَ يكون :

$$\text{بً} = \text{بَ} - \text{د}$$

اذن فاصلة نقطة ما بالنسبة الى مبدأ جديد تساوي الفرق بين فاصلتها القديمة وفاصلة المبدأ الجديد بالنسبة للمبدأ القديم . اي :

$$\text{سً} = \text{سَ} - \text{د}$$

٨١ — ملاحظة : لتكن بَ ، حَ فاصلتي النقطتين ب ، ح بالنسبة الى المبدأ م ، وليكن مَ مبدأ جديداً فاصلته د ، فالفاصلتان بً ، حً بالنسبة الى المبدأ الجديد هما :

$$\text{بً} = \text{بَ} - \text{د}$$

$$\text{حً} = \text{حَ} - \text{د}$$

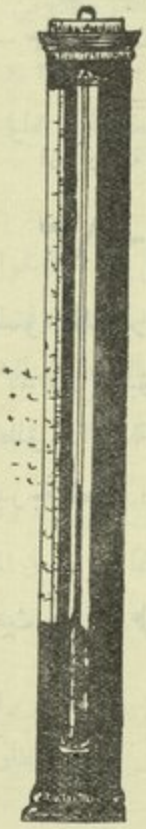
ومنها : $\text{حً} - \text{بً} = (\text{حَ} - \text{د}) - (\text{بَ} - \text{د}) = \text{حَ} - \text{بَ}$

اي ان طول الشعاع ب ح مستقل عن المبدأ م لا يتغير فهو يساوي حَ — بَ او حً — بً اي ان : $\overline{\text{ب ح}} = \text{حَ} - \text{بَ} = \text{حً} - \text{بً}$

الفصل الثاني

الحرارة

٨٢ — يرينا (الشكل ١٤) ميزان الحرارة الزئبقي المقسم الى درجات السانتيغراد . وكما نعلم ، ان الاعداد السالبة تدلنا على درجات الحرارة التي هي اقل من درجة ذوبان الثلج ، واما الاعداد الموجبة فتدلنا على درجات الحرارة التي هي اعظم من درجة ذوبان الثلج ، تلك الدرجة التي نعتبرها صفراً .



(شكل ١٤)

فعمود الميزان هذا يشابه تماماً المحور الموجه الى الاعلى ، المبدأ فيه نقطة الصفر التي يذوب فيها الثلج . والعدد الذي يدل على درجة الحرارة هو فاصلة ارتفاع الزئبق الموجود داخل الميزان ، ووحدة الطول هي الوحدة التي تفصل ما بين فاصلتين متواليتين مرسومتين على هذا العمود .

إن تحول الحرارة يعين بواسطة الفرق ما بين درجة الحرارة الابتدائية ودرجة الحرارة النهائية ، كالشعاع الذي يعين بواسطة فاصلة مبدئه وفاصلة منتهاه ، فالقياس الجبري لتحول الحرارة هو الفرق بين درجة الحرارة النهائية ودرجة الحرارة الابتدائية ، واشارة هذا الفرق تدل على جهة التحول تزايداً او تناقصاً .

مثال : ١) في ١ كانون الثاني عند شروق الشمس كانت درجة الحرارة — ٥° وعند الظهر اصبحت + ٢° ، فما هو تحول درجة الحرارة ما بين الصبح والظهر من ذلك اليوم ؟

الحل : بما ان درجة الحرارة الابتدائية — ٥° ودرجة الحرارة النهائية + ٢°
فيكون التحول هو [فاصلة النهاية — فاصلة المبدأ]. اي :

$$ح = ٢ - (-٥) = ٢ + ٥ = ٧$$

اذن ارتفعت درجة الحرارة ٧° ما بين صبح وظهر ذلك اليوم .

مثال : ٢) ارتفع طيار عن سطح الارض عند ما كانت الحرارة + ٢٥°، ولما ارتفع ٦٠٠٠ متر وجد ان الحرارة اصبحت — ٣ فما هو تحول درجة الحرارة بين سطح الارض والارتفاع المذكور ؟

الحل : بما ان درجة الحرارة الابتدائية هي + ٢٥° ودرجة الحرارة النهائية هي — ٣° فيكون التحول هو :

$$ح = (-٣°) - (+٢٥°) = -٣ - ٢٥ = -٢٨$$

اذن درجة الحرارة هبطت ٢٨° .

٨٣ — تغيير المبدأ: يستعمل علماء الطبيعة مبدأ للحرارة غير مبدأ ذوبان الثلج يسمونه **بالصفر المطلق** وهو يقابل — ٢٧٣ سانتيغراداً . فالنتائج المذكورة في (بند ٨٠) تطبق بسهولة على الانتقال من صفر ذوبان الثلج الى المبدأ الجديد وهو الصفر المطلق اذ الفاصلة الاولى بَ تقابلها الدرجة العادية ب ، والفاصلة الجديدية بً تقابلها الدرجة المطلقة بَ ، والفاصلة د للمبدأ الجديد يقابلها العدد — ٢٧٣ فيكون :

$$بَ = ب - د = ب + (-٢٧٣)$$

حيث بَ تدل على الحرارة المطلقة ، وحيث ب تدل على السانتيغراد .

الفصل الثالث

قياس الزمن

٨٤ — وحدة الزمن : وحدة الزمن هي الثانية من اليوم الشمسي الوسطي ، وقد اعتبر ان ٦٠ ثانية تساوي دقيقة ، وان ٦٠ دقيقة تساوي ساعة ، وان ٢٤ ساعة تساوي يوماً شمسياً وسطياً . واليوم الشمسي يربو على الوقت اللازم للارض حتى تدور حول نفسها دورة تامة بمقدار ٣ دقائق و ٥٦ ثانية تقريباً ، وان ٣٦٥ يوماً تكون سنة عادية . واما السنة الكبيسة فهي ٣٦٦ يوماً ، ولا نستخدمها في عملياتنا ، ولكننا نفرض دائماً ان السنة تساوي ٣٦٥ يوماً .

٨٥ — مبدأ الزمن : لقد اعتدنا ان نعتبر منتصف ليل كل يوم مبدأ لحوادث ذلك اليوم . فاذا قلنا ان الساعة الان ١٤ نفهم من ذلك انه مضى ١٤ ساعة على الوقت الذي كان منتصف الليل . واما الاوقات التي قبل منتصف الليل فيدل عليها بالاعداد السالبة اذا نسبت الى اليوم الجديد .

مثال : الساعة ٢٢ من البارحة تعادل الساعة — ٢ من اليوم ، وفاصلة الزمن تعين بواسطة المبدأ والمنتهى ، وقياس هذه الفاصلة هو دائماً الفرق بين المنتهي والمبدأ .

٨٦ — مثال : تحرك قطار من حلب في الساعة ١٨ من يوم ٢ حزيران ووصل الى دمشق في ٣ حزيران عند الساعة ٧ . اوجد الزمن اللازم للقطار حتى يقطع هذه المسافة ؟

لنأخذ مبدأ الزمن منتصف الليل الواقع ما بين ٢ حزيران و ٣ حزيران فتكون ساعة الوصول هي الساعة ٧ ولكن ساعة المبدأ هي — ٦ حيث انه مر على منتصف ليل

٢ حزيران ١٨ ساعة ولم يبق الى منتصف ليلة ٣ حزيران سوى ٦ ساعات . اذن مدة السفر هي :

$$٧ - (-٦) = ٧ + ٦ = ١٣ \text{ ساعة}$$

ملاحظة : قلنا ان اليوم ٢٤ ساعة . الا انه لا يزال قسم من الناس يقسم اليوم الى قسمين كل منها ١٢ ساعة ، فيقولون الساعة الثالثة بعد الظهر عوضاً عن ان يقولوا الخامسة عشرة ، وهكذا . كما انه كثيراً ما نأخذ في بعض المسائل الساعة ١٢ مبدأ للزمن للسهولة .

٨٧— مبدأ التاريخ : ان مبدأ التاريخ عند الامة الاسلامية هو مبدأ سنة هجرة سيدنا الرسول محمد عليه الصلاة والسلام من مكة المكرمة الى المدينة المنورة ، فالسنة التي حصلت فيها الهجرة هي السنة الاولى من التاريخ الاسلامي . وقد مضى على هذه الهجرة ١٣٥٦ سنة قمرية كل سنة منها تعادل ٣٥٥ يوماً تقريباً .

واما مبدأ التاريخ عند الامم المسيحية فهو ميلاد سيدنا عيسى عليه الصلاة والسلام وقد مضى على هذا الميلاد ١٩٣٧ سنة كل سنة منها تعادل ٣٦٥ يوماً تقريباً (انظر تاريخ طبع هذا الكتاب) .

الفصل الرابع

الحركة المستقيمة المنتظمة

٨٨— تعريف : تكون حركة النقطة على المحور حركة منتظمة فيما اذا كانت النقطة تتحرك دوماً باتجاه واحد و كانت المسافات التي تقطعها متناسبة مع الزمن .

اي اذا كان المتحرك يقطع اشعة متساوية في ازمنة متساوية .

٨٩— السرعة : السرعة في الحركة المستقيمة المنتظمة هي القيمة الجبرية للمسافة

التي يقطعها المتحرك في وحدة الزمن . والقيمة الجبرية للسرعة تدل على اتجاه الحركة ، فاذا كانت موجبة نفهم ان المتحرك يتحرك بالاتجاه الموجب ، واما اذا كانت سالبة نفهم ان المتحرك يتحرك بالاتجاه السالب على المحور .

وبالعكس تكون السرعة موجبة او سالبة حسبما يتحرك المتحرك بالاتجاه الموجب او السالب على المحور .

٩٠ — وحدة الزمن : في مبحث الحركات ، نعتبر وحدة الزمن الثانية ووحدة الطول المتر ، فتكون القيمة المطلقة للسرعة هي عدد الامتار المقطوعة في الثانية الواحدة .

واحياناً نأخذ في الحركات البطيئة الثانية والسانتيمتر وحدة للزمن والطول .

واحياناً نأخذ الدقيقة او الثانية مع الكيلومتر في الحركات السريعة ، فسرعة انتشار النور مثلا ٣٠٠٠٠٠ كيلومتر في الثانية .

نفهم مما تقدم ان للسرعة معنيين :

١ً) معناها الحسابي الذي يدل على سرعة الحركة ، اي على مقدار الامتار المقطوعة في الثانية مثلاً .

٢ً) معناها الجبري الذي يدل بصورة مختصرة على سرعة الحركة واتجاهها .

فعند ما نقول متحرك سرعته — ٣ كيلومتر في الساعة ، نفهم ان هذا المتحرك يسير بالاتجاه السالب ويقطع في الساعة الواحدة ٣ كيلومترات .

٩١ — مسألة : متحرك يتحرك على محور بحركة سرعتها د وقد كان في نقطة المبدأ م عند ما كان الزمن صفراً . والمطلوب معرفة فاصلة هذا المتحرك في الزمن ن ؟

الحل : لنلاحظ انه لو قيل لنا ان السرعة هي د متراً في الثانية ، نفهم ان ن تدل على عدد من الثواني ، والزمن ن يمكن ان يكون موجباً او سالباً حسبما يكون تفتيشنا على فاصلة المتحرك وهي س قبل او بعد مروره من المبدأ م ، اذن تحوي المسألة على قسمين :

الاول : ايجاد طول الشعاع الذي يقطعه المتحرك .

الثاني : التفتيش عن اتجاه هذا الشعاع .

او بصورة ثانية ، التفتيش عن طول الشعاع ثم عن اشارته .

لنفرض ان القيمة المطلقة للسرعة هي دَ ، وان القيمة المطلقة للزمن هي ن فالمسافة التي يقطعها المتحرك في المدة نَ هي دَ نَ [لان دَ هي المسافة التي يقطعها المتحرك في وحدة الزمن] .

ولو فرضنا ان المتحرك يصل الى النقطة ب في الزمن نَ يكون :

$$\overline{م\,ب} = د_{\circ} \cdot ن_{\circ}$$

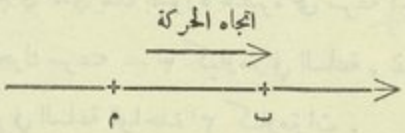
واما : $\overline{م\,ب} = د \cdot ن$

اي ان القيمة المطلقة للمسافة تساوي القيمة المطلقة للجداء [د ٠ ن] .

ولنتحر الآن هل المقداران $\overline{م\,ب}$ ، [د ٠ ن] متساويان بالاشارة ، لذلك نميز حالتين (انظر بند ٢٢) .

١ً) السرعة موجبة : اي ان الحركة تجري بالاتجاه الموجب للمحور .

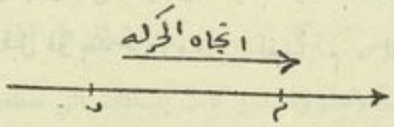
فاذا كانت ن موجبة يكون لدينا (الشكل ١٥) لان العددين د ، ن موجبان ويكون حقيقة : $\overline{م\,ب} = د \cdot ن$



(شكل ١٥)

اي ان هذين المقدارين متساويان بالقيمة الجبرية .

ولكن اذا كانت ن سالبة يكون لدينا (الشكل ١٦) ويكون م ب سالباً ايضاً ، ومنها : $\overline{م\,ب} = د \cdot ن$ ايضاً .

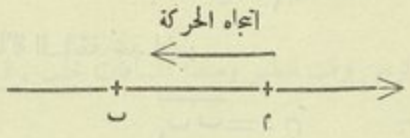


(شكل ١٦)

٢ً) السرعة د سالبة : اذن الحركة تجري بالاتجاه السالب على المحور ، فان كانت

ن موجبة يكون م ب سالباً (شكل ١٧) ويكون جانبا المساواة :

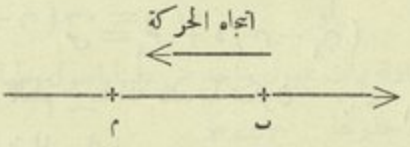
$\overline{م ب} = د \cdot ن^{2}$ سالبين لان د سالبة .



(شكل ١٧)

واما اذا كانت ن سالبة يكون $\overline{م ب}$ موجباً وكذلك د . $ن^{2}$ (شكل ١٨)

اذن في جميع الاحوال يكون $\overline{م ب} = د \cdot ن^{2}$.



(شكل ١٨)

اي في مبدأ الزمن اذا كان المتحرك في م مبدأ المسافة ، فان القيمة الجبرية للمسافة م ب تساوي القيمة الجبرية للسرعة في القيمة الجبرية للزمن ، فهذا القانون هو الذي يمكننا من حل هذه المسألة .

٩٢ — القانون العام للحركة المنتظمة : لاختصار العمليات ، فرضنا فيما سبق ان المتحرك كان في م ، في مبدأ الزمن . ولنأخذ الآن الحالة العامة .

مسألة : متحرك يتحرك على محور بحركة منتظمة سرعتها د ، وفي الوقت $ن_{1}$ كان هذا المتحرك في النقطة $ب_{1}$ التي فاصلتها $س_{1}$. والمطلوب معرفة فاصلة هذا المتحرك ب ولتكن س عند ما يكون الوقت ن .

الحل : لنرجع هذه المسألة الى السابقة وذلك بتغيير المبدأ ، فاذا اعتبرنا النقطة $ب_{1}$ مبدأ جديداً للمسافة يكون :

$$\overline{ب_{1} ب} = \overline{م ب} - \overline{م ب_{1}} = س - س_{1}$$

وكذلك اذا اعتبرنا الزمن ن١ مبدأ جديداً للزمن يكون الزمن الفاصل ما بين قيام المتحرك من المبدأ الجديد ووصوله الى ب هو :

$$ن' = ن - ن_١$$

اذن بمقتضى المسألة السابقة نجد ان :

$$\overline{ب_١ ب} = د ن'$$

فاذا استعضنا عن $\overline{ب_١ ب}$ ، ن' بما يساويها يكون :

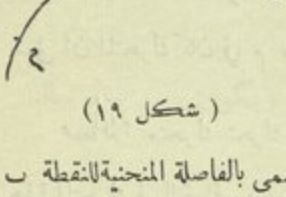
$$س - س_١ = د (ن - ن_١)$$

ومن ذلك نستنتج القانون العام للحركة المستقيمة المنتظمة وهو :

$$س = س_١ + د (ن - ن_١)$$

فهذا القانون العام يرينا انه عندما تكون $ن = ن_١$ فان س تصبح مساوية $س_١$ اي يكون المتحرك في $ب_١$.

٩٣ — الحركة المنحنية المنتظمة : في جميع ما تقدم فرضنا ان الحركة تجري على مستقيم موجه ، الا ان جميع النتائج السابقة تطبق بدون تغيير عندما تكون الحركة منحنية ، اي تجري على محرك منحنٍ (شكل ١٩) أخذ عليه اتجاه ومبدأ مثل م لقياس الاقواس .



(شكل ١٩)

فنعين النقطة ب التي تتحرك على هذا المنحني بطول القوس م ب مسبوقاً باشارة + او باشارة — حسبما تكون الحركة من م الى ب بالاتجاه الموجب المعين على هذا المنحني او بالعكس . وهذا العدد يسمى بالفاصلة المنحنية للنقطة ب وعوضاً عن الشعاع ب حـ يؤخذ القوس الموجه $\overset{\frown}{ب حـ}$ ويكون قياسه موجباً او سالباً حسبما تكون الحركة من ب الى حـ بالاتجاه الموجب المعين على المنحني او بالاتجاه المخالف له ، وبما ان الاعتبارات واحدة لجميع النتائج المستخرجة سابقاً تطبق على الحركة المنحنية كحركة القطار على الخط الحديدي .

٩٤ — تطبيقات — مسألة : خرج راكب دراجة من بلدة حلب وقت الظهر

متجهاً نحو بلدة دمشق بحركة منتظمة سرعتها ١٠ كيلومتر في الساعة ، وفي الساعة ١٤ خرج راكب سيارة يلحق بالدراجة بحركة منتظمة سرعتها ٣٠ كيلومتراً في الساعة . فبأي زمن وعلى اي مسافة تلحق السيارة بالدراجة ؟

الحل : لنعتبر مبدأ الزمن وقت الظهر ومبدأ المسافات حلب ، فيكون قانون حركة الدراجة $س = ١٠ ن$

وقانون حركة السيارة $س' = ٣٠ (ن - ٢)$

باعتبار $س$ ، $س'$ فاصلتي الدراجة والسيارة بالترتيب .

اذن السيارة تلحق بالدراجة عند ما يكون :

$$س = س' \quad \text{او :} \quad ١٠ ن = ٣٠ (ن - ٢)$$

وهكذا نصل الى معادلة ذات مجهول واحد مر علينا اصول حلها في السنين السابقة ، فبحل هذه المعادلة نجد ان جذرها $ن = ٣$

اذن يتلاقى المتحركان في الساعة $١٢ + ٣ = ١٥$ اي بعد مضي ساعة على حركة السيارة . ويكون عندئذ $س = س' = ٣٠$ ان تحصل الملاقاة على بعد ٣٠ كيلومتراً من حلب .

ملاحظة : لا ينكر ان هنالك طرقاً اسهل لحل المسألة السابقة ، الا انه عندما تكون المسألة حرفية (كما سنرى) لا بد لنا من الطريقة السابقة التي تجمع جميع الحالات الممكنة .

تمارين

١] الشعاع $\overleftarrow{ب\,حـ}$ معين بواسطة العددين $ب'$ ، $حـ'$ فاصلتي مبدئه ومنتهاه اوجد فاصلة نقطة منتصفة هـ .

٢] الشعاع $\overleftarrow{ب\,حـ}$ معين بواسطة العددين $ب'$ ، $حـ'$ فاصلتي مبدئه ومنتهاه نقسم هذا الشعاع الى ثلاثة اقسام متساوية بالنقطتين د ، ق اوجد فاصلتي هاتين النقطتين .

٣] على محور ما يؤخذ نقطتان فاصلتاهما ب ، حـ ويؤخذ نقطة هـ فاصلتها س بحيث يكون : $(ل + ن)\,س = ل \cdot ب + ن \cdot حـ$

[ل ، ن عددان جبريان مفروضان غير متناظرين .] برهن على ان :

$$ل \cdot \overline{هـ\,ب} + ن \cdot \overline{هـ\,حـ} = ٠$$

٤] يؤخذ على محور ثلاث نقاط ، مثل : ب ، حـ ، د برهن على انه اذا كانت م نقطة على هذا المحور يكون :

$$\overline{م\,ب} \cdot \overline{حـ\,د} + \overline{م\,حـ} \cdot \overline{د\,ب} + \overline{م\,د} \cdot \overline{ب\,حـ} = ٠$$

٥] لتكن ب ، حـ ، د ثلاث نقاط على محور ، و م نقطة واقعة عليه . برهن على صحة العلاقة الآتية :

$$\overline{م\,ب} \cdot \overline{حـ\,د} + \overline{م\,حـ} \cdot \overline{د\,ب} + \overline{م\,د} \cdot \overline{ب\,حـ} + \overline{ب\,حـ} \cdot \overline{حـ\,د} \cdot \overline{د\,ب} = ٠$$

٦] يؤخذ على محور اربع نقط مثل : ب ، حـ ، د ، هـ فواصلها $ب'$ ، $ب$ ، $حـ'$ ، $د'$ برهن على صحة العلاقة :

$$\overline{ب\,د} \cdot \overline{حـ\,هـ} + \overline{ب\,هـ} \cdot \overline{حـ\,د} = ٠$$

بفرض ان : $ب' = حـ' \cdot د'$

٧] يؤخذ على محور اربع نقاط مثل : ب ، حـ ، د ، هـ فواصلها

ب' ، حـ' ، د' ، هـ' والاعداد : ب' ، حـ' ، د' ، هـ' تحقق العلاقة

$$(ب' + حـ')(د' + هـ') = ٢(ب' حـ' + د' هـ')$$

برهن على صحة العلاقة :

$$\overline{ب د} \cdot \overline{حـ هـ} + \overline{ب هـ} \cdot \overline{حـ د} = ٠$$

٨] لتكن ب ، حـ ، د ، هـ اربع نقط معينة على محور ومحققة للعلاقة :

$$\overline{ب حـ} \cdot \overline{د هـ} = ٢ \overline{حـ د} \cdot \overline{هـ د}$$

برهن على ان :

$$\frac{٢}{\overline{ب حـ}} = \frac{١}{\overline{ب هـ}} + \frac{١}{\overline{ب د}}$$

واذا فرض ان نقطة م هي منتصف $\overline{ب حـ}$ برهن على ان :

$$\overline{هـ م} \cdot \overline{م د} = \overline{هـ ب} \cdot \overline{هـ حـ}$$

٩] لتكن ب ، حـ ، د ، هـ اربع نقط واقعة على محور بشرط ان تكون العلاقة بين القطع المستقيمة $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{ب د}$ ، $\overline{ب هـ}$ هي :

$$\frac{١}{\overline{ب حـ}} = \frac{١}{\overline{ب هـ}} + \frac{١}{\overline{ب د}}$$

برهن على ان : $\overline{حـ هـ} \cdot \overline{حـ د} = \overline{حـ ب}^{٢}$

١٠] لتكن النقط الثلاث م ، ب ، حـ واقعة على مستقيم ، ولتكن م منتصف $\overline{ب حـ}$ برهن على صحة العلاقتين :

$$\overline{م ب} + \overline{م حـ} = ٢ \overline{م د}$$

$$\overline{م ب} \cdot \overline{م حـ} = \overline{م د}^{٢} - \overline{ب د}^{٢}$$

١١] لتكن النقط الاربع ب ، حـ ، د ، هـ واقعة على مستقيم بحيث يكون :

$$\frac{\overline{د ب}}{\overline{د حـ}} = -\frac{\overline{هـ ب}}{\overline{هـ حـ}}$$

وبفرض ان نقطة م واقعة على هذا المستقيم ، برهن على صحة العلاقة :

$$٢\,(\overline{م ب}\cdot\overline{م ح}+\overline{م د}\cdot\overline{م هـ})=(\overline{م ب}+\overline{م ح})(\overline{م د}+\overline{م هـ})$$

ماذا يصبح هذا الدستور اذا كانت نقطة م منتصف $\overline{ب ح}$ ؟

١٢] في ميزان الحرارة لفهر نهايت درجة ذوبان الجليد هي (٣٢°) ودرجة غليان الماء هي (٢١٢°) ، ويقابل هاتين الدرجتين في ميزان السانتيغراد درجة الصفر و (١٠٠°) . والمطلوب :

١ً) اوجد العلاقة التي تربط درجة حرارة السانتيغراد د مع درجة حرارة فهر نهايت ف لجسم ما .

٢ً) استعمل هذه العلاقة لحساب د عندما تكون ف = ٠ وعند ما تكون ف = ١٠٠

٣ً) احسب ف عندما يكون د = ٧٨ وعندما يكون د = — ٤

١٢] خرج قطاران من حلب يقصدان دمشق ، فخرج الاول في الساعة ١٤ ويقطع ١٥ متراً في الثانية ، وخرج الثاني في الساعة ١٦ ويقطع ٣٠ ك م في الساعة . ففي اي ساعة تكون المسافة بين القطارين ١١٦ ك م ، وماذا يصبح بعد هذين القطارين عن حلب ؟

١٤] المسافة بين بلدين ١١٩ ك م ، خرج ماشٍ وراكب دراجة من هاتين البلدتين ليتلاقيا ، وكان تلاقيهما بعد سبع ساعات .

ولكن اذا كانت حركتهما باتجاه واحد ، فراكب الدراجة يلاقي الماشي بعد ١٧ ساعة . اوجد سرعة كل منهما .

١٠] خرجت من نقطة واحدة سيارتان سرعتهما ٣٠ ، ٤٠ ك م في الساعة في واقت واحد وباتجاه واحد على طريق دائري محيطه ٦ ك م . عين النقطة التي تتلاقى فيها السيارتان والوقت الذي فيه تتلاقيان .

***

البحث الثالث

العمليات الجبرية

الفصل الأول

الحدود المتشابهة

٩٥- القيمة العددية لحد ما: ليكن الحد ح = ٣ ب حـ فاذا اعطينا ب القيمة العددية ١ ، حـ القيمة العددية ٤ نجد ان :

ح = ٣ × ١ × ٤ = ١٢

وعند ما تكون ب = ٢ ، حـ = ٤ تكون ح = ٢٤ وهكذا من اجل كل قيمة مخصوصة نعطيها الى ب ، حـ نجد للحد ح قيمة خاصة تسمى **بالقيمة العددية** لهذا الحد .

مثال آخر : القيمة العددية للحد $\frac{٥}{٣}$ ب^{٢} حـ^{٢} د عند ما تكون :

ب = ٢ ، حـ = -٣ ، د = ٥ هي :

$$\frac{٥}{٣} ب^{٢} حـ^{٢} د = \frac{٥}{٣} (٢)^{٢} (-٣)^{٢} (٥) = \frac{٥}{٣} \times ٨ \times ٩ \times ٥ = ٦٠٠$$

٩٦- القيمة العددية لكثيرة الحدود: القيمة العددية لكثيرة الحدود من اجل قيم خاصة لحروفها هي العدد الناتج من ابدال الحروف بقيمها الخاصة واجراء العمليات الموجودة في كثيرة الحدود المذكورة .

مثال : لتكن ذات الحدود الكثيرة :

$$ك = ٥ ب^{٢} حـ - ٢ ب حـ + ٧ ب^{٢} حـ^{٢} + ب^{٢} حـ^{٣}$$

فلايجاد قيمتها العددية عند ما $ب = -٣$ ، $حـ = ٢$ مثلاً ، نجد ان :

$$ك = ٥ (-٣) \times ٢ - ٢ (-٣) \times ٢ + ٧ (-٣)^{٢} \times ٢^{٢} + (-٣)^{٢} \times ٢^{٣}$$

او :
$$ك = -٢٧٠ + ١٢ + ٥٠٤ - ٢١٦$$

او :
$$ك = ٥١٦ - ٤٨٦ = ٣٠$$

٩٧ — الحدود المتشابهة — تعريف : الحدود المتشابهة هي الحدود التي فيها قسم حرفي واحد .

مثال : الحدود :

$$ب^{٢} حـ د \quad ، \quad -٧ ب^{٢} حـ د \quad ، \quad \frac{٤}{٣} ب^{٢} حـ د \quad ، \quad \sqrt{٢} ب^{٢} حـ^{٢} د$$

هي حدود متشابهة قسمها الحرفي $ب^{٢} حـ د$ مما يدلنا على ان الحدود المتشابهة لا تختلف الا بالامثال .

٩٨ — جمع الحدود المتشابهة : من التعريف السابق نرى انه يمكننا دوماً ان نجمع الحدود المتشابهة ، وان نجعلها حداً واحداً . وعملنا هذا يسمى **تنويعاً** او **جمع الحدود المتشابهة** .

مثال : لتكن كثيرة الحدود :

$$٥ ب^{٢} + ٧ ب^{٢} حـ - ٨ ب حـ^{٢} + ٣ ب^{٢} + ٣ حـ^{٢} - ٣ ب حـ^{٢} - ٧ حـ^{٣} - ٤ ب^{٢} حـ$$

ولنوحد الحدود المتشابهة بتقريبها من بعضها فنجد ان كثيرة الحدود المفروضة هي :

$$٥ ب^{٢} + ٣ ب^{٢}$$

مع $٧ ب^{٢} حـ - ٤ ب^{٢} حـ$

مع $-٨ ب حـ^{٢} - ٣ ب حـ^{٢}$

مع $٣ حـ^{٢} - ٧ حـ^{٣}$

فالسطر الاول يعطينا $٨ ب^{٢}$

وفي السطر الثاني يجب ان نطرح ٤ مرات $ب^{٢} حـ$ من ٧ مرات $ب^{٢} حـ$ فيبقى معنا $+ ٣ ب^{٢} حـ$

وكذلك السطر الثالث يعطينا $- ١١ ب حـ^{٢}$

واما في السطر الرابع فيجب ان نطرح ٧ مرات $حـ^{٢}$ من $٣ حـ^{٢}$ فيبقى معنا $- ٤ حـ^{٢}$

اذن تصبح كثيرة الحدود المختصرة :

$$٨ ب^{٢} + ٣ ب^{٢} حـ - ١١ ب حـ^{٢} - ٤ حـ^{٢}$$

ومما ذكرناه آنفاً نستنتج :

قاعدة : لجمع عدة حدود متشابهة يكفي ان نوحد المجموع الجبري لامثال هذه الحدود وان نضرب حاصل الجمع في القسم الحرفي المشترك لهذه الحدود المتشابهة .

٩٩ — التراكيب الجبرية المتكافئة : يكون التركيب الجبري ك متكافئاً مع التركيب الجبري كَ فيما اذا كانت القيمة العددية للأول تساوي القيمة العددية للثاني من اجل جميع القيم المخصوصة التي نعطيها بآن واحد للحروف الموجودة في هذين التركيبين.

مثال : التركيبان : $ك = ٥ س \times ٣ س^{٢}$ ، $كَ = ١٥ س^{٣}$ متكافئان.

١٠٠ — كثيرات الحدود المتطابقة : تكون كثيرة الحدود ح متطابقة مع كثيرة الحدود حَ اذا كانتا من درجة واحدة ومكونتين من حدود واحدة . فاذا اردنا ان نطابق كثيرة حدود مع ثانية نكتب انهما من درجة واحدة ، وان الامثال في الحدود المتشابهة متساوية ، وندل على التطابق باشارة $\equiv$ التي تقرؤها ، يطابق .

مثال : اذا كانت كثيرة الحدود $ب س^{٢} + حـ س^{٢} + د س + هـ$ متطابقة مع كثيرة الحدود $٣ س^{٢} - ٥ س + ٧$ نكتب :

$$ب س^{٢} + حـ س^{٢} + د س + هـ \equiv ٣ س^{٢} - ٥ س + ٧$$

ونلاحظ انه يجب ان تكون امثال الحدود المتشابهة متساوية ، اي يجب ان يكون :

$$ب = ٣ \quad ، \quad حـ = ٠ \quad ، \quad د = - ٥ \quad ، \quad هـ = ٧$$

الفصل الثاني

الجمع الجبري

١٠١ — تعريف : الجمع الجبري عملية يراد بها ايجاد تركيب جبري قيمته العددية تساوي مجموع القيم العددية لعدة تراكيب جبرية مفروضة مهما كانت القيم المخصوصة المعطاة الى الحروف الموجودة في هذه التراكيب .

١٠٢ — جمع حدين : نعلم ان جمع ب و حـ يكتب ب + حـ اي لجمع حدين نكتبهما عقب بعضهما ونفرقهما باشارة + و كذلك لجمع الحدين ٥ ب٢ حـ ، ٤ ب حـ٢ نكتب :

$$٥ ب^{٢} حـ + ٤ ب حـ^{٢}$$

واما في جمع الحدين $-٣ ب^{٢}$ ، $-٥ ب حـ$ فنكتب :

$$-٣ ب^{٢} + (-٥ ب حـ) = -٣ ب^{٢} - ٥ ب حـ = -(٣ ب^{٢} + ٥ ب حـ)$$

١٠٣ — جمع كثيرات الحدود : ليكن المطلوب جمع كثيرة الحدود ك = ب + حـ — د مع كثيرة الحدود ك' = ل — ف + هـ فنكتب الجمع كما يلي :

$$ك + ك' = (ب + حـ - د) + (ل - ف + هـ) \qquad (١)$$

ويمكن ان نحذف الاقواس المسبوقة باشارة + كما في الحساب فنحصل على تركيبين متكافئين ، اي ان :

$$ك + ك' = ب + حـ - د + ل - ف + هـ \qquad (٢)$$

وفي الحقيقة فان التركيب (١) يدلنا على وجوب جمع القيمة العددية لكثيرة الحدود الاولى ب + حـ — د مع القيمة العددية لكثيرة الحدود الثانية ل — ف + هـ ولكن اذا اردنا حساب القيمة العددية للكمية (٢) وتذكرنا انه في المجموع الجبري يمكننا

ان نبدل جملة اعداد بمجموعها نرى انه يمكننا في السطر (٢) ان نحسب القيمة العددية للحدود الثلاثة الاولى ب + حـ — د ثم القيمة العددية للحدود الثلاثة الثانية ل — ف + هـ وان نجمع العددين الناتجين .

ومعنى هذا ان العملية التي تحصل من السطر (٢) هي نفس العملية المذكورة في (١) ، اذن فالتركيبان (١) و (٢) متكافئان . وبنفس الطريقة نجمع ثلاث او اربع او خمس كثيرات حدود . ومنها نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة: لجمع جملة كثيرات حدود يكفي ان نكتبها تالو بعضها شريطة ان يحافظ كل حد على اشارته ، ثم نوحد الحدود المتشابهة ان كان هنالك حدود متشابهة ، ولتسهيل توحيد الحدود المتشابهة نكتبها تحت بعضها .

مثال : ليكن المطلوب جمع كثيرات الحدود :

$$ك_١ = ٥ب^٢ حـ^٢ - ٩ب^٢ حـ^٣ + ٧ب حـ^٤$$

$$ك_٢ = - ٤ب حـ^٤ + ٣ب^٢ حـ^٣$$

$$ك_٣ = - ٥ب حـ^٤ - ٤ب^٢ حـ^٣ + ٤ب^٣ حـ^٣$$

فلجمعها نكتبها كما يلي :

$$ك_١ = ٥ب^٢ حـ^٣ - ٩ب^٢ حـ^٣ + ٧ب حـ^٤$$

$$ك_٢ = ٣ب^٢ حـ^٣ + ٠ - ٤ب حـ^٤$$

$$ك_٣ = -٤ب^٢ حـ^٣ + ٤ب^٣ حـ^٣ - ٥ب حـ^٤$$

ويكون المجموع : $٤ب^٢ حـ^٣ - ٥ب^٣ حـ^٣ - ٢ب حـ^٤$

وذلك بان تكون الحدود المتشابهة تحت بعضها ، وان نضع + ٠ محل الحدود الناقصة . ولا نتبع هذه الطريقة الا عند ما تكون كثيرات الحدود المتشابهة عديدة ، او ذات مجهول واحد .

الفصل الثالث

طرح كثيرات الحدود

١٠٤ — تعريف: طرح كثيرات الحدود عملية يراد بها ايجاد تركيب جبري قيمته العددية تساوي الفرق بين القيمتين العدديتين لتركيبين آخرين مهما كانت القيم المخصوصة المعطاة بآن واحد للحروف الموجودة في هذه التراكيب .

١٠٥ — كيفية طرح حد من آخر: نعلم انه لطرح حـ من ب يكفي ان نضيف نظير حـ الى ب فيكون حاصل الطرح هو : ب — حـ

وكذلك لطرح الحد ٥ ب^{٢} حـ^{٢} من الحد ٣ ب^{٢} حـ^{٢} نكتب الحد المطروح منه ثم الحد المطروح بعد تغيير اشارته ، فنجد حاصل الطرح :

٣ ب^{٢} حـ^{٢} — ٥ ب^{٢} حـ^{٢}

وكذلك لطرح — ٢ ب^{٢} حـ من ٣ ب^{٢} حـ نجد ان حاصل الطرح هو :

٣ ب^{٢} حـ + ٢ ب^{٢} حـ = ٥ ب^{٢} حـ

١٠٦ — الحالة العامة: ليكن المطلوب طرح كثيرة الحدود :

ك = ل — ف + هـ من كثيرة الحدود : كَ = ب — حـ + د اي ليكن المطلوب حساب ح = كَ — ك ، فاذا وضعنا محل كل من كَ و ك قيمتها نجد العلاقة :

ح = كَ — ك = (ب — حـ + د) — (ل — ف + هـ)

فالجانب الثاني يدلنا على انه يجب ان نطرح المجموع (ل — ف + هـ) من المجموع الاول ، وندرك بسهولة انه لطرح ذلك يجب ان نطرح كل حد من حدود هذا المجموع ، اي يجب ان نضيف نظير كل حد من حدود هذا المجموع ، وبعبارة ثانية يمكن حذف المعترضة المسبوقة باشارة — شريطة ان نبدل اشارات جميع الحدود

الموجودة داخلها ؛ على عكس المعترضة المسبوقة باشارة + التي يمكن حذفها بدون تبديل شيء اذن :

$$ح = ب - ح + د - ل + ف - هـ$$

واذا اردنا ان نتحقق من عملنا هذا يكفي ان نضيف الى ح كثيرة الحدود ك فنجد حقيقة كَ ، اي ان :

$$ح + ك = ب - ح + د - ل + ف - هـ + ل - ف + هـ = ب - ح + د = كَ$$

ومما سبق ينتج :

قاعدة : لطرح كثيرة حدود من اخرى نكتب الواحدة تلو الاخرى شريطة ان نغير جميع اشارات حدود المطروحة ، ثم نوحد الحدود المتشابهة .

١٠٧ — ملاحظة : رأينا فيما سبق انه يمكن حذف المعترضة المسبوقة باشارة — شريطة تبديل حدودها بنظائر هذه الحدود ، اي تغيير جميع اشارات الحدود الموجودة داخلها ، وكذلك يمكن حذف المعترضة المسبوقة باشارة + بدون تغيير شيء اذن على العكس .

١ً) يمكن ان نضع عدة حدود داخل قوس مسبوق باشارة — شريطة تغيير اشارات هذه الحدود .

٢ً) يمكن ان نضع عدة حدود داخل قوس مسبوق باشارة + بدون تغيير شيء .

مثال :

$$ب - ح + د - ل + ف - هـ = (ب - ح + د) - (ل - ف + هـ)$$

ونلاحظ ان الاشارة المقدرة للحد الاول من كل معترضه هي + .

الفصل الرابع

ضرب كثيرات الحدود

١٠٨ — تعريف : ضرب كثيرات الحدود عملية يراد منها ايجاد تركيب جبري قيمته العددية تساوي جداء القيمتين العدديتين لتركيبين جبريين (او اكثر) معلومين مهما كانت القيم المخصوصة التي تعطى بآن واحد لحروف هذه التراكيب .

واحد التركيبين المعلومين يسمى **مضروباً** والآخر **مضروباً فيه** .

١٠٩ — الحالة الاولى : ضرب قوتين مختلفتين لعدد ما .

مثال : ليكن المطلوب حساب $ب^{٢} \times ب^{٣}$ فكما رأينا سابقاً وبحسب تعريف القوى نجد ان :

$$ب^{٢} \times ب^{٣} = ب \times ب \times ب \times ب \times ب = ب^{٥} = ب^{٢+٣}$$

ومنها نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة : لضرب قوتين مختلفتين لعدد واحد نرفع هذا العدد لقوة أسها مجموع الأسس .

وبصورة عامة :

$$ب^{؟} \times ب^{ك} = ب^{؟+ك}$$

١١٠ — الحالة الثانية : ضرب حد في آخر .

مثال : ليكن المطلوب اجراء الضرب : $٥ ب^{٢} حـ^{٢} د \times ٣ ب^{٢} حـ د^{٢} هـ$ فهذا الجداء يساوي :

$$٥ \times ب^{٢} \times حـ^{٢} \times د \times ٣ \times ب^{٢} \times حـ \times د^{٢} \times هـ$$

ولما كان هذا الجداء غير تابع لترتيب المضاريب يمكننا ان نضرب الامثال والحروف المتشابهة ، فيصبح الجداء :

$$٥ \times ٣ \times ب^{٢} \times ب^{٢} \times حـ^{٢} \times حـ \times د \times د^{٢} \times هـ$$

ونحن نعلم انه يمكننا ابدال جداء جملة اعداد بما يساويها ، فهذا الجداء يعادل :

$$١٥\ ب^{٥} \times حـ^{٣} \times د^{٢} \times هـ = ١٥\ ب^{٥}\ حـ^{٣}\ د^{٢}\ هـ$$

فلو تأملنا العلاقة :

$$٥\ ب^{٣}\ حـ^{٢}\ د \times ٣\ ب^{٢}\ حـ\ د^{٢}\ هـ = ١٥\ ب^{٥}\ حـ^{٣}\ د^{٣}\ هـ$$

لاستنتجنا القاعدة الآتية :

قاعدة : جداء حدين تامين هو حد ثالث امثاله يساوي جداء الامثال ، وقسمه الحرفي مؤلف من جميع الحروف الموجودة في الحدين ، وأس كل حرف منها يساوي مجموع أسسه في كلا الحدين . فمثلاً في الجداء أس الـ ب هو ٥ يساوي ٣ + ٢ .

مربع حد ما : ليكن المطلوب ايجاد مربع الحد : $٥\ ب^{٣}\ حـ^{٢}\ د$

فمن تعريف القوى نجد :

$$(٥\ ب^{٣}\ حـ^{٢}\ د)^{٢} = ٥\ ب^{٣}\ حـ^{٢}\ د \times ٥\ ب^{٣}\ حـ^{٢}\ د$$

وحسب القاعدة السابقة يكون :

$$(٥\ ب^{٣}\ حـ^{٢}\ د)^{٢} = ٢٥\ ب^{٦}\ حـ^{٤}\ د^{٢}$$

فاذا تأملنا هذه المساواة نجد :

قاعدة : لتربيع حد نربع الامثال ونضاعف أسس الحروف .

وعلى العكس : لايجاد الجذر التربيعي لحد أسس حروفه زوجية ، نأخذ الجذر التربيعي لامثاله ونقسم أسس حروفه على ٢ .

١١١ — الحالة الثالثة : جداء كثيرة حدود بحد .

مثال : ليكن المطلوب ايجاد جداء كثيرة الحدود : $ب - حـ + د$ بالحد $م$

اي حساب : $م\ (ب - حـ + د)$ فلاجراء هذا الضرب نلاحظ ثلاثة احوال :

١ً) م عدد تام موجب .

٢ً) م عدد كسري موجب .

٣ً) م عدد سالب .

١ً] م عدد تام موجب :

لنفرض ان : م = ٣ مثلاً ، فضرب كثيرة الحدود ب — حـ + د بالعدد ٣ هو تكريرها ثلاث مرات ، اي ايجاد المجموع :

ب — حـ + د

ب — حـ + د

ب — حـ + د

المساوي : ٣ب — ٣حـ + ٣د

وهذا يدلنا على انه لضرب كثيرة حدود بعدد يجب ان نضرب كل حد من حدودها بهذا العدد ، و كذلك بنفس المحاكمات نجد ان ضرب كثيرة الحدود بعدد تام مثل م هو تكريرها م مرة ، اي :

م (ب — حـ + د) = م ب — م حـ + م د

٢ً] م عدد كسري موجب .

لنفرض ان : م = $\frac{ك}{ن}$ فضرب ب — حـ + د بالعدد $\frac{ك}{ن}$ هو اخذ ك جزأ من ن جزأ من كثيرة الحدود ب — حـ + د . فللحصول على الجزء الواحد يجب ان نقسم : ب — حـ + د على العدد التام ن ، وكما هو معلوم في الحساب لتقسيم مجموع على عدد يجب ان نقسم كل حد من حدوده على هذا العدد اي ان :

$$\frac{ب - حـ + د}{ن} = \frac{ب}{ن} - \frac{حـ}{ن} + \frac{د}{ن}$$

وهذه المساواة صحيحة لانه لو ضربنا طرفيها بـ ن لحصلنا على مساواة صحيحة وهي:

ب — حـ + د = ب — حـ + د

اذن الجزء الواحد هو :

$$\frac{ب}{ج} - \frac{ح}{ج} + \frac{د}{ج}$$

واستناداً على الحالة الاولى ك جزأ تكون :

$$ك\left(\frac{ب}{ج} - \frac{ح}{ج} + \frac{د}{ج}\right) = ك \times \frac{ب}{ج} - ك \times \frac{ح}{ج} + د \times \frac{ك}{ج}$$

او : $م(ب - ح + د) = م ب - م ح + م د$

٣] الحد م عدد سالب :

لنفرض $م = - م'$ فيكون م' موجباً ويكون المطلوب اجراء الضرب الآتي :

$$ح = (- م')(ب - ح + د)$$

فنحن نعلم اننا اذا غيرنا اشارة احد المضاريب فان الناتج تتغير اشارته . اذن :

$$ح = - [م' (ب - ح + د)] = - [م' \cdot ب - م' ح + م' د]$$

وهنا يمكننا ان نحذف القوس المسبوق باشارة — بشرط تغيير اشارات جميع الحدود الموجودة داخله ، فاذا لاحظنا انه لتغيير اشارات جميع الحدود يكفي تغيير م' بـ — م' نجد ان :

$$ح = (- م') ب - (- م') ح + (- م') د$$

او : $ح = م ب - م ح + م د$

اذن في جميع الحالات :

$م(ب - ح + د) = م ب - م ح + م د$ اي :

قاعدة : لضرب كثيرة حدود بحد واحد يجب ضرب جميع حدودها بذلك الحد .

ملاحظة : عند ما يكون الحد مسبوقاً باشارة — ظاهرة يجب تغيير جميع الاشارات . اي ان :

$$- م' [ب - ح + د] = - م' ب + م' ح - م' د$$

١١٢ — الحالة العامة : ضرب كثيرة حدود بثانية : ليكن المطلوب اجراء عملية الضرب :

$$ح = (ب - حـ + د)(هـ - ل + ف)$$

لذلك نفرض ان : $م = (هـ - ل + ف)$ فيكون :

$$ح = ب \cdot م^{ن} - حـ \cdot م + د \cdot م$$

وبتبديل م بمساويها نجد ان :

$$ح = ب(هـ - ل + ف)^{ن} - حـ(هـ - ل + ف) + د(هـ - ل + ف)$$

اي (بند ٣٤) لضرب كثيرة حدود بثانية يجب ان نأخذ الحد الاول من الاولى ، وان نضربه بجميع حدو الثانية ، ثم نأخذ الحد الثاني من الاولى ونضربه بجميع حدود الثانية وهكذا ... الى ان نأخذ الحد الاخير من الاولى ونضربه بجميع حدود الثانية .

واذا حللنا الاقواس في العلاقة الاخيره استناداً على الحالات السابقة نجد ان :

$$ح = ب هـ - ب ل + ب ف - حـ هـ + حـ ل - حـ ف + د هـ - د ل + د ف$$ اي :

قاعدة : لضرب كثيرة حدود بثانية نضرب كل حد من الاولى بجميع حدود الثانية مع مراعاة الاشارات ، ثم نجمع الحدود المتشابهة اذا وجد حدود متشابهة .

ولتسهيل العمل نرتب كلاً من المضروب والمضروب فيه بالنسبة للأسس المتناقصة لاحد الاحرف ، ثم نجري العمل كما في الحساب تماماً ، واليك المثال الآتي :

ليكن المطلوب ضرب كثيرة الحدود : $٥ ب^{٢} حـ - ٤ ب حـ^{٢} + ٢ ب^{٢} حـ^{٢}$

بكثيرة الحدود : $٥ ب حـ^{٢} + ٣ ب^{٢} - ٢ ب^{٢} حـ$

لنرتب هاتين الكميتين بالنسبة الى قوى ب المتناقصة ، ثم لنرتب العملية كما في الحساب ، فيكون :

$٥ ب^{٢} حـ + ٢ ب^{٢} حـ^{٢} - ٤ ب حـ^{٢}$ ..... المضروب

$٣ ب^{٢} - ٢ ب^{٢} حـ + ٥ ب حـ^{٢}$ ..... المضروب فيه

$١٥ ب^{٦} حـ + ٦ ب^{٥} حـ^{٢} - ١٢ ب^{٤} حـ^{٣}$

$- ١٠ ب^{٥} حـ^{٢} - ٤ ب^{٤} حـ^{٣} + ٨ ب^{٣} حـ^{٤}$

$+ ٢٥ ب^{٤} حـ^{٣} + ١٠ ب^{٣} حـ^{٤} - ٢٠ ب^{٢} حـ^{٥}$

$١٥ ب^{٦} حـ - ٤ ب^{٥} حـ^{٢} + ٩ ب^{٤} حـ^{٣} + ١٨ ب^{٣} حـ^{٤} - ٢٠ ب^{٢} حـ^{٥}$

اي نبدأ العمل من اليمين بضرب كل حد من حدود المضروب فيه بجميع حدود المضروب ، اي نبدأ بضرب الحد ٣ ب٢ في جميع حدود المضروب ، فنقول :

+ في + يعطي زائداً ، ثم ٣ في ٥ يعطي ١٥ ، ثم ب٢ في ب٢ حـ يعطي ب٦ حـ فيكون الناتج الاول ١٥ ب٦ حـ .

ثم نلاحظ الحد الثاني من المضروب ، ونقول :

+ في + يعطي زائداً ، ثم ٣ في ٢ يعطي ٦ ، ثم ب٢ في ب٢ حـ٢ تعطى ب٥ حـ٢ فيكون الناتج الثاني + ٦ ب٥ حـ٢ .

ثم نلاحظ الحد الثالث ، ونقول :

+ في — يعطي — ، ثم ٣ في ٤ تعطي ١٢ ، ثم ب٢ في ب حـ٢ تعطي ب٤ حـ٢ فيكون الناتج الثالث — ١٢ ب٣ حـ٤ .

وهكذا نعيد العمليات لكل حد من حدود المضروب فيه ونضع الحدود المتشابهة تحت بعضها البعض حتى يسهل الجمع ، وقبل البدء في الضرب يجب ان نضع + . [في المضروب فقط] محل القوى المفقودة للحرف الذي رتبنا بالنسبة اليه كلاً من المضروب والمضروب فيه ، فمثلاً في المثال السابق ، المضروب يبدأ من القوة الثالثة الى ب وهو يحوي على القوى الثانية والاولى ، الا انه لو كان من الشكل ٥ ب٣ حـ — ٤ ب حـ٢ فقط لرتبناه هكذا : ٥ ب٣ حـ٢ + ٠ — ٤ ب حـ٢ وذلك لتسهيل الحسابات وترتيبها .

١١٣ — ملاحظة : اذا كان المضروبان متجانسين فالجداء يكون متجانساً ودرجته تساوي مجموع درجتي المضروبين .

١١٤ — ملاحظة : يجب ان نعتاد على ايجاد جداء كثيرات الحدود دون ان نكتب الجداءات الجزئية .

مثال : ١) ليكن المطلوب ايجاد جداء كثيرتي الحدود :

$$(٣س - ٢)(٢س + ٥)$$

فنقول : بما ان كلاً من المضروب والمضروب فيه ذو حدين من الدرجة الاولى بالنسبة الى س فيكون الجداء ذا ثلاثة حدود ، ومن الدرجة الثانية بالنسبة الى س ، فالحد الذي يحوي س٢ ينتج من ضرب الحدين المحتوين على س وهذا الحد هو ٦ س٢

والحد الذي يحتوي على س يأتي من جداء حدي س في الحدين العدديين وامثاله تتكون من ٣ في ٥ او ١٥ مع — ٢ في ٢ او — ٤ اي + ١١ وهذا الحد هو + ١١ س واخيراً الحد الخالي من س ينتج من الحدين الخاليين من س اي من — ٢ في ٥ او — ١٠ اذن الجداء يكون :

$$(٣س - ٢)(٢س + ٥) = ٦س^{٢} + ١١س - ١٠$$

مثال : ٢) المطلوب ايجاد الجداء :

$$(٢س^{٢} - ٣س + ٤)(٣س - ٢)$$

فاذا لاحظنا ان الجداء من الدرجة الثالثة بالنسبة الى س فاننا نجد اولاً الحد الذي يحوي $س^{٣}$ ثم الذي يحوي $س^{٢}$ ثم الذي يحوي س ثم الثابت كما عملنا سابقاً فيكون :

$$(٢س^{٢} - ٣س + ٤)(٣س - ٢) = ٦س^{٣} - ١٣س^{٢} + ١٨س - ٨$$

ويستطيع الطالب بعد عدة تمارين ان يكتب النتيجة بسرعة .

١١٥ — ملاحظة : نرى في المثالين السابقين ان :

١) المضروب والمضروب فيه مرتبان بشكل واحد ، اي بالنسبة الى القوى س المتناقصة .

٢ً) الحد الاول من الجداء يساوي جداء الحد الاول من المضروب في الحد الاول من المضروب فيه .

٣ً) الحد الاخير من الجداء يساوي جداء الحد الاخير من المضروب في الحد الاخير من المضروب فيه .

وهذه الملاحظة يمكن تعميمها بالنظرية الآتية :

١١٦ — نظرية : اذا ضربنا كثيرتي حدود مرتبتين بشكل واحد (اما بالنسبة للأسس المتناقصة ، واما بالنسبة للأسس المتزايدة) فان الحد الاول والاخير من الجداء يكونان وحيدين وليس لهما مشابه .

البرهان : لو اردنا ان نجد جداء كثيرتي الحدود :

$$٣س^{٣} - ٤س^{٢} + ٧س \quad ؛ \quad ٥س^{٢} - ٣س + ٢$$

المرتبتين بالنسبة الى قوى س المتناقصة ، نلاحظ ان درجة كل حد من حدود الجداء تساوي مجموع درجتي الحدين اللذين يوجدانه . فبضرب الحدين ٣س٢ في ٥ س٢ اللذين هما اعظم الحدود درجة في المضروب والمضروب فيه نجد من الجداء الحد الذي هو اعظم درجة فيه ، اذاً هذا الحد وحيد اذ لا يمكن ان نجد غيره ، لان بقية الحدود تكون ذات درجة اقل .

بنفس المحاكمة نرى ان جداء الحدين الاخيرين ٧ س في ٢ اي جداء الحدين اللذين هما اصغر الحدود درجة يعطي حداً درجته اصغر درجة من جميع حدود الجداء اذن يكون هذا الحد من الجداء وحيداً ايضاً لان بقية الحدود تكون اعظم درجة منه .

١١٧ — نتيجة : لا يمكن لجداء كثيرتي الحدود ان يحتوي على اقل من حدين .

في الحقيقة بما ان الحد الاول والاخير من الجداء وحيدان فلا يمكن ان يحذفا ابداً .

مثال :

$$\begin{array}{r} س^٥ + س^٤ + س^٣ + س^٢ + س + ١ \\ \hline س - ١ \\ \hline س^٦ + س^٥ + س^٤ + س^٣ + س^٢ + س \\ \quad - س^٥ - س^٤ - س^٣ - س^٢ - س - ١ \\ \hline س^٦ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - ١ \end{array}$$

١١٨ — امثلة مهمة في ضرب كثيرات الحدود .

١) المطلوب ايجاد الجداء :

$(ب + حـ)(ب + حـ)$ او $(ب + حـ)^٢$ فنجد :

$$\begin{array}{r} ب + حـ \\ ب + حـ \\ \hline ب^٢ + ب حـ \\ + ب حـ + حـ^٢ \\ \hline ب^٢ + ٢ ب حـ + حـ^٢ \end{array}$$

ومنها نحصل على الدستور الآتي :

$$(ب + حـ)^{٢} = ب^{٢} + ٢ ب حـ + حـ^{٢}$$

فهذه النتيجة تقرأ :

مربع مجموع عددين يساوي مربع الاول زائداً ضعف الاول في الثاني زائداً مربع الحد الثاني .

٢) المطلوب ايجاد الجداء :

$(ب - حـ)(ب - حـ)$ او $(ب - حـ)^{٢}$ فنجد :

$$\begin{array}{r} ب - حـ \\ ب - حـ \\ \hline ب^{٢} - ب حـ \\ - ب حـ + حـ^{٢} \\ \hline ب^{٢} - ٢ ب حـ + حـ^{٢} \end{array}$$

ومنها يكون الدستور الآتي :

$$(ب - حـ)^{٢} = ب^{٢} - ٢ ب حـ + حـ^{٢}$$

فهذه النتيجة تقرأ :

مربع الفرق بين عددين يساوي مربع الاول ناقصاً ضعف الاول في الثاني زائداً مربع الحد الثاني .

٣) المطلوب ايجاد الجداء :

$(ب + حـ)(ب - حـ)$ فنجد :

$$\begin{array}{r} ب + حـ \\ ب - حـ \\ \hline ب^{٢} + ب حـ \\ - ب حـ - حـ^{٢} \\ \hline ب^{٢} + ٠ - حـ^{٢} \end{array}$$

ومنها نرى الدستور الآتي :

$$(ب + حـ)(ب - حـ) = ب^{٢} - حـ^{٢}$$

فهذه النتيجة تقرأ :

جداء مجموع عددين في فضلهما يساوي الفرق بين مربعيهما .

لهذه الدساتير الثلاثة السابقة اهمية عظمى في العمليات الجبرية [التفريق الى المضاريب وبالعكس] .

فمثلاً : اذا كانت لدينا كمية موضوعة بشكل فرق ما بين مربعي حدين ، فانه يمكننا ان نكتبها بشكل مضروبين .

مثال : ١) فرق الكمية : $٩ س^{٢} - ١٦ ع^{٢}$ الى مضاريب :

الحل : بما ان : $٩ س^{٢}$ هو مربع $٣ س$ و $١٦ ع^{٢}$ هو مربع $٤ ع$ فنجد بسهولة ان :

$$٩ س^{٢} - ٦ ع^{٢} = (٣ س)^{٢} - (٤ ع)^{٢}$$

ويمكن ان يكتب هذا الفرق ما بين المربعين بشكل جداء مجموعهما في فضلهما فيكون :

$$٩ س^{٢} - ١٦ ع^{٢} = (٣ س + ٤ ع)(٣ س - ٤ ع)$$

وهو المطلوب .

مثال : ٢) فرق الكمية : $ك = ٤ حـ^{٢} د^{٢} - (حـ^{٢} + د^{٢} - ب^{٢})^{٢}$ الى مضاريب من الدرجة الاولى .

الحل : بما ان الحد $٤ حـ^{٢} د^{٢}$ هو مربع للحد $(٢ حـ د)$ فيكون :

$$ك = (٢ حـ د)^{٢} - (حـ^{٢} + د^{٢} - ب^{٢})^{٢}$$

وهذا الفرق يكتب بشكل جداء مجموع في فضل فيكون :

$$ك = (٢ حـ د + حـ^{٢} + د^{٢} - ب^{٢})(٢ حـ د - حـ^{٢} - د^{٢} + ب^{٢})$$

ولكن :

$$حـ^{٢} + د^{٢} + ٢ حـ د = (حـ + د)^{٢}$$

$$٢حد - ح^{٢} - د^{٢} = -(ح - د)^{٢}$$

اذن يمكننا ان نكتب ك بالشكل :

$$ك = [(ح + د)^{٢} - ب^{٢}][ب^{٢} - (ح - د)^{٢}]$$

وبما ان الكميتين الموضوعتين داخل القوسين الكبيرين هما الفرق بين مربعين فيمكننا ان نكتب :

$$ك = (ح + د + ب)(ح + د - ب)(ب + ح - د)(ب + د - ح)$$

وهو المطلوب .

١١٩ — بعض الدساتير التي يجب حفظها : عدا الدساتير الثلاثة التي ذكرناها سابقاً يجب حفظ الدساتير الاتية :

١ً) $(ب + ح)^{٢} = ب^{٢} + ٣ب^{٢}ح + ٣بح^{٢} + ح^{٣}$

ويمكن ان نجد هذا الدستور من ضرب : $(ب + ح)^{٢}$ في $(ب + ح)$

٢ً) $(ب - ح)^{٣} = ب^{٣} - ٣ب^{٢}ح + ٣بح^{٢} - ح^{٣}$

٣ً) $(ب + ح + د + هـ)^{٢} = ب^{٢} + ح^{٢} + د^{٢} + هـ^{٢} + ٢بح + ٢بد + ٢بهـ + ٢حد + ٢حهـ + ٢دهـ$ (بند ١٢١)

٤ً) $ب^{٢} - ح^{٢} = (ب - ح)(ب^{٢} + بح + ح^{٢})$

وفي الحالة العامة :

$$ب^{ن} - ح^{ن} = (ب - ح)(ب^{ن-١} + ب^{ن-٢}ح + ب^{ن-٣}ح^{٢} + \ldots + ح^{ن-١})$$

٥ً) يجب ان لا ننسى ان الدساتير السابقة هي مطابقات يمكننا ان نبدل فيها اشارة التساوي باشارة التطابق ، لان القيمة العددية للجانب الاول تساوي القيمة العددية للجانب الثاني مهما كانت القيم المخصوصة التي تعطى للحروف في الجانبين في آن واحد .

وفي الحالة الخاصة : يمكننا ان نستنتج من المطابقات السابقة مطابقات جديدة بتبديل احد الحروف بنظيره في الجانبين . فمثلاً بفرض ان ن عدد فردي يمكننا ان نستنتج من المطابقة الاخيرة الدستور الآتي :

$$ب^{ن} + ح^{ن} = (ب + ح)(ب^{ن-١} - ب^{ن-٢}ح + ب^{ن-٣}ح^{٢} + \ldots + ح^{ن-١})$$

وذلك بفرض ن عدداً فردياً ، وبتغيير كل من ح بـ (— ح) .

ولو كانت ن زوجية لبقي الجانب الاول $ب^{ن} - ح^{ن}$ ونحصل على مطابقة جديدة صحيحة وهي :

$$ب^{ن} - ح^{ن} = (ب + ح)(ب^{ن-١} - ب^{ن-٢}ح + \ldots - ح^{ن-١})$$

١٢٠ — ملاحظة : ان ادخال الاعداد السالبة في العمليات يمكننا من تعميم الدساتير .

لنأخذ مثلاً الدستور : $(ب + ح)^{٢}$ ولنرَ كيف نستنتج منه الدستور : $(ب - ح)^{٢}$. فهذا الدستور الاخير نستطيع ان نكتبه بالشكل :

$$[ب + (-ح)]^{٢}$$

الذي لا يختلف عن $(ب + ح)^{٢}$ الا بابدال $+ ح$ بالعدد $- ح$. اذن يكفي ان نأخذ مساواة $(ب + ح)^{٢}$ وان نبدل في الناتج كل $+ ح$ بـ $(- ح)$ مع ملاحظة ان القوى الفردية للعدد ح تتغير اشارتها عند تغيير اشارة ح فنجد بالتسلسل ان :

$$(ب + ح)^{٢} = ب^{٢} + ٢ب ح + ح^{٢}$$

ومنها : $(ب - ح)^{٢} = ب^{٢} - ٢ب ح + ح^{٢}$

وبعين الطريقة نجد من ضرب $(ب + ح)^{٢}$ في المقدار $(ب + ح)$ ان :

$$(ب + ح)^{٤} = ب^{٤} + ٤ب^{٣}ح + ٦ب^{٢}ح^{٢} + ٤ب ح^{٣} + ح^{٤}$$

ومنها : $(ب - ح)^{٤} = ب^{٤} - ٤ب^{٣}ح + ٦ب^{٢}ح^{٢} - ٤ب ح^{٣} + ح^{٤}$

ويجب حفظ احد هذين القانونين مع التمكن من استنتاج الآخر .

١٢١ — مربع مجموع حدود كثيرة : لايجاد مربع مجموع ما ، اما ان نضرب هذا المجموع بنفسه او نرجع تربيع هذا المجموع الى تربيع ذي حدين بصورة متسلسلة .

مثال : لايجاد مربع المجموع $(ب + حـ + د)$ نفرض ان :

$(ب + حـ) = م$ فيكون :

$$(ب + حـ + د)^{٢} = (م + د)^{٢} = م^{٢} + ٢ م د + د^{٢}$$

وبتبديل م بما يساويها نجد :

$$(ب + حـ + د)^{٢} = (ب + حـ)^{٢} + ٢ (ب + حـ) د + د^{٢}$$

او : $(ب + حـ + د)^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} + ٢ ب حـ + ٢ ب د + ٢ حـ د + د^{٢}$

او : $(ب + حـ + د)^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} + ٢ ب حـ + ٢ ب د + ٢ حـ د$

واذا بدلنا كل د بالعدد $- د$ نجد مطابقة جديدة وهي :

$$(ب + حـ - د)^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} + ٢ ب حـ - ٢ ب د - ٢ حـ د$$

وبنفس الطريقة نجد ان :

$$(ب + حـ + د + هـ)^{٢} = ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} + هـ^{٢} + ٢ ب حـ + ٢ ب د + ٢ ب هـ + ٢ حـ د + ٢ حـ هـ + ٢ د هـ$$

وذلك باعتبار $ب + حـ + د$ حداً واحداً ، والاستناد على المطابقة السابقة ، او باعتبار $ب + حـ$ حداً اولاً و $د + هـ$ حداً ثانياً . فنحصل في النتيجة على القاعدة الآتية :

قاعدة : مربع مجموع عدة حدود يساوي مجموع مربعات هذه الحدود مضافاً اليه حواصل الضرب الناشئة من ضرب ضعف كل حد في جميع الحدود التي تليه مع ملاحظة الاشارات .

ولنلاحظ في النهاية اننا نحصل على مطابقات جديدة من المطابقة الاخيرة السابقة بتبديل احد الحروف بنظيره في الجانبين .

الفصل الخامس

التقسيم الجبري

١٢٢ — تعريف : تقسيم الكمية ب على الكمية ح هو ايجاد كمية ثالثة مثل د اذا ضربت في ح كان الحاصل ب .

فالكمية ب تسمى **بالمقسوم** والكمية ح تسمى **بالمقسوم عليه** واما د فتسمى **بخارج القسمة** . وهذه الكميات الثلاث تحقق دوماً المطابقة الآتية :

$$ب = ح \times د$$

١٢٣ — ولنذكر الآن النتائج المهمة التي رأيناها في تقسيم الاعداد الجبرية وهي :

١ً) قسمة قوتين مختلفتين لعدد ما :

$$ب^{هـ} : ب^{ن} = ب^{هـ - ن}$$

لان $$ب^{هـ - ن} \times ب^{ن} = ب^{هـ}$$

مثال : $$ب^{٦} : ب^{٥} = ب^{٤}$$

لان $$ب^{٤} \times ب^{٥} = ب^{٤ + ٥} = ب^{٩}$$

٢ً) $ب^{٠} = ١$ اي كل عدد قوته صفر يساوي واحداً مهما كان هذا العدد شريطة ان يكون غير الصفر .

٣ً) $ب^{-ن} = \frac{١}{ب^{ن}}$ اي كل قوة اسها سالب تساوي الواحد مقسوماً على قوة

ناشئة من تغيير اشارة هـذا الأس .

١٢٤ — تقسيم حد على حد : ليكن المطلوب تقسيم الحد ١٥ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢} هـ على الحد ٥ ب^{٢} ح^{٢} د^{٢}

فنحن نعلم انه لتقسيم عدد على جداء جملة مضاريب نقسم العدد على المضروب الاول ثم خارج القسمة على المضروب الثاني . وهكذا الى النهاية .

وبالعكس لتقسيم جداء جملة مضاريب على عدد نقسم احد المضاريب على هذا العدد .

مثال : $٣٦٠ : ٥ \times ٣ \times ٢ = [(٣٦٠ : ٥) : ٣] : ٢$

$= (٧٢ : ٣) : ٢$

$= ٢٤ : ٢$

$= ١٢$

وكذلك : $\frac{٢١}{٧} \times ٢ \times ٥ \times ١١ = \frac{٢١ \times ٢ \times ٥ \times ١١}{٧}$

$= ٣ \times ٢ \times ٥ \times ١١$.

فبنفس الطريقة لتقسيم الحد ١٥ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢} هـ على الحد ٥ ب^{٢} ح^{٢} د^{٢} نقسم اولاً ١٥ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢} هـ على ٥ فنكتفي بتقسيم احد المضاريب وهو ١٥ فيكون حاصل القسمة هو : ٣ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢} هـ ثم نقسم هذا الحاصل ٣ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢} هـ على ب^{٢} فيكون حاصل القسمة ٣ ب^{٣} ح^{٢} د^{٢} هـ ثم نقسم هذا الناتج على ح^{٢} فنجد ٣ ب^{٣} ح د^{٢} هـ ثم نقسم هذا على د^{٢} فنحصل على الناتج الاخير ٣ ب^{٣} ح هـ مما يدلنا على ان :

$$\frac{١٥ \text{ ب}^{٥} \text{ ح}^{٢} \text{ د}^{٢} \text{ هـ}}{٥ \text{ ب}^{٢} \text{ ح}^{٢} \text{ د}^{٢}} = ٣ \text{ ب}^{٣} \text{ ح هـ}$$

في هذا المثال وجدنا ان خارج القسمة هو ٣ ب^{٣} ح هـ

وفي الحالة العامة يكون الحد ح قابل القسمة على الحد حَ اذا كان الحد المقسوم ح يحوي على جميع الاحرف الموجودة في المقسوم عليه حَ وكانت أسس هذه الاحرف في المقسوم ح اعظم او تساوي اسسها في حَ .

ولو قارنا في المثال السابق بين المقسوم والمقسوم عليه وخارج القسمة نجد :

قاعدة : عند ما يكون الحد ح قابل القسمة على الحد حَ فخارج قسمة ح على حَ حد ثالث امثاله تساوي حاصل قسمة الامثال ، وقسمه الحرفي متشكل من جميع حروف المقسوم ، على ان يكون أس كل حرف منها مساوياً أسه في الصورة مطروحاً منه أسه في المخرج (فحرف الصورة الذي لا شبيه له في المخرج يكون في خارج القسمة ، وكذلك الحرف الذي أسه في الصورة يساوي أسه في المخرج يكون غير موجود في خارج القسمة) .

١٢٥ — ملاحظة : ان القاعدة السابقة تفرض ان جميع العمليات السابقة (طرح أس المخرج من أس الصورة) ممكنة فيقال في هذه الحالة ان القسمة قابلة ، وان خارج القسمة يكون حداً واحداً . ولكن عندما تكون القسمة غير قابلة فاننا ندل على التقسيم بشكل كسر ، ونختصر هذا الكسر بقدر ما يمكن وذلك بتقسيم الصورة والمخرج على مقدار واحد .

مثال : قسم $١٥ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢}$ على $٧ ب^{٢} ح^{٢} د^{٢} هـ$

خارج القسمة هو : $\frac{١٥ ب^{٥} ح^{٢} د^{٢}}{٧ ب^{٢} ح^{٢} د^{٢} هـ}$

وبعد الاختصار يصبح : $\frac{١٥ ب^{٢}}{٧ هـ}$

١٢٦ — تقسيم كثيرة حدود على حد واحد : نعلم انه لتقسيم مجموع على عدد يجب ان نقسم كل حد من حدود المجموع على هذا العدد .

وكذلك لتقسيم كثيرة حدود على حد واحد يجب ان نقسم كل حد من حدودها على ذلك الحد مع ملاحظة الاشارات . اي ان :

$$\frac{ب - ح + د}{م} = \frac{ب}{م} - \frac{ح}{م} + \frac{د}{م}$$

فهذه المساواة صحيحة لاننا لو ضربنا جانبيها بالعدد م نجد المساواة الصحيحة :

$$ب - حـ + د = ب - حـ + د$$ اذن :

قاعدة : لتقسيم كثيرة حدود على حد واحد نقسم كل حد من حدودها على ذلك الحد .

١٢٧ — كيفية وضع مضروب مشترك خارج قوس : وجدنا فيما سبق (بند ٣٣) ان :

$$م ب - م حـ + م د = م (ب - حـ + د)$$

اي اذا كان لدينا عدة حدود فيها مضروب واحد مشترك فانه يمكننا ان نضع هذا المضروب المشترك خارج قوس ، وان نضع داخل القوس ما يبقى من هذه الحدود بعد حذف المضروب المشترك (وبعبارة اصح : بعد تقسيم كل حد منها على المضروب المشترك) مع مراعاة الاشارات .

وفي الحالة العامة اذا كان كل حد من الحدود ب ، حـ ، د يقبل القسمة على م فانه يمكننا ان نكتب المساواة التي وجدناها في البند السابق :

$$\frac{ب - حـ + د}{م} = \frac{ب}{م} - \frac{حـ}{م} + \frac{د}{م}$$ بالشكل الآتي :

$$ب - حـ + د = م \left(\frac{ب}{م} - \frac{حـ}{م} + \frac{د}{م} \right)$$ حيث $\frac{ب}{م} ، \frac{حـ}{م} ، \frac{د}{م}$ اعداد صحيحة

ومن هذه المساواة نستنتج :

قاعدة : اذا كان لدينا كثيرة حدود وكانت جميع حدودها تقبل القسمة على حد واحد وهو م مثلاً (اي كانت جميع حدودها تشترك بمضروب مشترك مثل م) فيمكن ان نضع هذا الحد م خارج قوس على ان نضع داخل هذا القوس خارج قسمة كثيرة الحدود على ذلك الحد .

مثال : ضع $٣ ب^{٢} حـ$ بشكل مضروب مشترك (اي خارج قوس) في كثيرة الحدود :

$$ح = ١٢ ب^{٥} حـ^{٣} - ١٥ ب^{٥} حـ + ١٨ ب^{٤} حـ^{٢} + ٣ ب^{٢} حـ$$

فبتطبيق القاعدة السابقة نجد :

$$ح = ٣ب^{٢}حـ(٤ب^{٢}حـ - ٥ب^{٢} + ٦بحـ^{٢} + ١)$$

وليس من الضروري دوماً ان تكون جميع الحدود قابلة القسمة على م ، كما في المثال الآتي :

مثال : ضع ب بشكل مضروب مشترك في كثيرة الحدود :

$$ب س^{٢} + حـ س + د \qquad \text{فيكون :}$$

$$ب س^{٢} + حـ س + د = ب\left(س^{٢} + \frac{حـ}{ب} س + \frac{د}{ب}\right)$$

١٢٨ — تقسيم كثيرة حدود على كثيرة حدود — تعريف :

تقسيم كثيرة الحدود ب على كثيرة الحدود حـ هو ايجاد كثيرة الحدود د (ان كان ذلك ممكناً) التي تحقق المطابقة : $ب \equiv حـ \times د$

فاذا تمكنا من ايجاد د نقول عندئذ ان القسمة ممكنة ، او ان ب قابلة القسمة على حـ .

وبما ان درجة ب تساوي مجموع درجتي حـ و د نستنتج من ذلك :

نتيجة : ان درجة خارج القسمة تساوي الفرق بين درجة المقسوم ودرجة المقسوم عليه .

واذا لم نتمكن من ايجاد كثيرة الحدود د التي لو ضربت بكثيرة الحدود حـ انتجت كثيرة الحدود ب ؛ نقول : ان القسمة غير قابلة ، او ان ب غير قابلة للقسمة على حـ .

ولندرس الآن الحالة الاولى عند ما نتمكن من ايجاد د ، لذلك نفرض ان :

$$ب = ب_{١} س^{٤} + ب_{٢} س^{٣} + ب_{٣} س^{٢} + ب_{٤} س + ب_{٥}$$

$$حـ = حـ_{١} س^{٢} + حـ_{٢} س + حـ_{٣}$$

وان ذاتي الحدود ب ، حـ مرتبتان بالنسبة الى قوى س المتناقصة .

فبما ان المقسوم ب من الدرجة الرابعة ، وان المقسوم عليه حـ من الدرجة الثانية يكون خارج القسمة د من الدرجة الثانية ، ويمكن ان نفرض ان خارج القسمة هو :

$$د = د_١ س^٢ + د_٢ س + د_٣$$

فاستناداً على تعريف خارج القسمة نجد المطابقة الآتية :

$$ب_١ س^٤ + ب_٢ س^٣ + ب_٣ س^٢ + ب_٤ س + ب_٥ \equiv (ح_١ س^٢ + ح_٢ س + ح_٣)(د_١ س^٢ + د_٢ س + د_٣) \quad \cdots\cdots \quad (١)$$

ونحن نعلم (نظرية ١١٦) ان جداء $ح_١ س^٢$ في $د_١ س^٢$ يعطينا الحد الاعظم درجة .

فلاجل ان تتحقق المطابقة السابقة (١) يجب ان يتساوى ويتطابق هذا الجداء مع الحد الاول من الجانب الاول الذي درجته اعظم ما يمكن وهي الرابعة ، اي يجب ان يكون :

$$ب_١ س^٤ = ح_١ س^٢ \times د_١ س^٢$$

فهذه المساواة تدلنا على اننا نجد الحد الاول $د_١ س^٢$ من خارج القسمة ، بتقسيم الحد الاول من المقسوم $ب_١ س^٤$ على الحد الاول من المقسوم عليه $ح_١ س^٢$

ولنطرح الان من طرفي المطابقة السابقة (١) جداء المقسوم عليه $ح_١ س^٢ + ح_٢ س + ح_٣$ في الكمية $د_١ س^٢$ ولنفرض ان حاصل الطرح وهو ما نسميه بالباقي الجزئي الاول :

$$ب_١ س^٤ + ب_٢ س^٣ + ب_٣ س^٢ + ب_٤ س + ب_٥ - (ح_١ س^٢ + ح_٢ س + ح_٣) د_١ س^٢ = هـ_١ س^٣ + هـ_٢ س^٢ + هـ_٣ س + هـ_٤$$ فهذا الباقي :

$$هـ_١ س^٣ + هـ_٢ س^٢ + هـ_٣ س + هـ_٤ = (ح_١ س^٢ + ح_٢ س + ح_٣)(د_٢ س + د_٣)$$

ونجد بنفس المحاكمات التي اجريناها للحصول على $د_١ س^٢$ كما مر معنا ان :

$$هـ_١ س^٣ = ح_١ س^٢ \times د_٢ س$$

فهذه المساواة تدلنا على ان $د_٢ س$ هو خارج قسمة $هـ_١ س^٣$ على $ح_١ س^٢$

وهكذا نتم العمل حتى نجد ان الباقي الجزئي اصبح صفراً . ومما سبق نستنتج قاعدة التقسيم الاتية :

قاعدة : لتقسيم ذات حدود كثيرة على ذات حدود كثيرة نجري العمل الآتي :

١) نرتب الحدود في المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة للأسس المتناقصة او المتزايدة

لاحد الحروف (وننظر لبقية الحروف كامثال لهذا الحرف) ثم نقسم حد المقسوم الاول الايمن ذا الدرجة العظمى على حد المقسوم عليه الاول ذي الدرجة العظمى فنحصل على الحد الاول من خارج القسمة .

٢ً) نضرب المقسوم عليه بهذا الحد الاول من خارج القسمة ونطرح الجداء من المقسوم فنجد الباقي الجزئي الاول .

٣ً) نقسم الحد الاول الايمن من الباقي الجزئي الاول على الحد الاول الايمن من المقسوم عليه فنجد الحد الثاني من خارج القسمة .

٤ً) نطرح من الباقي الجزئي الاول جداء الحد الثاني من خارج القسمة في المقسوم عليه فنجد الباقي الجزئي الثاني ، ونداوم على العمل على هذه الصورة حتى يبقى الباقي صفراً .

١٢٩ — مثال : المطلوب تقسيم كثيرة الحدود :

$$٢١ س^{٢} - ٧ س^{٣} - ١٠ س^{٤} - ١٣ س + ٦ س^{٥} + ٢$$

على $٢ + ٢ س^{٢} - ٣ س$

الحل : نرتب كلاً من المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة الى أُسس س المتناقصة فيصبح المقسوم : $٦ س^{٥} - ١٠ س^{٤} - ٧ س^{٣} + ٢١ س^{٢} - ١٣ س + ٢$

والمقسوم عليه : $٢ س^{٢} - ٣ س + ٢$

ثم نضع العملية كما يلي :

$٢ س^{٢} - ٣ س + ٢$	$٦ س^{٥} - ١٠ س^{٤} - ٧ س^{٣} + ٢١ س^{٢} - ١٣ س + ٢$
$٣ س^{٣} - ٥ س + ١$	$\pm ٦ س^{٥} \quad \pm ٩ س^{٣} \mp ٦ س^{٢}$
	$-١٠ س^{٤} + ٢ س^{٣} + ١٥ س^{٢} - ١٣ س + ٢$
	$\pm ١٠ س^{٤} \quad \mp ١٥ س^{٢} \pm ١٠ س$
	$٢ س^{٢} - ٣ س + ٢$
	$\pm ٢ س^{٢} \quad \pm ٣ س \pm ٢$

. . . . . .

مبتدئين بتقسيم الحد الاول ٦ س^٥ من المقسوم على الحد الاول ٢ س^٢ من المقسوم عليه ، فنقول :

+ على + يعطينا + ، ٦ س^٥ على ٢ س^٢ يعطينا ٣ س^٣ وهذا هو الحد الاول من خارج القسمة . نضرب هذا الحد بالمقسوم عليه ونضع الجداء تحت المقسوم ثم نغير اشارات هذا الجداء ونجمعه مع المقسوم فيكون حاصل الجمع هو الباقي الجزئي الاول وهو :

$$-١٠ س^{٤} + ٢ س^{٣} + ١٥ س^{٢} - ١٣ س + ٢$$

ثم نعيد العمل بتقسيم اول حد $-١٠ س^{٤}$ من هذا الباقي على الحد الاول من المقسوم عليه (كما سبق) . وهكذا نكرر العمل حتى لا يبقى باق .

١٣٠ — طريقة المطابقة او طريقة الامثال غير المعينة : لنأخذ المثال المذكور سابقاً فنرى ان المقسوم ٦ س^٥ — ١٠ س^٤ — الخ من الدرجة الخامسة وان المقسوم عليه ٢ س^٢ — ٣ س + ٢ من الدرجة الثالثة، اذن يكون خارج القسمة من الدرجة الثانية ، اي من الشكل :

$$٦ س^{٥} - ١٠ س^{٤} - ٧ س^{٣} + ٢١ س^{٢} - ١٣ س + ٢ \equiv (٢ س^{٢} - ٣ س + ٢)(ب س^{٢} + حـ س + د)$$

او :

$$٦ س^{٥} - ١٠ س^{٤} - ٧ س^{٣} + ٢١ س^{٢} - ١٣ س + ٢ \equiv ٢ ب س^{٥} - ٢ حـ س^{٤} + (٢ د - ٣ ب) س^{٣} + (٢ ب - ٣ حـ) س^{٢} + (٢ حـ - ٣ د) س + ٢ د$$

فلايجاد الامثال ب ، حـ ، د نطابق الطرفين . اي اننا نساوي امثال الحدود المتشابهة (التي درجتها واحدة) في الطرفين ، فنجد ان :

الحدين اللذين يحتويان على س^٥ يعطيان المساواة :

$$٦ = ٢ ب \qquad \text{ومنها :} \qquad ب = ٣$$

والحدين اللذين يحتويان على س^٤ يعطيان المساواة :

$$-١٠ = ٢ حـ \qquad \text{ومنها :} \qquad حـ = -٥$$

والحدين اللذين يحتويان على س^٣ يعطيان المساواة :

$-٧ = ٢د - ٣ب$ ومنها : $د = ١$

واما الحدان اللذان يحتويان على $س^{٢}$ يعطيان المساواة :

$٢١ = ٢ب - ٣ح$

والحدان اللذان يحتويان على س يعطيان المساواة :

$-١٣ = ٢ح - ٣د$

والحدان اللذان لا يحتويان على س يعطيان المساواة :

$٢ = ٢د$

وهذه المعادلات الثلاث الاخيرة محققة بالقيم السابقة التي وجدناها الى ب ، ح ، د

مما يدل على ان القسمة قابلة . وانه اذا وضعنا عوضاً عن ب ، ح ، د ما يساويها نجد خارج القسمة وهو :

$٣س^{٢} - ٥س + ١$

وهذا ما وجدناه في طريقة التقسيم رأساً .

١٣١ - الحالة الثانية القسمة غير محكنة - باقي القسمة : لايوجد دائماً كثيرة حدود اذا ضربناها بكثيرة الحدود الممثلة للمقسوم عليه تعطي كثيرة الحدود المقسومة ، فنقول في هذه الحالة ان القسمة غير قابلة .

مثال : لتقسيم كثيرة الحدود [المرتبة] :

$٢س^{٤} - ٣س^{٢} + ٥س - ٤$

على كثيرة الحدود [المرتبة ايضاً] :

$س^{٢} - ٣س + ٢$

نرى اثناء عمل التقسيم ان درجة البواقي الجزئية آخذة في التناقص ، فبينما نرى الباقي الجزئي الاول من الدرجة الثالثة نرى ان الباقي الجزئي الثاني من الدرجة الثانية وهكذا . اذن لا بد ان نصل عند المثابرة على العمل الى باقٍ جزئي تكون درجته اقل من درجة المقسوم عليه ، وهذا الباقي هو ما نسميه بالباقي الاخير او باقي القسمة . اذ عنده يتوقف عمل التقسيم ، واليك العملية :

$$\begin{array}{r|l} س^{٢} - ٣س + ٢ & ٢س^{٤} - ٣س^{٣} + ٥س - ٤ \\ \hline ٢س^{٢} + ٦س + ١١ & \mp ٢س^{٤} \pm ٦س^{٣} \mp ٤س^{٢} \\ \hline & + ٦س^{٣} - ٧س^{٢} + ٥س - ٤ \\ & \mp ٦س^{٣} \pm ١٨س^{٢} \mp ١٢س \\ \hline & + ١١س^{٢} - ٧س - ٤ \\ & \mp ١١س^{٢} \pm ٣٣س \mp ٢٢ \\ \hline & ٢٦س - ٢٦ \end{array}$$

فكثيرة الحدود $٢س^{٢} + ٦س + ١١$ هي خارج القسمة ، واما $٢٦س - ٢٦$ فهو الباقي ، لان درجة هذا الباقي اقل من درجة المقسوم عليه $س^{٢} - ٣س + ٢$ فلا يمكننا ان نداوم على العمل [بشرط ان يكون خارج القسمة حاوياً على حدود صحيحة] لذلك نقف عند هذا الحد من العمل ونقول ان باقي القسمة في هذا المثال هو $٢٦س - ٢٦$. واما المطابقة المحققة فهي :

$$٢س^{٤} - ٣س^{٣} + ٥س - ٤ \equiv (س^{٢} - ٣س + ٢)(٢س^{٢} + ٦س + ١١) + ٢٦س - ٢٦$$

اي كما في الحساب :

المقسوم $\equiv$ المقسوم عليه $\times$ خارج القسمة + الباقي .

ومما سبق ينتج التعريف العام الآتي :

تعريف : تقسيم كثيرة الحدود ب على كثيرة الحدود ح هو ايجاد كثيرتي الحدود ح ، ق اللتين تحققان المطابقة :

$$ب \equiv ح \times ح + ق$$

وبشرط ان تكون درجة ق $<$ درجة ح .

١٣٢ — بعض الحالات التي تكون فيها القسمة غير قابلة : ان العمليات التي نجريها في التقسيم تدلنا احياناً على بعض حالات خاصة تكون القسمة فيها غير قابلة . فبعد ترتيب المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة الى قوى حرف واحد (س مثلاً) يكون التقسيم غير قابل فيما :

١ً) اذا كان الحد الاول (الايمن) من المقسوم غير قابل للقسمة على الحد الاول (الايمن) من المقسوم عليه .

٢ً) اذا كان الحد الاخير (الايسر) من المقسوم غير قابل للقسمة على الحد الاخير (الايسر) من المقسوم عليه .

٣ً) اذا كان الحد الاول (الايمن) من الباقي الجزئي غير قابل للقسمة على الحد الاول (الايمن) من المقسوم عليه .

٤ً) اذا داومنا على عمليات التقسيم ووجدنا باقياً غير (الصفر) درجته اصغر من درجة المقسوم عليه .

وهنالك بعض حالات نحصل عليها اذا رتبنا المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة الى القوى المتزايدة لحرف واحد .

مثال : ليكن المطلوب تقسيم الكمية : $٢ - ٣س^{٢} + س^{٤}$ على $١ - س^{٢}$ فنرى انه اذا كان التقسيم ممكناً لزم ان يكون خارج القسمة من الدرجة الاولى ، اي ذا حدين فقط . لذلك اذا وجدنا انفسنا مضطرين الى ان نكتب في خارج القسمة حداً ذا درجة اعلى من الدرجة الاولى نفهم ان التقسيم غير قابل .

وحقيقة في عملية التقسيم :

$$\begin{array}{r|l} ١ - س^{٢} & ٢ - ٣س^{٢} + س^{٤} \\ \hline ٢ - س^{٢} & \mp ٢ \pm ٢س^{٢} \\ \hline & - س^{٢} + س^{٤} \\ & \pm س^{٢} \quad \mp س^{٤} \\ \hline & س^{٢} - س^{٤} \end{array}$$

نرى ان القسمة غير ممكنة لان درجات البواقي الجزئية آخذة بالتزايد ، ويمكن ان نثابر على التقسيم الى ما لا نهاية واذا وقفنا التقسيم عند الحد $- س^{٢}$ مثلاً نجد المطابقة الآتية :

$$٢ - ٣س^{٢} + س^{٤} \equiv (١ - س^{٢})(٢ - س^{٢}) + س^{٤} - س^{٤}$$

ومن هنا نرى ان الانسب غالباً ان نرتب المقسوم والمقسوم عليه بالنسبة الى القوى المتناقصة .

تنبيه : ان المعلومات التي سنسردها في الفصلين الآتيين بصورة مختصرة جداً ، وان تكن خارجة عن برنامج الصف الثاني ، الا انه يمكن اعتبارها كتطبيقات على المباحث المذكورة فيما سبق وتفيد الطالب كثيراً في حل المسائل .

الفصل السادس

معلومات عن كثيرات الحدود المطابقة للصفر

١٣٣ – تعاريف : ١) تكون كثيرة الحدود صحيحة منطقية بالنسبة الى الحرف س ، كما رأينا سابقاً ، اذا كانت لا تحوي على س في المخرج او تحت اشارة جذر .

وتكون صحيحة تامة ومن الدرجة ن اذا كانت حاوية على جميع القوى للحرف س اعتباراً من القوة س^ن حتى القوة س^٠ اي القوة التي لا تحوي على س .

وهكذا كثيرة الحدود : $س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٧ س - ٤$ هي كثيرة حدود صحيحة وتامة ومن الدرجة الثالثة ، ولكن $س^{٣} - ١$ هي كثيرة حدود غير تامة .

٢) لتكن كثيرة الحدود $ح = ٣ س^{٢} - ٥ س + ٧$ فنرى بسهولة انه لكل قيمة اختيارية نعطيها الى س يوجد قيمة خاصة لكثيرة الحدود ، ونرى ان ح تابعة الى س لذلك كثيراً ما نرمز لكل كثيرة حدود بالنسبة الى س بالرمز تا (س) الذي نقرؤه تابع س اي [تابع الى س] فنفس المثال السابق يكتب :

$$تا (س) = ٣ س^{٢} - ٥ س + ٧$$

وبصورة عامة الرمز تا (س) يدل على كثيرة حدود حاوية على س .

لنبدل في طرفي المساواة ثا (س) = ٣ س^{٢} - ٥ س + ٧ كل س بالعدد ٢ فنجد :

$$\text{ثا}(٢) = ٣ \times ٢^{٢} - ٥ \times ٢ + ٧$$

اي ان الرمز ثا (٢) يدل على قيمة ثا (س) العددية عند ما نبدل كل س بالعدد ٢ . في المثال السابق ثا (٢) = ٩ .

٣ً) اذا كانت لدينا كثيرة حدود ورمزنا لها بالرمز ثا (س) ورأينا ان قيمها العددية من اجل اي قيمة اعطيناها الى س هي صفر ، نقول وقتئذ ان كثيرة الحدود المذكورة تطابق الصفر ، ونكتب : ثا (س) ≡ ٠ .

١٣٤ - نظرية : الشرط اللازم الكافي لتكون كثيرة حدود ما مطابقة للصفر هو ان يكون جميع امثال حدودها صفراً ، وان يكون الحد المعلوم فيها (غير الحاوي على س) صفراً ايضاً .

اي الشرط اللازم الكافي لتكون كثيرة الحدود : ب س^{٢} + حـ س + د مطابقة للصفر ، هو ان يكون بآن واحد :

$$ب = ٠ \quad ، \quad حـ = ٠ \quad ، \quad د = ٠$$

البرهان : نترك برهان هذه النظرية للاختصار ونقبلها قبولاً شأننا في اكثر نظريات هذا البحث . ويمكن للقاريء ان يرى اثباتات هذه النظريات في كتاب الطبعة الاولى .

١٣٥ - تطبيقات : ١ً) اوجد العلاقة الكائنة ما بين الامثال : ب ، بَ ، حـ ، حـَ لتكون الكمية $\frac{ب\ س + حـ}{بَ\ س + حـَ}$ غير تابعة الى س

الحل : قولنا ان هذه الكمية غير تابعة الى س هو كقولنا ان قيمة هذه الكمية ثابتة مهما كانت س . اذن يجب ان يكون :

$$\frac{ب\ س + حـ}{بَ\ س + حـَ} \equiv ك \ .$$ باعتبار ك مقداراً ثابتاً .

ومنها : $ب س + حـ \equiv ك (ب' س + حـ')$

فبما ان قيمة الجانب الاول تساوي قيمة الجانب الثاني مهما كانت س ، اذن يجب ان يكون فرقهما مطابقاً للصفر ، اي يجب ان يكون :

$$ب س + حـ - ك (ب' س + حـ') \equiv ٠$$

$$(ب - ك ب') س + حـ - ك حـ' \equiv ٠$$

فلاجل ان يكون الجانب الاول مطابقاً للصفر يجب ان يكون :

$ب - ب' ك = ٠$ ومنها : $ب = ب' ك$

$حـ - حـ' ك = ٠$ ومنها : $حـ = حـ' ك$

اي يجب ان يكون :

$$\frac{ب}{ب'} = ك \quad ، \quad \frac{حـ}{حـ'} = ك$$

ومنها : $\frac{ب}{ب'} = \frac{حـ}{حـ'}$ وهي العلاقة المطلوبة .

١٣٦ - تطبيقات : ٢) الشرط اللازم لتكون كثيرة حدود قابلة للقسمة على اخرى :

لتكن كثيرة الحدود المرتبة ما (س) التي من الدرجة م ، ولنفرض ان المراد تقسيم كثيرة الحدود هذه على كثيرة الحدود المرتبة ايضاً وهي عا (س) التي من الدرجة ع مع العلم ان $م > ع$.

فقولنا ان كثيرة الحدود ما (س) تقبل القسمة على كثيرة الحدود عا (س) كقولنا انه يمكن ايجاد كثيرة حدود مثل حا (س) تحقق المطابقة الآتية :

ما (س) $\equiv$ عا (س) $\times$ حا (س) اي

المقسوم $\equiv$ المقسوم عليه $\times$ حاصل القسمة

الا انه لا تكون كثيرة الحدود ما (س) قابلة للقسمة على كثيرة الحدود عا (س) بصورة دائمة ، بل يكون هنالك باقٍ للقسمة نرمز له بالرمز با (س)

وتكون المطابقة وقتئذ :

ما (س) ≡ عا (س) × حا (س) + با (س) اي :

المقسوم ≡ المقسوم عليه × حاصل القسمة + الباقي

وكما رأينا سابقاً تكون درجة باقي القسمة اقل من درجة المقسوم عليه دائماً ، لذلك اذا كانت درجة المقسوم عليه ع فان درجة الباقي اقل او تساوي ع — ١ .

ونستنتج مما سبق ان الشرط اللازم لتكون كثيرة الحدود ما (س) قابلة القسمة على كثيرة الحدود عا (س) هو ان يكون الباقي با (س) مطابقاً للصفر ، وهذا الشرط هو : با (س) ≡ ٠ وعليه :

ليكون با (س) مطابقاً للصفر يجب ان تكون امثال جميع حدوده مع الحد المعلوم صفراً .

١٣٧ — مثال : عين قيم الاحرف ب ، حـ ، ل الموجودة في كثيرة الحدود :

$$٢س^{٥} - ٥س^{٤} + بس^{٣} + حـس + ل$$

حتى تكون قابلة للقسمة على $س^{٢} - ٢س^{٢} + ٣$

لنجر عملية القسمة فنجد :

$س^{٢} - ٢س^{٢} + ٣$	$٢س^{٥} - ٥س^{٤} + بس^{٣} + حـس + ل$
$٢س^{٣} - س - ٢$	$\mp ٢س^{٥} \pm ٤س^{٤} \mp ٦س^{٣}$
	$- س^{٤} + (ب - ٦)س^{٣} + حـس + ل$
	$\pm س^{٤} \mp ٢س^{٢} \pm ٣س$
	$-٢س^{٢} + (ب - ٦)س^{٢} + (حـ + ٣)س + ل$
	$\pm ٢س^{٢} \mp ٤س^{٢} \pm ٦$

اي الباقي هو : $(ب - ١٠)س^{٢} + (حـ + ٣)س + ل + ٦$

فلكي تكون القسمة قابلة يجب ان يكون هذا الباقي مطابقاً للصفر ، اي يجب ان يكون بآن واحد :

ب − ١٠ = ٠ ومنها : ب = ١٠

حـ + ٣ = ٠ ومنها : حـ = − ٣

ل + ٦ = ٠ ومنها : ل = − ٦

وهي القيم المطلوبة .

الفصل السابع

قابلية القسمة على س ± ب

وبصورة عامة : على ب س ± حـ

١٣٨ – تمهيد : كثيرة الحدود التي من الشكل :

هـ س^{٢} + ط س + د

تسمى بذات الحدود الثلاثة . ويهمنا كثيراً ان نعلم اذا كانت ذات الحدود الثلاثة تقبل القسمة على ذي الحدين : س ± ب او : ب س ± حـ ولهذا اتينا بهذا البحث :

لنأخذ الكمية : ٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥ ولنقسمها على ذي الحدين س − ٢ فاذا اجرينا عملية القسمة نجد ان :

س − ٢	٢ س^{٣} − ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥
٢ س^{٢} + س + ٦	∓ ٢ س^{٣} ± ٤ س^{٢}
	+ س^{٢} + ٤ س + ٥
	∓ س^{٢} ± ٢ س
	+ ٦ س + ٥
	∓ ٦ س ± ١٢
	١٧

ومن الطبيعي ان يكون باقي القسمة ، بفرض وجوده في هذا المثال ، عدداً من الدرجة صفر ، لان المقسوم عليه من الدرجة الاولى ، ولان درجة الباقي تكون بصورة دائمة اقل من درجة المقسوم عليه .

والمطابقة الكائنة بين المقسوم والمقسوم عليه في هذا المثال هي :

$$٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥ \equiv (س - ٢)(٢ س^{٢} + س + ٦) + ١٧$$

وهذه المطابقة صحيحة مهما كانت قيمة س ، وبصورة خاصة عند ما يكون س = ٢ نجد المساواة الصحيحة الاتية :

$$٢ \times ٢^{٣} - ٣ \times ٢^{٢} + ٤ \times ٢ + ٥ = ٠ \times (٢ \times ٢^{٢} + ٢ + ٦) + ١٧$$

فالطرف الاول من هذه المساواة يمثل القيمة العددية للمقسوم عند ما يكون س = ٢ واما الطرف الثاني منها فيدلنا على باقي القسمة وهو ١٧ ، لان القسم الاول منه مضروب بصفر فهو صفر . اي ان :

$$٢ \times ٢^{٣} - ٣ \times ٢^{٢} + ٤ \times ٢ + ٥ = ١٧$$

اذن باقي القسمة ١٧ يساوي القيمة العددية للمقسوم عند ما نجعل س = ٢ ، وايجاد هذا الباقي لا يحتاج الى قسمة ، اذ يكفي في المقسوم ان نبدل س بالعدد ٢ وهذه القيمة العددية التي تعطينا الباقي تدلنا على قابلية الانقسام او عدمها حسبما تكون صفراً او غير الصفر .

ومما سبق تنتج النظرية الاتية :

١٣٩ - نظرية : باقي قسمة كثيرة الحدود ا (س) الصحيحة على المقدار س - ب يساوي القيمة العددية لكثيرة الحدود هذه عند ما نبدل س بالعدد + ب . اي ان باقي القسمة يساوي ا (ب) .

البرهان : لنفرض ان حاصل قسمة كثيرة الحدود ا (س) على المقدار (س - ب) هو : حا (س) .

فبما ان المقسوم عليه س - ب من الدرجة الاولى ، اذن باقي القسمة الذي تكون درجته اقل من درجة المقسوم عليه ، يكون عدداً ، ولنرمز له بالحرف ق .

فاذا كتبنا الان ان المقسوم يطابق المقسوم عليه × حاصل القسمة + الباقي نجد المطابقة الاتية :

$$\text{با}(س) \equiv (س - ب) \times \text{حا}(س) + ق$$

فالجانب الاول من هذه المطابقة يساوي الجانب الثاني من اجل اي قيمة كانت الى س وفي الحالة الخاصة عند ما نجعل في الطرفين س مساوية الى ب نجد ان :

$$\text{با}(ب) = ق \qquad \text{وهو المطلوب :}$$

نتيجة : لا يجاد باقي قسمة كثيرة الحدود با (س) على س — ب يكفي تشكيل با (ب) اي تبديل كل س بالعدد ب .

وبنفس الطريقة السابقة نبرهن على صحة النظرية الاتية :

١٤٠ — نظرية : باقي قسمة كثيرة الحدود با (س) على المقدار س + ب يساوي با (— ب) الحاصل من تبديل كل س بالعدد (— ب)

١٤١ — نتائج : ١ً) تكون كثيرة الحدود الصحيحة با (س) قابلة للقسمة على س — ب فيما اذا كان با (ب) = ٠ لان با (ب) هو الباقي .

٢ً) وكذلك تكون كثيرة الحدود الصحيحة با (س) قابلة للقسمة على س + ب فيما اذا ابدلنا س بالعدد (— ب) وكان الناتج صفراً ، اي فيما اذا كان با (— ب) = ٠ وبالعكس :

٣ً) اذا ابدلنا في كثيرة الحدود كل س بالعدد + ب ورأينا ان الناتج صفر تكون كثيرة الحدود هذه قابلة للقسمة على س — ب .

٤ً) واذا ابدلنا في كثيرة الحدود كل س بالعدد — ب ورأينا الناتج صفراً تكون كثيرة الحدود هذه قابلة للقسمة على س + ب .

الخلاصة : ١ً) الشرط اللازم الكافي لتكون كثيرة الحدود با (س) قابلة للقسمة على س — ب هو ان يكون با (ب) = ٠

٢) والشرط اللازم الكافي لتكون ما (س) قابلة للقسمة على س+ ب هو ان يكون ما (− ب) = ٠ .

١٤٢ – مثال : ١) اوجد باقي قسمة :

٥ س^{٤} − ٣ س^{٣} − ٧ س + ١٥ على س − ٢

الحل : نجد هذا الباقي بابدال كل س بالعدد + ٢ فيكون :

ق = ٥ × ٢^{٤} − ٣ × ٢^{٣} − ٧ × ٢ + ١٥ = ٥٧

مثال : ٢) اوجد باقي قسمة :

٥ س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٧ س + ٢٥ على س + ٣

الحل : نجد هذا الباقي بابدال كل س بالعدد − ٣ فيكون :

ق = ٥ × (− ٣)^{٣} + ٤ (− ٣)^{٢} + ٧ (− ٣) + ٢٥ = − ٩٥

تمرين : اجرِ عملية التقسيم وتحقق من هذه النتائج .

مثال : ٣) عين قيمة هـ لتكون كثيرة الحدود ٣ س^{٣} + ٥ س^{٢} + هـ قابلة للقسمة على س + ٥ .

الحل : تكون القسمة ممكنة فيما اذا كان الباقي صفراً ، ونجد هذا الباقي بابدال كل س بالعدد (− ٥) فيكون :

ما (− ٥) = ق = ٣ (− ٥)^{٣} + ٥ (− ٥)^{٢} + هـ

او : ق = − ٣ × ٥^{٣} + ٥ × ٥^{٢} + هـ = − ٢٥٠ + هـ

وهذا الباقي يكون صفراً اذا كان :

− ٢٥٠ + هـ = ٠

اي : هـ = ٢٥٠

تمرين : اجرِ عمليات التقسيم السابقة وتحقق من صحة هذه النتائج .

١٤٣ – نظرية عامة : باقي قسمة كثيرة الحدود الصحيحة ما (س) على ذات الحدين التي من الدرجة الاولى ب س ± حـ يساوي الى القيمة العددية

التي تأخذها كثيرة الحدود هذه عند ما نبدل س بالعدد الذي يجعل المقسوم عليه صفراً.

البرهان : نبرهن على صحة هذه النظرية بنفس الطريقة المتبعة في اثبات النظريتين المتعلقتين بقابلية القسمة على س ± ب لذلك نترك للتلميذ اثباتها .

مثال : اوجد باقي قسمة كثيرة الحدود :

$$٥ س^{٤} - ٣ س^{٣} + ٧ س^{٢} - ٩ \quad \text{على} \quad ٢ س + ٣$$

الحل : يمكننا ايجاد هذا الباقي اذا ابدلنا كل س بالعدد $-\frac{٣}{٢}$ الذي يجعل المقسوم عليه ٢ س + ٣ صفراً ، فيكون الباقي هو :

$$ق = ٥ \left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٤} - ٣ \left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٣} + ٧ \left(-\frac{٣}{٢}\right)^{٢} - ٩ = \frac{٦٧٥}{١٦}$$

١٦٦ - نظرية : اذا كانت كثيرة الحدود ا (س) قابلة للقسمة على كل من المضاريب التي من الدرجة الاولى :

(س - ب) ، (س - حـ) ، (س - د) ، . . .

فانها تكون قابلة للقسمة على جداء هذه المضاريب ، وذلك بفرض ان الاعداد :

ب ، حـ ، د ، . . . مختلفة .

البرهان : لنبرهن على ان ا (س) تقبل القسمة على الجداء :

(س - ب) (س - حـ) (س - د)

بفرض ان ا (س) قابلة للقسمة على كل من المضاريب :

س - ب ، س - حـ ، س - د ، . . .

[تتمة البرهان تجدها في الطبعة الاولى] .

١٦٥ - التفريق الى مضاريب من الدرجة الاولى : لا يمكننا ان نعطي قاعدة عامة لتفريق كثيرة حدود الى مضاريب من الدرجة الاولى ، ولكن النظريات المذكورة آنفاً تساعدنا مع الاعتياد على ايجاد هذه المضاريب .

مثال : ١ً) اذا كانت كثيرة الحدود عبارة عن الفرق بين مربعي حدين فيمكن وضعها بشكل جداء مجموع في فضل استناداً على المطابقة :

$$ب^{٢} - حـ^{٢} = (ب - حـ)(ب + حـ)$$

٢ً) اذا تمكنا من ايجاد عدد مثل ب بحيث لو وضع في كثيرة الحدود ما (س) عوضاً عن كل (س) ورأينا ان الناتج صفر نقول ان كثيرة الحدود هذه قابلة للقسمة على (س - ب) فنضع عندئذ المضروب (س - ب) خارج قوس .

وان التجارب العائدة لهذه العملية تصبح محدودة فيما اذا طبقنا الملاحظة الاتية :

ملاحظة : لتكن كثيرة الحدود :

$$(س^{؟} + حـ س^{؟-١} + د س^{؟-٢} + \cdots + ل)$$

التي نفرض فيها الامثال اعداداً صحيحة .

فنحن نعلم (بند ١٣٢) انه اذا كانت هذه الكمية قابلة للقسمة على س - ب يجب ان يكون حدها الاخير ل قابلاً للقسمة على ب ، اذن يجب ان تكون ب احد مضاريب ل ومن ذلك نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة : الاعداد التي يجب تجربتها ، لايجاد المقسوم عليه (س ± ب) ، هي مضاريب ل ، ويجب ان نجربها مسبوقة باشارة + او - .

١٤٦ - مثال : ١) فرق كثيرة الحدود :

$$٣ س^{٢} - ٢١ س + ٣٦$$ الى مضاريب

الحل : يمكننا ان نكتب :

$$٣ س^{٢} - ٢١ س + ٣٦ = ٣ (س^{٢} - ٧ س + ١٢)$$

ويمكن ان نلاحظ ان كثيرة الحدود : $س^{٢} - ٧ س + ١٢$ تصير صفراً عند ما نجعل س = ٣ ونلاحظ ان ٣ هي احدى مضاريب الـ ١٢ ، اذن كثيرة الحدود هذه قابلة للقسمة على س - ٣ فاذا اجرينا عملية التقسيم نجد ان خارج القسمة هو : س - ٤ اذن :

$$٣ س^{٢} - ٢١ س + ٣٦ = ٣ (س - ٣) (س - ٤)$$

وهو المطلوب .

مثال : ٢) فرق كثيرة الحدود :

$$س^{٤} - ١٠ س^{٣} + ٣١ س - ٣٠$$

الى مضاريب من الدرجة الاولى :

الحل : لنتحرّ قاسماً من الشكل س - ب فالاعداد التي يجب ان نجربها هي مضاريب الـ ٣٠ الاولية اي :

١ ، ٢ ، ٣ ، ٥

فالاعداد + ١ او - ١ لا تجعل الكمية المعطاة صفراً ، ولكن يمكن ان نلاحظ ان هذه الكمية تصبح صفراً عند ما يكون س = ٢ اذن هذه الكمية تقبل القسمة على المقدار (س - ٢) فاذا اجرينا عملية التقسيم نجد :

$$س^{٤} - ١٠ س^{٣} + ٣١ س - ٣٠ = (س - ٢) (س^{٣} - ٨ س + ١٥)$$

ولكن الكمية : $س^{٣} - ٨ س + ١٥$ تصبح صفراً عند ما يكون س = ٣ اذن تقبل القسمة على س - ٣ ويكون خارج القسمة هو : (س - ٥) اذن :

$$س^{٣} - ٨ س + ١٥ = (س - ٣) (س - ٥)$$

ومنها :

$$س^{٤} - ١٠ س^{٣} + ٣١ س - ٣٠ = (س - ٣) (س - ٥) (س - ٢)$$

وهو المطلوب .

ملاحظة : يفيدنا التحليل الى مضاريب في اختصار الكسور وفي حل بعض المعادلات التي لها جذور بسيطة وليست من الدرجة الاولى .

الفصل الثامن

الاوضاع المهمة في الجبر

١٤٧ - تمهيد : رأينا سابقاً ان الرمز $\frac{هـ}{ن}$ يدل على حاصل قسمة العدد هـ على العدد ن ، اي يدل على عدد اذا ضرب في المخرج ن نتجت الصورة هـ ، فالكمية $\frac{هـ}{ن}$ لها معنى ، اي موجودة ما دام المخرج ن غير الصفر ، لانه لا يمكن ان نجد عدداً اذا ضرب في المخرج وهو صفر يكون الناتج هـ ، لذلك نقول انه لا معنى صريحاً لعدد مقسوم على صفر .

١٤٨ - تعريف : ١) نقول ان العدد الموجب المتحول ب يتزايد الى ما لا نهاية فيما اذا اصبح اعظم من اي عدد موجب مفروض اردناه مثل حـ ومهما عظم حـ .

٢) وكذلك نقول ان العدد الموجب المتحول حـ يتقرب من الصفر فيما اذا اصبح اصغر ما يمكن ، اي اصغر من اي عدد موجب صغير اردناه مثل ق ومهما صغر ق .

ولنأخذ الآن الكسر الموجب $\frac{م}{س}$ حيث تدل م على عدد ثابت وحيث تدل (س) على كمية متحولة ، ولنجد ماذا يصبح هذا الكسر عند ما تتقرب س من الصفر .

١٤٩ - نظرية : تزداد الكمية الموجبة $\frac{م}{س}$ الى زائد ما لا نهاية عند ما تتقرب س من الصفر .

البرهان: بما ان م ثابتة فان الكسر $\frac{م}{س}$ يعظم كلما صغر مخرجه س ، فمثلاً

عند ما تكون $س = \frac{١}{١٠٠٠٠٠٠}$ نرى ان :

$$\frac{م}{س} = \frac{م}{\frac{١}{١٠٠٠٠٠٠}} = م \text{ مليوناً}$$

لذلك عند ما تتقرب س من الصفر فان القيمة المطلقة الى $\frac{م}{س}$ تتقرب من ما لا نهاية .

١٥٠ – الوضع $\frac{م}{٠}$: نستنتج من النظرية السابقة ان الكسر الموجب $\frac{م}{س}$ يمثل عدداً عظيماً . اي ينتهي الى ما لا نهاية ، عند ما تتقرب س من الصفر ، وبما اننا نرمز الى ما لا نهاية بالرمز ∞ لذلك نكتب : $\frac{م}{٠} = ∞$ اي : $\frac{م}{٠}$ تمثل عدداً عظيماً غير صريح .

ولو كان الكسر $\frac{م}{س}$ سالباً وتقربت س من الصفر فاننا نكتب : $\frac{م}{٠} = -∞$

فالرمز $-∞$ يدل على عدد سالب قيمته المطلقة عظيمة بقدر ما نريد .

ولما كان من المستحيل ايجاد العدد المساوي الى $\frac{م}{٠}$ لذلك نقول ان الوضع $\frac{م}{٠}$ يدل على استحالة .

١٥١ – الوضع $\frac{٠}{م}$: يدل هذا الوضع على عدد اذا ضرب بالمخرج م كان الناتج صفراً ، وبما انه لا يوجد الا الصفر ، بحيث لو ضرب بالعدد م يكون الناتج صفراً ، نستنتج ان : $\frac{٠}{م} = ٠$

١٥٢ - الوضع $\frac{م}{\infty}$: لنأخذ الكسر : $\frac{م}{س}$ الذي فيه الصورة م عدد موجب ثابت والمخرج س عدد موجب متحول يتزايد الى ما لا نهاية ، ولنوضح ان $\frac{م}{س}$ يتقرب من الصفر عند ما تتقرب س من ∞ .

لذلك نقول: بما ان المقسوم م ثابت، فكلما كبر المقسوم عليه س يصغر خارج القسمة $\frac{م}{س}$ ويتقرب من الصفر ، كذلك بتكبير المقسوم عليه س بقدر ما نريد يصغر خارج القسمة $\frac{م}{س}$ بقدر ما نريد ونكتب : $\frac{م}{\infty} = ٠$.

١٥٣ - الوضع $\frac{\infty}{م}$: لما كانت الـ ∞ غير محدودة ندرك مع التمعن ان $\frac{\infty}{م}$ بفرض م عدداً محدوداً هو ∞ ، لان حاصل قسمة عدد غير محدود على آخر محدود هو عدد غير محدود . لذلك نكتب مثلاً ان :

$$\frac{\infty}{٢} = \infty \qquad \text{وبالحالة العامة} \qquad \frac{\infty}{م} = \infty$$

وذلك بفرض م عدداً محدوداً .

١٥٤ - الوضع ÷ : ان الرمز ÷ يدل على عدد اذا ضرب في المخرج وهو صفر نتجت الصورة وهي صفر ايضاً ، وبما ان جداء اي عدد كان في صفر هو صفر نستنتج ان : الوضع ÷ يدل على عدد غير معين ، اي يمثل عدم تعيين .

١٥٥ - ملاحظة : من الاوضاع التي تمثل عدم تعيين ، الوضعان الآتيان :

١ً) $\frac{\infty}{\infty}$ = عدم تعيين ، لانه يمثل عدداً كبيراً غير محدود مقسوماً على عدد كبير غير محدود ايضاً .

٢ً) $\infty - \infty =$ عدم تعيين ايضاً ، لانه يمثل حاصل طرح عدد كبير غير محدود من عدد كبير غير محدود ايضاً .

الخلاصة :

١ً) $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$

٢ً) $\frac{0}{\text{عدد}} = 0$

٣ً) $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

٤ً) $\frac{\infty}{\text{عدد}} = \infty$

٥ً) واما $\div$ او : $\frac{\infty}{\infty}$ او : $\infty - \infty$

فكل منها يمثل عدم تعيين .

تمارين

١ - الجمع والطرح

١] احسب الكميات الآتية :

ك + ق + ح ؛ ك + ق − ح ؛ ك − ق + ح ،

− ك + ق + ح اذا علمت ان :

١ً) ك = س٣ + ٣ س٢ + ٣ س + ١

ق = س٢ + ٢ س + ١

ح = س + ١

٢ً) ك = ب٥ + ٣ ب٤ حـ − ٢ ب٣ حـ٢ + ٦ ب حـ٤

ق = ٢ ب٥ − ب٣ حـ٢ + حـ٥

ح = ٢ ب٤ حـ − ٦ ب حـ٤ + ٣ حـ

٣) ك = ب س٢ + ٥ س٣ − ٢ ب س + ٣ ب٢ س − ب٣ − س٣

ق = ب٣ + س٣ − ٣ ب٢ س + ٢ ب٣ − ب٣ س

ح = − ٢ ب٢ + س٢ + ب٣ س − ٥ س٣ + ب س٢

وتحقق من صحة النتائج بواسطة القيمة العددية للكميات ك ، ق ، ح

اذا فرض ان : س = ١ ، ب = ٢ ، حـ = ٣

٢] اجرِ العمليات الآتية :

١) ٤ س − ٥ − (٣س − ٤) + [٢ س − ٣ − (٢ س − ٧ س + ٥)]

٢ً) ٣ س − [ع − { س + (ع − ٣ س) }]

٣ً) ٥ ب − ٧ (حـ − د) − [٦ ب − (٣ حـ + ٢ د) + ٤ د −

(٢ ب − حـ − ٢ د) − ب]

* * *

٢ – الضرب والتقسيم

٢] اجرِ عمليات الضرب الآتية :

١ً) $(٢س^{٢} - ٣ع^{٢} - ٢س ع)(٥س^{٢} - ٢س ع)$

٢ً) $(٦س^{٥} - ٤س^{٤} - ١٩س^{٣} + ٢٣س^{٢} - ١٣س + ٣) \times$
$(٣س^{٢} - ٢س + ١)$

٣ً) $(٢س^{٣} - ٥س^{٢} - ٤س - ١)(٣س^{٢} - س + ٢)$

٤ً) $(٣س^{٢} + ٢س ع)(٢س^{٢} - ٣س ع + ع^{٢})$

٥ً) $(س^{٤} + س^{٣} + س^{٢} + س + ١)(س^{٢} - ٢س + ١)$

٤] اجرِ العمليات الآتية :

١ً) $[٢س + ع - (س + ٢ع)] \times (٣س - ٢ع)$

٢ً) $(٢ب - س)(٢حـ - ع) \times [(ب + ٢س)(حـ + ٢ع) -$
$٥(ب حـ + س ع)]$

٣ً) $[٣س^{٢} - ٢س(س - ع) - ع(س + ع)](٢س^{٢} -$
$٣س ع + ع^{٢})$

٤ً) $ب(حـ + د)(حـ^{٢} + د^{٢} - ب^{٢}) + حـ(د + ب)(د^{٢} +$
$ب^{٢} - حـ^{٢}) + د(ب + حـ)(ب^{٢} + حـ^{٢} - د^{٢}) - ٢ب حـ د \times$
$(ب + حـ + د)$

٥] احسب الكمية :

$(ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢})(س^{٢} + ع^{٢} + ص^{٢}) - (ب س + حـ ع + د ص)^{٢}$

٦] احسب الكمية :

$(ب^{٢} + حـ^{٢})(س^{٢} + ع^{٢}) - (ب س + حـ ع)^{٢}$

٧] احسب الكمية :

$$(٣س^{٢} - ٨س^{٢} + ٥س - ٤)(س^{٢} - ٧س + ١)$$

٨] احسب الكمية .

$$(١ - س + س^{٢} - س^{٣} + س^{٤} - س^{٥} + س^{٦}) \times (س - ب)$$

وماذا تصبح النتيجة اذا كان $ب = -١$

٩] اذا فرض ان :

$$ب^{٢} = \frac{٤}{٩}[٢(ل^{٢} + ف^{٢}) - ج^{٢}]$$

$$ح^{٢} = \frac{٤}{٩}[٢(ف^{٢} + ج^{٢}) - ل^{٢}]$$

$$د^{٢} = \frac{٤}{٩}[٢(ج^{٢} + ل^{٢}) - ف^{٢}]$$

احسب الكميات الآتية :

$ب^{٢} + ح^{٢} + د^{٢}$ ؛ $ب^{٢}ح^{٢} + ح^{٢}د^{٢} + د^{٢}ب^{٢}$ ؛ $ب^{٤}$ ؛ $ح^{٤}$ ؛ $د^{٤}$ ؛ $ب^{٤} + ح^{٤} + د^{٤}$.

١٠] احسب الكمية الآتية :

$$٥(س + ٢ع)^{٢} - (٣ع + ٢س)^{٢} + ٣(س + ٢ع) \times (س - ع) + (٤س - ع)^{٢}$$

١١] احسب الكمية :

$$\frac{(س + ب)^{٢}}{س^{٢} - ب^{٢}} - \frac{س - ب}{س^{٢} + ب س + ب^{٢}} - \frac{٤ب س}{س^{٣} - ب^{٣}}$$

١٢] اذا فرض ان : $ع = س + \frac{١}{س}$ احسب بدلالة ع فقط الكميات الآتية :

$$س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} \quad ؛ \quad س^{٣} + \frac{١}{س^{٣}} \quad ؛ \quad س^{٤} + \frac{١}{س^{٤}}$$

١٢] اذا فرض ان : $س - \frac{١}{س} = ص$ احسب بدلالة ص قيمة الكميات الآتية :

$$س^{٢} + \frac{١}{س^{٢}} \quad ؛ \quad س^{٣} - \frac{١}{س^{٣}} \quad ؛ \quad س^{٤} + \frac{١}{س^{٤}}$$

١٤] فرق الكميات الآتية الى مضروبين :

$$١٦ ب^{٢} س^{٢} - ٣٦ حـ^{٢} ع^{٢} \quad ؛ \quad ٩ ب^{٢} - ١ \quad ؛$$
$$س^{٢} - ٢ س + ١ - ع^{٢} \quad ؛ \quad س^{٢} - ٤ س + ٤ - ع^{٢} + ٢ ع - ١$$

١٥] فرق الكميات الآتية الى اربع مضاريب :

$$٤ ب^{٢} حـ^{٢} - (ب^{٢} + حـ^{٢} - د^{٢})^{٢} \quad ؛$$
$$(٢ ب حـ + ٢ د هـ)^{٢} - (ب^{٢} + حـ^{٢} - د^{٢} - هـ^{٢})^{٢}$$

١٦] احسب الكمية الآتية :

$$(س + ع + ص)^{٢} - (ع + ص - س)^{٢} - (ص + س - ع)^{٢} -$$
$$(س + ع - ص)^{٢}$$

١٧] اذا فرض ان : $ك = \frac{ب + حـ + د}{٢}$ احسب الكميات الآتية :

١ً) $ك (ك - ب) (ك - حـ) (ك - د)$

٢ً) $حـ د (ك - ب) + د ب (ك - حـ) + ب حـ (ك - د) -$
$ك^{٢} - (ك - ب) (ك - حـ) (ك - د)$

١٨] حقق المطابقة الآتية :

$$(ب^{٢} + حـ^{٢} + ب حـ)^{٢} \equiv ب^{٢} (ب + حـ)^{٢} + حـ^{٢} (ب + حـ)^{٢} +$$
$$ب^{٢} حـ^{٢}$$

١٩] حقق المطابقة الآتية :

$$(ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} + ب حـ + د حـ + د ب)^{٢} \equiv ب^{٢} (ب + حـ + د)^{٢} +$$
$$د^{٢} (ب + د + حـ)^{٢} + (ب حـ + د حـ + د ب)^{٢}$$

٢٠] حقق المطابقة الاتية :

$$(س^{٢} + ع^{٢} + ص^{٢})\ (ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢}) - (ب\ س + حـ\ ع + د\ ص)^{٢} \equiv$$
$$(حـ\ س - ب\ ع)^{٢} + (د\ ع - حـ\ ص)^{٢} + (ب\ ص - د\ س)^{٢}$$

٢١] حقق المطابقة الاتية :

$$\{(ب - حـ)\ (ب - د)\}^{٢} + \{(حـ - د)\ (حـ - ب)\}^{٢} +$$
$$\{(د - ب)\ (د - حـ)\}^{٢} \equiv$$
$$(ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} - ب\ حـ - ب\ د - حـ\ د)^{٢}$$

٢٢] بفرض ان :

$$ب + حـ + د + هـ = ب'$$
$$ب + حـ + د - هـ = حـ'$$
$$ب - حـ + د - هـ = د'$$
$$ب - حـ - د + هـ = هـ'$$

وان : $ب\ حـ\ (ب^{٢} + حـ^{٢}) = د\ هـ\ (د^{٢} + هـ^{٢})$

برهن على صحة العلاقة :

$$ب'\ حـ'\ (ب'^{٢} + حـ'^{٢}) = د'\ هـ'\ (د'^{٢} + هـ'^{٢})$$

٢٢] حقق المطابقة الاتية :

$$٤\ [(ب\ د' - د\ ب')^{٢} - (حـ\ د' - د\ حـ')\ (ب\ حـ' - د\ ب')] \equiv$$
$$(٢\ ب\ د' + ٢\ د\ ب' - حـ\ حـ')^{٢} - (حـ^{٢} - ٤\ ب\ د) \times$$
$$(حـ'^{٢} - ٤\ ب'\ د)$$

٢٤] حقق المطابقة الاتية :

$$(س + ع + ص)^{٣} - (س^{٣} + ع^{٣} + ص^{٣}) \equiv$$
$$٣\ (س + ع)\ (س + ص)\ (ص + ع)$$

٢٥] حقق المطابقة الاتية :

$$(س + ع)\ (س + ص) - س^{٢} \equiv (ع + ص)\ (ع + س) - ع^{٢}$$

ويطابق ايضاً $(س + ص)(ص + ع) - ص^{٢}$

٢٦] حقق المطابقة الاتية :

$$س^{٢} + ع^{٢} + ص^{٢} - ٣ س ع \equiv (س + ع + ص) \times \left(\frac{(س - ع)^{٢}}{٢} + \frac{(ص - س)^{٢}}{٢} + \frac{(ص - ع)^{٢}}{٢} \right)$$

٢٧] اذا كان : $ب + حـ + د + هـ = ٠$ برهن على صحة العلاقات الاتية :

١ً) $ب هـ (ب + هـ)^{٢} + حـ د (ب - هـ)^{٢} + ب حـ (ب + حـ)^{٢} + د هـ (ب - حـ)^{٢} + ب د (ب + د)^{٢} + حـ هـ (ب - د)^{٢} + ٤ ب حـ د هـ = ٠$

٢ً) $(ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} + هـ^{٢})^{٢} = ٩ (حـ د هـ + د هـ ب + هـ ب حـ + ب حـ د)^{٢}$

٣ً) $(ب^{٢} + حـ^{٢} + د^{٢} + هـ^{٢}) = ٩ (حـ د - ب هـ)(د ب - حـ هـ)(ب حـ - د هـ)$

٢٨] اجرِ عمليات القسمة الاتية :

$٣٦ ب^{٤} حـ^{٢} د^{٢} هـ \div ٣ ب^{٢} حـ د^{٢}$ ؛ $-١٢٥ ب^{٨} حـ د^{٦} هـ^{٢} \div ٥ ب^{٣} د^{٥} هـ$ ؛

$-١٨٠ \left[ب^{ن} حـ^{د} ق^{هـ - ١} \right] \times ص \div ٦٠ ب^{٢} حـ^{٢} ص$ ؛

$٥٤ ب^{ن + ٢} \times حـ^{د - ١} \times ص^{د} \div \left(- ب^{ن} حـ^{د - ٢} \times ص^{ن - ١} \right)$ ؛

$(-٢٤ ب^{٢} س + ٤٠ ب^{٣} س^{٢} + ٥٦ ب س^{٤} - ٧٢ ب^{٢} س^{٣}) \div (-٨ ب س)$ ؛

$\left(٢٥ ب^{٢} حـ^{٢} - \frac{١}{٣} ب حـ + \frac{٤}{٥} ب^{٢} حـ - ٧ ب حـ^{٢} \right) \div (-٨ ب حـ)$

٢٩] قسم كثيرة الحدود :

$س^{٤} - ٥ س + ٤$ على : $س^{٢} - ٢ س + ١$

٢٠] قسم كثيرة الحدود :

$$١٨ب^{٤}ح^{٦} - ٣٢ب^{٣}ح^{٥} + ١٨ب^{٦}ح^{٤} - ٣٣ب^{٥}ح^{٣} + ٢٣ب^{٢}ح^{٢} + ١٤ب ح$$

على :

$$٦ب^{٤}ح + ٧ب ح^{٤} - ٢ب^{٢}ح^{٣} - ٣ب^{٣}ح^{٢}$$

٢١] احسب الكمية :

$$\frac{ب\sqrt{أ}\,ح + ح\sqrt{أ}\,ب}{\sqrt{أ}\,ب + \sqrt{أ}\,ح} \times \sqrt{\frac{ب^{٢}ح + ح^{٢}ب}{ب^{٢} + ح^{٢}}}$$

٢٢] احسب الكمية :

$$\left(\frac{ب}{ل+١} + \frac{ل-١}{ب}\right) \div \left(\frac{ب}{ل+١} - \frac{ل-١}{ب}\right)$$

٢٣] اختصر الكسرين الآتيين :

$$\frac{\sqrt{أ}\,ب - ح + \dfrac{١}{\sqrt{أ}\,ب + ح}}{١ + \dfrac{١}{\sqrt{أ}\,ب^{٢} - ح^{٢}}} \quad ، \quad \frac{١ + \dfrac{س}{\sqrt{أ}\,س^{٢} + ١}}{س + \sqrt{أ}\,س^{٢} + ١}$$

٢٤] احسب الكمية :

$$١ + \frac{س + \sqrt{أ}}{١ + \sqrt{أ}} + \frac{س - \sqrt{أ}}{١ - \sqrt{أ}}$$

٢٥] اختصر :

$$\frac{\dfrac{س}{\dfrac{١}{س}} + ١ - \dfrac{١}{س+١}}{\dfrac{س}{\dfrac{١}{س}} - س - \dfrac{١}{س-١}}$$

٢٦] اختصر :

$$\left\{\frac{\frac{١}{س}}{\frac{١}{س}+١}+\frac{\frac{١}{س}-١}{\frac{١}{س}}\right\} \div \left\{\frac{\frac{١}{س}}{\frac{١}{س}+١}-\frac{\frac{١}{س}-١}{\frac{١}{س}}\right\}$$

٢٧] احسب بدلالة س قيمة الكمية :

$$\frac{\sqrt{ب\,ص^{٢}-ب^{٢}}}{ص} \quad \text{اذا فرض ان :} \quad ص=\frac{\sqrt{ب\,ع^{٢}-ب^{٢}}}{ع}$$

$$\text{وان :} \quad ع=\frac{\sqrt{ب\,س^{٢}-ب^{٢}}}{س}$$

٢٨] حقق المطابقة الآتية :

$$\frac{ع^{٢}ص^{٢}}{ح^{٢}د^{٢}}+\frac{(ع^{٢}-ح^{٢})(ص^{٢}-ح^{٢})}{ح^{٢}(ح^{٢}-د^{٢})}+\frac{(ع^{٢}-د^{٢})(ص^{٢}-د^{٢})}{د^{٢}(د^{٢}-ح^{٢})}\equiv ٠$$

٢٩] برهن على صحة العلاقة الاتية :

$$\frac{ح+د}{ب(ب+ح+د)}\equiv\frac{ح}{ب(ب+ح)}+\frac{د}{(ب+ح)(ب+ح+د)}$$

٤٠] اذا كان $ب+ح+د=٠$ برهن على صحة المساواة الاتية :

$$\left(\frac{ح-د}{ب}+\frac{د-ب}{ح}+\frac{ب-ح}{د}\right)\times$$

$$\left(\frac{ب}{ح-د}+\frac{ح}{د-ب}+\frac{د}{ب-ح}\right)=٩$$

٤١] عين ق ، هـ حتى تكون كثيرة الحدود :

$س^{٤} - س^{٢} + ٤ س^{٢} + هـ س + ق$

قابلة للقسمة على $س^{٢} + ١$

٤١] عين ق ، هـ حتى تكون الكمية : $س^{٤} + ١$ قابلة للقسمة على $س^{٢} + هـ س + ق$

٤٢] عين هـ ، ق ، ح حتى تكون كثيرة الحدود :

$٦ س^{٥} - ١٧ س^{٤} + ٧ س^{٣} - هـ س^{٢} + ق س + ح$

قابلة للقسمة على $٣ س^{٣} - ٤ س^{٢} + ٥ س - ٧$

٤٣] اوجد ، دون اجراء عملية القسمة ، باقي القسمة في عمليات التقسيم الاتية :

$(٥ س^{٥} - ٢ س^{٣} + ٧ س^{٢} - س - ٩) : (س - ٢)$

$(٣ س^{٤} + ٢ س^{٣} + ٥ س - ١١) : (س + ٣)$

$(٧ س^{٥} + ٤ س^{٤} - ٣ س^{٢} + ٢ س - ٥) : (٣ س + ٢)$

$(٣ س^{٤} - ٢ س^{٣} - ٧ س^{٢} - ١٧ س + ٣٠) : (س - ٢)$

٤٤] عين هـ حتى تكون الكمية : $س^{٣} - ٥ س^{٢} + ٧ س + هـ - ٥$ قابلة للقسمة على $(س - ٤)$

٤٥] برهن على ان كثيرة الحدود : $(ب + حـ)^{٢} + د^{٢}$ قابلة للقسمة على $ب + حـ + د$ ثم اوجد حاصل القسمة .

٤٦] عين هـ حتى تكون الكمية :

$هـ (س^{٢} ع^{٢} + ع^{٢} ص^{٢} + ص^{٢} س^{٢}) - (س^{٤} + ع^{٤} + ص^{٤})$

قابلة للقسمة على $س + ع + ص$

٤٧] برهن ان الكمية :

$س^{٢} ع - س ع^{٢} + ص^{٢} س - ص س^{٢} + ع^{٢} ص - ع ص^{٢}$

تقبل القسمة على $(س - ع)(ص - س)(ع - ص)$

٤٨] فرق الكميات الآتية الى مضاريب من الدرجة الاولى :

$س^{٢} - ١٠ س + ٢١$ ؛ $س^{٢} - ٢ س + ١٥$ ؛

٣ س٢ — ٩ ب س + ٦ ب٢ ؛ س٤ — ٤ س٢ — س٢ + ١٦ س — ١٢

٥٠] فرق ذات الحدود الكثيرة الى مضاريب :

ب٢ (حـ — د) + حـ٢ (د — ب) + د٢ (ب — حـ)

٥١] لتكن ا (س) كثيرة حدود صحيحة بالنسبة الى (س) ، ولتكن عا (س) كثيرة حدود اخرى بالنسبة الى (س) تصبح صفراً عند ما يكون (س) يساوي ب . برهن على ان ا (ب) يساوي العدد الذي ينتج من ابدال كل (س) بالعدد (ب) في باقي قسمة ا (س) على عا (س)

تطبيقات: احسب القيمة العددية للكمية : ٢ س٣ — ٣ س٢ — ٢ س + ٥ عند ما يكون (س) يساوي ٢ (√٢ + ١) اذا علم ان هذه الكمية تجعل كثيرة الحدود س٢ — ٤ س — ٤ صفراً .

٥٢] برهن على انه اذا قسمنا ا (س) بالتتابع على:

(س — ب) ، (س — حـ) ، (س — د)

يكون خارج القسمة الاخير يساوي نفس خارج القسمة فيما لو قسمنا ا (س) على الجداء (س — ب) (س — حـ) (س — د) واستنتج من ذلك باقي هذه القسمة الاخيرة من البواقي التالية اذا قسمنا ا (س) على كل مضروب على حدة .

٥٢] قسمنا كثيرة الحدود ا (س) اولاً على (س — ١) ثم قسمناها ايضاً على (س — ٢) فاعطى التقسيم الاول الباقي ٦ واعطى التقسيم الثاني الباقي ١٨ . اوجد باقي هذه الكمية عند ما نقسمها على :

(س — ١) (س — ٢)

الباب الثاني

المعادلات التي من الدرجة الاولى

البحث الاول

المعادلات التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد

الفصل الأول

تعاريف ونظريات عامة

١٥٦ — تعريف: المعادلة هي مساواة ما بين تركيبين جبريين ما .

مثال: المساواة : $س + ١٢ = ١٤ - ٣س$ هي معادلة :

والمعادلة (هذه المساواة) لا تكون محققة في الحالة العامة الا من اجل قيم مخصوصة تعطى بآن واحد للمجاهيل الموجودة في الجانبين ، وهذه القيم المخصوصة تسمى **بجذور او حلول المعادلة** .

مثال: في المعادلة : $٣س + ع = ٧ - ع$ اذا جعلنا $س = ١$ ، $ع = ٢$ نرى ان القيمة العددية للجانب الاول تساوي القيمة العددية للجانب الثاني ، اذ كل منهما يساوي ٥ . اذن القيمتان $س = ١$ ، $ع = ٢$ تشكل حلاً لهذه المعادلة .

كذلك لو جعلنا س = ٠ ، ع = ٣,٥ لرأينا ان القيمة العددية للجانب الاول تساوي ٣,٥ ، وكذلك القيمة العددية للجانب الثاني تساوي ٣,٥ ايضاً . اذن القيمتان س = ٠ ، ع = ٣,٥ تشكل حلاً آخر لهذه المعادلة .

ومن السهل ان ندرك ان هذه المعادلة ليست محققة من اجل كل القيم الى س ، ع .

١٥٧ – المجاهيل : لتكن المعادلات :

١) $س + ٢ = ٣ س - ٤$

٢) $ب س + ١ = \frac{٢}{ب س}$

٣) $س + ٣ ع = ب$

فالاولى لا تحتوي الا على الحرف س ، لذلك نقول ان س هو المجهول في هذه المعادلة . واما في المعادلة الثانية فيوجد حرفان ب ، س الا اننا نعتبر الحرف ب معلوماً فيصبح س مجهول هذه المعادلة .

وكذلك في المعادلة الثالثة يوجد ثلاثة حروف س ، ع ، ب وبما اننا نعتبر الحرف ب معلوماً ، يبقى الحرفان س ، ع مجهولي المعادلة .

لحل معادلة ما هو ايجاد قيم المجاهيل الموجودة فيها والتي تجعل القيمة العددية للجانب الاول مساوية للقيمة العددية للجانب الثاني ، اي التي تجعل المعادلة محققة . فهذه القيمة المخصوصة تسمى **حل المعادلة او جذرها** .

فالعدد س = ٣ هو جذر المعادلة الاولى ، وكذلك القيمتان $س = \frac{١}{ب}$ ،

$س = \frac{-٢}{ب}$ هما جذرا المعادلة الثانية .

١٥٨ – المعادلتان المتكافئتان : هما معادلتان جذورهما واحدة ، اي ان جذور الاولى هي جذور للثانية ، وبالعكس جذور الثانية هي جذور للاولى .

١٥٩ – كيفية حل معادلة ما : لحل معادلة ذات مجهول واحد نستعيض عنها

بمعادلة متكافئة معها وابسط منها ، وهكذا نكرر نفس العمل الى ان نصل الى معادلة بسيطة يرى حلها رأسها ، وللاستعاضة عن معادلة بمعادلة متكافئة معها وابسط منها نستند على النظريتين الاتيتين :

١٦٠ – نظرية : ١) اذا اضفنا لطرفي معادلة تركيباً جبرياً يحوي اولا يحوي على المجهول س فاننا نحصل على معادلة متكافئة مع الاولى .

اي : لتكن المعادله : ب = حـ (١) حيث ب ، حـ تدل على تراكيب جبرية حاوية على المجهول س وليكن د تركيباً جبرياً يحوي او لا يحوي على المجهول س ولنبرهن على ان المعادلة :

ب + د = حـ + د (٢)

متكافئة مع الاولى رقم (١) .

للبرهان يجب ان نبرهن على ان :

١ً) كل حل للاولى هو حل للثانية .

٢) كل حل للثانية هو حل للاولى .

البرهان : ١ً) لنفرض ان : س = ٣ هو حل للاولى ب = د

ولنبرهن ان س = ٣ هو حل للثانية (٢) . لذلك لنفرض انه عندما س = ٣

تكون القيم العددية للتراكيب : ب ، حـ ، د هي بَ ، حَ ، دَ

فبما ان س = ٣ هو جذر للاولى فرضاً ، اذن : بَ = حَ

ولو اضفنا لطرفي هذه المساواة العدد دَ نجد مساواة جديدة صحيحة وهي :

بَ + دَ = حَ + دَ (٣)

ولو قارنا بين هذه المساواة العددية (٣) والمعادلة (٢) لرأينا ان القيمة العددية الى ب + حـ تساوي القيمة العددية الى حـ + د عندما س = ٣ اي ان : س = ٣ هو جذر للمعادلة (٢) وهو المطلوب الاول .

البرهان : ٢ً) لنفرض ان : س = ٥ هو حل للمعادلة الثانية (٢)

ولنبرهن على ان : س = ٥ هو حل للمعادلة (١) لذلك لنفرض انه عند ما س = ٥ تكون القيم العددية الى ب ، حـ ، د هي : بً ، حً ، دً

فما ان س = ٥ هو جذر للثانية نفهم ان :

$$ب^{ً} + د^{ً} = حـ^{ً} + د^{ً}$$

ولو طرحنا من طرفي هذه المساواة عدداً واحداً وهو دً نجد مساواة جديدة صحيحة وهي :

$$ب^{ً} = حـ^{ً} \qquad (٤)$$

ولو قارنا ما بين هذه المساواة العددية (٤) والمعادلة (١) نجد ان القيمة العددية الى ب تساوي القيمة العددية الى حـ عند ما س = ٥ اي ان س = ٥ هو جذر للمعادلة (١) وهو المطلوب .

١٦١ - نتيجة : ١) رأينا في النظرية السابقة انه يمكننا ان ننتقل من احدى المعادلتين : ب = حـ ، ب + د = حـ + د الى الثانية بدون تغيير الجذور ، ولما كنا ننتقل من الثانية الى الاولى بطرح الكمية د من الطرفين نستنتج انه يمكن تعميم النظرية السابقة بقولنا :

نظرية : اذا اضفنا او طرحنا من طرفي معادلة تركيباً جبرياً يحوي او لا يحوي المجهول س فاننا نحصل على معادلة متكافئة مع الاولى .

نتيجة : ٢) في معادلة ما يمكن ان ننقل احد الحدود من جانب الى آخر بشرط تغيير اشارته .

بالحقيقة لنقل حد ما يكفي استناداً على النظرية السابقة ان نطرح هذا الحد من طرفي المعادلة فلا تتغير الجذور واستناداً على هذه الخاصة يمكننا ايضاً ان ننقل جميع الحدود الى الجانب الاول فتأخذ المعادلة الشكل :

$$ب = ٠$$

مثال : في المعادلة :

$$٥ س - ٣ (٤ - س) = ٨ - ٣ (٦ س - ٢)$$

يمكن نقل جميع الحدود للجانب الاول فتأخذ الشكل :

$$٥ س - ٣ (٤ - س) - ٨ + ٣ (٦ س - ٢) = ٠$$

١٦٢ — درجة المعادلة : بعد وضع المعادلة بالشكل : $ب = ٠$

تكون درجة المعادلة هي درجة كثيرة الحدود $ب$. فالمعادلة :

$$س^{٢} - ٨ س + ٥ = ٠$$

هي من الدرجة الثانية .

واما المعادلة :

$$\frac{س}{ب + ١} + \frac{ع}{ب^{٢} - ١} + \frac{ص}{ب} - ٤ = ٠$$

فهي من الدرجة الاولى بالنسبة الى المجاهيل $س ، ع ، ص$.

١٦٣ — نظرية : ٢) اذا ضربنا طرفي معادلة بتركيب جبري لا يساوي الصفر فاننا نحصل على معادلة متكافئة مع الاولى .

الايضاح : لتكن المعادلة :

$$ب = ح \qquad (١)$$

نضرب طرفيها بالتركيب الجبري $د$ فنجد المعادلة :

$$د \cdot ب = د \cdot ح \qquad (٢)$$

فالآن نريد ان نبرهن على ان هاتين المعادلتين متكافئتان بفرض ان $د \neq ٠$.

وبقولنا ان $د \neq ٠$ نقصد ان القيمة العددية الى $د$ لا تساوي الصفر من اجل جذور المعادلة (١) او جذور المعادلة (٢) .

البرهان : ١ً) لنفرض ان س = — ٧ هو جذر للمعادلة (١) ولنبرهن على ان س = — ٧ هو جذر للمعادلة (٢) لذلك لنفرض ان بَ ، حَ ، دَ هي القيمة العددية الى ب ، ح ، د عندما س = — ٧ فبما ان س = — ٧ هو جذر للاولى ، نفهم ان :

$$ب_{َ} = ح_{َ}$$

ولو ضربنا طرفي هذه المساواة بالعدد دَ الذي هو ≠ . نجد المساواة الصحيحة

$$د_{َ} \cdot ب_{َ} = د_{َ} \cdot ح_{َ} \qquad (٣)$$

فهذه المساواة (٣) اذا قورنت مع المعادلة (٢) تدلنا على ان س = — ٧ هو حل للمعادلة (٢) .

البرهان : ٢ً) لنفرض ان : س = ٩ حل للمعادلة (٢) ولنبرهن على ان س = ٩ حل للمعادلة (١) لذلك نفرض ان : بً ، حً ، دً هي القيم العددية الى ب ، ح ، د عندما يكون س = ٩ فبما ان س = ٩ هو حل للثانية ، نفهم ان :

$$د_{ً} \cdot ب_{ً} = د_{ً} \cdot ح_{ً}$$

ولو قسمنا طرفي هذه المساواة على دً التي هي ≠ . نجد مساواة جديدة صحيحة وهي :

$$ب_{ً} = ح_{ً} \qquad (٤)$$

فهذه المساواة العددية اذا قورنت مع المعادلة (١) تدلنا على ان : س = ٩ هو حل للاولى :

$$ب = ح$$

١٦٤ — ملاحظة : رأينا فيما سبق ان المعادلتين :

$$ب = ح$$

$$د \cdot ب = د \cdot ح$$

متكافئتان ، ولما كنا ننتقل من الثانية الى الاولى بتقسيم الطرفين على د لذلك يمكننا تعميم النظرية بقولنا :

نظرية: اذا ضربنا او قسمنا طرفي معادلة على تركيب جبري غير الصفر نحصل على معادلة متكافئة مع الاولى .

١٦٥ — تطبيقات : يمكننا استناداً على النظرية السابقة ان نغير اشارات جميع حدود معادلة ما ، وذلك بضرب طرفيها بالعدد — ١ .



البحث الثانى

حل ومناقشة المعادلة التي من الدرجة الاولى

وذات مجهول واحد

الفصل الأول

حل المعادلة

---

١٦٦ — حل المعادلة : حسب النظريات المتقدمة يمكننا ان نضع كل معادلة من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد ، بالشكل :

$$ب \cdot س = حـ$$

حيث ب ، حـ تدل على كميات معلومة لا تحوي س .

وللوصول الى هذا الشكل نوحد اولاً المخارج ثم نحذفها ، وذلك بضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر لها ، ثم نجعل جميع الحدود التي فيها س في طرف واحد ، والحدود التي ليس فيها س في طرف آخر ، ثم نأخذ س خارج قوس ونوحد الحدود المتشابهة. فالمعادلة الناتجة بعد كل ذلك تكون متكافئة مع الاولى لاننا لم نجر الا عمليات مسموحاً لنا بها ، وذلك بفرض ان المعادلة المعطاة ليست كسرية ، اي لا تحوي على المجهول س في المخرج .

والآن اذا كان ب $\neq$ ٠ يمكن ان نقسم الطرفين على ب فنجد :

$$س = \frac{حـ}{ب}$$

وهو الحل الوحيد للمعادلة . ومما سبق نستنتج القاعدة التالية :

قاعدة : لحل المعادلة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد والتي لا تحوي على المجهول س في المخرج ، نجري ما يأتي :

١ً) نحذف المخارج ، وذلك بضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر لهذه المخارج .

٢ً) نحل الاقواس .

٣ً) ننقل المجاهيل للجانب الاول ، والمعاليم للجانب الثاني .

٤ً) نصلح الجانبين بجمع الحدود المتشابهة .

٥ً) نقسم الجانبين على امثال المجهول ، وذلك بفرض هذه الامثال غير الصفر .

والامثلة الآتية توضح لنا ذلك .

١٦٧ — مثال : ١) لحل المعادلة :

$$\frac{س + ١}{٣} - \frac{٢ س - ١}{٣} = \frac{١١}{٤} - \left(٢ - \frac{س}{٤} \right)$$

نبدأ بحذف المخارج فنجد :

$$\frac{س + ١}{٣} + \frac{٢ س - ١}{٦} = \frac{١١}{٤} - \left(٢ - \frac{س}{٤} \right)$$

$$٤ \qquad ٢ \qquad ٣ \qquad ١٢ \qquad ٣$$

١ً) $٤ س + ٤ - ٤ س + ٢ = ٣٣ - (٢٤ - ٣ س)$

٢ً) $٤ + ٢ = ٣٣ - ٢٤ + ٣ س$

٣ً) $٦ - ٩ = ٣ س$

٤ً) $- ٣ = ٣ س$

٥ً) $س = - ١$

مثال : حل المعادلة :

$$\frac{٥ س - ٢}{٤} + \frac{س - ٥}{٣} = ٧ - \frac{س - ٢}{٤}$$

لحل هـذه المعادلة نضرب طرفيها بالمثل المشترك الاصغر للمخارج وهو ١٢ فنجد

بالتسلسل ان : $\frac{٥س-٢}{٤} + \frac{س-٥}{٣} = \frac{س-٢}{٤} - ٧$

$٣ \quad ٤ \quad ٣ \quad ١٢$

ومنها : $١٥س - ٦ + ٤س - ٢٠ = ٣س - ٦ - ٨٤$

وبنقل الحدود المجهولة للجانب الاول والمعلومة للجانب الثاني نجد :

$١٥س + ٤س - ٣س = ٦ + ٢٠ - ٦ - ٨٤$

او : $س (١٥ + ٤ - ٣) = -٦٤$

او : $س \times ١٦ = -٦٤$

ومنها : $س = -\frac{٦٤}{١٦} = -٤$

الفصل الثاني

مناقشة المعادلة التي من الدرجة الاولى

وذات المجهول الواحد

١٦٨ - وجدنا فيما سبق (بند ١٦٧) انه يمكننا ان نضع كل معادلة من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد بالشكل :

$ب \cdot س = حـ$

فهنا للحصول على س يجب تقسيم الطرفين على ب لذلك يجب ان نميز حالتين :

الحالة الاولى : $ب \neq ٠$ في هذه الحالة يمكننا تقسيم الطرفين على ب فنجد

الحل الوحيد : $س = \frac{حـ}{ب}$

الحالة الثانية : ب = ٠ فني هذه الحالة يصبح شكل المعادلة :

٠ × س = حـ

فهنا نميز فرعين :

الفرع الاول : حـ = ٠ فيصبح شكل المعادلة :

٠ × س = ٠

اي س التي نفتش عنها هي عدد اذا ضرب بصفر كان الناتج صفراً ، وبما ان جداء كل عدد في صفر هو صفر ، اذن يمكن ان تكون س اي عدد كان ، اي في هذه الحالة يوجد للمعادلة المعطاة حلول عديدة .

الفرع الثاني : حـ ≠ ٠ اي حـ عدد ، في هذه الحالة يكون شكل المعادلة :

٠ × س = عدد

اي س التي نفتش عنها هي عدد لو ضرب بصفر لكان الناتج عدداً ، ولما كان هذا مستحيل ، نقول ان المعادلة مستحيلة ، اي ليس لها جذور وليس من الممكن ان نجد لها جذراً ما . وتتلخص المحاكمات السابقة بالجدول الآتي :

ب . س = حـ
- ١ً) ب ≠ ٠ حل وحيد س = حـ / ب
- ٢ً) ب = ٠
  - حـ = ٠ المعادلة تصبح ٠ × س = ٠ عدم تعيين
  - حـ ≠ ٠ المعادلة تصبح ٠ × س = عدد مستحيلة

١٦٩ — ملاحظة : ١) الدستور س = حـ / ب يصبح في حالة الاستحالة من الشكل : عدد / ٠ وفي حالة عدم التعيين من الشكل : ٠ / ٠

٢ً) اذا كان لدينا معادلة من الدرجة الاولى ورأينا انها محققة من اجل قيمتين مختلفتين الى المجهول س نحكم بانها تمثل عدد تعيين .

١٧٠ — مثال : ١) المطلوب حل المعادلة :

$$\frac{س}{٢} + \frac{س}{٣} + \frac{س}{٦} = س - ٧$$

الحل : نضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر للمخارج فنجد :

$$٣ س + ٢ س + س = ٦ س - ٤٢$$

وبنقل المجاهيل للجانب الاول نجد :

$$٣ س + ٢ س + س - ٦ س = - ٤٢$$

وبأخذ س خارج قوس نجد :

$$س (٣ + ٣ + ١ - ٦) = - ٤٢$$

او : $$س \times ٠ = - ٤٢$$

مما يدلنا على ان المعادلة مستحيلة لانه لا يوجد عدد اذا ضرب بصفر يكون الناتج (- ٤٢)

١٧١ - مثال : ٢) المطلوب حل المعادلة :

$$\frac{س}{٢} - \frac{س - ١}{٣} = \frac{س + ٢}{٦}$$

الحل : لنحذف المخارج فنجد :

$$٣ س - ٢ س + ٢ = س + ٢$$

وبالنقل نجد :

$$٣ س - ٢ س - س = ٢ - ٢$$

او : $$س (٣ - ٢ - ١) = ٠$$

اي : $$س \times ٠ = ٠$$

مما يدلنا على ان المعادلة المعطاة تمثل عدم تعيين لان جداء كل عدد في صفر هو صفر .

١٧٢ - مثال : ٣) المطلوب حل المعادلة :

$$\frac{ب - حـ}{ب} س = ب + ١ \qquad (١)$$

الحل : هذه المعادلة ليس لها معنى الا اذا كانت $ب \neq ٠$. اذن يجب ان نفرض فرضاً اساسياً ان $ب \neq ٠$. وبعد هذا الفرض الاساسي يمكننا ان نضرب طرفي المعادلة بالكمية ب فنجد :

$$(ب - حـ)س = ب(ب + ١) \qquad (٢)$$

فهنا للحصول على س يجب ان نقسم الطرفين على $ب - حـ$ لذلك نميز حالتين:

الحالة الاولى : $ب - حـ \neq ٠$. في هذه الحالة يمكننا تقسيم الطرفين على $ب - حـ$ فنحصل على الحل الوحيد وهو :

$$س = \frac{ب(ب + ١)}{ب - حـ}$$

الحالة الثانية : $ب - حـ = ٠$. فالمعادلة (٢) تكتب وقتئذٍ :

$$٠ \times س = ب(ب + ١)$$

وهنا نميز فرعين :

الفرع الاول : $ب(ب + ١)$ غير الصفر ، فالمعادلة غير قابلة الحل ، اي مستحيلة .

الفرع الثاني : $ب(ب + ١)$ صفر ، فالمعادلة غير معينة ، اي لها حلول عديدة .

ولنلاحظ ان الطرف الثاني $ب(ب + ١)$ لا يصبح صفراً الا اذا كانت $ب = ٠$ او : $ب = -١$ ولكن فرضاً $ب \neq ٠$.

اذن يبقى الفرض الوحيد وهو $ب \neq -١$ ويمكن تلخيص المحاكمات السابقة بالجدول الآتي :

$$\frac{ب - حـ}{ب} س = ب + ١$$

فرض اساسي ب ≠ ٠

١") ب - حـ ≠ ٠ يوجد حل وحيد وهو س = $\frac{ب(ب+١)}{ب-حـ}$

٢") ب = حـ
- ب + ١ ≠ ٠ لا يوجد للمعادلة حل ، اي المعادلة مستحيلة .
- ب = - ١ يوجد حلول عديدة ، عدم تعيين

١٧٣ - مثال : ٤) المطلوب حل ومناقشة المعادلة :

$$\frac{س - ٢ق}{٣} = \frac{ق س + ١}{٦} - ١$$

الحل : نضرب الطرفين في ٦ فنجد :

$$٢ س - ٤ ق = ق س + ١ - ٦$$

او :

$$س (٢ - ق) = ٤ ق - ٥$$

فهنا اما ان يكون : ٢ - ق ≠ ٠ اي : ق ≠ ٢ فنجد الحل الوحيد :

$$س = \frac{٤ ق - ٥}{٢ - ق}$$

او ان يكون ق = ٢ فتصبح المعادلة :

٠ × س = ٨ - ٥ اي :

٠ × س = ٣ اي مستحيلة .

ويمكن تلخيص ما سبق بالجدول الآتي :

ق ≠ ٢ حل وحيد وهو : $س = \frac{٤ ق - ٥}{٢ - ق}$

ق = ٢ تصبح المعادلة : ٠ × س = ٣ مستحيلة .

١٧٤ - مثال : ٥) المطلوب حل ومناقشة المعادلة .

$$\frac{٢ س - ٣}{ق} - \frac{٢ د س - ١}{د} = \frac{٥ (ق - د)}{ق \cdot د}$$

الحل : بنفس الطريقة السابقة نحصل على الجدول الآتي :

فرض اساسي ق . د ≠ .	ق ≠ ١	حل وحيد وهو :	$س = \frac{٢ ق - د}{د (١ - ق)}$	
ثم	ق = ١	د = ٢	المعادلة . × س = .	عدم تعيين .
		د ≠ ٢	المعادلة . × س = .	عدد مستحيلة.

الفصل الثالث

المعادلات الكسرية

او

المعادلات التي تحوي على المجهول س في المخرج

١٧٥ — رأينا فيما سبق ان جذر المعادلة هو قيمة المجهول (او المجاهيل) التي تجعل القيمة العددية للجانب الاول تساوي القيمة العددية للجانب الثاني ، اي التي تحقق هذه المعادلة .

ورأينا ايضاً انه لا معنى صريحاً لعدد مقسوم على صفر (بند ٣٧) لذلك لحل معادلة تحوي على المجهول س في المخرج ، نشترط على انفسنا قبل كل شيء ، ان جذر هذه المعادلة لا يكون مقبولاً الا اذا كان لا يجعل القيمة العددية لاحد مخارج المعادلة المعطاة صفراً ، فبعد ان نشترط هذا الشرط الاساسي ، نضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر للمخارج ونتمم حل المعادلة ، فاذا كان الجذر الذي وجدناه في النهاية لايجعل احدالمخارج صفراً يكون مقبولاً ، والا فاننا لا نقبل هذا الجذر . بل نقول ليس للمعادلة المعطاة جذر ، اي هي مستحيلة . والامثلة الآتية توضح لنا ذلك .

١٧٦ — مثال : ١) المطلوب حل المعادلة :

$$\frac{س + ١}{س} + ١ = \frac{٢ س}{س - ١}$$

فهذه المعادلة ليس لها معنى صريح الا اذا كان $س \neq ٠$ وبنفس الوقت $س \neq ١$ لذلك يجب ان نشترط على انفسنا ان $س \neq ٠$ لاجل ان لايكون المخرج الاول صفراً ، كذلك نشترط ان $س \neq ١$ لاجل ان لا يكون المخرج الثاني صفراً .

فبعد هذا الشرط الاساسي يمكننا ان نضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر للمخارج وهو $س (س - ١)$ [الذي يكون غير الصفر بمقتضى الفرض الاساسي] فنجد المعادلة :

$$س^{٢} - ١ + س (س - ١) = ٢ س^{٢}$$

ومنها : $س^{٢} - ١ + س^{٢} - س = ٢ س^{٢}$

او : $- ١ - س = ٠$

ومنها : $س = - ١$

وهذا الجذر $س = - ١$ مقبول لانه يوافق الفرض الاساسي ولا يجعل احد المخارج صفراً .

١٧٧ - مثال : ٢) المطلوب حل المعادلة :

$$\frac{١ - س}{س - ٢} + \frac{س + ٣}{س - ٤} = \frac{٢}{(س - ٢)(س - ٤)}$$

الحل : لا يكون لهذه المعادلة معنى الا اذا كان كل مخرج من مخارجها غير الصفر . لذلك قبل البدء بالحل يجب ان نشترط على انفسنا ان $س \neq ٢$ لاجل ان لا يكون المخرج الاول والثالث صفراً ، وان $س \neq ٤$ لاجل ان لا يكون كل من المخرج الثاني والثالث صفراً . فبعد هذا الشرط الاساسي $\begin{cases} س \neq ٢ \\ س \neq ٤ \end{cases}$ نبدأ بالحل ونضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر للمخارج وهو في مثالنا :

$$(س - ٢)(س - ٤)$$

فنجد ان : $\frac{١ - س}{س - ٢} + \frac{س + ٣}{س - ٤} = \frac{٢}{(س - ٢)(س - ٤)}$

$س - ٤ \quad س - ٢ \quad ١$

$(١ - س)(س - ٤) + (س + ٣)(س - ٢) = ٢$

او : $س - ٤ - س^{٢} + ٤س + س^{٢} - ٢س + ٣س - ٦ = ٢$

او : $٦س = ١٢$ ومنها : $س = ٢$

الا ان هذا الحل $س = ٢$ غير مقبول لانه يجعل المخرج الاول والمخرج الثالث صفراً . اذن هذه المعادلة ليس لها حل .

ملاحظة : ان الجذر $س = ٢$ يسمى بجذر اجنبي او جذر دخيل ، وهذا الجذر لا يحقق المعادلة المعطاة ، بل يجعل المثل المشترك الذي ضربنا به الطرفين صفراً .

١٧٨ - مثال : ٣) المطلوب حل ومناقشة المعادلة :

$$\frac{١}{س - هـ} + \frac{١}{س - د} = \frac{٢}{س}$$

الحل : ان هذه المعادلة ليس لها معنى صريح الا اذا كان كل مخرج من مخارجها لا يساوي الصفر ، لذلك يجب ان نشترط على انفسنا قبل كل شيء ان الجذر الذي سنجده لا يكون مقبولاً الا اذا كان لا يجعل احد المخارج صفراً ، وبعبارة ثانية لدينا الفرض الاساسي وهو :

$س \neq هـ \quad ، \quad س \neq د \quad ، \quad س \neq ٠$.

لاجل ان لا يكون احد المخارج صفراً . فبعد هذا الفرض يمكننا ان نضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر للمخارج وهو :

$س(س - هـ)(س - د)$

فنجد المعادلة :

$$\frac{١}{س - هـ} + \frac{١}{س - د} = \frac{٢}{س}$$

$س(س - د) \quad س(س - هـ) \quad (س - هـ)(س - د)$

$$س^{٢} - د\,س + س^{٢} - هـ\,س = ٢\,(س^{٢} - د\,س - هـ\,س + هـ\,د)$$

او : $$س\,(هـ + د) = ٢\,هـ\,د$$

فهنا للحصول على س يجب ان نقسم الطرفين على $هـ + د$ لذلك نميز حالتين :

الحالة الاولى: $هـ + د \neq ٠$ فنجد الحل الوحيد $س = \frac{٢\,هـ\,د}{هـ + د}$

وهو لا يكون مقبولاً الا اذا كان محققاً الفرض الاساسي .

الحالة الثانية: $هـ + د = ٠$ اي : $د = -هـ$ فالمعادلة تصبح :

$$٠ \times س = -٢\,هـ^{٢}$$

وهنا نميز فرعين :

الفرع الاول : $هـ = ٠$ عدم تعيين .

الفرع الثاني : $هـ \neq ٠$ مستحيلة .

١٧٩ – ملاحظة: الحل الوحيد $\frac{٢\,هـ\,د}{هـ + د}$ يساوي الصفر عند ما

$هـ \cdot د = ٠$ اي عندما $هـ$ او $د = ٠$.

اذن يجب ان يكون كل من $هـ$ ، $د$ غير الصفر ليكون هذا الحل مقبولاً .
كذلك يكون هذا الحل الوحيد مساوياً الى $هـ$ عندما يكون :

$$هـ = \frac{٢\,هـ\,د}{هـ + د}$$

او : $$٢\,هـ\,د = هـ\,(هـ + د)$$

او : $$٢\,د = هـ + ب$$

او : $$د = هـ$$

لذلك يجب ان يكون $د \neq هـ$ لاجل ان يكون هذا الحل مقبولاً

كذلك نجد بنفس الطريقة ان هذا الحل يساوي د عندما $هـ = د$ لذلك يجب ان يكون $هـ \neq د$ ليكون هذا الحل مقبولاً ، ويمكن تلخيص جميع

المحاكمات السابقة في الجدول الآتي :

$$س (هـ + د) = ٢ هـ د$$

١) $هـ + د \neq ٠$ { حل وحيد $س = \frac{٢ هـ د}{هـ + د}$ ويكون مقبولاً فيما اذا كان $هـ \neq د$ وكل منهما لا يساوي الصفر .

٢) $هـ + د = ٠$ { $هـ = ٠$ المعادلة $٠ \times س = ٠$ عدم تعيين .
$هـ \neq ٠$ المعادلة $٠ \times س =$ عدد مستحيلة .

الفصل الرابع

المعادلات التي يرجع حلها
لحل معادلات من الدرجة الاولى
وذات المجهول الواحد

١٨٠ - من المعادلات التي يرجع حلها لحل معادلات من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد ، المعادلات التي احد جانبيها مركب من جداء عدة مضاريب من الدرجة الاولى بالنسبة للمجهول س مع ان جانبها الثاني صفر كالمعادلة :

$$ب ٠ حـ ٠ د = ٠$$

حيث ب ، حـ ، د تدل على تراكيب جبرية من الدرجة الاولى بالنسبة للمجهول س ، فجذور هذه المعادلة هي جذور المعادلات الثلاث :

$$ب = ٠$$

$$حـ = ٠$$

$$د = ٠$$

وذلك لان الشرط اللازم والكافي ليكون حاصل ضرب عدة مضاريب مساويا للصفر هو ان يكون احد هذه المضاريب صفراً .

١٨١ — مثال : جذور المعادلة:

$$(س - ٢)(٤س + ٢)(٩ - ٣س) = ٠$$

هي جذور المعادلات :

$$س - ٢ = ٠ \quad ، \quad ٤س + ٢ = ٠ \quad ، \quad ٩ - ٣س = ٠$$

اي : $س = ٢$ ، $س = -\frac{١}{٢}$ ، $س = ٣$

١٨٢ — نتيجة : لو طلب منا ايجاد معادلة على ان يكون جذراها الاول ٥ والثاني — ٣ يكفي ان نكتب :

$$(س - ٥)(س + ٣) = ٠$$

١٨٣ — ومن المعادلات التي يرجع حلها لحل معادلات من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد ، المعادلات التي يمكن وضعها بالشكل :

$$ن \cdot حـ \cdot د = ٠$$

بعد نقل جميع الحدود للجانب الاول واخذ مضروب مشترك خارج قوس ، او بواسطة تطبيق احدى المطابقات الآتية :

$$ب^٢ - حـ^٢ \equiv (ب - حـ)(ب + حـ)$$

$$ب^٣ - حـ^٣ \equiv (ب - حـ)(ب^٢ + ب حـ + حـ^٢)$$

$$ب^٣ + حـ^٣ \equiv (ب + حـ)(ب^٢ - ب حـ + حـ^٢)$$

والامثلة الآتية توضح لنا ذلك :

١ً) لحل المعادلة : $٣س^٢ = ٢س$ نكتبها بالشكل :

$$٣س^٢ - ٢س = ٠$$

ثم ناخذ س خارج قوس فنجد :

$$س(٣س - ٢) = ٠$$

ومنها : اما $س = ٠$ او : $س = \frac{٢}{٣}$

٢ً) لحل المعادلة :

$$(٣س + ٤)^{٢} - (٥س - ١)^{٢} = ٠$$

نستعمل المطابقة :

$$ب^{٢} - ح^{٢} = (ب - ح)(ب + ح)$$

فتصبح المعادلة هي :

$$(-٢س + ٥)(٨س + ٣) = ٠$$

ومنها : اما $س = \frac{٥}{٢}$ او : $س = -\frac{٣}{٨}$

٣ً) لحل المعادلة :

$$٥(س - ٤) = س^{٢} - ١٦$$

نكتبها هكذا :

$$٥(س - ٤) - (س^{٢} - ١٦) = ٠$$

او :

$$٥(س - ٤) - (س - ٤)(س + ٤) = ٠$$

نأخذ المضروب المشترك $(س - ٤)$ خارج قوس فنجد المعادلة :

$$(س - ٤)[٥ - (س + ٤)] = ٠$$

او :

$$(س - ٤)(١ - س) = ٠$$

ومنها : اما $س = ٤$ او $س = ١$

٤ً) لحل المعادلة :

$$(س - ١)^{٢} - ٧ = ٠$$

نكتب الـ ٧ بالصورة الآتية :

$$٧ = (\sqrt{٧})^{٢}$$

فتنقلب المعادلة الى الشكل :

$$ب^{٢} - ح^{٢} = (ب - ح)(ب + ح)$$

اي : $(س - ١ - \sqrt{٧})(س - ١ + \sqrt{٧}) = ٠$

ومنها : اما $س = ١ + \sqrt{٧}$

او : $س = ١ - \sqrt{٧}$

وبطريقة ثانية نكتب :

$$(س - ١)^{٢} = ٧$$

وبأخذ الجذر التربيعي للطرفين نجد :

$$س - ١ = \pm \sqrt{٧}$$

ومنها : $س = ١ \pm \sqrt{٧}$

تمارين

المطلوب حل ومناقشة المعادلات الاتية :

١] $٣س - (٢س - ٢٥) = ٢س - (٥س - ١٠٥)$

٢] $\frac{٢س - ٣}{٤} + \frac{٣س - ٧}{٨} = ١$

٣] $\frac{س - ١٠}{٥} - \frac{س - ١٢}{١٠} = \frac{س - ٢}{١٠}$

٤] $\frac{\frac{س}{٢} - ٣}{\frac{س + ٣}{٥} - \frac{٢س - ٩}{١٥}} = ٣$

٥] $\frac{\frac{س - ١٥}{١٥} + \frac{٢س - ٤}{١٠}}{\frac{٣س - ٤٥}{٥٠} - \frac{س - ١٢}{١٥}} = ١٠$

٦] $\frac{\frac{س - ٣}{٢} - \frac{س - ٣}{٤}}{س - \frac{١}{\frac{٣س - ١}{س + ١} - ٣}} = \frac{١}{١١}$

٧] $\frac{س}{ب حـ} + \frac{س}{حـ د} + \frac{س}{ب د} - ١ = ب حـ د - (ب + حـ + د)$

٨] $\frac{ب\,س}{ح} + \frac{ب}{١} = \frac{١}{ح} + \frac{ح\,س}{ب}$

٩] $\frac{ب\,س}{ب+ح} - \frac{ح\,س}{ب+ح} = ب^{٢} - ٢\,ب\,ح + ح^{٢}$

١٠] $\frac{ب-ح}{س+ب} + \frac{ب+ح}{س-ب} = \frac{ب+ح}{ح+ب} + \frac{٢\,س-٢\,ح}{ب-ح}$

١١] $(٣-هـ)\,س = ٢ - \frac{٢}{هـ} - ٢\,س$

١٢] $\frac{س}{ب} - \frac{س}{ب-ح} + \frac{س}{ب+ح} = ٠$

١٣] $-٢\,س - \frac{١٩-٢\,س}{٢} = \frac{٢\,س-١١}{٢}$

١٤] $س + \frac{٣\,س-٩}{٥} = ٤ - \frac{٥\,س-١٢}{٣}$

١٥] $\frac{س}{ب+١} = \frac{س}{١-ب} + \frac{١}{ب^{٢}-١}$

١٦] $\frac{ج}{س+ب} - \frac{س-ج}{ب} = ٢$

١٧] $\frac{ج}{٢\,ص+هـ} - \frac{هـ}{ص-ج} = \frac{٣\,هـ\,ص+(هـ-ج)^{٢}}{هـ\,ج}$

١٨] $\frac{(ب+ح)^{٢}\,(ص+١)-(ب+ح)(ص+١)+ص+١}{ب+ح+١} =$

$(ب+ح)^{٢}-(ب+ح)^{٢}+١$

[١٩] $\dfrac{\dfrac{س + ٢ح}{ب - ح} - \dfrac{س}{ب + ح}}{\dfrac{(ب + ح)س - (ب - ح)^{٢}}{ب^{٢} - ح^{٢}}} = \dfrac{٢ب}{ب - ح}$

[٢٠] $\dfrac{٦س + ١٣}{١٥} - \dfrac{٣س + ٥}{٥س - ٢٥} = \dfrac{٢س}{٥}$

[٢١] $\dfrac{١}{س - ١} - \dfrac{٢}{س + ٧} = \dfrac{١}{٧(س - ١)}$

[٢٢] $\dfrac{س + ب}{س - ب} - \dfrac{س + ح}{س - ح} = \dfrac{ب - ح}{(س - ب)(س - ح)}$

[٢٣] $\dfrac{س + ب}{س - ب} + \dfrac{س - ب}{س + ب} = -٢$

[٢٤] $\dfrac{٢}{س} = \dfrac{١}{ب} + \dfrac{١}{ح}$

[٢٥] $\dfrac{٣س - ٤}{س - ١} = \dfrac{٣س}{س + ١}$

[٢٦] $\dfrac{س^{٢} - ١}{س - ١} - \dfrac{١ + س^{٢}}{١ + س} + ٤س - ٤(س + ١)(س^{٣} + ٢) =$
$١ - (٣ - ٢س^{٣})^{٢}$

[٢٧] $(٥ + ٢س)(٣س + ٤) - (٣ + ٦س)(٢س + ٥) =$
$س(٥ + ٢س)$

[٢٨] $(٣س^{٢} + ٢س + ١)^{٢} - (٣س^{٢} - ٤س - ١)^{٢} = ٠$

[٢٩] $\dfrac{٧}{٢٤} - \dfrac{\dfrac{١٣}{١٥}}{\dfrac{٢س}{٣} + \dfrac{٤}{٥}} = \dfrac{١}{٤}$

٢٠] $\frac{٧س + ١٦}{٢٠} - \frac{س + ٨}{٤س + ١٠} = \frac{٨}{٥} + \frac{س}{٣}$

٢١] $\left(س - \frac{٥}{٢}\right)\left(س + \frac{٣}{٢}\right) - (س - ٥)(س + ٣) = ٩\frac{٣}{٤}$

٢٢] $\frac{س}{ب} + \frac{ح}{س} + \frac{د}{س} = هـ$

٢٣] $\frac{د}{هـ}\left(١ - \frac{ب}{ع}\right) + \frac{هـ}{د}\left(١ - \frac{ح}{ع}\right) = ١$

٢٤] $\frac{١ - ب س}{ب س} = \frac{٣ + ب^{٢} س^{٢}}{١ - ب^{٢} س^{٢}}$

٢٥] $\frac{١}{\frac{٣(هـ + ب)^{٢}}{ك^{٢} س} - \frac{هـ + ب}{ك}} = \frac{ك}{٢(هـ + ب)}$

٢٦] $\frac{١}{س - ب} - \frac{١}{س - ح} = \frac{ب - ح}{س^{٢} - ب ح}$

٢٧] $\frac{ب}{ع - ب} - \frac{ح}{ع - ح} = \frac{ب - ح}{ع + ب - ح}$

٢٨] $\frac{ص + ١}{ص - ١} = \frac{ب + ح + ١}{ب + ح - ١}$

٢٩] $\frac{س + هـ - ج}{هـ} - \frac{س + ج - هـ}{ج} = \frac{هـ^{٢} - ج^{٢}}{ج هـ}$

٣٠] $\frac{١}{١ - ج^{٢} س^{٢}} = \frac{ج}{١ + ج س} - \frac{١ - ج س}{١}$

❀❀❀

البحث الثالث

المعادلات الصماء او الجذرية

الفصل الاول

المعادلات الصماء التي تحوي على جذر واحد

١٨٦ — المعادلات الصماء : هي معادلات تحوي على تراكيب جبرية حاوية على المجهول س وواقعة تحت اشارة الجذر ، كالمعادلة :

$$٢س + \sqrt{ب س + حـ} = ٤ - \sqrt{٣س}$$

فهذه المعادلة هي معادلة جذرية تحوي على اشارة جذرين حاويين على المجهول س ، واما المعادلة :

$$٣س - \sqrt{٧س} + \sqrt{ب - حـ} = ٩$$

ليست بمعادلة جذرية لان جذورها لا تحوي على المجهول س .

والطريقة المتبعة في حل المعادلة الجذرية الحاوية على اشارة جذر واحد تتلخص بجعل الجذر في جانب واحد ، ثم برفع الطرفين لقوة تساوي دليل هذا الجذر ، فنتخلص من الجذر ونتمم العمل كالعادة .

ولما كانت الجذور التي نصادفها عادة هي الجذور التربيعية ، لذلك نقتصر تفصيل البحث على الجذور التربيعية . اذن اذا كان لدينا معادلة تحوي على جذر واحد فاننا :

١ً) نعزل الجذر .

٢ً) نربع الطرفين .

ثم تتمم العمل كالعادة ، الا انه عند تربيع الطرفين يجب ان نلاحظ الملاحظة المهمة الآتية :

١٨٥ - ملاحظة : اذا كان لدينا المعادلة :

$$ب = حـ \qquad (١)$$

حيث ب ، حـ تدل على تراكيب جبرية حاوية على س ، وربعنا طرفيها نحصل على المعادلة :

$$ب^{٢} = حـ^{٢} \qquad (٢)$$

الا انه اذا كان لدينا المعادلة :

$$ب = - حـ \qquad (٣)$$

وربعنا طرفيها فاننا نحصل ايضاً على نفس المعادلة :

$$ب^{٢} = حـ^{٢} \qquad (٤)$$

مما يدلنا على ان جذور المعادلة (٤) تحقق المعادلة (١) او المعادلة (٣) او كلاهما معاً بآن واحد ، لذلك يجب ان نلاحظ التنبيه الآتي :

١٨٦ - تنبيه : اذا كان لدينا المعادلة : $ب = حـ$ وربعنا طرفيها فانه يجب ان ننتخب من بين جذور المعادلة التي حصلنا عليها بالتربيع وهي : $ب^{٢} = حـ^{٢}$ الجذر الذي يحقق المعادلة المعطاة $ب = حـ$ وان نرفض الجذر الذي يحقق المعادلة $ب = - حـ$ التي تنشأ من المعادلة المعطاة بتغيير اشارة احد الجانبين .

ومما سبق ينتج :

نظرية : المعادلة $ب^{٢} = حـ^{٢}$ تكافيء احدى المعادلتين :

$$ب = حـ \quad \text{او} : \quad ب = - حـ$$

او كليهما بآن واحد والامثلة التي سنراها توضح لنا ذلك .

١٨٧ - تطبيقات : كيفية حل المعادلة :

$$\sqrt{ب} - حـ = ٠$$

الحل : لحل معادلة كهذه :

١ً) نعزل الجذر في جانب واحد فتأخذ المعادلة الشكل :

$$\sqrt{ب} = حـ \qquad (١)$$

٢ً) نربع الطرفين فنحصل على المعادلة :

$$ب = حـ^{٢}$$

الا ان هذه المعادلة الحاصلة من التربيع تكافيء احدى المعادلتين :

$$\sqrt{ب} = حـ \qquad (١) \qquad \text{المعادلة المعطاة}$$

او :

$$\sqrt{ب} = - حـ \qquad (٢)$$

التي تنشأ من المعادلة المعطاة بتغيير اشارة احد الجانبين ، لذلك يجب ان ننتخب من بين جذور المعادلة $ب = حـ^{٢}$ الجذر الذي يحقق المعادلة المعطاة :

$$\sqrt{ب} = حـ$$

وان نرفض الجذر الذي يحقق المعادلة (٢) .

ولو تأملنا في المعادلة (١) لرأينا ان جانبها الاول موجب ، اذن يجب ان يكون جانبها الثاني حـ موجباً ايضاً ، لذلك اذا اردنا ان نحل المعادلة (١) وجب ان ننتخب من بين جذور المعادلة التي حصلنا عليها بالتربيع $ب = حـ^{٢}$ الجذر الذي يجعل القيمة العددية الى حـ موجبة اي : $حـ > ٠$

وبالعكس لو اردنا حل المعادلة $\sqrt{ب} = - حـ$ لوجب ان ننتخب

من بين جذور المعادلة $ب = حـ^{٢}$ الجذر الذي يجعل $حـ > ٠$

ليصبح $- حـ > ٠$

١٨٨ — مثال : ١) المطلوب حل المعادلة :

$$\sqrt{س^{٢} - ٣ س + ٣} - س + ١ = ٠$$

الحل : ١ً) نعزل الجذر ونجعله في جانب واحد ، ثم نضع الباقي في الجانب الآخر فنجد المعادلة :

$$\sqrt{س^{٢} - ٣ س + ٣} = س - ١$$

مما يدلنا على انه يجب ان يكون $س > ١$ ليكون الجانب الثاني موجباً .

اذن اذا ربعنا الطرفين يجب ان ننتخب بعد التربيع الجذر الذي يكون > ١ والا لا يكون للمعادلة حل .

٢ً) لتربيع الطرفين فنجد :

$$س^{٢} - ٣ س + ٣ = س^{٢} - ٢ س + ١$$

ومنها : $- س + ٢ = ٠$

ومنها : $س = ٢$

وهذا الجذر مقبول لانه اكبر من الواحد ، وبالحقيقة فانه يحقق المعادلة المعطاة اذ تصبح من الشكل :

$$\sqrt{٤ - ٦ + ٣} = ١$$

اى : $\sqrt{١} = ١$

١٨٩ — مثال : ٢) المطلوب حل المعادلة :

$$\sqrt{س^{٢} + ٦ س + ٤} - ٣ س - ٢ = ٠$$

الحل : ١ً) نعزل الجذر فتصبح المعادلة :

$$\sqrt{س^{٢} + ٦ س + ٤} = ٣ س + ٢$$

مما يدلنا على انه يجب ان يكون الجانب الثاني :

$$٣ س + ٢ > ٠$$

اي :
$$س > -\frac{٢}{٣}$$

٢) لتربيع الطرفين فنجد :

$$س^{٢} + ٦ س + ٤ = ٩ س^{٢} + ١٢ س + ٤$$

او :
$$٨ س^{٢} + ٦ س = ٠$$

او :
$$س (٤ س + ٣) = ٠$$

ومنها : اما
$$س = ٠$$

او :
$$س = -\frac{٣}{٤}$$

فالجذر $س = ٠$ مقبول لانه اكبر من $-\frac{٢}{٣}$ واما الجذر الثاني $-\frac{٣}{٤}$ فهو غير مقبول لانه اصغر من $-\frac{٢}{٣}$

ولو تحققنا من الجذر $س = ٠$ لرأيناه موافقاً اذ يجعل المعادلة من الشكل :

$$\sqrt{٤} = ٢$$

واما الجذر الثاني $س = -\frac{٣}{٤}$ فهو غير موافق ، اذ يجعل القيمة العددية للجانب الاول $= \frac{١}{٤}$ مع انه يجعل القيمة العددية للجانب الثاني $-\frac{١}{٤}$

اذن الجذر $س = -\frac{٣}{٤}$ لا يحقق المعادلة المعطاة :

$$\sqrt{س^{٢} + ٦ س + ٤} = ٣ س + ٢$$

بل يحقق المعادلة :

$$\sqrt{س^{٢} + ٦ س + ٤} = -(٣ س + ٢)$$

التي تنشأ من المعادلة المعطاة بتغيير اشارة الجانب الثاني (بعد عزل الجذر) .

الفصل الثاني

كيفية حل المعادلات التي تحوي على جذرين

١٩٠ — لحل معادلة حاوية على جذرين يحويـ كل منهما على المجهول س نعزل الجذر الاول (اي احد الجذرين) ثم نربع الطرفين فيذهب هذا الجذر الاول ويبقى لنا جذر واحد فقط (فتؤول المسألة الى الحالة الاولى) ، لذلك نصلح ثم نعزل هذا الجذر الباقي ، ونربع مرة ثانية فنحصل على معادلة غير صماء يسهل علينا حلها .

الا انه رأينا سابقاً ان تربيع الطرفين قد يدخل جذوراً اجنبية (بند ١٨٥—١٨٧) لذلك لابد لنا من الانتقاء ومن التحقق من ان الجذر او الجذور الموجودة في النهاية تحقق او لا تحقق المعادلة المعطاة ، فاذا لم نجد جذراً يحقق المعادلة المعطاة نقول ان المعادلة ليس لها حل . والمثال الاتي يوضح لنا ذلك .

١٩١ — الحالة العامة : لنأخذ بصورة عامة المعادلة :

$$\sqrt{س + ح} + \sqrt{س + ب} = د \qquad (١)$$

مما يدلنا على ان د عدد موجب . لننقل الجذر الثاني الى الطرف الثاني فيكون :

$$\sqrt{س + ح} = د - \sqrt{س + ب}$$

لنربع الطرفين فنجد :

$$س + ح = د^{٢} + س + ب - ٢ د \sqrt{س + ب}$$

او :

$$٢ د \sqrt{س + ب} = د^{٢} + ب - ح \qquad (٣)$$

لنربع مرة ثانية فنجد :

$$٤ د^{٢} (س + ب) = (د^{٢} + ب - حـ)^{٢} \qquad (٤)$$

ومنها : $$س = \frac{د^{٤} - ٢ (ب + حـ) د^{٢} + (ب - حـ)^{٢}}{٤ د^{٢}}$$

وذلك بترتيب الحسابات بالنسبة الى قوى د المتناقصة .

الا انه يجب ان نتحقق فيما اذا كان هذا الحل الموجود يحقق المعادلة (١) او لا ، ولاجراء هذا التحقق يكفي ان نضع في المعادلة المعطاة عوضاً عن س قيمتها لذلك نحسب س + حـ ، س + ب فنجد ان :

$$س + حـ = \frac{د^{٤} - ٢ (ب - حـ) د^{٢} + (ب - حـ)^{٢}}{٤ د^{٢}} = \left[\frac{د^{٢} - (ب - حـ)}{٢ د} \right]^{٢}$$

وذلك بترتيب الحسابات بالنسبة الى قوى د ايضاً .

والعلاقة (٤) تعطينا رأساً :

$$س + ب = \left[\frac{د^{٢} + (ب - حـ)}{٢ د} \right]^{٢}$$

اذن لو وضعنا في المعادلة المعطاة رقم (١) محل س قيمتها فان شكلها يصبح :

$$د = \frac{د^{٢} - (ب - حـ) + د^{٢} + (ب - حـ)}{٢ د}$$

او : $$د = \frac{د^{٢}}{د}$$

وهذا محقق . اذن الجذر الموجود مقبول .

تمارين

المطلوب حل ومناقشة المعادلات الآتية :

١] $\sqrt{(س + ٤)(س + ٢)} = س + ١٠$

٢] $\sqrt{س + ٤} + \sqrt{س + ٢} = ٢\sqrt{س + ١١}$

٣] $\sqrt{١ - ٢\sqrt{س^{٤} - س^{٢}}} = س - ١$

٤] $\sqrt{١ب + س} - \sqrt{\frac{ب^{٢}}{ب + س}} = \sqrt{٢ب + س}$

٥] $\sqrt{س + ١\sqrt{س}} - \sqrt{س - ١\sqrt{س}} = ب \sqrt{\frac{س}{س + ١\sqrt{س}}}$

٦] $\sqrt[٤]{س - ب} + \sqrt[٤]{س - ح} + \sqrt[٤]{س - د} = ٠$

٧] $\sqrt{س^{٢} + ١} = س - ٤$

٨] $\sqrt{س^{٢} - ١} = س + ٦$

٩] $\sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

١٠] $س + \sqrt{س^{٢} - ٣س + ١} = ١$

١١] $\sqrt{س - ٢} - \sqrt{س - ٥} = ١$

١٢] $\sqrt{س + ٤} - \sqrt{٥س + ٩} = ١$

١٣] $\sqrt{س + ٦} - ٢ - ١\sqrt{س} = ٠$

البحث الرابع

المتراجحات التي من الدرجة الاولى

وذات المجهول الواحد

الفصل الأول

المتراجحات العددية

١٩٢ — تمهيد : من المعلوم ان الاعداد الموجبة هي التي اكبر من الصفر وان الاعداد السالبة هي التي اصغر من الصفر ، ومن المعلوم ايضاً ان العدد السالب يصغر كلما كبرت قيمته المطلقة ، فالعدد — ٥ هو اصغر من العدد — ٣ .

وكذلك من المعلوم انه لمقارنة عددين جبريين يكفي ان ننظر الى فرقهما ، فاذا كان لدينا العددان ب ، حـ وكان فرقهما ب — حـ موجباً ، نفهم ان ب اكبر من حـ اي :

اذا كان ب — حـ > ٠ يكون ب > حـ

وبالعكس اذا كان ب > حـ يكون الفرق ب — حـ > ٠ (بند٢١)

واما اذا كان الفرق بينهما ب — حـ سالباً ، اي ب — حـ < ٠ نفهم ان ب < حـ

وبالعكس اذا كان ب < حـ يكون الفرق ب — حـ < ٠

❀ ❀ ❀

خواص المتراجحات

١٩٣ - الخاصة الاولى :

نظرية : اذا اضيف لطرفي متراجحة عددية عدد واحد فان المتراجحة تبقى صحيحة ، اي :

الفرض : $ب > حـ$ (١)

المطلوب : $ب + د > حـ + د$ (٢)

البرهان : من الفرض $ب > حـ$ نستنتج ان $ب - حـ > ٠$. الا انه من المعلوم ان حاصل طرح عددين لا يتغير فيما اذا اضيف للمطروح والمطروح منه عدد واحد اي ان :

$$ب - حـ = (ب + د) - (حـ + د)$$

لذلك لنضف للمطروح والمطروح منه في المتراجحة $ب - حـ > ٠$ عدداً واحداً وهو د فيبقى حاصل الطرح موجباً ونجد :

$$(ب + د) - (حـ + د) > ٠$$

اي : $ب + د > حـ + د$ وهو المطلوب .

١٩٤ - ملاحظة :

بما انه يمكن ان يكون د عدداً موجباً او سالباً ، لذلك يمكننا ذكر النظرية السابقة بالصورة الآتية :

نظرية : اذا اضفنا او طرحنا من طرفي متراجحة عددية عدداً واحداً فان المتراجحة تبقى صحيحة .

١٩٥ — الخاصة الثانية :

نظرية : اذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد واحد موجب فان المتراجحة تبقى ثابتة . واذا ضربنا طرفي المتراجحة العددية بعدد واحد سالب وجب عكس اتجاه المتراجحة .

الايضاح :

١ً) اذا كان : $ب > حـ$ وكان $ك > ٠$ يكون $ك . ب > ك . حـ$

٢ً) اذا كان : $ب > حـ$ وكان $هـ < ٠$ يكون $هـ . ب < هـ . حـ$

البرهان : ١ً) فرضاً $ب > حـ$ اي : $ب - حـ > ٠$

اذن : $ك (ب - حـ) > ٠$ لان جداء العددين الموجبين موجب .

ومنها : $ك ب - ك حـ > ٠$.

او : $ك ب > ك حـ$ وهو المطلوب .

٢ً) فرضاً $ب > حـ$ اي : $ب - حـ > ٠$. وبما ان جداء عدد موجب بآخر سالب هو سالب .

اذن : $هـ (ب - حـ) < ٠$.

اي : $هـ ب - هـ حـ < ٠$.

ومنها : $هـ ب < هـ حـ$ وهو المطلوب .

ملاحظة : بنفس الطريقة نستنتج من المتراجحة $ب > حـ$ المتراجحتين الآتيتين :

$ك ب < ك حـ$ ، $هـ ب < هـ حـ$

١٩٦ — الخاصة الثالثة :

نظرية : ١ً) اذا كان لدينا متراجحة وكان طرفاها موجبين ، فان هذه المتراجحة تبقى صحيحة عند تربيع طرفيها .

٢ً) اذا كان لدينا متراجحة وكان طرفاها سالبين فانه يجب عكس اتجاه هذه المتراجحة عند تربيع طرفيها .

البرهان : ١) لنفرض ان العددين ب ، حـ موجبان ، ولنفرض ان :

$$ب > حـ$$

فيكون : $$ب^{٢} > حـ^{٢}$$

وهذه الخاصة صريحة اذ اننا نرى ان سطح المربع يتزايد عند ما يتزايد طول ضلعه .

٢) لنفرض ان العددين ب ، حـ سالبان ، فاذا كان :

$$ب > حـ$$

يكون : $$|ب| < |حـ|$$

اي القيمة المطلقة الى ب اعظم من القيمة المطلقة الى حـ ، وبما ان $|ب|$ ، $|حـ|$ موجبتان ، فيكون بمقتضى الحالة الاولى :

$$ب^{٢} > حـ^{٢}$$ وهو المطلوب .

١٩٧ — ملاحظة : النظرية السابقة تتعلق بمتراجحة جانباها من اشارة واحدة ، اما موجبان واما سالبان ، فلا يمكن اذن تطبيق هذه النظرية على متراجحة جانباها مختلفا الاشارة ، ولنرَ ماذا يحدث عند تربيع طرفي متراجحة جانباها ليسا من اشارة واحدة ، بواسطة المثالين الاتيين :

مثال : ١) لنأخذ المتراجحة : $-٤ > ٣$ ولنربع الطرفين فنجد :

$$١٦ > ٩$$

اي تغير اتجاه المتراجحة .

مثال : ٢) لنأخذ المتراجحة : $-٢ > ٦$ ولنربع الطرفين فنجد :

$$٣٦ > ٤$$

اي لم يتغير اتجاه المتراجحة .

فنرى اذن في هذين المثالين ان الاولى غيرت وجهتها ، والثانية بقيت على حالها ، مما يدلنا على انه قبل تربيع طرفي متراجحة ما ، يجب ان نعلم اشارتي جانبيها ، وان ندرس وجوب عكس اتجاه هذه المتراجحة او عدم العكس .

واما المتراجحة : $-٢ < +٢$ فانها تصبح : $+٢ = +٢$

لذلك لا يمكن وضع قاعدة جامعة لهذه الاحوال كلها .

الفصل الثاني

المتراجحات التي تحوي على المجهول س

١٩٨ - تمهيد: لندرس الآن متراجحات طرفاها كميات جبرية ، فالبعض من هذه المتراجحات يكون محققاً مهما كانت القيم المعطاة للحروف الموجودة في الجانبين .

مثال : المتراجحتان :

$$٢ب^{٢} + حـ^{٢} > ب^{٢} - ١$$

$$ب^{٢} + ٢حـ^{٢} + ٣ > ٠$$

محققتان مهما كانت قيمة الحرفين ب ، حـ

وبالعكس يوجد متراجحات لا تكون محققة الا من اجل قيم مخصوصة للحروف الواقعة في جانبيها . وسندرس ، المتراجحات التي تحوي على المجهول س ، والتي لا تكون محققة من اجل جميع قيم س .

مثال : المتراجحة :

$$س^{٢} - ٦س + ٤ > ٠$$

هي محققة من اجل القيم :

$$س = ٠ \quad ، \quad س = ٦ \quad ، \quad س = ٧$$

وليست محققة بالقيم :

$$س = ٢ \quad ، \quad س = ٣$$

١٩٩ - تعريف - جذور المتراجحة ذات المجهول الواحد س ، هي قيم س التي تجعل هذه المتراجحة محققة .

وحل متراجحة ما، هو ايجاد جميع جذورها . والطريقة المتبعة لحل متراجحة ما هي عين الطريقة المستعملة لحل معادلة ما، ويشذ عن ذلك كما سنرى وجوب قلب اتجاه المتراجحة عند ضرب او تقسيم طرفيها على مقدار سالب .

٢٠٠ — المتراجحتان المتكافئتان : هما متراجحتان جذورهما واحدة ، اي جذور الاولى هي جذور للثانية وبالعكس .

خواص المتراجحات
الحاوية على المجهول س

٢٠١ — الخاصة الاولى :

نظرية : اذا اضفنا لطرفي متراجحة تركيباً جبرياً يحوي او لا يحوي على المجهول س فاننا نحصل على متراجحة متكافئة مع الاولى .

الايضاح : لتكن المتراجحة :

$$ب < حـ \qquad (١)$$

حيث ب ، حـ تدل على تراكيب جبرية حاوية على المجهول س ، ولنبرهن ان هذه المتراجحة متكافئة مع المتراجحة :

$$ب + د < حـ + د \qquad (٢)$$

باعتبار د تركيباً جبرياً يحوي او لا يحوي على المجهول س .

البرهان : ١°) لنفرض ان : س = ٣ هو جذر للمتراجحة (١) ، ولنبرهن على ان س = ٣ هو جذر للمتراجحة (٢) ، فاذا فرضنا ان القيم العددية

الى ب ، حـ ، د عندما س = ٣ هي بَ ، حَ ، دَ لكان :

بَ > حَ

وبمقتضى خواص المتراجحات العددية (بند ١٩٣) يمكننا ان نضيف لطرفي المتراجحة العددية بَ > حَ عدداً واحداً وهو دَ فنحصل على المتراجحة :

بَ + دَ > حَ + دَ (٣)

ولو قارنا ما بين هـذه المتراجحة العددية (٣) والمتراجحة (٢) لرأينا ان س = ٣ هو جذر للمتراجحة :

ب + د > حـ + د

البرهان : ٢°) لنفرض ان س = ٥ هو جذر للمتراجحة الثانيـة (٢) ولنبرهن على ان س = ٥ هو جذر للمتراجحة (١) لذلك لنفرض ان القيم العددية للتراكيب ب ، حـ ، د هي : بً ، حً ، دً عندما س = ٥ ، فبما ان س = ٥ هي جذر للثانية ، اذن :

بً + دً > حً + دً

ولو طرحنا من طرفي هذه المتراجحة العددية العدد دً لحصلنا (بند ١٩٤) على المتراجحة العددية الصحيحة ، وهي :

بً > حً (٤)

فلو قارنا ما بين هـذه المتراجحة العددية (٤) والمتراجحة (١) لاستنتجنا ان س = ٥ هو جذر لها ، وهو المطلوب .

٢٠٢ — ملاحظة : بما انه يمكن ان يكون المقدار د موجباً او سالباً لذلك يمكننا تعميم النظرية السابقة بقولنا :

نظرية : اذا اضفنا او طرحنا من طرفي متراجحة مقداراً واحداً يحوي او لا يحوي على المجهول س فاننا نحصل على متراجحة متكافئة مع الاولى .

٢٠٣ — تطبيقات : ان نتائج هذه النظرية تشابه تماماً نتائج النظرية الاولى

(بند ١٦١) العائدة للمعادلات المتكافئة. اي في متراجحة ما ، يمكن ان ننقل احد الحدود من طرف الى آخر بشرط ان نغير اشارته ، وهذه العملية تساعدنا كما في المعادلات على نقل جميع الحدود لطرف واحد وتمكننا من كتابة المتراجحة باحد الشكلين الاتيين :

$$ب > ٠ \quad \text{او :} \quad ب < ٠$$

حيث ث تدل على تركيب جبري يحوي على المجهول س .

٢٠٦ - الخاصة الثانية :

نظرية : اذا ضربنا طرفي متراجحة بعدد موجب او بتركيب جبري موجب ولا يحوي على المجهول س فاننا نحصل على متراجحة متكافئة مع الاولى ، واذا كان المضروب فيه سالباً وجب (قلب) اتجاه المتراجحة .

الحالة الاولى : $د > ٠$

الايضاح : لتكن المتراجحة :

$$ب < حـ \qquad (١)$$

وبفرض د تركيباً جبرياً موجباً ولا يحوي على المجهول س ، لنبرهن على ان المتراجحة :

$$د \cdot ب < د \cdot حـ \qquad (٢)$$

تتكافأ مع الاولى (١) .

البرهان : ١°) لنفرض ان : $س = ١$ هو حل للمتراجحة الاولى يعطي الى ث ، حـ القيم العددية $ب'$ ، $حـ'$. فبما ان $س = ١$ حل للاولى اذن :

$$ب' < حـ'$$

فلو ضربنا طرفي هذه المتراجحة العددية الاخيرة في العدد الموجب د نحصل (بند ١٩٥) على متراجحة صحيحة وهي :

د . بَ > د . حَ

ولو قارنا ما بين هذه المتراجحة العددية الاخيرة وما بين المتراجحة (٢) لرأينا ان س = ١ هو جذر لها .

البرهان : ٢ً) لنفرض ان : س = ٩ هو جذر للثانية وانه يعطي الى ب ، حـ القيم العددية بً ، حً فبما ان س = ٩ هو جذر للثانية اذن : د . بً > د . حً

ولو قسمنا طرفي هذه المتراجحة العددية على العدد الموجب د لوجدنا (بند ١٩٥) :

بً > حً

مما يدلنا على ان س = ٩ هو جذر للاولى ، وهو المطلوب .

الحالة الثانية : د < .

البرهان : لتكن المتراجحة :

ب > حـ (١)

ولنفرض ان ك تركيباً سالباً لا يحوي على س ولنبرهن على ان المتراجحة :

ك . ب < ك . حـ (٢)

متكافئة مع الاولى :

١ً) بنفس الطريقة السابقة ، اذا كان س = ١ هو جذر للاولى وجب ان يكون : بَ > حَ

ولو ضربنا طرفي هذه المتراجحة العددية بالعدد السالب ك لوجب (بند ١٩٦) قلب اتجاهها فنجد :

ك . بَ < ك . حَ

مما يدلنا على ان س = ١ هو جذر للثانية (٢) .

٢ً) كذلك لنفرض ان س = ٩ هو جذر للثانية فيكون :

ك . بً < ك . حً

ولو قسمنا طرفي هذه المتراجحة على العدد السالب ك وجب قلب اتجاهها فنجد :

$$ب^{ن} > حـ^{ن}$$

مما يدلنا على ان $س = ٩$ يحقق المتراجحة الاولى ، وهو المطلوب .

٢٠٥ — ملاحظة : بما انه يمكن ان يكون كل من د ، ك صحيحاً او كسرياً من الشكل $\frac{١}{ن}$ ، $\frac{١}{هـ}$ نرى انه يمكننا تعميم النظرية السابقة بقولنا :

نظرية : اذا ضربنا او قسمنا طرفي متراجحة على تركيب جبري موجب [لا يحوي على س] فاننا نحصل على متراجحة متكافئة مع الاولى ، واذا ضربنا او قسمنا طرفي متراجحة على تركيب جبري سالب [لا يحوي على س] وجب قلب اتجاه المتراجحة .

٢٠٦ — تطبيقات : النظرية السابقة تفيدنا في اصلاح المتراجحات ووضعها بشكل بسيط ، الا انه يجب الانتباه عند ما يكون المضروب فيه سالباً ، او عندما يمكن ان يكون تارة موجباً وتارة سالباً ، فنميز وقتئذ حالتين كما في الامثلة الآتية :

٢٠٧ — مثال: ١) لتكن المتراجحة :

$$\frac{س}{٢} - \frac{س}{٣} > \frac{٥}{٢} - \frac{س}{٤}$$

فاذا ضربنا طرفيها بالمثل المشترك الاصغر للمخارج وهو ١٢ نحصل على المتراجحة :

$$٦ س - ٤ س > ٣٠ - ٣ س$$

المتكافئة مع الاولى .

وهذه الاخيرة تكافىء :

$$٢ س > ٣٠ - ٣ س$$

او :

$$٥ س > ٣٠$$

او :

$$س > ٦$$

ومن السهل ان نتحقق من ان كل قيمة الى س اعظم من ٦ تحقق المتراجحة المعطاة .

٢٠٨- مثال : ٢) لتكن المتراجحة :

$$د(س - ١) > د^{٢} س + ٣ د$$

فهذه المتراجحة يمكن اختصارها بتقسيم الطرفين على د ، الا اننا لا نعلم فيما اذا كان د عدداً موجباً او سالباً ، لذلك نميز حالتين :

الحالة الاولى : $د > ٠$

فيمكننا اذن تقسيم الطرفين على د بدون تغيير اتجاه المتراجحة ونحصل على :

$$س - ١ > د ٠ س + ٣$$

فهذه المتراجحة تكافيء الاولى بفرض ان :

$$د > ٠$$

الحالة الثانية : $د < ٠$

فيمكننا وقتئذ تقسيم الطرفين على د بشرط تغيير اتجاه المتراجحة ونحصل على :

$$س - ١ < د ٠ س + ٣$$

وهذه ايضاً تكافيء الاولى بفرض ان :

$$د < ٠$$



الفصل الثالث

كيفية حل ومناقشة المتراجحات

التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد

٢٠٩- استناداً على النظريات السابقة يمكننا ان نضع كل متراجحة تامة (اي غير حاوية على المجهولة س في المخرج) بالصورة الآتية :

$$ب \cdot س < حـ$$

او :

$$ب \cdot س > حـ$$

وذلك بعد نقل الحدود المعلومة لجانب والمجهولة لجانب آخر واخذ س خارج قوس

اذن في المتراجحتين السابقتين الحرفان ب ، حـ يدلان على كميات معلومة .

فلو اخذنا المتراجحة :

$$ب \cdot س < حـ$$

نرى انه للحصول على س يجب تقسيم الطرفين على ب ، لذلك نميز حالتين :

الحالة الاولى: $ب > ٠$ فيمكننا ان نقسم الطرفين على ب بدون تغيير اتجاه المتراجحة ، ونجد :

$$س < \frac{حـ}{ب}$$

الحالة الثانية: $ب < ٠$ فيمكننا ان نقسم الطرفين على ب بشرط قلب اتجاه المتراجحة فنجد :

$$س < \frac{حـ}{ب}$$

وهنالك حالة خاصة ثالثة وهي عندما تكون $ب = ٠$ فيصبح شكل المتراجحة المعطاة هو :

$$٠ \times س < حـ$$

او :

$$٠ < حـ$$

فاذا كانت $حـ$ سالبة كانت المتراجحة محققة مهما كانت $س$.

واذا كانت $حـ$ موجبة او صفراً ، اي $٠ \geq حـ$ تكون المتراجحة المعطاة مستحيلة . ويمكن تلخيص ما ذكر بالجدول الآتي :

$$ب \cdot س < حـ$$

الحالة الاولى : $ب > ٠$ الحل : هو $س < \frac{حـ}{ب}$

الحالة الثانية : $ب < ٠$ الحل : هو $س > \frac{حـ}{ب}$

الحالة الثالثة : $ب = ٠$ المتراجحة تصبح $٠ \times س < حـ$

الفرع الاول : $٠ < حـ$ محققة مهما كانت $س$

الفرع الثاني : $٠ \geq حـ$ مستحيلة .

٢١٠ - ملاحظة : ١) بنفس الطريقة تماماً نحل ونناقش المتراجحة :

$$ب \cdot س \leq حـ$$

٢) لنلاحظ ان الكسر $\frac{حـ}{ب}$ هو جذر المعادلة $ب س = حـ$ اي هو جذر المعادلة التي تنشأ من المتراجحة بتبديل اشارة التراجح باشارة المساواة كما في الامثلة الاتية :

٢١١ - مثال : ١) المطلوب حل المتراجحة :

$$\frac{٥\,س}{٢} - ٩ > \frac{٣}{٢} + \frac{٢\,س}{٥}$$

الحل : لنضرب الطرفين بالمثل المشترك الاصغر للمخارج وهو ١٠ فنجد المتراجحة:

$$٢٥\,س - ٩٠ > ١٥ + ٤\,س$$ المتكافئة مع الاولى .

وهذه تكافيء المتراجحة :

$$٢٥\,س - ٤\,س > ١٥ + ٩٠$$

او :

$$٢١\,س > ١٠٥$$

وبتقسيم الطرفين على العدد الموجب ٢١ نجد:

$$س > \frac{١٠٥}{٢١}$$

ومنها :

$$س > ٥$$

اي ان كل قيمة عددية الى س اكبر من ٥ تحقق المتراجحة المعطاة ، اذن جذور المتراجحة المعطاة هي جميع الاعداد التي اكبر من ٥ .

ونلاحظ بسهولة ان الكسر $\frac{١٠٥}{٢١}$ اي العدد ٥ هو جذر المعادلة :

$$\frac{٥}{٢}\,س - ٩ = \frac{٣}{٢} + \frac{٢\,س}{٥}$$

٢١٢- مثال : ٢) المطلوب حل ومناقشة المتراجحة :

$$هـ\,س + ٤ > هـ^{٢} + ٢\,س$$

الحل : لننقل الحدود المعلومة للجانب الاول والمجهولة للجانب الثاني فنجد المتراجحة :

$$هـ\,س - ٢\,س > هـ^{٢} - ٤$$

او :

$$(هـ - ٢)\,س > (هـ - ٢)(هـ + ٢)$$ (١)

فهنا للحصول على س يجب ان نقسم الطرفين على $هـ - ٢$ الا اننا لا نعلم فيما

اذا كان المقدار $هـ - ٢$ موجباً او سالباً او يساوي الصفر ، لذلك نميز ثلاث حالات :

الحالة الاولى : $هـ - ٢ > ٠$ اي : $هـ > ٢$

فيمكننا وقتئذ تقسيم الطرفين على $(هـ - ٢)$ بدون تغيير اتجاه المتراجحة ونجد الحل :

$$س > هـ + ٢$$

الحالة الثانية : $هـ - ٢ < ٠$ اي : $هـ < ٢$

فيمكننا تقسيم الطرفين على $(هـ - ٢)$ بشرط تغيير اتجاه المتراجحة فنجد الحل :

$$س < هـ + ٢$$

الحالة الثالثة : $هـ = ٢$ فيصبح شكل المتراجحة (١) هو :

$س \times ٠ > ٤ - ٤$ اي : $٠ > ٠$ وهذا مستحيل :

الخلاصة :

$س(هـ - ٢) > (هـ - ٢)(هـ + ٢)$

١) $هـ > ٢$ فيكون : $س > هـ + ٢$

٢) $هـ < ٢$ فيكون : $س < هـ + ٢$

٣) $هـ = ٢$ المتراجحة مستحيلة

٢١٣- مثال : ٣) المطلوب حل ومناقشة المتراجحة :

$$٢هـ - ٣س > ١ - هـ س$$

الحل : اذا نقلنا الحدود المعلومة للجانب الاول والمجهولة للجانب الثاني وتممنا الحل كما في السابق ، فاننا نحصل على الجدول الآتي :

$$س(هـ-٣)>١-٢هـ$$

١) $هـ>٣$ فنجد:
$$س<\frac{١-٢هـ}{هـ-٣}$$

٢) $هـ<٣$ فنجد:
$$س>\frac{١-٢هـ}{هـ-٣}$$

٣) $هـ=٣$ فالمتراجحة تصبح:
$$س\times٠>١-٦$$
اي: $٠>-٥$ وهذا يدل على ان المتراجحة محققة دوماً.

الفصل الرابع

المتراجحات التي يعود حلها
الى حل متراجحات من الدرجة الاولى

٢١٩ – من المتراجحات التي يرجع حلها لحل متراجحة من الدرجة الاولى هي المتراجحات التي تحوي على المجهول س في المخرج. واستناداً على النظريات الاساسية (بند ٢٠٢، ٢٠٤) يمكننا اصلاح هذه المتراجحات التي تحوي على المجهول س في المخرج ووضعها باحدى الصورتين:

$$\frac{ص}{م}<٠ \quad \text{او:} \quad \frac{ص}{م}>٠$$

وذلك بنقل جميع الحدود للجانب الاول ويجعلها بعد ذلك من مخرج واحد بواسطة ضرب صورة ومخرج كل حد بمقدار واحد (وهو حاصل قسمة المثل المشترك الاصغر

للمخارج على مخرج هذا الحد) فتأخذ حينئذ المتراجحة الشكل :

$$\frac{ص}{م} > ٠ \quad \text{او :} \quad \frac{ص}{م} < ٠$$

حيث يدل م على المثل المشترك الاصغر للمخارج [وحدنا المخارج ولم نحذفها] وحيث تدل ص على حاصل جمع وطرح الصور بعد ضربها .

واذا لاحظنا الآن ان اشارة الكسر $\frac{ص}{م}$ هي عين اشارة الجداء ص . م لرأينا انه يكفي لحل المتراجحة :

$$\frac{ص}{م} > ٠$$

ان نحل المتراجحة :

$$ص . م > ٠$$

ولنرَ الآن كيف يكون حل هذه الاخيرة .

٢١٥- كيفية حل المتراجحات التي من الشكل :

ب . حـ . د > ٠ او : ب . حـ . د < ٠

الحل : لحل المتراجحة :

ب . حـ . د > ٠

حيث ب ، حـ ، د تدل على تراكيب جبرية تامة ومن الدرجة الاولى بالنسبة الى س ، ندرس اشارة كل مضروب على حدة ، ثم نرى بواسطة جدول متى تكون اشارة حاصل الضرب موجبة ، ومتى تكون سالبة ، اي نرى متى تكون المتراجحة محققة او غير محققة . ولنوضح ذلك بواسطة المثال الآتي :

٢١٦- مثال : المطلوب حل المتراجحة :

$$(٢ - س)(س - ١)(س + ١) > ٠$$

الحل : لندرس اشارة كل مضروب على حدة فنجد ان :

المضروب الاول ٢ — س	> ٠	عندما	س < ٢
	= ٠	عندما	س = ٢
	< ٠	عندما	س > ٢
المضروب الثاني س — ١	> ٠	عندما	س < ١
	= ٠	عندما	س = ١
	< ٠	عندما	س > ١
المضروب الثالث س + ١	> ٠	عندما	س > — ١
	= ٠	عندما	س = — ١
	< ٠	عندما	س < — ١

لنرتب الاعداد : ٢ ، ١ ، — ١ مبتدئين من الاصغر فالاكبر ، وذلك بوضعها على خط افقي فنجد :

— ١ ، ١ ، ٢

ثم لنشكل الجدول الآتي :

س	— ∞		— ١		١		٢		+ ∞
٢ — س	+		+		+	٠	+		—
س — ١	—		—	٠	+		+		+
س + ١	—	٠	+		+		+		+
الجداء (٢ — س) (س — ١) (س + ١)	+	٠	—	٠	+	٠	+	٠	—
المتراجحة	محققة		لا		محققة		لا		

حيث كتبنا في العمود الاول الكميات التي يراد درس اشارتها ، وامام (٢ — س) كتبنا الاشارات + + + ٠ — التي تدلنا على انه عندما يكون س اصغر من — ١ يكون (٢ — س) موجباً ، وكذا بين — ١ ، + ١ ، وكذا بين ١ ، ٢ ، واخيراً (٢ — س) تكون سالبة اذا كانت س اكبر من ٢ واما عندما س = ٢ فان ٢ — س صفر .

بنفس الطريقة كتبنا اشارات الكمية س — ١ والكمية س + ١ ثم استنتجنا اشارة الجداء الموضوع في السطر الخامس . واما السطر الاخير فيدلنا على ان المتراجحة تكون محققة عند ما يكون :

$$س < -١ \quad و \quad ١ < س < ٢$$

اي للمتراجحة المعطاة حلان ، اما س اصغر من — ١ ، واما س محصورة ما بين ١ ، ٢ .

٢١٧— مثال : ٢) المطلوب حل المتراجحة :

$$(س - ٣)(٥ - س) > ٠$$

الحل : بنفس الطريقة السابقة نحصل على الجدول الآتي :

س	$-\infty$		٣		٥		$+\infty$
س — ٣	—	٠	+		+		+
٥ — س	+		+	٠	+		—
الجداء (س — ٣)(٥ — س)	—	٠	+	٠	+		—
المتراجحة	لا		محققة				لا

اي ان المتراجحة تكون محققة عند ما تكون س محصورة ما بين ٣ ، ٥ اي :

$$٣ < س < ٥$$

٢١٨— ملاحظة : لا يخلو من فائدة ان نلاحظ في البحث السابق ان الكمية ب س + حـ تكون من اشارة ب او من اشارة مخالفة لاشارة ب حسبما يكون س اكبر او اصغر من الجذر $\frac{-حـ}{ب}$ للمعادلة :

$$ب س + حـ = ٠ .$$

٢١٩— المتراجحات المجتمعة : يعطى لنا احياناً متراجحتان او اكثر كل

واحدة منها ذات مجهول واحد وهو س ، ويطلب منا ان نجد قيمة س التي تجعل هذه المتراجحات جميعها محققة بآن واحد .

فلحل جملة متراجحات كهذه نحل كل متراجحة منها على حدة ، ثم نفتش مابين هذه الحلول عن الحل الذي يحوي على بقية الحلول ضمنه . والامثلة الاتية توضح لنا ذلك :

٢٢٠— مثال : ١) المطلوب حل المتراجحتين المجتمعتين :

$$٦س - ٧ > س + ٣$$

$$٢س + ٥ > س + ٨$$

اي يجب ايجاد قيم س التي تحقق هاتين المتراجحتين بآن واحد .

الحل : لنحل كلا منها على حدة ، فنجد ان حل الاولى هو $س > ٢$ ، وان حل الثانية هو $س > ٣$.

الا انه اذا كان $س > ٣$ يكون بالطبع $س > ٢$. لذلك ، فالحل $س > ٣$ يحقق هاتين المتراجحتين بآن واحد .

مثال : ٢) المطلوب حل المتراجحتين المجتمعتين :

$$٣س - ٤ < س + ٢$$

$$س^٢ - ٤س < ٠$$

الحل : لنحل كلاً منها على حدة ، فنجد ان حل الاولى هو $س < ٣$ ولو حللنا الثانية بواسطة جدول ، وبعد اخذ س خارج قوس نجد ان حلها هو :

$$٤ > س > ٠$$

فلو تأملنا في حل الاولى وحل الثانية ، لرأينا انه يكفي ان تكون :

$$٤ > س > ٣$$

لتكون المتراجحتان محققتين بآن واحد .

***

تمارين

حل وناقش المتراجحات الآتية :

١] $٢س - ٥ < ٥س + ٧$

٢] $\frac{س}{٥} + \frac{١}{٤} < \frac{٢س}{٧} - \frac{٥}{٨}$

٣] $\frac{س - ١}{٤} - ٥ > \frac{٢س - ٣}{٢} + \frac{٣}{٢}$

٤] $(س - ١)(س - ٢) > (س - ٣)(س - ٤)$

٥] $ع^{٢} - ٥ع + ٩ < ع(ع + ١) + ١٢$

٦] $هـ ٠ ص + ٤ > ٢ ص + هـ^{٢}$

٧] $\frac{٢ ع}{(هـ + ١)^{٢}} > \frac{ع + ١}{هـ + ٢}$

٨] $\frac{ص + ١}{هـ + ١} + \frac{هـ ص}{١ + هـ^{٢} + ٢ هـ}$

٩] $\frac{م^{٢} ص + ٢}{ص + ١} < ٢$

١٠] $ص(ص - ١)(ص - ٢) > ٠$

١١] $ع^{٢} - ١ > ٠$

١٢] $(ع - ١)(ع - ٢)(ع + ٢)(ع + ١) > ٠$

١٣] $\frac{س - ١}{س + ٢} < ٠$

١٤] $\frac{٢ - س}{س - ١} > ٠$

١٥] $\frac{ع - ١}{ع + ٢} < ٣$

١٦] $\frac{٢ ع - ١}{ع + ١} < ٢$

١٧] $٣ < \frac{س}{س + ٢} < ٢$

١٨] $\frac{ب س - ٤}{س + ٢} > ٠$

١٩] $\frac{١ + هـ^{٢} س}{١ - س} < ٠$

٢٠] $\sqrt{ع - ١} < ٢$

٢١] $\sqrt{٢ س - ٥} > -٢$

٢٢] $س - ٥ < \sqrt{س^{٢} + ٩}$

٢٣] $ص - ٤ < \sqrt{ص^{٢} + ١}$

٢٤ $\sqrt{س} < \sqrt{٢ س - ١}$

٢٥] $س^{٢} - ١ > ٠$

٢٦] $(س^{٢} - ١)(س^{٤} - ١٦) > ٠$

❀❀❀

المطلوب حل المتراجحات المجتمعة الآتية :

٢٧] $\left.\begin{array}{l} \dfrac{(٢س-٣)(٢س+٣)}{٨} - \dfrac{(س+٤)^{٢}}{٦} + \dfrac{(٢-س)(س+١)}{٣} > ٠ \\ \dfrac{٥س+١}{٣} - \dfrac{٨س+١}{٤} - \dfrac{١+١٠س}{١٢} < ٠ \end{array}\right\}$

٢٨] $\left.\begin{array}{l} ٥ص-٤ > ٩ص+١ \\ ص^{٢}-٢ > (ص+٥)(ص+١) \\ \dfrac{ص}{٢} - \dfrac{١}{٣} > \dfrac{٤ص}{٣} - \dfrac{١}{٢} \end{array}\right\}$

٢٩] $\left.\begin{array}{l} \dfrac{س-١}{٣} + \dfrac{س-٢}{٤} < \dfrac{١}{٦} \\ \dfrac{س-١}{١٠} - \dfrac{س-٣}{٥} < ٠ \end{array}\right\}$

٣٠] $\left.\begin{array}{l} ٣ع-٥ < ٠ \\ ٢ع-١١ > ٠ \end{array}\right\}$

٣١] $\left.\begin{array}{l} ٢ع-٧ > ٠ \\ ٣ع-٢ < ٠ \end{array}\right\}$

٣٢] اصغر اضلاع المثلث هو ب وضلعيه الآخرين هما: ب + س ، ب + ٢ س كيف يجب ان نأخذ س حتى يمكن رسم هذا المثلث ؟

***

البحث الخامس

المعادلات والمجاهيل المتعددة

الفصل الأول

حل مجموعة المعادلتين ذات المجهولين

٢٢١- تمهيد: لتكن المعادلة :

$$٣س - ٥ع = ٧$$

فهذه المعادلة الوحيدة غير كافية لتعيين قيمتي المجهولين س ، ع في الحقيقة يمكننا ان نعطي احد هذه المجاهيل ، ولنفرضه ع ، قيمة اختيارية ما ، فنجد قيمة خاصة الى س . وهكذا نرى ان المجهول ع يمكن ان يتحول كيفما اتفق الامر ، اعني يمكنه ان يأخذ اي قيمة اردنا ، ولكن من اجل كل قيمة الى ع نجد قيمة خاصة معينة للمجهول س ، لذلك لنفرض الآن ان ع معلومة فنجد ان :

$$٣س = ٥ع + ٧$$

ومنها :

$$س = \frac{٥ع + ٧}{٣} \qquad (١)$$

فاذا كانت ع = ١ مثلاً ، فالمعادلة (١) تعطي :

$$س = \frac{٥ + ٧}{٣} = ٤$$

مما يدلنا على ان القيمتين س = ٤ ، ع = ١ تشكلان حلاً لهذه المعادلة .

وعند ما يكون ع = ٢ فالمعادلة (١) تعطي :

$$س = \frac{١٧}{٣}$$

اذن المعادلة المفروضة لها حلول عديدة ، اي ممثلة عدم تعيين .

٢٢٢- جملة المعادلات : جملة او مجموعة المعادلات هي عدة معادلات تقبل حلاً واحداً .

وحل جملة معادلات ما ، هو ايجاد قيم المجاهيل التي تحقق جميع معادلاتها بآن واحد .

اما الجملتان المتكافئتان ، فهما الجملتان اللتان لهما حل واحد [حل الاولى هو حل للثانية وبالعكس] .

٢٢٣- الطرق المختلفة لحل مجموعة معادلتين ذات مجهولين :

ان الطرق المتبعة لحل مجموعة معادلتين ذات مجهولين كثيرة ، وغاية كل منها ايجاد معادلتين متكافئتين مع الاوليتين ، على ان تكون احدى هاتين المعادلتين الجديدتين غير حاوية الا على مجهول واحد .

اي ان غاية كل هذه الطرق ، هي حذف احد المجاهيل ، والحصول على معادلة لا تحوي الا على مجهول واحد ، ومن هذه الطرق المتبعة ، الطريقة المسماة **بطريقة الوضع** .

٢٢٤- طريقة الوضع : ان هذه الطريقة ليست الا نتيجة للنظرية الآتية :

نظرية : اذا كان لدينا جملة معادلتين من الدرجة الاولى وذات مجهولين واستخرجنا قيمة احد المجاهيل من احدى هاتين المعادلتين بالنسبة للمجهول الآخر (الذي ننظر له كمعلوم) ووضعنا هذه القيمة في المعادلة الثانية ، فاننا نحصل على مجموعة متكافئة مع الاولى .

البرهان : لتكن الجملة :

$$ب \begin{cases} ٢س + ٣ع = ٧ & (١) \\ ٥س - ٢ع = ٨ & (٢) \end{cases}$$

ولنأخذ من المعادلة (١) قيمة س باعتبار ع معلوماً فنجد :

$$س = \frac{٧ - ٣ع}{٢}$$

لنضع هذه القيمة في المعادلة (٢) فنجد المجموعة الجديدة :

$$\text{حـ} \begin{cases} س = \dfrac{٧ - ٣ع}{٢} & (٣) \\ ٥\left(\dfrac{٧ - ٣ع}{٢}\right) - ٢ع = ٨ & (٤) \end{cases}$$

ولنبرهن على ان الجملة ب تكافيء الجملة حـ

١ً) المعادلة (٣) تكافيء المعادلة (١) لاننا استخرجنا المعادلة (٣) من المعادلة (١) بواسطة عمليات مسموح بها . اذن لم يبق علينا الا ان نبرهن على ان المعادلتين (٢) ، (٤) متكافئتان .

لذلك ليكن $س = ص$ ، $ع = د$ حلاً للجملة ب فالمعادلتان (١) ، (٢) تعطيانا اذن المساواتين العدديتين الآتيتين :

$$٢ص + ٣د = ٧ \qquad (٥)$$

$$٥ص - ٢د = ٨ \qquad (٦)$$

ومن المساواة العددية (٥) نستنتج ان :

$$ص = \frac{٧ - ٣د}{٢} \qquad (٧)$$

اذن يمكننا ان نبدل في المساواة العددية (٦) العدد ص بما يساويه فنجد :

$$٥\left(\frac{٧ - ٣د}{٢}\right) - ٢د = ٨ \qquad (٧)$$

ولو قارنا ما بين المساواتين العدديتين (٧) ، (٧) وبين المجموعة حـ لرأينا ان هذه المجموعة حـ محققة عندما يكون :

$$س = ب \quad ، \quad ع = د$$

اي : $س = ب$ ، $ع = د$ هو حل للمجموعة الثانية .

اذن كل حل للجملة ب هو حل للجملة حـ

٢ً) وبالعكس لنفرض ان $س = هـ$ ، $ع = ك$ هما حل للجملة حـ فالمعادلتان (٣) ، (٤) تعطياننا اذن المساواتين العدديتين :

$$هـ = \frac{٧ - ٣ك}{٢} \qquad (٨)$$

$$٥ \left(\frac{٧ - ٣ك}{٢} \right) - ٢ك = ٨ \qquad (٨)$$

وفي هذه المساواة الاخيرة يمكننا ان نضع عوضاً عن المقدار $\frac{٧ - ٣ك}{٢}$ قيمته وهي هـ فيكون :

$$٥هـ - ٢ك = ٨$$

فهذه المساواة تدلنا على ان المعادلة (٢) محققة عند ما يكون : $س = هـ$ ، $ع = ك$ مما يدلنا على ان الجملة ب متكافئة مع الجملة حـ وهو المطلوب .

٢٢٥- حالة خاصة : ١) المطلوب حل الجملة :

$$\begin{cases} ٣س + ٤ع = ٥ \\ ٩س + ١٢ع = ٧ \end{cases}$$

الحل : من المعادلة الاولى نستنتج :

$$س = \frac{٥ - ٤ع}{٣}$$

مما يدلنا على ان وجود س متعلق بايجاد ع .

فاذا وضعنا قيمة س هذه في المعادلة الثانية نجد :

$$٩\left(\frac{٥ - ٤ع}{٣}\right) + ١٢ع = ٧$$

ومنها : $٣(٥ - ٤ع) + ١٢ع = ٧$

ومنها : $١٥ - ١٢ع + ١٢ع = ٧$

ومنها : $(-١٢ + ١٢)ع = -٨$

ومنها : $٠ \times ع = -٨$

نرى من هذا انه لا يمكن ان نجد قيمة للمجهول ع تحقق هذه المعادلة ، اذن لا يمكن ان نجد حلاً للجملة المفروضة ، لان وجود س متعلق بوجود ع غير الموجودة، لذلك يقال في الحالة ، ان الجملة المفروضة مستحيلة .

٣٢٦ — حالة خاصة : ٢) المطلوب حل جملة المعادلتين :

$$٢س - ٤ع = ٧$$

$$٣س - ٦ع = \frac{٢١}{٢}$$

الحل : من المعادلة الاولى نستنتج ان :

$$س = \frac{٧ + ٤ع}{٢} = ٢ع + \frac{٧}{٢} \qquad (١)$$

لنضع هذه القيمة في المعادلة الثانية فنجد :

$$٣\left(٢ع + \frac{٧}{٢}\right) - ٦ع = \frac{٢١}{٢}$$

ومنها : $٦ع + \frac{٢١}{٢} - ٦ع = \frac{٢١}{٢}$

ومنها : $٠ \times ع = ٠$

اي ان المعادلة الثانية محققة مهما كانت ع مما يدلنا على انه يمكننا ان نعطي الى ع اي قيمة اردنا وان نجد قيمة س بواسطة الدستور (١) ومن هنا نرى انه لدينا حلول

عددية وهي حلول المعادلة الاولى . لذلك نقول ان المعادلتين تمثلتا عدم تعيين ، وسنرى ذلك بصورة عامة في الفصل الآتي .

٢٢٧ – كيفية حل جملة المعادلات التي عدد معادلاتها اكثر من عدد المجاهيل

: اذا كان لدينا عدة معادلات ثلاث او اربع او ..... من ذات المجهولين وطلب منا ان نحل هذه الجملة من المعادلات التي عددها اكثر من عدد المجاهيل ، فاننا ننتخب معادلتين فقط من هذه المعادلات العديدة ونتبع الطرق الاتية :

١ً) نحل هاتين المعادلتين ونتحرى فيما اذا كان هذا الحل يوافق بقية المعادلات ، فان كان ذلك يكون عندئذ هذا الحل هو حل جملة المعادلات ، والا فالجملة غير قابلة للحل اي مستحيلة . وهذه الحالة هي التي تصادف على الاكثر .

٢ً) اذا كانت المعادلتان المنتخبتان مستحيلتين تكون عندئذ الجملة مستحيلة ايضاً ، اي غير قابلة للحل .

٣ً) المعادلتان المنتخبتان لهما حلول عديدة ، ولتكن مثلاً حلول المعادلة الاولى منهما ، عندئذ نحذف الثانية (حيث ان جميع حلول الاولى توافق الثانية) ونأخذ الاولى مع معادلة اخرى ، ونعيد العمل كما ذكرنا في (١ً) و (٢ً) .



الفصل الثاني

الطرق المختلفة

لحل ومناقشة جملة معادلتين ذات مجهولين

٢٢٨- جملة المعادلتين ذات المجهولين: لنأخذ جملة المعادلتين ذات المجهولين س ، ع وهي:

$$\text{١} \begin{cases} ب = ٠ \\ حـ = ٠ \end{cases}$$

حيث ب ، حـ تدل على تراكيب جبرية من الدرجة الاولى بالنسبة الى س ، ع فحل او جذر هذه الجملة هو العددان س ، ع اللذان اذا وضعا في الجملة (١) محل س ، ع لحققاها ، اي هما قيمتا س ، ع اللتان تجعلان بآن واحد القيمة العددية لكل من ب ، حـ مساوية للصفر.

وتكون الجملتان متكافئتين فيما اذا كانت حلول الاولى توافق الثانية ، وبالعكس [كل حل للثانية يوافق الاولى] . لذلك عند البرهان على تكافؤ جملتين يجب ان نبرهن على ان كل حل للاولى هو حل للثانية، وبالعكس كل حل للثانية هو حل للاولى .

٢٢٩- الطريقة العامة لحل جملة معادلتين: ان الطريقة العامة هي ، كما في حل المعادلة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد ، ابدال مجموعة المعادلتين المعطاتين بمجموعة تكافئها وتكون ابسط منها ، ونكرر هذا العمل الى ان نجد معادلتين يكون حلها ظاهراً .

لنأخذ الجملة :

$$\text{١} \begin{cases} ب = ٠ \\ حـ = ٠ \end{cases}$$

فاذا فرض ان المعادلة : $ب = ٠$ هي معادلة تكافيء الاولى ، فالجملة :

$$\text{٢} \begin{cases} ب' = ٠ \\ حـ = ٠ \end{cases}$$

تكافيء الجملة (١) فكل حل للجملة (١) يكون حلاً للجملة (٢) وبالعكس كل حل للجملة (٢) يكون حلاً للجملة (١) ، اذ ان المعادلتين الاوليتين من هاتين الجملتين متكافئتان ، واما المعادلتان الثانيتان فلم تتبدلا .

٢٣٠- حل جملة المعادلتين : لتكن جملة المعادلتين :

$$\text{١} \begin{cases} ب\,س + حـ\,ع = د & (١) \\ ب'\,س + حـ'\,ع = د' & (٢) \end{cases}$$

حيث $ب ، حـ ، ب' ، حـ'$ تدل على اعداد معلومة .

فنرى بسهولة انه لا بد وان يكون احد هذه الاعداد على الاقل غير الصفر ، لانه لو كانت كلها اصفاراً لاصبح شكل جملة المعادلتين هو :

$$٠ \times س + ٠ \times ع = د$$

$$٠ \times س + ٠ \times ع = د'$$

وهي اما مستحيلة اذا كان د او د' لا يساوي الصفر ، واما ممثلة عدم تعيين اذا كان

$$د = د' = ٠$$

لذلك لنفرض ان احد الامثال وليكن $ب \neq ٠$ فيمكننا عندئذ ان نقسم طرفي المعادلة (١) على ب ونجد :

$$س + \frac{حـ}{ب}\,ع = \frac{د}{ب}$$

ومنها :

$$س = \frac{د - حـ\,ع}{ب} \qquad (٣)$$

وبمقتضى (البند ٢٢٤) تتكون لدينا الجملة :

$$\left.\begin{array}{ll} س = \dfrac{د - حـ ع}{ب} & (٣) \\ بـَ س + حـَ ع = دَ & (٤) \end{array}\right\} \quad ٢$$

التي هي مكافئة الى الجملة (١) .

فيما سبق حللنا المعادلة (١) بالنسبة الى المجهول س كما لو كانت ع معلومة فكثيراً ما نسمي عملنا هذا بقولنا حسبنا س بدلالة ع او استخرجنا قيمة س بالنسبة الى ع .

٢٣١- طريقة الوضع* : لنأخذ قيمة س من المعادله (٣) ولنضعها في المعادلة (٢) فنجد الجملة :

$$\left.\begin{array}{ll} س = \dfrac{د - حـ ع}{ب} & (٣) \\ \dfrac{بـَ}{ب}(د - حـ ع) + حـَ ع = دَ & (٤) \end{array}\right\} \quad ٣$$

ولنبرهن على ان الجملة (٣) تكافيء الجملة (٢) .

البرهان : ١°) ليكن $س_١ ، ع_١$ حلاً للجملة (٢) فيكون اذن :

$$س_١ = \frac{د - حـ ع_١}{ب} \qquad (٣)$$

$$بـَ س_١ + حـَ ع_١ = دَ \qquad (٤)$$

ولكن ، بما ان العدد $س_١$ يساوي للعدد $\dfrac{د - حـ ع_١}{ب}$ اذن يمكننا ان نضع في المساواة الثانية من هاتين المساواتين العدديتين (٣) ، (٤) محل $س_١$ مساويها وهو : $\dfrac{د - حـ ع_١}{ب}$ فنجد المساواتين العدديتين :

---

* نكرر في هذا البند البرهان الذي رأيناه في (البند ٢٢٤) بصورة عددية .

$$س_١ = \frac{د - حـ ع_١}{ب}$$

$$\frac{ب^{ن}}{ب}(د - حـ ع_١) + حـ^{ن} ع_١ = د^{ن}$$

ولو قارنا ما بين هاتين المساواتين العدديتين الاخيرتين وما بين الجملة (٣) لاستنتجنا ان الجملة (٣) تقبل الحل $س_١ ، ع_١$ وهو المطلوب الاول :

البرهان : ٢) العكس : ليكن $س_٢ ، ع_٢$ حلاً للجملة (٣) فيكون :

$$س_٢ = \frac{د - حـ ع_٢}{ب}$$

$$\frac{ب^{ن}}{ب}(د - حـ ع_٢) + حـ^{ن} ع_٢ = د^{ن}$$

ولكن بما ان العدد $\frac{د - حـ ع_٢}{ب}$ يساوي $س_٢$ فيكون ايضاً :

$$س_٢ = \frac{د - حـ ع_٢}{ب}$$

$$ب^{ن} س_٢ + حـ^{ن} ع_٢ = د^{ن}$$

وهذا يدلنا على ان الجملة (٢) تقبل الحل $س_٢ ، ع_٢$ اذن الجملتان (٢) ، (٣) متكافئتان ، وهو المطلوب .

٢٣٢ - ملاحظة : المعادلة (٤) من الجملة (٣) لا تحوي الا على مجهول واحد وهو ع ويمكن ان نبدل هذه المعادلة بمعادلة تكافئها ، لذلك لنضرب طرفي المعادلة (٤) بالعدد ب الذي لا يساوي الصفر فرضاً ، فنجد :

$$ب^{ن}(د - حـ ع) + ب حـ^{ن} ع = ب د^{ن}$$

او :

$$ب^{ن} د - ب^{ن} حـ ع + ب حـ^{ن} ع = ب د^{ن}$$

او : $ع\,(ب\,حَ - بَ\,ح) = ب\,دَ - بَ\,د$

والجملة (٣) تكافيء اذن الجملة :

$$\left.\begin{array}{ll} س = \dfrac{د - ح\,ع}{ب} & (٣) \\ ع\,(ب\,حَ - بَ\,ح) = ب\,دَ - بَ\,د & (٥) \end{array}\right\} ٤$$

ولانهاء العمليات يجب ان نحل المعادلة (٥) التي لا تحتوي الا على المجهول ع ، اذن يجب ان نجري فرضيات على الكمية $ب\,حَ - بَ\,ح$ التي هي امثال ع فنجد الحالات الاتية :

الحالة الاولى : $ب\,حَ - بَ\,ح \neq ٠$

فالمعادلة (٥) تعطينا وقتئذٍ :

$$ع = \frac{ب\,دَ - بَ\,د}{ب\,حَ - بَ\,ح}$$

والمعادلة (٣) تعطينا :

$$س = \frac{١}{ب}\left(د - ح\,\frac{ب\,دَ - بَ\,د}{ب\,حَ - بَ\,ح}\right) =$$

$$\frac{١}{ب}\left(\frac{ب\,د\,حَ - بَ\,ح\,د - ح\,ب\,دَ + ح\,بَ\,د}{ب\,حَ - بَ\,ح}\right)$$

ومنها : $س = \dfrac{١}{ب}\left(\dfrac{ب\,د\,حَ - ب\,ح\,دَ}{ب\,حَ - بَ\,ح}\right) = \dfrac{د\,حَ - دَ\,ح}{ب\,حَ - بَ\,ح}$

والجملة (٤) تكافيء اذن الجملة :

$$\left.\begin{array}{l} س = \dfrac{د\,حَ - دَ\,ح}{ب\,حَ - بَ\,ح} \\ ع = \dfrac{ب\,دَ - بَ\,د}{ب\,حَ - بَ\,ح} \end{array}\right\} ٥$$

التي هي محاولة . اذن في هذه الحالة يكون للجملة المفروضة حل واحد ، وواحد فقط .

الحالة الثانية : $ب حَ - ب' حَ = ٠$.

فالجملة (٤) تكتب حينئذٍ .

$$س = \frac{د - حـ ع}{ب}$$

$$٠ \times ع = ب دَ - ب' دَ$$

فاذا كانت $ب دَ - ب' د \neq ٠$. فالجملة ليس لها حل ، اي مستحيلة .

واذا كانت $ب دَ - ب' د = ٠$. فالمعادلة الاخيرة تمثل عدم تعيين ، اي وجودها وعدمه سواء ، ولا يبقى لنا الا المعادلة الوحيدة :

$$س = \frac{د - حـ ع}{ب}$$

فكما رأينا سابقاً لحل هذه المعادلة الوحيدة نعطي الى ع قيمة اختيارية ونحسب قيمة س المطابقة لهذه القيمة الاختيارية ، وهكذا . مما يدلنا على ان الجملة المعطاة لها حلول عديدة . وكل هذا بفرض $ب \neq ٠$.

ونلخص كل ما سبق بالنظرية الآتية :

نظرية : بفرض $ب \neq ٠$ يكون لجملة المعادلتين :

$$ب س + حـ ع = د$$

$$ب' س + حـ' ع = دَ$$

حل واحد فيما اذا كانت الكمية $ب حَ - ب' حَ$ غير الصفر .

واما اذا كانت $ب حَ - ب' حَ$ صفراً مع ان $ب دَ - ب' د$ غير الصفر ، فالجملة ليس لها حل ، اي مستحيلة .

واما اذا كانت الكميتان $ب حَ - ب' حَ$ ، $ب دَ - ب' د$ صفراً باآن واحد ، تصبح جملة المعادلتين معادلة واحدة ويكون لها حلول عديدة .

٢٣٣ — ملاحظة : رأينا ان جملة المعادلتين تكون غير معينة عند ما يكون ب غير الصفر ، ويكون باآن واحد :

$$ب حَ - بَ ح = ٠$$

$$ب دَ - بَ د = ٠$$

فمن هاتين المساواتين نستنتج ان :

$$حَ = ح \frac{بَ}{ب}$$

$$دَ = د \frac{بَ}{ب}$$

واذا لاحظنا ان : $بَ = ب \cdot \frac{بَ}{ب}$ نجد المطابقة الآتية :

$$بَ س + حَ ع - دَ = \frac{بَ}{ب} (ب س + ح ع - د)$$

اذن في هذه الحالة يمكننا ان نكتب المعادلتين المفروضتين بالصورة الآتية :

$$ب س + ح ع - د = ٠$$

$$\frac{بَ}{ب} (ب س + ح ع - د) = ٠$$

مما يدلنا على ان المعادلتين المفروضتين هما معادلة واحدة ، كل حل لها يكون حلاً للجملة .

وبصورة ثانية يمكننا ان نقول :

من المساواتين : $ب حَ - بَ ح = ٠$

$ب دَ - بَ د = ٠$

نستنتج ان :

$$\frac{بَ}{ب} = \frac{حَ}{ح} = \frac{دَ}{د}$$

فلو فرضنا ان القيمة المشتركة لهذه النسب المتساوية هي ك اي :

$$\frac{بَ}{ب} = \frac{حَ}{ح} = \frac{دَ}{د} = ك$$

لرأينا ان : $بَ = ك \cdot ب$ ، $حَ = ك \cdot ح$ ، $دَ = ك \cdot د$

وجملة المعادلتين :

$$(١)\quad \begin{cases} ب\ س + حـ\ ع = د \\ ب'\ س + حـ'\ ع = د' \end{cases}$$

تصبح :

$$\begin{cases} ب\ س + حـ\ ع = د \\ ك\ ب\ س + ك\ حـ\ ع = ك\ .\ د \end{cases}$$

مما يدلنا على ان المعادلة الثانية تنشأ من الاولى بضرب طرفي الاولى بـ ك وان المعادلتين المفروضتين هما واحدة ليس الا . لذلك فان الجملة تمثل عدم تعيين .

ومما سبق نستنتج بسهولة ان :

٢٣٤ — نتيجة : ١ً) الشرط اللازم والكافي لتمثل المجموعة (١) عدم تعيين ، هو ان يكون :

$$\frac{ب'}{ب} = \frac{حـ'}{حـ} = \frac{د'}{د}$$

٢ً) الشرط اللازم والكافي ليكون للمجموعة (١) حل واحد هو ان يكون :

$$\frac{ب'}{ب} \neq \frac{حـ'}{حـ}$$

٣ً) الشرط اللازم والكافي لتكون المجموعة (١) مستحيلة ، هو ان يكون :

$$\frac{ب'}{ب} = \frac{حـ'}{حـ} \neq \frac{د'}{د}$$

ونبرهن على العكس في هذه الاقسام الثلاثة بطريقة نقض الفرض .

٢٣٥ — مثال : المطلوب حل جملة المعادلتين :

$$١)\quad \begin{cases} ب\ س + ع = ٢ & (١) \\ س + ٤\ ع = ٣\ ط & (٢) \end{cases}$$

الحل : لنستخرج قيمة ع من المعادلة (١) لكي لا يكون لدينا مخرج ولنضع هذه القيمة في المعادلة (٢) فنجد :

$$\text{٢}\begin{cases} ع = ٢ - ب\,س & (٣) \\ س + ٤(٢ - ب\,س) = ٣ط & (٤) \end{cases}$$

فالمعادلة (٤) تكتب :

$$س + ٨ - ٤ب\,س = ٣ط$$

او :

$$س(١ - ٤ب) = ٣ط - ٨$$

اذن : الجملة المعطاة تكتب :

$$\begin{cases} ع = ٢ - ب\,س & (٣) \\ س(١ - ٤ب) = ٣ط - ٨ & (٥) \end{cases}$$

وهنا للحصول على س يجب ان نقسم الطرفين على امثال س وهي : $١ - ٤ب$ لذلك نميز حالتين :

الحالة الاولى :

$$١ - ٤ب \neq ٠ \qquad \text{او} \qquad ب \neq \frac{١}{٤}$$

فنجد من المعادلة (٥) ان :

$$س = \frac{٣ط - ٨}{١ - ٤ب}$$

واذا عوضنا س بما يساويها في ٣ نجد :

$$ع = ٢ - ب\,\frac{٣ط - ٨}{١ - ٤ب}$$

واخيراً :

$$ع = \frac{٢ - ٣ب\,ط}{١ - ٤ب}$$

اذن في هذه الحالة يكون لجملة المعادلتين حل واحد وهو :

$$س = \frac{٣ط - ٨}{١ - ٤ب} \quad ، \quad ع = \frac{٢ - ٣ب\,ط}{١ - ٤ب}$$

الحالة الثانية :

$$١ - ٤ب = ٠ \quad \text{او} \quad ب = \frac{١}{٤}$$

فعندئذ تصبح جملة المعادلتين هي :

$$\left.\begin{array}{l} ع = ٢ - \frac{س}{٤} \\ ٠ \times س = ٣ط - ٨ \end{array}\right\}$$

فاذا كان $٣ط - ٨ \neq ٠$ اي $ط \neq \frac{٨}{٣}$

تكون الجملة غير قابلة للحل ، اي مستحيلة .

وان كان $٣ط - ٨ = ٠$ اي $ط = \frac{٨}{٣}$

تبقى معنا المعادلة الوحيدة :

$$ع = ٢ - \frac{س}{٤}$$

ويكون للجملة حلول عديدة ، اي الجملة تمثل عدم تعيين .

٢٣٦- الخلاصة :

١) $ب \neq \frac{١}{٤}$ يوجد للجملة حل واحد وهو :

$$س = \frac{٣ط - ٨}{١ - ٤ب}$$

$$ع = \frac{٢ - ٣ب ط}{١ - ٤ب}$$

٢ً) $\left\{\begin{array}{ll} \frac{١}{٤} = ب & \\ ط \neq \frac{٨}{٣} & \text{الجملة ليس لها حل . مستحيلة .} \\ ط = \frac{٨}{٣} & \text{حلول عديدة س اختيارية و } ع = ٢ - \frac{س}{٤} \end{array}\right.$

٢٣٧ – ملاحظة : رأينا ان الشرط اللازم الكافي لتمثل جملة المعادلتين عدم تعيين هو ان يكون :

$$\frac{ب}{ب} = \frac{حَ}{ح} = \frac{دَ}{د}$$

ولنحل الآن المسألة الآتية :

مسألة : لتكن جملة المعادلتين :

$$ب\ س + ع = ٢$$

$$س + ٤\ ع = ٣\ ط$$

المطلوب تعيين قيمة الحرفين ب ، ط لتمثل هذه الجملة عدم تعيين .

الحل : يلزم ويكفي ان يكون :

$$\frac{ب}{١} = \frac{١}{٤} = \frac{٢}{٣\ ط}$$ ومنها :

$$ب = \frac{١}{٤} \quad ، \quad ط = \frac{٨}{٣}$$

وهذا ما وجدناه سابقاً وهو المطلوب .

٢٣٨ – حالة خاصة : المطلوب حل ومناقشة جملة المعادلتين :

$$ب\ س + ح\ ع = ٠$$

$$بَ\ س + حَ\ ع = ٠$$

الحل : نرى في هذه المجموعة ان : $د = ٠$ ، $دَ = ٠$

اذن المقدار : $ب\ دَ - بَ\ د = ٠$

وعليه لا يمكن ان تكون هذه المجموعة مستحيلة . (ويمكن ان نرى ذلك فيما لو اتبعنا طريقة الوضع) .

وحقيقة اذا كان : $ب حَ - بَ ح \neq ٠$ يكون لهذه الجملة حل واحد وهو كما نراه رأساً : $س = ٠$ ، $ع = ٠$.

واما اذا كان : $ب حَ - بَ ح = ٠$ تكون هذه الجملة ممثلة عدم تعيين وتعود المعادلتان الى المعادلة الوحيدة : $ب س + ح ع = ٠$ التي نستنتج منها :

$$س = \frac{-ح ع}{ب} \quad \text{او :} \quad \frac{س}{-ح} = \frac{ع}{ب}$$

وبفرض ك عدداً ما يمكن ان نأخذ: $ع = ب ك$ فيكون : $س = -ح ك$ اي في هذه الحالة تكون جميع الحلول متناسبة مع العددين $-ح$ ، $ب$ ومن ذلك نستنتج .

نظرية : اذا كان : $ب حَ - بَ ح$ غير الصفر فالجملة :

$$ب س + ح ع = ٠$$
$$بَ س + حَ ع = ٠$$

لا تقبل الا حلاً واحداً وهو $س = ٠$ ، $ع = ٠$.

واما اذا كان : $ب حَ - بَ ح = ٠$ فهي تقبل حلولاً عديدة متناسبة مع العددين : $-ح$ ، $ب$.

الفصل الثالث

تركيب المعادلات

التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين

٢٣٩ — تركيب معادلات جملة ما — الحالة الاولى : لنأخذ الجملة المكونة من المعادلتين ذات المجهولين س ، ع وهي :

$$\left.\begin{array}{ll} ب = ٠ & (١) \\ حـ = ٠ & (٢) \end{array}\right\} \quad ١$$

وليكن ك ، هـ عددين غير الصفر ، ولنلاحظ الجملة :

$$\left.\begin{array}{ll} ك\,ب + هـ\,حـ = ٠ & (٣) \\ حـ = ٠ & (٤) \end{array}\right\} \quad ٢$$

فكل حل للجملة (١) يجعل ب ، حـ صفراً ، اذن هو حل للجملة (٢) وبالعكس كل حل للجملة (٢) يجعل حـ صفراً ويجعل ك ب + هـ حـ صفراً وبما انه يجعل حـ صفراً ، اذن حتما يجعل ك ب صفراً ، وبما ان ك غير صفر اذن يجعل ب = ٠

اي ان كل حل للجملة (٢) يجعل حـ = ٠ كما يجعل ب = ٠ وهذا يفيد ان كل حل للجملة (٢) هو حل للجملة (١) ، اذن الجملتان (١) ، (٢) متكافئتان وذلك بفرض ك غير الصفر .

فهنا للحصول على المعادلة (٣) نقول : ركبنا المعادلتين (١) ، (٢) .

ملاحظة : يمكننا تعميم الخاصة السابقة والبرهان بسهولة على ان الجملتين :

$$\left.\begin{array}{ll} ب = ٠ & \\ حـ = ٠ & \\ د = ٠ & \\ ق = ٠ & \end{array}\right\} ١ \qquad \left.\begin{array}{l} ك ٠ ب + هـ ٠ حـ + ط ٠ د + ح ٠ ق = ٠ \\ حـ = ٠ \\ د = ٠ \\ ق = ٠ \end{array}\right\} ٢$$

متكافئتان وذلك بفرض ان $ك \neq ٠$ وباعتبار ك ، هـ ، ط ، ح اعداداً معلومة .

٢٤٠ – الحالة الثانية : لتكن جملة المعادلتين :

$$\left.\begin{array}{l} ب = ٠ \\ حـ = ٠ \end{array}\right\} ١$$

ولتكن الاعداد الاربعة : ك ، هـ ، كَ ، هَ التي كل منها لا يساوي الصفر ، ولنلاحظ الجملة :

$$\left.\begin{array}{l} ك ب + هـ حـ = ٠ \\ كَ ب + هَ حـ = ٠ \end{array}\right\} ٢$$

فكل حل للجملة (١) يجعل القيمة العددية لكل من ب ، حـ صفراً ، اي يكون اذن حلاً للجملة (٢) وبالعكس لنأخذ حلا للجملة (٢) يعطي الى ب ، حـ القيم العددية بَ ، حَ فيكون :

$$\left.\begin{array}{l} ك بَ + هـ حَ = ٠ \\ كَ بَ + هَ حَ = ٠ \end{array}\right\} ٣$$

فاذا فرضنا ان $ك هَ - كَ هـ$ غير الصفر فالجملة (٣) التي تحتوي على المجهولين بَ ، حَ لا تقبل الا حلا واحداً وهو : بَ = ٠ ، حَ = ٠ كما ذكرنا في (بند ٢٣٨) ، اعني في هذه الحالة ، حل الجملة (٢) يوافق حل الجملة (١) ، والجملتان (١) ، (٢) متكافئتان . ومن ذلك نستنتج :

نظرية : اذا كان $ك هَ - كَ هـ$ غير الصفر فالجملتان :

$$\left.\begin{array}{l} ب = ٠ \\ حـ = ٠ \end{array}\right\} \qquad \left\{\begin{array}{l} ك ب + هـ حـ = ٠ \\ كَ ب + هَ حـ = ٠ \end{array}\right\} \text{ متكافئان .}$$

٢٤١ – تطبيقات : لتكن جملة المعادلتين :

$$١ \left\{\begin{array}{l} ب س + حـ ع - د = ٠ \\ بَ س + حـَ ع - دَ = ٠ \end{array}\right.$$

ولنشكل الجملة :

$$٢ \left\{\begin{array}{l} بَ (ب س + حـ ع - د) - ب (بَ س + حـَ ع - دَ) = ٠ \\ حـَ (ب س + حـ ع - د) - حـ (بَ س + حـَ ع - دَ) = ٠ \end{array}\right.$$

فهذه الجملة الاخيرة تكافيء الاولى فيما اذا كان $ب حـَ - بَ حـ$ (بند ٢٤٠) غير الصفر، لذلك لنفرض ان $ب حـَ - بَ حـ \neq ٠$. ولنصلح الجملة الاخيرة فتصبح :

$$٣ \left\{\begin{array}{l} (حـ بَ - ب حـَ) ع + ب دَ - بَ د = ٠ \\ (ب حـَ - بَ حـ) س + حـ دَ - حـَ د = ٠ \end{array}\right.$$

اي كل معادلة من معادلتيها لاتحوي الا على مجهول واحد وبما ان : $ب حـَ - بَ حـ$ غير الصفر فيمكن حلها ونجد :

$$\left.\begin{array}{l} س = \dfrac{د حـَ - دَ حـ}{ب حـَ - بَ حـ} \\ ع = \dfrac{ب دَ - بَ د}{ب حـَ - بَ حـ} \end{array}\right.$$

مما يدلنا على ان الجملة المعطاة ليس لها الا حل واحد .

٢٤٢ – حالة خاصة : اذا كان $ب حـ - بَ حـ = ٠$. فالجملة (٣) تكتب :

$$٤ \left\{\begin{array}{l} ٠ \times ع + ب دَ - د بَ = ٠ \\ ٠ \times س + حـ دَ - حـَ د = ٠ \end{array}\right.$$

اذن لم يعد بالامكان ان نقول ان هـذه الجملة (٤) تكافيء الجملة (١) ولكن نلاحظ ان كل حل للجملة (١) هو حل للجملة (٤) .

فاذا كان $ب د - ب' د$ غير الصفر ، فالجملة (٤) مستحيلة (ليس لها حل) اذن الجملة (١) لا يمكن ان يكون لها حل ابداً اذ لو كان لها حل لما كانت الجملة (٤) مستحيلة . واذا كان لدينا بنفس الوقت :

$$ب حـ - ب' حـ = ٠ \quad ، \quad ب د - ب' د = ٠$$

فعندئذ المعادلتان تصبحان واحدة كما برهنا في (بند ٢٣٣) تكون المجموعة (١) ممثلة عدم تعيين

٢٤٣ - مثال : ليكن المطلوب حل المجموعة :

$$١ \begin{cases} ب س + حـ ع - ١ = ٠ \\ س + ٢ ع - ٢ = ٠ \end{cases}$$

فاذا طبقنا عليها الطريقة المذكورة آنفاً نجد المجموعة :

$$٢ \begin{cases} ب س + حـ ع - ١ - ب (س + ٢ ع - ٢) = ٠ \\ ٢ (ب س + حـ ع - ١) - حـ (س + ٢ ع - ٢) = ٠ \end{cases}$$

[وذلك بملاحظة ان : $ب' = ١$ ، $حـ' = ٢$] التي هي مكافئة للاولى اذا كان $حـ - ٢ ب$ غير الصفر ، لذلك :

١°) لنفرض الآن ان :

$$حـ - ٢ ب \neq ٠$$

فهذه الجملة تكتب :

$$(حـ - ٢ ب) ع + ٢ ب - ١ = ٠$$
$$(٢ ب - حـ) س + ٢ حـ - ٢ = ٠$$

ومنها نجد الحل :

$$\left.\begin{array}{l} س = \dfrac{٢ حـ - ٢}{حـ - ٢ ب} \\ \\ ع = \dfrac{١ - ٢ ب}{حـ - ٢ ب} \end{array}\right\}$$

٢°) لنفرض الآن ان : $حـ = ٢ ب$ فالجملة (٢) تكتب :

$$٣ \begin{cases} ٠ \times ع + ٢ ب - ١ = ٠ \\ ٠ \times س + ٢ حـ - ٢ = ٠ \end{cases}$$

وكل حل للجملة (١) هو حل للجملة (٣) ولكن الجملة (٣) ليس لها حل اذا كانت $٢ب - ١ \neq ٠$ اذن الجملة (١) ليس لها حل ايضاً اذا كان $ح = ٢ب$ وبنفس الوقت $٢ب - ١ \neq ٠$

واما اذا كان باآن واحد:

$$ح - ٢ب = ٠$$
$$٢ب - ١ = ٠$$

اي اذا كان باآن واحد:

$$ب = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ح = ١$$

فان المجموعة المعطاة تكتب:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{س}{٢} + ع - ١ = ٠ \\ س + ٢ع - ٢ = ٠ \end{array}\right\}$$

مما يدلنا على انه لا يوجد لدينا في الحقيقة الا المعادلة الوحيدة وهي:

$$س + ٢ع - ٢ = ٠$$

اذن يمكن ان نأخذ ع كيفما اتفق، وان نحسب س بواسطة المساواة الآتية:

$$س = ٢ - ٢ع$$

٢٤٤ - الخلاصة:

$$\left.\begin{array}{l} ب س + ح ع - ١ = ٠ \\ س + ٢ع - ٢ = ٠ \end{array}\right\}$$

١) $ح - ٢ب \neq ٠$ حل واحد

$$\left.\begin{array}{l} س = \frac{٢ح - ٢}{ح - ٢ب} \\ ع = \frac{١ - ٢ب}{ح - ٢ب} \end{array}\right\}$$

٢) $ح - ٢ب = ٠$

$$\left.\begin{array}{l} ب \neq \frac{١}{٢} \quad \text{ليس لها حل، مستحيلة.} \\ ب = \frac{١}{٢} \quad \text{لها حلول عديدة، ع عدد كيفما اتفق: } س = ٢ - ٢ع \end{array}\right\} \text{عدم تعيين}$$

٢٤٥- ملاحظة : ١ً) الجملتان :

$$\text{١}\begin{cases} ب = ٠ \\ حـ = ٠ \end{cases} \qquad \text{٢}\begin{cases} ك ب + هـ حـ = ٠ \\ كَ ب + هَ حـ = ٠ \end{cases}$$

متكافئتان اذا كان : $ك هَ - كَ هـ$ غير الصفر .

ولكن اذا كان $ك هَ - كَ هـ$ صفراً ، فالجملتان ليستا بمتكافئتين ، ولكن يمكننا ان نقول :

كل حل للجملة (١) هو حل للجملة (٢) ، فاذا كانت الجملة (٢) ليس لها حل نستنتج ان الجملة (١) ليس لها حل ايضاً ، ولكن اذا كان للجملة (٢) حلول عديدة لا يمكننا ان نقول شيئاً عن الجملة (١) . اذن يجب ان ندرس هذه الجملة (١) رأساً بشرط ان نفكر بالقيم الخاصة للامثال . وهذا ما عملناه في المثال السابق .

٢ً) ان الشرط $ك هَ - كَ هـ \neq ٠$ هو عين الشرط $ب حَ - بَ حـ \neq ٠$.

الفصل الرابع

المعادلات التي من الدرجة الاولى

وذات المجاهيل المتعددة

٢٤٦— المعادلات التي تحوي على ثلاثة مجاهيل :

ان طريقة الوضع التي ذكرناها في (بند ٢٣١) وما يليه يمكن ان تطبق على المعادلات التي من الدرجة الاولى وذات المجاهيل الثلاثة ، ولنشرح ذلك بالمثال الآتي :

٢٤٧— مثال : المطلوب حل جملة المعادلات الثلاث :

$$\left.\begin{array}{ll} س + ع + ٢ ص = ٤ & (١) \\ ٢ س - ع + ٣ ص = ٦ & (٢) \\ س - ٣ ع + ٤ ص = ٧ & (٣) \end{array}\right\}$$

الحل : لنأخذ قيمة س من المعادلة (١) فنجد :

$$س = ٤ - ع - ٢ ص \qquad (٤)$$

ولنضعها في المعادلتين (٢) و (٣) اللتين تصبحان :

$$٢ (٤ - ع - ٢ ص) - ع + ٣ ص = ٦$$

$$٤ - ع - ٢ ص - ٣ ع + ٤ ص = ٧$$

او :

$$٣ ع + ص = ٢ \qquad (٥)$$

$$- ٤ ع + ٢ ص = ٣ \qquad (٦)$$

مما يدلنا على ان الجملة الآتية :

$$\left.\begin{array}{ll} س = ٤ - ع - ٢ ص & (٤) \\ ٣ ع + ص = ٢ & (٥) \\ - ٤ ع + ٢ ص = ٣ & (٦) \end{array}\right\}$$

تكافىء الجملة الاولى

ومن المعادلتين الاخيرتين الحاويتين على مجهولين فقط وهما ص ، ع يمكننا ان نستخرج قيم هذين المجهولين ، فاذا اخذنا قيمة ص من المعادلة (٥) نجد :

$$ص = ٢ - ٣ع$$

وبوضعها في المعادلة (٦) نجد المعادلة :

$$-٤ع + ٤ - ٦ع = ٣$$

ومنها :

$$-١٠ع = -١$$

او :

$$ع = \frac{١}{١٠}$$

وهكذا يتكون معنا جملة جديدة متكافئة مع الجملة المعطاة وهي :

$$\left.\begin{array}{ll} س = ٤ - ع - ٢ص & (٧) \\ ص = ٢ - ٣ع & (٨) \\ ع = \frac{١}{١٠} & (٩) \end{array}\right\}$$

فالمعادلة (٨) تعطينا :

$$ص = ٢ - \frac{٣}{١٠} = \frac{١٧}{١٠}$$

والمعادلة (٧) تعطينا :

$$س = ٤ - \frac{١}{١٠} - \frac{٣٤}{١٠} = \frac{٥}{١٠} = \frac{١}{٢}$$

اذن حل جملة المعادلات هو :

$$س = \frac{١}{٢} \qquad ع = \frac{١}{١٠} \qquad ص = \frac{١٧}{١٠}$$

ومن السهل ان نتحقق من صحة هذا الحل وذلك بتبديل الاحرف س ، ع ، ص بقيمها الموجودة فنرى حقيقة ان هذه القيم تحقق معادلات الجملة المعطاة ، وهو المطلوب .

٢٤٨— ان طريقة التركيب التي ذكرناها في (البند ٢٣٩) وما يليه يمكن تطبيقها على المعادلات الثلاث ذات المجاهيل الثلاثة ، ولكنه يجب ان نتحقق من وجود التكافؤ في الجمل المتوالية .

٢٤٩— مثال : ١) المطلوب حل الجملة الآتية :

$$\text{١} \begin{cases} ع + ص = ٢ب \\ ص + س = ٢حـ \\ ع + س = ٢د \end{cases}$$

الحل : اذا جمعنا هذه المعادلات نجد المعادلة :

$$٢س + ٢ع + ٢ص = ٢ب + ٢حـ + ٢د$$

او :

$$س + ع + ص = ب + حـ + د$$

لنكون الآن الجملة :

$$\text{٢} \begin{cases} س + ع + ص = ب + حـ + د \\ ص + س = ٢حـ \\ ع + س = ٢د \end{cases}$$

فالجملة (٢) تكافيء الجملة (١) . في الحقيقة هاتان الجملتان يمكن ان تكتبا بشكل رمزي وهو :

$$\text{١} \begin{cases} ب = ٠ \\ حـ = ٠ \\ د = ٠ \end{cases} \qquad \text{٢} \begin{cases} ب + حـ + د = ٠ \\ حـ = ٠ \\ د = ٠ \end{cases}$$

ويظهر الآن بجلاء (بند ٢٣٩) ان كل حل للجملة (١) هو حل للجملة (٢) وبالعكس كل حل للجملة (٢) يجعل كلا من حـ ، د ، ب + حـ + د صفراً اذن يجعل ب صفراً ويكون حلاً للجملة (١) .

ويمكن ان نطرح بالتوالي المعادلتين الاخيرتين في الجملة (٢) من المعادلة الاولى فنجد :

بطرح الثانية من الاولى : ع = ب + د — ح

بطرح الثالثة من الاولى : ص = ب + ح — د

٣ { س + ع + ص = ب + ح + د

ويمكن ان نبرهن على ان الجملة (٣) تكافىء الجملة (٢) ولذلك يكفي ان نكتبهما بصورة رمزية :

٢ { ك = ٠ ، ق = ٠ ، ر = ٠

٣ { ك — ق = ٠ ، ك — ر = ٠ ، ك = ٠

ويكفي الآن للبرهان على التكافؤ بينهما ان نعيد نفس المحاكمات التي اجريناها سابقاً بقولنا كل حل للاولى يجعل كلاً من ك ، ق ، ر صفراً ، اذن هو ايضاً يجعل كلاً من ك — ق ، ك — ر ، ك صفراً ، اي هو حل للثانية .

وبالعكس كل حل للثانية يجعل كلاً من ك — ق ، ك — ر ، ك صفراً ، اي يجعل كلاً من — ق ، — ر ، ك صفراً ، او يجعل كلاً من ك ، ق ، ر صفراً ، اي هو حل للاولى .

ونستنتج بعد ذلك من المعادلة الاخيرة ان :

س = ب + ح + د — ع — ص

او : س = ب + ح + د — (ب + د — ح) — (ب + ح — د)

واخيراً : س = ح + د — ب

ويكون حل المعادلات الثلاث هو :

س = ح + د — ب

ع = ب + د — ح

ص = ب + ح — د

٢٥٠ — مثال : ٢) المطلوب حل جملة المعادلات الآتية :

$$\left.\begin{array}{l} ٢س + ع + ص = ١ \\ س + ٢ع + ص = ١ \\ س + ع + ٢ص = ١ \end{array}\right\}$$

لنجمع طرفي هذه المعادلات فنجد :

$$٤(س + ع + ص) = ٣$$

ومنها : $$س + ع + ص = \frac{٣}{٤}$$

وعندها يكون لدينا الجملة :

$$\left.\begin{array}{l} س + ع + ص = \frac{٣}{٤} \\ س + ٢ع + ص = ١ \\ س + ع + ٢ص = ١ \end{array}\right\}$$

التي هي مكافئة للاولى .

لنطرح المعادلة الاولى بالتوالي من المعادلتين الاخيرتين فنجد :

$$ع = \frac{١}{٤}$$

$$ص = \frac{١}{٤}$$

$$س + ع + ص = \frac{٣}{٤}$$

واخيراً يكون :

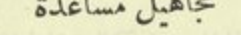
$$س = \frac{٣}{٤} - ع - ص = \frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$$

ويكون حل المعادلات هو :

$$س = \frac{١}{٤} \qquad ع = \frac{١}{٤} \qquad ص = \frac{١}{٤}$$

وهو المطلوب .

المعادلات التي يمكن حلها بواسطة مجاهيل مساعدة



٢٥١- يوجد بعض معادلات ليست من الدرجة الاولى ويمكن حلها بواسطة بعض حيل جبرية واستعمال مجاهيل مساعدة ، وقد اوردنا قسماً من هذه المعادلات في كتاب الصف الثالث (صحيفة ١٥٨) فلا نرى حاجة لاعادتها هنا .

مثال : ١) لحل جملة المعادلتين :

$$٧(٣س - ١)^{٢} + ١١ع(ع - ٥) = ٦٣$$
$$٢(٣س - ١)^{٢} + ٣ع(ع - ٥) = ١٨$$

الحل : نفرض ان : $ص = (٣س - ١)^{٢}$

$$ط = ع(ع - ٥)$$

فنحسب قيمة ص ، ط ثم نحسب قيمة س ، ع



تمارين

المطلوب حل جملة المعادلات الآتية مع المناقشة :

١) $\left\{\begin{array}{l} \frac{س-١}{٣}+\frac{ص-٤}{٢}=٠ \\ ٢(س-١)+٣(ص-٤)=٠ \end{array}\right.$

٢) $\left\{\begin{array}{l} \frac{١}{س}+\frac{١}{ص}=٤ \\ \frac{٥}{س}+\frac{٣}{ص}=٧ \end{array}\right.$

عين قيمة ب لتمثل الجملة الآتية عدم تعين :

٣) $\left\{\begin{array}{l} ب\,س+ص=١ \\ س+ب\,ص=ب \end{array}\right.$

٤) $\left\{\begin{array}{l} ص=ب\,س+ح \\ س=ب\,ص+ح \end{array}\right.$

٥) $\left\{\begin{array}{l} \frac{س+ب}{ص}=ح \\ \frac{س+ح}{ص}=ب \end{array}\right.$

٦) $\left\{\begin{array}{l} \frac{س}{ب}=\frac{ص}{ح} \\ ٢س+٣ص-١=٠ \end{array}\right.$

عين قيمة ب ، حـ لتمثل الجملة الآتية عدم تعيين :

٧) $\begin{cases} ب^{٢} س + ب ص = ١ \\ حـ س + ص = \frac{ب}{حـ} \end{cases}$

٨) $\begin{cases} ب س + حـ ص + د = ٠ \\ س + ٢ ص + ٣ = ٠ \end{cases}$

٩) $\begin{cases} س + ب^{٢} ص = حـ \\ س + ص = ب حـ^{٢} \end{cases}$

عين قيمة ب لتكون الجملة الآتية ١ً) غير معينة
٢ً) مستحيلة :

١٠) $\begin{cases} ب س - ٩ ص = ب + ٣ \\ ٤ س - ب ص = ب \end{cases}$

١١) $\begin{cases} س + ص = \frac{٣}{ب} \\ س + ب ص = ٣ ب \end{cases}$

١٢) $\begin{cases} (ب + ١) س - ص = ١ \\ س + (ب - ١) ص = حـ \end{cases}$

١٣) $\begin{cases} س + ب ص = ٢ ب \\ ب س + ص = ١ + ب^{٢} \end{cases}$

١٤) $\begin{cases} \frac{س}{ب + ١} + \frac{ص}{ب - ١} = ٢ ب \\ س - ص = ٤ ب \end{cases}$

١٥) $\begin{cases} س + ٢ ص = ٣ \\ ب س - ص = ٢ب \end{cases}$

١٦) $\begin{cases} ب س + ب ص = د \\ \frac{س}{ب} = \frac{ص}{ب} \end{cases}$

١٧) $\begin{cases} س + ص = ٣ ب \\ ب س + ص = ٢ + ب \end{cases}$

١٨) $\begin{cases} ب س + ص = ٢ ب \\ ب س + ص = ١ + ب^{٢} \end{cases}$

١٩) $\begin{cases} \frac{س}{ب + ب} + \frac{ص}{ب - ب} = \frac{١}{ب + ب} \\ \frac{س}{ب + ب} - \frac{ص}{ب - ب} = \frac{١}{ب \div ب} \end{cases}$

٢٠) $\begin{cases} \frac{س - ب}{ص + ب} = \frac{١}{ب} \\ \frac{س + ب}{ص - ٢ ب} = ١ \end{cases}$

٢١) $\begin{cases} ٢ س + ص - ٤ ع = ١ \\ ص + ٤ ص - ٥ ع = ٢ \\ ٤ س - ص + ٢ ع = ٣ \end{cases}$

٢٢) $\begin{cases} س + ٢ ص + ٣ ع = ١٠ \\ ٢ س + ص + ٣ ع = ٢١ \\ س + ٢ ص + ٣ ع = ٣٢ \end{cases}$

٢٢) $\left\{\begin{array}{l} ٦س - ٥ص + ٢ع = ١ \\ ٣س - ٩ص + ٨ع = ٢١ \\ ٧س - ١٥ص + ٢ع = ٢٧ \end{array}\right.$

٢٤) $\left\{\begin{array}{l} ١٥س - ٨ص + ع = ٢٥ \\ ٧س - ١١ص + ٣ع = ٢٩ \\ س + ص + ع = ١١ \end{array}\right.$

٢٥) $\left\{\begin{array}{l} س + ٢ص = ٢ \\ ص + ٢ع = ٣ \\ ع + ٢س = ٤ \end{array}\right.$

٢٦) $\left\{\begin{array}{l} س + ص - ع = ٤ \\ ص + ع - س = ٥ \\ ع + س - ص = ٦ \end{array}\right.$

٢٧) $\left\{\begin{array}{l} \frac{س - ١}{٢} = \frac{ص - ٢}{٣} = \frac{ع - ٣}{٤} \\ س + ص + ع = ٠ \end{array}\right.$

٢٨) $\left\{\begin{array}{l} س = ٢ص = ٣ع \\ س + ص + ع = ٦ \end{array}\right.$

٢٩) $\left\{\begin{array}{l} س + ٣ص + ع = ١ \\ س - ٣ص + ع = ٢ \\ ٣س - ٣ص + ٣ع = ٥ \end{array}\right.$

٣٠) $\left\{\begin{array}{l} ب س + ص + ع = ١ \\ س + ب ص + ع = ب \\ س + ص + ب ع = ١ \end{array}\right.$

٢١) $\begin{cases} س - ص = ١ \\ ص - ع = ٢ \\ ع - س = ب \end{cases}$

٢٢) $\begin{cases} س = ص + ب \\ ص = ع + ب \\ س + ص + ع = ح \end{cases}$

٢٢) $\begin{cases} س = ص + ب \\ ص = ع + ب \\ ع = ف + ب \\ س + ص + ع + ف = ح \end{cases}$



البحث السادس

كيفية حل المسائل التي من الدرجة الاولى

وذات المجهول الواحد او المجاهيل المتعددة

٢٥٢- تعريف - المسألة الجبرية : هي جملة شروط تحققها كميات معلومة وكميات مجهولة مرتبطة مع الاولى بشروط المسألة نفسها ، فاذا رمزنا لهذه الكميات المجهولة باحرف ونقلنا شروط المسألة الى اللسان الجبري نحصل على مساوات تسمى بمعادلات المسألة ، فبعد وضع هذه المعادلات وترتيبها نبدأ بحلها ومناقشتها ، ونحكم فيما اذا كان يوجد للمسألة حل واحد او اكثر ، او فيما اذا كانت المسألة مستحيلة . والامثلة الآتية توضح لنا ذلك :

٢٥٣- مسألة : ١) اي عدد مجموع نصفه مع ثلثه يزيد على $\frac{٥}{١٢}$ من هذا العدد ٢٥ ؟

الحل : لنفرض العدد المطلوب س فنصفه $\frac{س}{٢}$ وثلثه $\frac{س}{٣}$ و $\frac{٥}{١٢}$ من هذا العدد هو : $\frac{٥ س}{١٢}$ ومنطوق هذه المسألة ينقل الى لسان الجبر بالمعادلة الآتية :

$$\frac{س}{٢} + \frac{س}{٣} - \frac{٥ س}{١٢} = ٢٥$$

وبحل هذه المعادلة نجد ان $س = ٦٠$ وهو العدد المطلوب .

٢٥٤- مسألة : ٢) اب له من العمر ٥٨ سنة ، وله ولد عمره ١٠ سنوات . فبعد كم سنة يبلغ عمر الاب اربعة امثال عمر الابن ؟

الحل : ان المجهول في هذه المسألة هو عدد السنين الواجب اضافتها الى عمر الاب والابن لاجل ان يصبح عمر الاب اربعة امثال عمر الابن ، لذلك نفرض عدد هذه السنين س سنة ، فبعد مضي هذه السنين س يصبح عمر الاب ٥٨ + س وعمر الابن ١٠ + س وبمقتضى منطوق المسألة يجب ان يكون :

$$٥٨ + س = ٤ (١٠ + س)$$

ومنها : $س = ٦$

٢٥٥ – مسألة : ٣) يملك رجل ٩٦ فرنكاً من قطع فضية ذات الفرنكين وذات الخمسة فرنكات . والمطلوب تعيين عدد قطع ذات الفرنكين وعدد قطع ذات الخمسة فرنكات ، بعد العلم ان مجموعها يساوي ٣٠ قطعة ؟

الحل : لنفرض ان عدد قطع ذات الفرنكين هو س قطعة ، فيكون عدد قطع ذات الخمسة فرنكات هو (٣٠ – س) قطعة ، ويكون عدد الفرنكات التي في القطع س هو ٢ س فرنكا ، وعدد الفرنكات التي في القطع ٣٠ – س هو ٥ (٣٠ – س) فرنكاً . اذن يكون :

$$٢ س + ٥ (٣٠ - س) = ٩٦$$

او : $٣ س = ٥٤$ ومنها : $س = ١٨$

اذن عدد قطع ذات الفرنكين هو ١٨ ، وعدد قطع ذات الخمسة فرنكات هو ١٢ قطعة .

ملاحظة : يلاحظ ان الجواب في هذه المسألة يجب ان يكون عدداً صحيحاً موجباً.

ولو عملنا هذه المسألة ، وقلنا ان عدد القطع من النوعين هو ب قطعة ، وعدد الفرنكات التي يملكها الرجل هو ح فرنكاً لأصبحت معادلة المسألة على الشكل الاتي:

$$٢ س + ٥ (ب - س) = ح$$

وبحلها نجد ان :

$$س = \frac{٥ ب - ح}{٣}$$

فلاجل ان يكون هذا الجواب مقبولاً يجب ان يكون عدداً صحيحاً موجباً ، اي ان يكون حـ ≥ ٥ ب وان يقبل المقدار ٥ ب — حـ القسمة على ٣ .

٢٥٦ — مسألة : ٤) ساعيان يتحركان على مستقيم واحد في الاتجاه $\overline{ب حـ}$ وحينما قام احدهما من نقطة ب قام الآخر من نقطة حـ التي تبعد عن ب ٦٠ كيلومتراً . والمطلوب تعيين بعد نقطة تلاقيهما عن حـ بعد العلم ان سرعة الساعي الاول ١٢ كيلومتراً في الساعة وسرعة الساعي الآخر ٢٠ كيلومتراً في الساعة ؟

الحل : لتكن ك نقطة تلاقي الساعيين واقعة على يمين حـ ، وليكن بعدها عن حـ يساوي س كيلومتراً . فالساعي الاول قد قطع المسافة ٦٠ + س حينما الساعي الثاني قطع المسافة س ، وكل منهما قطع المسافة المتعلقة به في زمن يساوي زمن الآخر اي ان :

$$\frac{٦٠ + س}{١٢} = \frac{س}{١٢}$$

ومنها : س = — ١٥٠

اي ان الساعيين لا يتلاقيان بعد نقطة حـ اي على يمينها .

ولما كان المجهول في هذه المسألة طولاً يقبل اتجاهين مختلفين ، فبتعديل لفظ المسألة الاصلية واعتبار احد الاتجاهين موجباً والآخر سالباً نتوصل لتفسير الجواب السالب السابق .

واليك تعديل لفظ المسألة :

« ساعيان يتحركان على مستقيم واحد في الاتجاه $\overline{ب حـ}$ وحينما مر احدهما بنقطة ب مر الآخر بنقطة حـ التي تبعد ٦٠ كيلومتراً عن ب . فالمطلوب تعيين بعد نقطة تلاقيهما عن حـ بعد العلم ان سرعة الساعي الاول ١٢ كيلومتراً في الساعة ، وسرعة الساعي الثاني ٢٠ كيلومتراً في الساعة ؟ »

فبحسب التعديل الجديد قد تكون نقطة تلاقي الساعيين قبل او بعد نقطة حـ .

ولحل هذه المسألة بشكلها المعدل نعتبر الاتجاه $\overline{ب حـ}$ موجباً ، وليكن س بعد تلاقي الساعيين عن حـ ، اي ان $\overline{حـ ك}$ = س فهذا البعد يكون موجباً اذا كانت

ك بعد حـ ، وسالباً اذا كانت قبلها .

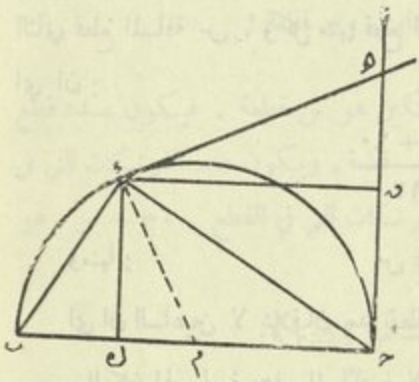
والقطعة : $\overline{ب ك} = \overline{ب حـ} + \overline{حـ ك} = ٦٠ + س$

ومعادلة المسأله هي :

$$\frac{س}{٢٠} = \frac{٦٠ + س}{١٢} \qquad س = -١٥٠$$

اي ان الساعيين تلاقيا قبل حـ بـ ١٥٠ كيلومتراً .

٢٥٧ – مسألة : ٥) لدينا نصف دائرة قطرها $ب حـ = ٢ ر$ (شكل ٢٠) وقد اخذنا على محيطها نقطة مثل د ثم نزلنا منها عموداً على ب حـ مثل د ك وعموداً آخر مثل د ق على المماس حـ ق المرسوم لنصف الدائرة في حـ ثم رسمنا المماس لنصف هذه الدائرة في نقطة د فقطع حـ ق في هـ . والمطلوب تعيين نقطة د بشرط ان يكون المثلثان ب ك د ، د ق هـ متكافئين ؟



(شكل ٢٠)

الحل : لنفرض $ب ك = س$

فبمقتضى منطوق هذه المسألة يكون :

$$\frac{١}{٢} س \cdot د ك = \frac{١}{٢} د ق \cdot ق هـ$$

او :

$$س \cdot د ك = د ق \cdot ق هـ \qquad (١)$$

لنقدر الاطوال د ك ، د ق ، ق هـ بدلالة س فنرى ان :

$$\overline{د ك}^{٢} = س (٢ ر - س) \quad ، \quad د ق = ٢ ر - س$$

ومن تشابه المثلثين م د ك ، د هـ ق نجد ان :

$$\frac{هـ ق}{م ك} = \frac{د ق}{د ك} \qquad او : \qquad هـ ق = \frac{م ك \cdot د ق}{د ك}$$

وبوضع قيمة هـ ق هذه في المعادلة (١) يحدث :

$$س \cdot \overline{دك}^{٢} = \overline{دق}^{٢} \cdot م ك$$

او :
$$س \cdot س (٢ر - س) = (٢ر - س)^{٢} (ر - س)$$

لنفرض ان المضروب المشترك $٢ر - س \neq ٠$ فبحذفه من الجانبين نجد :

$$س^{٢} = (٢ر - س)(ر - س)$$

ومنها :
$$س = \frac{٢ر}{٣}$$

واما اذا كان المقدار $٢ر - س = ٠$ ينتج ان $س = ٢ر$.
وفي هذه الحالة ينقلب سطح كل من المثلثين $ب د ك$ ، $د هـ ق$ الى الصفر .
ويجب ان نلاحظ في هذه المسألة انه لا يمكن ان يكون :

$$م ك = ر + س$$

٢٥٨- مسألة : ٦) الزاوية $س م ع$ قائمة والنقطة $ب$ واقعة على $م ع$ وبعدها عن $م$ يساوي $٢ر$. عين على $م س$ نقطة مثل $حـ$ على ان يكون $حـ د + م حـ = هـ$ وذلك باعتبار $حـ د$ مماساً مرسوماً من نقطة $حـ$ لدائرة مركزها $ب$ ونصف قطرها $= ر$ ؟

الحل : لنفرض $م حـ = س$. (شكل ٢١) فمن المثلثين $حـ د ب$ ، $حـ م ب$ القائمي الزاوية نجد :

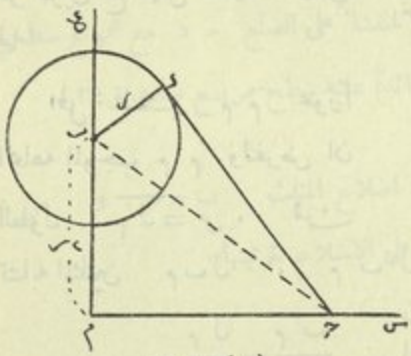
$$\overline{حـ د}^{٢} = \overline{حـ ب}^{٢} - ر^{٢} ،$$

$$\overline{حـ ب}^{٢} = س^{٢} + ٤ر^{٢}$$

اذن :
$$\overline{حـ د}^{٢} = س^{٢} + ٣ر^{٢}$$

ومنها :
$$حـ د = \sqrt{س^{٢} + ٣ر^{٢}}$$

وتصبح العلاقة المعطاة على الشكل :



(شكل ٢١)

$$\sqrt{س^{٢} + ٣ر^{٢}} + س = هـ \quad (١)$$

او :
$$\sqrt{س^{٢} + ٣ر^{٢}} = هـ - س \quad (٢)$$

او :
$$س^{٢} + ٣ر^{٢} = (هـ - س)^{٢} \quad (٣)$$

وجذور المعادلة (٣) لا توافق المعادلة (٢) او المعادلة (١) الا اذا كانت اقل من هـ ، وبما ان س طول هندسي يجب ان يكون موجباً .

اي فرض اساسي $\cdot \leqslant س < هـ$

وبحل المعادلة (٣) نجد :

$$٣ ر^{٢} = هـ^{٢} - ٢ هـ س$$

ومنها : $$س = \frac{هـ^{٢} - ٣ ر^{٢}}{٢ هـ}$$

ولاجل ان يكون هذا الجذر موافقاً للمعادلة (٣) يلزم ان يكون :

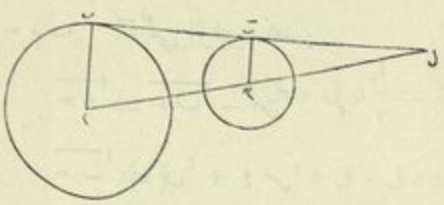
$$هـ > \frac{هـ^{٢} - ٣ ر^{٢}}{٢ هـ} \geqslant \cdot$$

او : $$\cdot \leqslant هـ^{٢} - ٣ ر^{٢} < ٢ هـ^{٢}$$

فالمتراجحة الاخيرة محققة دوماً . واما الاولى فتتحقق حينما يكون :

$$هـ^{٢} > ٣ ر^{٢} \quad \text{او} \quad هـ > ر\sqrt{٣}$$

٢٥٩— مسألة : ٧) م ، م$_{١}$ دائرتان نصفا قطريهما ر ، ر$_{١}$ على الترتيب ، ق بعد مركزيهما (شكل ٢٢$_{١}$) . والمطلوب تعيين نقطة تقاطع مستقيم المركزين مع المماس المشترك الخارجي لهما ؟



(شكل ٢٢$_{١}$)

الحل : لنعتبر م م$_{١}$ محوراً اتجاهه الموجب م م$_{١}$ ولنفرض ان الطول $\overline{م_{١} ل} = س$. فمن تشابه المثلثين م ب ل ، م$_{١}$ ب$_{١}$ ل نجد ان :

$$\frac{م ل}{م_{١} ل} = \frac{م ب}{م_{١} ب_{١}} \quad \text{او :} \quad \frac{ر}{ر_{١}} = \frac{س + ق}{س}$$

ومنها : $$(ر - ر_{١}) س = ر_{١} ق \qquad (١)$$

لنفرض ان $ر - ر_{١} \neq \cdot$ عندئذ يكون :

$$س = \frac{ر'ق}{ر - ر'}$$

والمجهول س يكون موجباً اذا كان $ر - ر' > ٠$ وحينئذ تقع ل على يمين م' ، ويكون سالباً اذا كان $ر - ر' < ٠$ وحينئذ تقع ل على يسار م' .

واما اذا كان المقدار $ر - ر' = ٠$ تصبح المعادلة (١) على الشكل :

$$٠ \times س = ر'ق$$

وهي مستحيلة اذا كان المقدار $ر'ق \neq ٠$ وفي هذه الحالة المماس المشترك بين الدائرتين لا يقطع مستقيم المركزين في نقطة محدودة ، بل يقطعه في ما لا نهاية .

واما اذا كان المقداران :

$ر - ر' = ٠$ ، $ر'ق = ٠$ اي $ر - ر' = ٠$ ، $ق = ٠$

تصبح المعادلة (١) على الشكل $٠ \times س = ٠$ وتمثل عدم تعيين ، وفي هذه الحالة تنطبق الدائرتان ويكون المماس المشترك الخارجي بينهما هو المماس لاحداهما . فهذا المستقيم المتغير يقطع كل مستقيم مار من م في نقطة بعدها عن م يتغير من ر الى ما لا نهاية .

٢٦٠ – مسألة : ٨) ارسم على اضلاع المثلث ب حـ د ثلاثة مستطيلات متشابهة بشرط ان يتكافأ سطح المستطيل المنشأ على الضلع حـ د مع مجموع سطحي المستطيلين المنشأين على الضلعين الآخرين زائداً عليه سطح مربع ضلعه ق ؟

الحل : لنفرض ب' ، حـ' ، د' اضلاع المثلث ب حـ د و س ، ع ، ص ارتفاعات المستطيلات المنشأة على الاضلاع بترتيبها .

فبمقتضى منطوق المسألة يجب ان يكون :

$$\frac{س}{ب'} = \frac{ع}{حـ'} = \frac{ص}{د'} \qquad (١)$$

$$ب' س = حـ' ع + د' ص + ق^٢ \qquad (٢)$$

ومن المعادلتين (١) ، (٢) نجد ان :

$$ع = \frac{ح\ س}{ب} \quad ، \quad ص = \frac{د\ س}{ب}$$

لنبدل في المعادلة (٢) كلاً من ع ، ص بقيمته المستخرجة هذه فيكون :

$$ب\ س = \frac{ح^{٢}\ س}{ب} + \frac{د^{٢} س}{ب} + ق^{٢}$$

او $(ب^{٢} - ح^{٢} - د^{٢})\ س = ب\ ق^{٢}$ (٣)

ولنفرض ان : $ب^{٢} - ح^{٢} - د^{٢} \neq ٠$. حينئذ نجد ان :

$$س = \frac{ب\ ق^{٢}}{ب^{٢} - ح^{٢} - د^{٢}}$$

وهذا الجواب لا يوافق المسألة الا اذا كان $س > ٠$ ويكون س موجباً اذا كان المقدار :

$ب^{٢} - ح^{٢} - د^{٢} > ٠$ او $ب^{٢} > ح^{٢} + د^{٢}$

ويستدل من هذا الشرط على ان المسألة تكون قابلة الحل اذا كانت الزاوية المقابلة للضلع ب منفرجة وغير ممكنة الحل اذا كانت حادة .

لنفرض الآن ان : $ب^{٢} = ح^{٢} + د^{٢}$ عندئذ تصبح المعادلة (٣) على الشكل :

$$٠ \times س = ب\ ق^{٢}$$

ومن هذه يتفرع حالتان :

الحالة الاولى : اذا كان $ق^{٢} = ٠$ يحصل عدم تعيين .

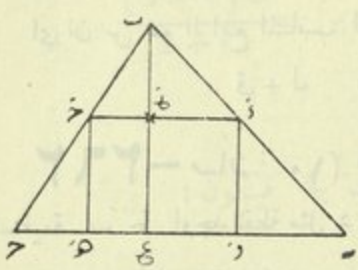
الحالة الثانية : $ق^{٢} \neq ٠$. المسألة مستحيلة .

ولنوضح هاتين الحالتين بالهندسة : اذا كان $ب^{٢} = ح^{٢} + د^{٢}$ فالمثلث قائم الزاوية في ب ولنرمز بـ ح ، حَ ، حً لسطوح المستطيلات بترتيبها فيكون :

$$\frac{ح}{ب'^2} = \frac{ح'}{ح'^2} = \frac{ح''}{د'^2} = \frac{ح' + ح''}{ح'^2 + د'^2}$$

وبما ان $ب'^2 = ح'^2 + د'^2$ يجب ان يكون $ح = ح' + ح''$ فاذا كان $ق = 0$. فالمستطيلات المتشابهة المنشأة على اضلاع المثلث ، كلها توافق المسألة ، واما اذا كان $ق^2 \neq 0$. فالمسألة مستحيلة حتماً .

٢٦١- مسألة : ٩) في المثلث ب حـ د القاعدة حـ د = ق سانتيمتراً ، والارتفاع ب ع = ل سانتيمتراً . المطلوب تعيين الموازي حَ دَ الى حـ د بصورة ان يكون حَ دَ وَ هَ مربعاً وذلك باعتبار حَ هَ ، دَ وَ عمودين على د حـ وباعتبار دَ واقعة بين ب ، د (شكل ٢٣) .



(شكل ٢٣)

الحل : يكفي لتعيين دَ حَ ان نعين بعده عن ب وهو ب عَ لذلك لنفرض ان ب عَ = س ولحساب س يكفي ان نحسب كلاً من دَ حَ ، حَ هَ بالنسبة للكميات المعلومة و س وان نكتب قيمة دَ حَ = قيمة حَ هَ فنجد المعادلة التي تعطينا س .

من المثلثين المتشابهين : ب حـ د ، ب حَ دَ نجد :

$$\frac{د_ح}{د_ح} = \frac{ب_ع}{ب_ع} \quad \text{او :} \quad \frac{د_ح}{ق} = \frac{س}{ل}$$

ومنها :

$$د_ح = \frac{ق \cdot س}{ل}$$

ومن السهل ان نرى ان :

$$ح_ه = ع_ع = ل - س$$

اذن يجب ان يكون :

$$\frac{ق\,س}{ل} = ل - س \qquad (١)$$

فهذه هي معادلة المسألة . ومنها نجد :

$$ق\,س = ل^٢ - ل\,س \quad ، \quad س\,(ق + ل) = ل^٢$$

ومنها :
$$س = \frac{ل^٢}{ق + ل} \qquad (٢)$$

وذلك لان $ق + ل \neq ٠$. فهذه المساواة الاخيرة ترينا ان $س > ٠$.
وبمقتضى (١) نرى ان $س < ل$ ايضاً ، اذن للمسألة دوماً حل مقبول .

ملاحظة : من العلاقة (٢) نجد ان :

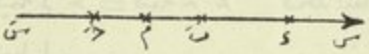
$$\frac{س}{ل} = \frac{ل}{ق + ل}$$

اي ان س هو الرابع المتناسب للاطوال :

$ق + ل$ ، $ل$ ، $ل$.

٢٦٣ – مسألة : ١٠) على المستقيم غير المحدود $س'\,س$ الحامل للقطعة المستقيمة $ب'\,حـ'$ اوجد نقطة مثل د تحقق العلاقة :

$$\frac{د\,ب'}{د\,حـ'} = ك$$



باعتبار ك عدداً موجباً معلوماً (شكل ٢٤) . شكل ٢٤)

الحل : لنوجه المستقيم $س'\,س$ ولنعتبر منتصف $ب'\,حـ'$ مبدأ لقياس الاطوال على هذا المحور ، فلتعيين نقطة د يكفي تعيين الطول $س = \overline{م\,د}$ ولو فرضنا س نقطة $ب'$ هي ب لكانت س نقطة حـ هي $(- ب)$ ولكان :

$$\overline{د\,ب'} = ب - س \quad ، \quad \overline{د\,حـ'} = - ب - س$$

ولكان :
$$\frac{\overline{د\,ب'}}{\overline{د\,حـ'}} = \frac{س - ب}{س + ب}$$

فهذه النسبة تكون موجبة فيما لو كانت النقطة د خارجة عن القطعة $ب\,حـ$ وتكون سالبة فيما اذا كانت د بين $ب'$ ، $حـ'$ وبكلتا الحالتين تكون القيمة المطلقة

لهذه النسبة هي ك . لذلك نميز حالتين :

الحالة الاولى : د واقعة بين ب َ ، حَ فيكون :

$$\frac{س - ب}{س + ب} = - ك \qquad (١)$$

ومنها : $\frac{س - ب}{س + ب} + ك = ٠$

او : $س - ب + ك س + ك ب = ٠$

ومنها : $س (١ + ك) = ب - ك ب$

وبما ان : $١ + ك \neq ٠$. اذن : $س = \frac{ب (١ - ك)}{١ + ك}$

اي للمسألة في هذه الحالة حل وحيد .

الحالة الثانية : د واقعة خارج القطعة ب َ حَ فيكون :

$$\frac{س - ب}{س + ب} = ك \qquad (٢)$$

ومنها نجد .

$$س = ب \frac{١ + ك}{١ - ك}$$

اذن للمسألة بصورة عامة حلان :

$$س' = \frac{ب (١ - ك)}{١ + ك}$$

$$س'' = ب \frac{١ + ك}{١ - ك}$$

المناقشة : لنلاحظ اولا ان المعادلة (١) والمعادلة (٢) تحوي في المخرج على س + ب لذلك الحلان الموجودان لا يكونان مقبولين الا اذا كان :

$س' \neq - ب$ ، $س'' \neq - ب$

لذلك يجب ان يكون :

$$\frac{ك - ١}{ك + ١} \neq -١$$

فيكون بالطبع مقلوبه :

$$\frac{ك + ١}{ك - ١} \neq -١$$

فنرى هل يمكن ان يكون :

$$\frac{ك - ١}{ك + ١} = -١$$

اي : $ك - ١ = -ك - ١$ اي : $١ = -١$

فهذا مستحيل . اذن كل من $س_{ب}$ ، $س_{ا} \neq -ب$ وكلاهما مقبول .

ولنلاحظ ايضاً انه اذا كانت $ك > ١$ يكون كل من $س_{ب}$ ، $س_{ا}$ موجباً ، واذا كانت $ك < ١$ يكون كل من $س_{ب}$ ، $س_{ا}$ سالباً ، واذا كانت $ك = ١$ يكون $س_{ب} = ٠$ ، $س_{ا} = \infty$ اي نقطة د الخارجية غير موجودة ، واما الداخلية فهي م .

٢٦٣- مسألة : ١١) مرت سيارتان معاً امام شخص واحد في الساعة ١٢ ، وقد كانت الاولى بدأت السير في الساعة الثامنة من نقطة ب مع ان الثانية بدأت السير في الساعة العاشرة من نقطة حـ . فمع العلم ان سرعة الاولى تساوي سرعة الثانية ، المطلوب معرفة الزمن الذي تصبح فيه المسافة المقطوعة من قبل السيارة الاولى تساوي ك مرة المسافة المقطوعة من قبل الثانية ؟

الحل : لنفرض الزمن المطلوب هو الساعة س اعتباراً من الساعة الثانية عشرة ، ولنفرض ان سرعة كلتا السيارتين هي ط فتكون المسافة المقطوعة من قبل الاولى هي ط (س + ٤) واما المسافة المقطوعة من قبل الثانية هي ط (س + ٢) اذن يجب ان يكون :

$$ط (س + ٤) = ك ط (س + ٢)$$

ومنها : $س + ٤ = ك (س + ٢)$

او : $س(١-ك) = ٢(ك-٢)$ (١)

فاذا كان $ك \neq ١$ نجد :

$$س = \frac{٢(ك-٢)}{١-ك} \quad (٢)$$

المناقشة : بما اننا اعتبرنا مبدأ الزمن الساعة ١٢ ، وبما ان السيارة الثانية لم تبدأ في السير الا في الساعة ١٠ او الساعة -٢ لذلك يجب ان يكون :

$$س > -٢$$

اي : $$\frac{٢(ك-٢)}{١-ك} > -٢$$

او : $$\frac{ك-٢}{١-ك} + ١ > ٠$$

او : $$\frac{-١}{١-ك} > ٠$$

او : $$١-ك > ٠$$

اي : $$\boxed{ك < ١}$$

لذلك اذا كان $ك > ١$ لا يكون للمسألة جواب ، اذ ان المسافة المقطوعة من قبل السيارة الاولى هي دوماً اعظم .

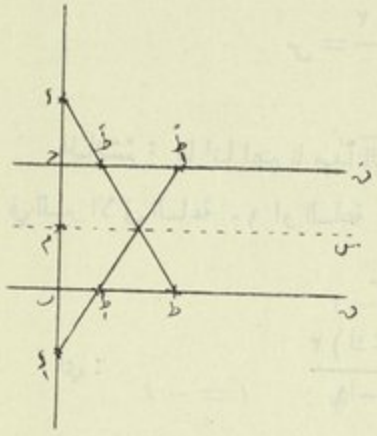
كذلك اذا كان $ك = ١$ فان المعادلة (١) تصبح :

$$س \times ٠ = -١$$

اي مستحيلة ، اذ من المستحيل ان تكون المسافة المقطوعة من قبل الاولى تساوي المسافة المقطوعة من قبل الثانية .

واذا كان $ك < ١$ يكون مخرج س في العلاقة (٢) سالباً واشارة س هي من اشارة $٢-ك$ ، فاذا كانت $١ < ك < ٢$ تكون س موجبة ، واذا كانت $ك < ٢$ تكون س سالبة ويكون الزمن المطلوب قبل الظهر ، وفي النهاية اذا كانت $ك = ٢$ يكون الزمن المطلوب هو الساعة ١٢ تماماً .

٢٦٦— مسألة : ١٢) المستقيمان ق ، قَ متوازيان والمستقيم ب حـ عمود مشترك بينهما (شكل ٢٥َ) عين على المستقيم ق النقطة ط وعلى المستقيم قَ النقطة طَ على ان يكون المستقيم طَ ط ماراً من النقطة المعلومة د وعلى ان يكون ايضاً ب ط + حـ طَ = ل باعتبار ل عدداً معلوماً .



(شكل ٢٥َ)

الحل : بما ان المسألة لا تحدد وضع النقطة د بالنسبة الى ب حـ فاننا نلاحظ انه لو كان المستقيم ط طَ د يمثل حلاً للمسألة لكان نظير هذا المستقيم بالنسبة للمحور م س المار من منتصف ب حـ والموازي لكل من ق ، قَ يمثل حلاً آخر لهذه المسألة . وكذلك فان المسألة تقبل حلين آخرين يحصلان من الحلين السابقين :

د ط طَ ، $د_1 ط_1 طَ$

بطي الشكل حول ب حـ لذلك نكتفي باخذ الحل الاول وتعيين المستقيم د ط طَ

لنفرض ان م حـ = هـ ، م د = ك ولنفرض كما في (الشكل ٢٥َ) ك > هـ ولنأخذ ب ط = س ، حـ طَ = ع فيجب ان يكون :

١ً) س + ع = ل (١)

٢ً) من المثلثين المتشابهين د حـ ط ، د ب ط نجد :

$$\frac{ب\ ط}{حـ\ طَ} = \frac{ب\ د}{حـ\ د}$$

اي :

$$\frac{س}{ع} = \frac{ك + هـ}{ك - هـ} \qquad (٢)$$

ومن المعادلتين (١) ، (٢) نجد :

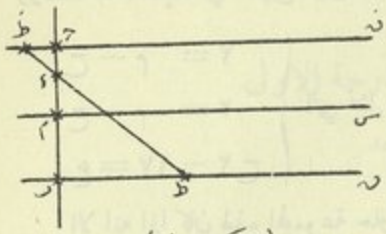
$$\frac{س}{ك + هـ} = \frac{ع}{ك - هـ} = \frac{ل}{٢ ك}$$

ومنها : $س = \frac{ل(ك + هـ)}{٢ك}$ ، $ع = \frac{ل(ك - هـ)}{٢ك}$

وهذان الجذران مقبولان ، لان :

$ك > هـ$

لنفرض الآن ان $ك < هـ$ فنحصل على (الشكل ٢٦ مكرر) ويكون ايضاً في هذه الحالة :



(شكل ٢٦ مكرر)

$س + ع = ل$ ، $\frac{ب ط}{ح ط} = \frac{ب د}{د ح}$

اي : $\frac{س}{ع} = \frac{هـ + ك}{هـ - ك}$

فنجد بنفس الطريقة :

$س = \frac{ل(ك + هـ)}{٢هـ}$ ، $ع = \frac{ل(هـ - ك)}{٢هـ}$

وهنا $ع > ٠$ لان $هـ > ك$ فرضاً .

٢٦٥ – مسألة : ١٣) اوجد عدداً مركباً من ثلاثة ارقام $\overline{ح ع م}$ مجموع ارقامه يساوي ١٥ واذا طرحنا هذا العدد من العدد $\overline{م ع ح}$ كان حاصل الطرح مساوياً ١٩٨ واذا طرحنا رقم عشراته من ١٧ كان الناتج ضعفي رقم الآحاد؟

الحل : بحسب منطوق المسألة يكون :

$$ح + ع + م = ١٥$$
$$١٠٠ح + ١٠ع + م - (١٠٠م + ١٠ع + ح) = ١٩٨$$
$$١٧ - ع = ٢ح$$

او :
$$\left.\begin{array}{l} ح + ع + م = ١٥ \\ ح - م = ٢ \\ ١٧ - ع = ٢ح \end{array}\right\}$$

فلحل المسألة يكفي حل هذه المجموعة ، فاذا استخرجنا من المعادلة الاخيرة :

$$ع = ١٧ - ٢ح$$

ووضعنا هذه القيمة في الاولى نرى ان المجموعة المطلوب حلها تكافيء المجموعة :

$$\left\{\begin{array}{l} ح - م = ٢ \\ ح - م = ٢ \\ ع = ١٧ - ٢ح \end{array}\right.$$ التي تمثل عدم تعيين والمكافئة الى $$\left\{\begin{array}{l} ح - م = ٢ \\ ع = ١٧ - ٢ح \end{array}\right.$$

الا انه اذا كان لهذه المجموعة حلول عديدة فلا تتمكن ان نقبل من هذه الحلول العديدة الا الحلول الموجبة والتي اصغر من ١٠ وذلك من اجل كل المجاهيل ، فيجب اذن ان يكون :

$$١٠ > ع > ٠ \quad \text{اى:} \quad ١٠ > ١٧ - ٢ح > ٠$$

ومنها : $٨,٥ > ح > ٣,٥$

اي : $ح = ٤$ او ٥ او ٦ او ٧ او ٨

ومنها : $ع = ٩$ او ٧ او ٥ او ٣ او ١

$م = ٢$ او ٣ او ٤ او ٥ او ٦

والعدد هو: $ح ع م = ٢٩٤$ ٣٧٥ ٤٥٦ ٥٣٧ ٦١٨

ملاحظة : كما في المثال السابق قد تكون المسألة من الوجهة الجبرية ممثلة لعدم تعيين ، الا انه يصبح لها حلول معينة بملاحظة ان بعض المجاهيل او كلها تخضع لشروط لا يمكن تأويلها بمعادلات بل بمتراجحات (كون المجهول > ٠ او < ٠ او $<$ من عدد مفروض) .

تمارين

مسائل المعادلة التي من الدرجة الاولى

وذات المجهول الواحد

١] اشترك اربعة لاعبين فربح الاول ٣٥ فرنكا ، وربح الثاني $\frac{١}{٩}$ الربح العام ، وربح الثالث $\frac{٣}{٨}$ هذا الربح ، وربح الرابع $\frac{٥}{١٢}$ من هذا الربح . فما مقدار ما ربحه كل منهم ؟

٢] وضع رجل ٧٠٠ فرنك بسعر ٤٪ وبعد ثمانية اشهر وضع بنفس السعر ٩٠٠ فرنك . فبعد كم من الزمن تكون فائدتا المبلغين متساويتين ؟

٣] والد عمره ٣٠ سنة وعمر ابنه ٦ سنوات . فبعد كم سنة يصير عمر الوالد ثلاثة اضعاف عمر الولد ؟

٤] قسم مبلغ ٥٤٢٥ قرشاً بين ثلاثة اشخاص بشرط ان يزيد ما يأخذه الاول على ما يأخذه الثاني بمقدار $\frac{١}{٥}$ المبلغ ، وان يزيد ما يأخذه الثالث على ما يأخذه الثاني بمقدار $\frac{٥}{١٢}$ من المبلغ ؟

٥] صياد اطلق ٣٠ طلقة ، وكان في كل مرة يصيب فيها الهدف يأخذ ٠٫٨٠ فرنكا ، وفي كل مرة يخطيء فيها الهدف يدفع ٠٫٥٠ فرنكا . فاذا علم انه خسر ٧٫٢٠ فرنكا ، فكم مرة اصاب الهدف وكم مرة اخطأه ؟

٦] اوجد عدداً لو ضرب بخمسة لزاد على العشرين بقدر ما ينقص العدد نفسه عن العشرين ؟

٧] تزيد ثروة رجل في كل سنة بمقدار ثلثها ، وفي آخر كل سنة يصرف ١٠٠٠ فرنك ، وبعد ثلاث سنين تضاعفت ثروته . اوجد ثروته الاصلية ؟

٨] خلطنا نوعين من الخل ، سعر الليتر من النوع الاول ٢ فرنكا وسعر الليتر من النوع الثاني ١,٥ فرنكا . فاذا اردنا ان نكون ١٠٠ ليتر من الخليط ونبيع كل ليتر منه بسعر ١,٦٠ فرنكا ، ما هو عدد الليترات الواجب اخذه من كل نوع ؟

٩] توفي رجل عن ثروة ، واوصى ان توزع بالصورة التالية : $\frac{١}{٥}$ ثروته للايتام و $\frac{١}{٦}$ ها للعجزة و $\frac{٤}{٧}$ ها لولدي عمه ، ويزيد على ذلك ٩٩٠٠ فرنك للفقراء . والمطلوب :

١°) ايجاد ثروة هذا الرجل ؟
٢°) مقدار المبلغ المدفوع للايتام ؟
٣°) المبلغ المدفوع للعجزة ؟
٤°) حصة كل من ولدي عمه ؟

١٠] ضابط ترك في اول نقطة نصف جنده وجندياً ، وفي ثاني نقطة ترك نصف الباقي الاول وجندياً ، وفي ثالث نقطة ترك نصف الباقي الثاني وجندياً . فكم جندياً كان معه اولاً° اذا علم انه بقي معه اخيراً ٥ جنود ؟

١١] قسمنا مبلغاً بين عدة اشخاص ، فأخذ الاول ٥٠٠ فرنك و $\frac{١}{٥}$ الباقي الاول ، واخذ الثاني ١٠٠٠ فرنك و $\frac{١}{٥}$ الباقي الثاني ، واخذ الثالث ١٥٠٠ فرنك و $\frac{١}{٥}$ الباقي الثالث ، وهكذا ..... ما هو المبلغ المقسم ، وما هو عدد الاشخاص اذا علم ان الحصص كلها متساوية ؟

٢°) اعد المسألة السابقة بتبديل كل $\frac{١}{٥}$ بـ $\frac{١}{٢}$.

١٢] رجل صرف $\frac{٣}{٥}$ ما معه الا ٤ فرنكات ، ثم صرف ربع الباقي و ٣ فرنكات ، واخيراً صرف $\frac{٢}{٥}$ الباقي الاخير و ١,٢٠ فرنكا ، وبقي معه اخيراً ٢٤ فرنكا . فكم كان معه اولاً ؟

١٢] ٤٠ كيلوغراماً من ماء البحر تحتوي على ١٨٠٠ غرام من الملح . فكم كيلوغراماً من الماء الصافي يجب ان نضيف الى ماء البحر حتى يكون كل ٤٠ كيلوغراماً من ماء البحر لا تحتوي الا على ١٠ هيكتوغرامات من الملح ؟

١٤] اشترينا نوعين من الخل ، سعر الليتر من النوع الاول ٠,٩٥ فرنكا ، وسعر الليتر من النوع الثاني ٠,٣٠ فرنكا . اذا علم ان عدد ليترات النوع الثاني يزيد ٤٠ ليترة على عدد ليترات النوع الاول ، وان قيمة النوع الاول تزيد ٢٠,٥ فرنكا على قيمة النوع الثاني . اوجد عدد ليترات كل نوع ؟

١٥] اشترى رجل ٢٨ متراً من الجوخ ، فدفع قيمتها نقداً ٣١٢,٢٥ فرنكا بعد ان حسم له ٦٪ . اوجد سعر المتر الواحد ؟

١٦] اخذ من حوض ماء عدد من الليترات في مدة ٣ ايام متوالية ، وكان يؤخذ في كل يوم ربع ما يؤخذ في اليوم الذي قبله واخيراً وجد ان الباقي في الحوض يساوي نصف الماء المأخوذ و ١٧٠ ليتراً . فكم عدد الليترات الموجودة في الحوض اولاً ، اذا كان المأخوذ يساوي الباقي ؟

١٧] اوجد عدداً لو ضربناه باربعة وقسمنا الجداء على ٣ يكون الناتج ٢٤ ؟

١٨] سئل رجل عن عمر ابنه فقال : لو طرح من ضعف عمره الحالي ثلاثة امثال عمره قبل ست سنوات لوجدتم عمره . فكم عمره ؟

١٩] اذا احيط بستان مربع الشكل بجدار سمكه ٠,٤٠ متراً لنقصت مساحته ٨٤ متراً مربعاً . فكم طول ضلع هذا المربع وكم مساحته ؟

٢٠] ما هي المسافة التي تقطعها عربة ذات اربع عجلات اذا علم ان قطر العجلة الامامية ٠,٨٠ سانتيمتراً ، وان هذه العجلة دارت ٥٥ دورة زيادة على العجلة الخلفية التي قطرها متر واحد ؟

مسائل المعادلات التي من الدرجة الاولى

وذات المجاهيل المتعددة

١] اوجد عددين مجموعهما ٩٨ ونسبتهما كنسبة ١٠ على ١١ ؟

٢] اوجد كسراً لو اضيف الى حديه ٥ يصبح مساوياً الى $\frac{٢}{٣}$ ، ولو طرح من حديه ٣ يصبح مساوياً $\frac{٢}{٥}$ ؟

٣] باع فلاح ٣٠ دجاجة بعضها بسعر ٥ فرنكات والبعض الآخر بسعر ٤ فرنكات ، فاخذ من هذا البيع ١٣٨ فرنكا . فكم دجاجة باع من كل نوع ؟

٤] في كل مسابقة يكون فيها نهاد الاول يعطيه والده ٥ فرنكات ، وفي كل مسابقة لا يكون فيها الاول يعطي نهاد لوالده ٢ فرنكا . وبعد عشرين مسابقة اخذ نهاد من ابيه ١٦ فرنكا . فكم مسابقة كان فيها الاول ؟

٥] اوجد عددين مجموعهما ٥ وخارج قسمتهما ٥ ؟

٦] اوجد عددين نسبتهما ٥ على ٣ ولكن اذا طرح من الاول ١٠ واضيفت هذه العشرة الى الثاني لانعكست النسبة ؟

٧] اوجد عددين اذا علم ان خارج قسمتهما ٤ وباقي قسمتهما ٧٦ وان فرقهما يساوي ٤٣٠ ؟

٨] اوجد كسراً يكافيء $\frac{٧}{٨}$ اذا علم ان مجموع حديه ١٣٥ ؟

٩] رجل اراد ان يوزع ما معه على عدد من الاشخاص ، فاذا اعطى كلاً منهم ٢٥ قرشاً نقصه ١٠ قروش ، ولو اعطى كلاً منهم ٢٠ قرشاً لزاد معه

٢٥ قرشاً . اوجد عدد الاشخاص ومقدار ما معه ؟

١٠] شخصان ب ، ح مع كل منهما مقدار من الدراهم ، ولو اعطى ح الى ب خمسة قروش يصبح ما مع ب خمسة امثال ما بقي مع ح ، ولكن اذا اعطى ب الى ح سبعة قروش تصبح دراهم ب مساوية لدراهم ح . اوجد مقدار دراهم كل منهما ؟

١١] اذيب داخل قدر ٤٨٠ قطعة من السبائك ، البعض منها يزن ١٢ غ والبعض الآخر منها يزن ٢٠ غ ، ووزن الجميع ٧٥٢٠ غ . اوجد عدد قطع كل نوع ؟

١٢] دنان وزنها فارغين واحد ، ويحتويان على مقدارين مختلفين من الماء ، الوزن الكلي للاول يساوي $\frac{٤}{٥}$ الوزن الكلي للثاني ، ولو اضفنا الماء الموجود في الثاني الى الاول لاصبح وزنه ٨ امثال وزن الدن الثاني الفارغ .

فاذا علم ان وزن الماء الموجود في الثاني يزيد ٥٠ غ على وزن الماء الموجود في الاول ، اوجد وزني الدنين وهما فارغان ؟ ثم وزن الماء الموجود في كل منهما ؟

١٣] ثلاثة لاعبين لعبوا للمرة الاولى فخسر الاول وربح الثاني والثالث وكان ربح كل منهما يساوي مقدار ما معه ، ثم لعبوا للمرة الثانية فخسر الثاني وربح الاول والثالث كل بمقدار ما كان معه في ابتداء اللعبة الثانية ، ثم لعبوا للمرة الثالثة فخسر الثالث وربح الاول والثاني كل بمقدار ما كان معه في ابتداء اللعبة الثالثة . فكم كان معهم عند ابتداء اللعبة الاولى اذا علم ان كل واحد منهم وجد معه ١٢٠ فرنكا في انتهاء اللعبة الثالثة ؟

١٤] اشترينا ثلاثة اشياء ، فاذا اضيف الى نصف قيمة الاول قيمتا الثاني والثالث اصبحت قيمته ١٢٩ فرنكا ، ولو اضيف الى نصف قيمة الثاني قيمتا الاول والثالث لاصبحت قيمته ١٥١ فرنكا ، ولو اضيف الى نصف قيمة الثالث قيمتا الاول والثاني لاصبحت قيمته ١٤٤ فرنكا . فما قيمة كل منها ؟

١٥] قسمنا مبلغاً بين شخصين ، فكانت حصة الاول $\frac{٣}{٤}$ حصة الثاني ، ولكن لو

اضيف الى $\frac{١}{١٠}$ حصة الاول $\frac{٤}{٥}$ حصة الثاني لكان الناتج ١٠٠ فرنك .

اوجد المبلغ وحصة كل منهما ؟

١٦] وضع رجل مبلغاً من المال في مصرف ، فوضع قسما منه بسعر ٤٪ والقسم الاخير بسعر ٥٪ وهكذا اخذ فائدة قدرها ١٢٤٠ فرنكا . ولو وضع المبلغ الموضوع بسعر ٤٪ بسعر ٥٪ ، والمبلغ الموضوع بسعر ٥٪ بسعر ٤٪ لزاد ربحه ٤٠ فرنكا . فما هو المبلغ وما قدر كل قسم منه ؟

١٧] حنفيتان تملآن حوضاً بمدة ١ $\frac{١}{٥}$ ساعة ، ولكن الاولى تملؤه بمدة ٣ ساعات . فما هو الزمن اللازم كي تملأه الثانية ؟

١٨] ثلاثة اشخاص اشتروا ملكا بقيمة ٨٠٠٠٠ فرنك ، فالاول يمكنه ان يدفع هذا المبلغ اذا اخذ $\frac{١}{٨}$ ما مع الثاني و $\frac{١}{٧}$ ما مع الثالث و ١٥٠٠٠ فرنك ، والثاني يمكنه ان يدفع هذا المبلغ اذا اخذ $\frac{١}{٤}$ ما مع الاول و $\frac{١}{٣}$ ما مع الثالث و ٤٧٥٠ فرنكا ، وكذا الثالث يمكنه ان يدفع هذا المبلغ اذا اخذ $\frac{١}{٩}$ ما مع الاول و $\frac{١}{١٠}$ ما مع الثاني . اوجد مقدار ما مع كل منهم ؟

١٩] ثلاث حنفيات تملأ حوضاً ورابعة تفرغه ، فاذا فتحت الاولى وحدها ملأت الحوض بمدة ٤ ساعات ، واذا فتحت الثانية وحدها ملأته بمدة ٥ ساعات ، واذا فتحت الثالثة وحدها ملأته بمدة ٨ ساعات ، واذا فتحت الرابعة وحدها فرغته في مدة ٦ ساعات . فبعد كم ساعة يمتلىء الحوض فيما لو فتحت الحنفيات الاربع معاً ؟

٢٠] حنفيتان تملآن حوضاً ، فاذا فتحت الاولى مدة ساعة و ٣٠ دقيقة والثانية مدة ٥٤ دقيقة لكان بالحوض ٤٢٧,٥ ليتر ماء ، ولكن لو فتحت الاولى مدة ٥٤ دقيقة والثانية مدة ساعة و ٣٠ دقيقة لكان بالحوض ٣٨٦,١

ليتر ماء . فالمطلوب ايجاد مقدار ما تعطي كل حنفية من ليترات الماء في الساعة ؟

٢١] اوجد عدداً مكوناً من ثلاثة ارقام ، يزيد ٢٧٠ اذا غير موقع الرقمين الاولين منه ، وينقص ٣٩٦ اذا ابدل موقع الرقمين الاول والاخير ، وينقص ٦٣ اذا غير موقع رقميه الاخيرين ؟

٢٢] عين عدداً مكوناً من ثلاثة ارقام بحيث يكون :

١ً) رقم العشرات يساوي رقم الآحاد .

٢ً) ينعكس العدد فيما لو اضيف ٤٢ الى ضعفه .

٣ً) اذا ابدل رقم العشرات برقم المئات ورقم المئات برقم العشرات لوجدنا عدداً لو اضيف اليه ٢٧ لكان الناتج العدد المعكوس ؟

٢٣] اوجد عدداً مكوناً من ثلاثة ارقام بحيث يكون رقم المائة يساوي $\frac{٢}{٣}$ رقم الآحاد ورقم الاحاد يساوي نصف مجموع الرقمين الاخيرين ، ولو اضيف اليه ١٩٨ لانعكس العدد ؟



مسائل هندسية

١] اربع نقاط على محور فواصلها ب ، حـ ، د ، هـ اوجد على هذا المحور نقطة مَ التي لو اعتبرت مبدأ جديداً يكون مجموع فواصل هذه النقط بالنسبة اليها مساويا للصفر ؟

٢] نأخذ على محور نقطتي ب ، حـ فاصلتاهما د ، هـ اوجد على هذا المحور نقطة مثل ل على ان يكون: ك . $\overline{ل ب}$ + ق . $\overline{ل حـ}$ = ٠

ك ، ق عددان جبريان .

٣] يؤخذ على محور ثلاث نقط ب ، حـ ، د فواصلها هـ ، ن ، ف عين على هذا المحور نقطة ل التي تحقق :

ك . $\overline{ل ب}$ + ق . $\overline{ل حـ}$ + ط . $\overline{ل د}$ = ٠

٤] اوجد ضلع مربع لو اضيف اليه ب لزادت مساحته حـ٢ ؟

٥] اوجد محيط مستطيل لو اضيف الى كل من بعديه ب لزادت مساحته حـ٢ ؟

٦] لدينا نصف دائرة محدودة بقطرها ب حـ = ٢ ر يرسم داخلها مستطيل بصورة ان يكون احد اضلاعه على القطر ورأساه الآخران على محيط الدائرة . احسب بعدي هذا المستطيل اذا علم ان نسبتهما هي ٢ ؟

٧] اعد السؤال السابق نفسه بفرض ان النسبة م ؟

٨] توخذ نقطة هـ على الوتر حـ د للمثلث القائم الزاوية ب حـ د وينزل منها العمودان على الضلعين القائمين . عين هـ حتى يكون محيط المستطيل المكون على تلك الصورة يساوي ٢ ل (٢ ل طول مفروض) ؟

٩] دائرتان متساويتان متماستان خارجا ، يرسم مماسهما الخارجي ، ثم يرسم دائرة ثالثة مماسة للدائرتين وهذا المماس الخارجي . احسب نصف قطر الدائرة الثالثة اذا علم ان نصف قطر الدائرتين يساوي ن ؟

١٠] لدينا مربع ب ح د هـ نصل نقطة ل من الضلع ح د مع نقطة ب عين ل حتى تكون نسبة سطح المثلث ب ح ل الى سطح شبه المنحرف ب هـ د ل تساوي عدداً مفروضاً ق ؟

١١] تؤخذ على محور غير محدود القطعة ح د ولتكن هـ نقطة تتحرك عليه ، ب نقطة ثابتة تبعد عن ح د بمقدار ك . عين هـ حتى يكون :

$$\frac{\text{سطح } ب\ ح\ هـ}{\text{سطح } ب\ د\ هـ} = ل$$

ل عدد مفروض .

١٢] لدينا نصف دائرة قطرها ب ح = ٢ ر ولتكن هـ نقطة من نصف هذه الدائرة ، نرسم من هـ العمود هـ ك على ب ح والمطلوب : عين هـ حتى يكون :

$$\overline{ب\ هـ}^{٢} - \overline{ح\ هـ}^{٢} = \overline{ب}^{٢}$$

(ب عدد مفروض ، ناقش)

١٣] الفرق بين طولي ضلعي مثلث هو هـ وان منصف الزاوية الحاصلة بينهما يعين على الضلع الثالث طولين ك ، ن فالمطلوب ايجاد محيط هذا المثلث ؟

١٤] اوجد على قاعدة المثلث ب ح د نقطة هـ لو رسم منها هـ ل ، هـ ق موازيين للضلعين الآخرين لكان محيط المتوازي الاضلاع هـ ل ب ق يساوي ٢ ك ؟

١٥] اوجد على قاعدة المثلث ب ح د نقطة مثل هـ على ان يكون مجموع بعديها عن الضلعين الآخرين يساوي عدداً مفروضاً ل . ناقش المسألة ؟

البحث السابع

الاحداثيات

الخطوط البيانية للتوابع التي من الدرجة الاولى

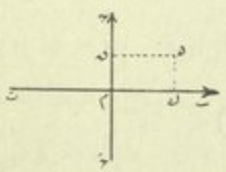
الفصل الأول

الاحداثيات

٢٦٦- تعيين نقطة في مستوٍ :

تعلمنا في مبدء الجبر كيفية تعيين نقطة على محور ، بعد معرفة عدد موجب او سالب يميناه فاصلة هذه النقطة . والآن سنرى كيف نعين موقع نقطة في مستوٍ ، والمثال الآتي يوضح لنا صورة هذا التعيين .

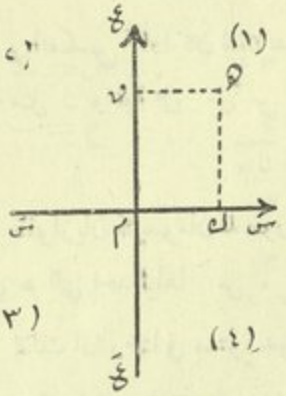
٢٦٧- مثال: لدينا ورقة اضلاع محيطها ليست خطوط مستقيمة (شكل ٢٠) فاذا اردنا ان نعين على هذه الورقة موقع نقطة ما مثل هـ فاننا نرسم داخلها مستقيمين متعامدين مثل ب َ ب ، حَ حـ اللذين يتقاطعان في نقطة م ثم ننزل من نقطة هـ العمودين هـ ك ، هـ ق على هذين المستقيمين فنرى ان النقطتين ك ، ق يعينان نقطة هـ تماما ، اذ يكفي ان نرفع من ك عموداً على ب َ ب ومن ق عموداً على حَ حـ فنجد محل تقاطعهما . ولتعيين النقطتين ك ، ق يجب ان نوجه



(شكل ٢٠)

المستقيمين ب َ ب ، حَ حـ فيصبحان عندئذ محورين وتعين النقطتان ك ، ق على هذين المحورين بواسطة فاصلتيهما ، اي بعددين جبريين .

٢٦٨ — الاحداثيات : لنرسم داخل مستوي الورقة محورين متعامدين مثل س َ س ، ع َ ع ولنوجههما كما في (الشكل ٢١) ولنعتبر النقطة المشتركة لهما م مبدأ لقياس الاطوال ، فاذا اردنا تعيين النقطة هـ من هذا المستوي ننزل منها العمود هـ ك على المحور س َ س والعمود هـ ق على المحور ع َ ع فنجد نقطتي ك ، ق .



(شكل ٢١)

ونسمي الطول الجبري للشعاع م ك بفاصلة او سين النقطة هـ ، كما نسمي الطول الجبري م ق بـ عين او ترتيب النقطة هـ .

وندرك بسهولة انه يجب ان تكون الوحدة المستعملة في قياس م ك هي عين الوحدة المستعملة في قياس م ق .

فاذا فرضنا ان فاصلة النقطة هـ هي س = + ٢ وان ترتيبها هو ع = + ٣ يكون س = م ك = + ٢ ، ع = م ق = + ٣ وكثيراً ما نرمز لهذه النقطة هـ بالرمز :

$$\text{هـ} \begin{cases} س = م\,ك = +٢ \\ ع = م\,ق = +٣ \end{cases} \quad \text{او :} \quad \text{هـ} \begin{cases} س = +٢ \\ ع = +٣ \end{cases}$$

فنسمي القيمتين م ك ، م ق باحداثيي النقطة هـ .

وكما في الشكل السابق نرسم غالباً المحور س َ س افقياً ونوجهه من اليسار الى اليمين ، واما المحور ع َ ع نرسمه شاقولياً ونوجهه من الاسفل الى الاعلى ، وكثيراً ما نقول محور السينات ومحور العينات عوضاً عن المحورين س َ س ، ع َ ع .

٢٦٩ — خواص الاحداثيين : رأينا فيما تقدم ان كل نقطة مثل هـ من

المستوي لها احداثيان ، وهما عددان جبريان . وفي الحالة الخاصة كل نقطة واقعة على المحور س َ س هي نقطة ترتيبها (عينها) صفر .

وكل نقطة واقعة على المحور ع َ ع هي نقطة فاصلتها (سينها) صفر .

اذن نرى بسهولة ان كل نقطة من المستوي يطابقها عددان جبريان (يمكن ان يكون احدهما صفراً) يسميان احداثيي هذه النقطة .

وبالعكس : اذا كان لدينا عددان جبريان (مثل س ، ع) فهذان العددان يقابلان نقطة مثل ك واقعة على س َ س ونقطة مثل ق واقعة على ع َ ع بحيث يكون :

$$\overline{م\,ك} = س \qquad \overline{م\,ق} = ع$$

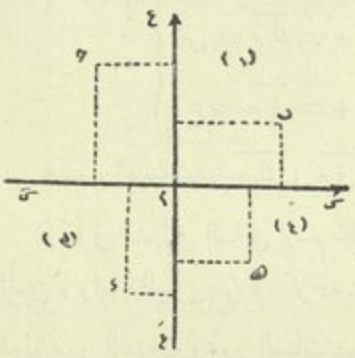
فالموازيان المرسومان للمحورين من النقطتين ك ، ق يتلاقيان في نقطة واحدة وهي ه التي احداثياها س ، ع .

لذلك اذا رسمنا في مستوٍ محورين متعامدين يكون :

١ً) لكل نقطة من هذا المستوي احداثيان معينان تماماً .

٢ً) لكل مجموعة عددين جبريين مثل س ، ع نقطة واحدة تقبل هذين العددين كاحداثيين لها .

٢٧٠— اشارة الاحداثيين : محورا الاحداثيين يقسمان المستوي الى اربع مناطق نسميها بالربع الاول والثاني والثالث والرابع ونرمز لها بالاعداد (١) ، (٢) ، (٣) ، (٤) فكل منطقة هي زاوية قائمة رأسها م (شكل ٢٢) .



(شكل ٢٢)

فالنقطة ب الواقعة في المنطقة (١) اي في الربع الاول هي نقطة احداثياها موجبان .

والنقطة ح الواقعة في المنطقة (٢) هي نقطة فاصلتها سالبة وترتيبها موجب .

والنقطة د الواقعة في المنقطة (٣) هي نقطة احداثياها سالبان .

والنقطة ه الواقعة في المنطقة (٤) اي في الربع الرابع هي نقطة فاصلتها موجبة وترتيبها سالب .

٢٧١ - ملاحظة : اذا استعملنا ورقاً مقسما الى مربعات صغيرة متساوية واخذنا طول ضلع المربع الواحد وحدة للطول ، واعتبرنا المحورين خطين متعامدين من خطوط هذه الورقة ، يمكننا تعيين النقط بسهولة عند ما تكون احداثياتها اعداداً تامة.

مثال : في (الشكل ٢٢) نرى ان النقطة :

أ $\begin{cases} س = +٤ \\ ع = +٢ \end{cases}$ ب $\begin{cases} س = -٣ \\ ع = +٤ \end{cases}$ حـ $\begin{cases} س = -١,٥ \\ ع = -٤ \end{cases}$ د

هـ $\begin{cases} س = +٣ \\ ع = -٣ \end{cases}$

الفصل الثاني

درس تحولات التابع ع = ب س + حـ



٢٧٢ - تمهيد - المتحول والتابع : لنأخذ المساواة :

ع = ٢ س + ٣ (١)

فهذه المساواة تساعدنا على حساب ع فيما اذا اعطينا قيمة ما الى س ، اي كل قيمة الى س تقابلها قيمة الى ع . وعند ما تتحول س فان ع تتحول مما يدلنا على ان تحولات ع تتبع تحولات س ، ونلخص هذا بقولنا : ان س متحول وان ع تابع الى س . فهذان التعبيران يدلان على ان :

١°) المتحول يمكنه ان يأخذ قيماً مختلفة . ففي المثال السابق ع = ٢ س + ٣ فان س يمكنها ان تأخذ اي قيمة كانت .

٢°) يعلم ع عند ما تعلم س .

وكذلك المساواة :

ع = √س (٢)

تدل على ان ع تابع الى س ، ولكن هنا المتحول س لايمكنه ان يأخذ الا قيماً موجبة ، اي التابع في هذا المثال لا يكون موجوداً الا اذا كان س موجباً .

وبصورة عامة المساواة التي طرفها الاول ع وطرفها الثاني كمية جبرية تحتوي على المتحول س تعين ع كتابع الى س لانه يمكن وقتئذ حساب ع اذا علمت س .

٢٧٣ - تحول التابع :

ع = ٢ س + ٣

اتجاه التحول : لنفرض ان المتحول س يأخذ قيماً متزايدة فتكون القيم

التي يأخذها المقدار ٢ س والمقدار ٢ س + ٣ متزايدة ايضاً ، وفي النتيجة اذا اعطينا في هذا المثال الى س قيماً متزايدة فان القيم المقابلة لها التي يأخذها ع تكون متزايدة ايضاً ، لذلك في هذا المثال نقول ان التابع ع متزايد .

وعند ما يكون س = + ∞ فان ع = + ∞ لانه اذا كان س = + ∞ يكون ٢ س = + ∞ وكذلك ٢ س + ٣ اي ع = + ∞ .

واما اذا كانت س = — ∞ فاننا نرى بنفس الطريقة ان ع = — ∞ والعكس صحيح ، اي اذا كان ع = + ∞ يكون :

٢ س + ٣ = + ∞ اي ٢ س = + ∞ اي س = + ∞

وبنفس الطريقة نجد انه اذا كان ع = — ∞ يكون :

٢ س + ٣ = — ∞ ومنها : س = — ∞

ونقصد بقولنا ان : س = + ∞ ان س اصبح اعظم من اي عدد اردنا .

وكذلك نقول ان : ع = — ∞ او ان ع انتهى او تقرب من — ∞ عند ما يصبح ع اصغر من اي عدد سالب اردنا مهما صغر .

٢٧٤ — الخلاصة : التابع ع = ٢ س + ٣ يتزايد من — ∞ الى + ∞ عند ما تتزايد س من — ∞ الى + ∞ ولنذكر ان هذه العبارة ليس لها الا المعنى الآتي :

١) عند ما س تتزايد فان ع تتزايد ايضاً .

٢) يمكن ان نعطي الى س قيمة عظيمة جداً وموجبة حتى تكون ع اكبر من اي عدد موجب مفروض مهما عظم .

٣) يمكن ان نعطي الى س قيمة سالبة وعظيمة بالقيمة المطلقة حتى تكون ع سالبة واصغر من اي عدد سالب مفروض مهما عظمت قيمته المطلقة (مهما صغر) لان + ∞ يعني عدد كبير بقدر ما نريد ، واما — ∞ فيمثل عدداً صغيراً جداً بقدر ما نريد .

٢٧٥ — ملاحظة : التابع ع = ٢ س + ٣ يصبح صفراً عندما :

$$٢س + ٣ = ٠ \quad \text{ومنها :} \quad س = -\frac{٣}{٢}$$

وبما ان هذا التابع متزايد فهو يكون موجباً اذا كانت س اعظم من $-\frac{٣}{٢}$

وسالباً اذا كانت س اصغر من $-\frac{٣}{٢}$ ويمكن تلخيص جميع ما سبق بالجدول الآتي:

$ع = ٢س + ٣$

س	$-\infty$	$\frac{-٣}{٢}$	$+\infty$
ع	$-\infty$ ↘	٠ ↘	$+\infty$

الذي يدل على ان ع تزداد من $-\infty$ الى الصفر عندما تزداد س من $-\infty$ الى $\frac{-٣}{٢}$ وان ع تزداد من الصفر الى $+\infty$ عند ما تزداد س من $\frac{-٣}{٢}$ الى $+\infty$

٢٧٦ – درس تحولات التابع :

$$ع = -٣س + ١$$

اتجاه التحول : لنذكر انه اذا كان لدينا المتراجحة العددية $ب > حـ$ وضربنا طرفيها بالعدد السالب -٣ نجد (بند ١٩٥) ان :

$$-٣ب < -٣حـ$$

ومن ذلك نرى انه اذا اعطينا الى س قيماً عددية متزايدة فان المقدار $-٣س$ يأخذ قيماً عددية متناقصة وكذلك $-٣س + ١$ يأخذ قيما عددية متناقصة اذن اذا اعطينا الى س قيماً متزايدة فان ع تأخذ قيماً متناقصة ، ونختصر هذا بقولنا ان التابع $ع = -٣س + ١$ **متناقص دوماً .**

ونرى بسهولة انه :

١ً) اذا كان $س = -\infty$ فان $-٣س = +\infty$ وكذلك $-٣س + ١$ اي ان $ع = +\infty$.

٢ً) واما اذا كان س = + ∞ فان − ٣ س = − ∞ وكذلك − ٣ س + ١ اي ان ع = − ∞

والعكس صحيح ، اي اذا كانت ع = ± ∞ فلا بد وان تكون س = ∓ ∞

٢٧٧ — الخلاصة : نلخص ما مر بقولنا :

التابع ع = − ٣ س + ١ يتناقص من + ∞ الى − ∞ عندما تتزايد س من − ∞ الى + ∞ ، ولنذكر ان هذه الجملة ليس لها الا المعنى الاتي:

١ً) عندما س تتزايد فان ع تتناقص .

٢ً) يمكن ان ننتخب س كبيرة وموجبة حتى يكون ع = − ٣ س + ١ سالباً واعظم بالقيمة المطلقة من اي عدد مفروض سلفاً .

٣ً) يمكن ان ننتخب س سالبة وعظيمة بالقيمة المطلقة حتى يكون ع = − ٣ س + ١ اعظم من اي عدد مفروض سلفاً مهما عظم .

٢٧٨ — ملاحظة : التابع ع = − ٣ س + ١ يصبح صفراً عند ما يكون − ٣ س + ١ = ٠ اي عندما يكون س = $\frac{١}{٣}$

وبما ان هذا التابع متناقص فيكون سالباً عندما يكون س اكبر من $\frac{١}{٣}$ وموجباً عندما تكون س اصغر من $\frac{١}{٣}$

ويمكن تلخيص جميع ما سبق بالجدول الآتي :

ع = − ٣ س + ١

س	− ∞	$\frac{١}{٣}$	+ ∞
ع	+ ∞ ↙	٠ ↙	− ∞

٢٧٩— التابع المتزايد والتابع المتناقص :

يكون التابع ع = ا (س) متزايداً فيما اذا كانت القيم التي يأخذها هذا التابع ع متزايدة عند ما تتزايد القيم المقابلة لها من المتحول س .

ويكون هذا التابع متناقصاً فيما اذا كانت القيم التي يأخذها متناقصة عند ما تتزايد القيم المقابلة لها من المتحول س .

وبصورة ثانية يكون التابع ع = ا (س) متزايداً او متناقصاً حسبما تتحول قيم ع باتجاه واحد مع قيم س او بالعكس .

٢٨٠— التابع الثابت : يكون التابع ثابتاً فيما اذا كانت له قيمة ثابتة لا تتغير بتغير المتحول س .

مثال : ع = ٣

٢٨١— المتحول او التابع الذي يتقارب من ∞ ± :

١°) كما رأينا في (البند ٢٧٣) نقول ان التابع ع او المتحول س يتقارب من + ∞ عند ما يأخذ قيما اعظم من اي عدد مفروض سلفاً مهما عظم .

٢°) ونقول ان التابع ع او المتحول س يتقارب من — ∞ عند ما يأخذ قيماً سالبة واعظم بالقيمة المطلقة من اي عدد مفروض سلفاً مهما عظم هذا العدد .

٢٨٢— درس تحولات التابع : ع = ب س + حـ

اتجاه التحول : لندرس الآن تحول التابع ع = ب س + حـ وذلك بفرض ب ، حـ عددين معلومين وبفرض س المتحول . لنعط الى س قيمتين مختلفتين $س_١$ ، $س_٢$ ولنفرض ان :

$$س_٢ > س_١ \qquad (١)$$

فتكون قيمتا ع المقابلتان لهاتين القيمتين هما :

$$ع_١ = ب س_١ + حـ$$

$$ع_٢ = ب س_٢ + حـ$$

وبطرح طرفي الاولى من طرفي الثانية نجد :

$$ع_٢ - ع_١ = ب س_٢ + حـ - (ب س_١ + حـ) = ب س_٢ - ب س_١$$

ومنها : $$ع_٢ - ع_١ = ب (س_٢ - س_١)$$

وبناء على المتراجحة (١) يكون الفرق $س_٢ - س_١$ موجباً ، فاشارة الفرق $ع_٢ - ع_١$ تتبع اذن اشارة ب .

ولنميز الآن الحالات الآتية :

١°) $ب > ٠$ فالفرق $ع_٢ - ع_١$ موجب ومنها $ع_٢$ اكبر من $ع_١$ اذن عند ما تتزايد س فالتابع ع يتزايد اي التابع متزايد .

٢°) $ب < ٠$ فالفرق $ع_٢ - ع_١$ سالب ومنها $ع_٢$ اصغر من $ع_١$ اذن عند تتزايد س فالتابع ع يتناقص ، اي التابع متناقص .

٣°) اذا كانت $ب = ٠$ في هذه الحالة يكون :

$$ع = حـ$$

والتابع يكون ثابتاً ، ونلخص ما مر بالنظرية الآتية :

نظرية: التابع $ع = ب س + حـ$ يكون متزايداً فيما اذا كانت ب موجبة ومتناقصا فيما اذا كانت ب سالبة ، وثابتا فيما اذا كانت $ب = ٠$.

٢٨٣- قيم ع عندما تكون س عظيمة جدا :

اذا اعطينا الى س قيمة عظيمة وموجبة ، فالقيمة التي يأخذها $ب س$ تتبع اشارة ب ، لذلك نميز حالتين :

١°) $ب > ٠$ فقيمة $ب س$ تكون موجبة وعظيمة جداً ، وكذلك تكون قيمة التابع $ب س + حـ$ لذلك في هذه الحالة نقول :

ان التابع $ع = ب س + حـ$ يتقارب من $+ \infty$ عند تتقارب س من $+ \infty$.

٢°) $ب < ٠$ فاذا كانت س موجبة وعظيمة جداً فان $ب س$ تصبح سالبة وعظيمة بالقيمة المطلقة ، وكذلك يكون $ب س + حـ$ لذلك في هذه الحالة نقول :

ان التابع ع = ب س + حـ يتقرب من — ∞ عندما تتقرب س من — ∞ .

ونلخص كل ما سبق بالنظرية الآتية :

نظرية: عندما تتقرب س من + ∞ فان التابع ع = ب س + حـ يتقارب من + ∞ او من — ∞ حسبما تكون ب موجبة او سالبة .

٢٨٤— فيم ع عندما تأخذ س قيمة سالبة وعظيمة بالقيمة المطلقة :

لنعط الى س قيمة سالبة وعظيمة جداً بالقيمة المطلقة فاشارة ب س تتبع اشارة ب . لذلك نميز حالتين :

١) ب > ٠ . فقيمة ب س سالبة وعظيمة جداً بالقيمة المطلقة وكذلك قيمة ب س + حـ تكون سالبة وعظيمة بالقيمة المطلقة ، لذلك في هذه الحالة نقول :

عندما س تتقرب من — ∞ فان التابع ع = ب س + حـ يتقرب من — ∞ ايضا .

٢) ب < ٠ . فاذا كانت س سالبة وعظيمة بالقيمة المطلقة فالكمية ب س تكون موجبة وعظيمة جداً ، وكذلك قيمة ب س + حـ تكون موجبة وعظيمة . لذلك في هذه الحالة (ب < ٠) نقول :

عندما س تتقرب من — ∞ فان التابع ع = ب س + حـ يتقرب من + ∞ .

ونلخص ما ذكرناه سابقا بالنظرية الآتية :

نظرية: عندما تتقرب س من — ∞ فان التابع ع = ب س + حـ يتقارب من — ∞ او من + ∞ حسبما تكون ب موجبة او سالبة .

٢٨٥— الخلاصة : نلخص النظريات المذكورة في البنود السابقة بنظرية جامعة فنقول :

نظرية: عندما تتزايد س من — ∞ الى + ∞ فان التابع :

ع = ب س + حـ

يتزايد من $-\infty$ الى $+\infty$ اذا كانت ب موجبة .

ويتناقص من $+\infty$ الى $-\infty$ اذا كانت ب سالبة . كما في الجدولين الآتيين :

١) ب > ٠ .

ع = ب س + حـ

س	$-\infty$	$-\frac{حـ}{ب}$	$+\infty$
ع	$-\infty$ ↘	٠	↗ $+\infty$

٢) ب < ٠ .

ع = ب س + حـ

س	$-\infty$	$-\frac{حـ}{ب}$	$+\infty$
ع	$-\infty$ ↙	٠	↙ $-\infty$

واما اذا كانت ب = ٠ فان التابع ع يبقى ثابتاً = حـ

٢٨٦ - ملاحظة: التابع ع = ب س + حـ يصبح صفراً عند ما يكون :

ب س + حـ = ٠

ومنها : $س = -\frac{حـ}{ب}$

فاذا كانت ب موجبة يكون التابع متزايداً اي يكون موجباً اذا كانت س اكبر من $-\frac{حـ}{ب}$ وسالباً اذا كانت س اصغر من $-\frac{حـ}{ب}$

وبالعكس اذا كانت ب سالبة يكون التابع متناقصاً ، اي سالباً اذا كانت س اكبر من $-\frac{حـ}{ب}$ وموجباً اذا كانت س اصغر من $-\frac{حـ}{ب}$

***

الفصل الثالث

الخط البياني او التمثيل الخطي للتابع

ع = ب س + حـ

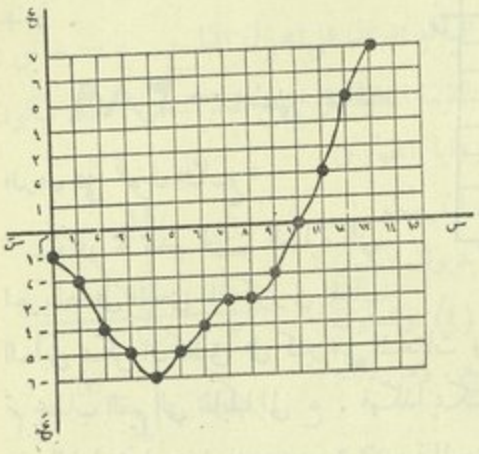
٢٨٧ – استعمال التمثيل الخطي :

لو سجلنا في مرصد جوي تحولات درجة الحرارة من ساعة الى ساعة بواسطة درجة السانتيغراد نحصل مثلاً على الجدول الآتي :

الساعة	صفر (او ١٢)	كانت درجة الحرارة		— ١°
«	١	«	«	— ٢°
«	٢	«	«	— ٤°
«	٣	«	«	— ٥°
«	٤	«	«	— ٦°
«	٥	«	«	— ٥°
«	٦	«	«	— ٤°
«	٧	«	«	— ٣°
«	٨	«	«	— ٣°
«	٩	«	«	— ٢°
«	١٠	«	«	٠°
«	١١	«	«	٢°
«	١٢	«	«	٥°
«	١٣	«	«	٧°

فهذا الجدول يعطينا معلومات دقيقة ولكنه طويل القراءة ويتطلب دقة لدرس تحول الحرارة ، فلتسهيل هذا الدرس نستعمل التمثيل الخطي المعمول بالصورة التالية :

نأخذ ورقة مقسمة الى مربعات ونرسم عليها محورين متعامدين س م س ، ع م ع (شكل ٢٣) ونضع على محور السينات في منتهى المربعات الاعداد : ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ..... ١٢ ، ١٣ ... ساعات ، وعلى محور العينات في منتهى المربعات نضع درجات الحرارة ، فكل نقطة من المستوي لها فاصلة تدل على الساعة ولها ترتيب يدل على درجة الحرارة .



(شكل ٢٣)

وبالعكس كل ساعة مقرونة بدرجة حرارة تعين نقطة من المستوي ، فالجدول يعين لنا ١٣ نقطة ، ونظرة واحدة الى هذا الشكل تبين لنا تحولات درجة الحرارة في مدة ١٣ ساعة .

٢٨٨ - التمثيل الخطي للتابع : بطريقة تشابه الطريقة المذكورة آنفاً يمكن ان نعلم تحول تابع ما بدون ان نعرف درس تحوله .

مثال : لنأخذ التابع :

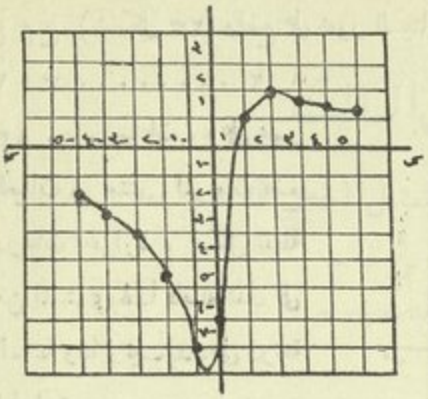
$$ع = \frac{٨ س - ٦}{س^٢ + ١}$$

اننا لا نعلم حتى الان كيفية درس تحول هذا التابع ، ولندرس تحوله عند ما تتحول س ما بين $- ٥$ ، $+ ٥$ ثم لنرسم الجدول الآتي الذي يعطينا قيم التابع ع عند ما تتحول س من $- ٥$ ، $+ ٥$:

س	$- ٥$	$- ٤$	$- ٣$	$- ٢$	$- ١$	٠	١	٢	٣	٤	٥
ع	$- ١,٧٧$	$- ٢,٢٣$	$- ٣$	$- ٤,٤$	$- ٧$	$- ٦$	١	٢	١,٨	١,٥٣	١,٣١

فبواسطة هذا الجدول يمكن رسم الخط التمثيلي او البياني لتحول هذا التابع ، والجدول السابق يعطينا احداثيات ١١ نقطة يمكن تعيينها على المستوي بواسطة محوري

الاحداثيات ، وبعد تعيين هذه النقط نصل ما بينها بخط منحن (شكل ٢٤) يدلنا على تحول هذا التابع بصورة تقريبية عند ما تتحول س من — ٥ الى + ٥ .



(شكل ٢٤)

٢٨٩ – المنحني البياني

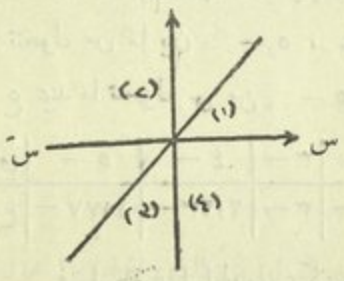
الدال على تحول التابع :

نرى مما تقدم ان العملية التي اجريناها على المنحني المذكور في المثال السابق يمكن ان تطبق على كثير من المنحنيات وذلك باعطائنا قيماً متقاربة الى س ، ثم بحساب القيم التي تقابلها الى ع . فهكذا يمكننا تعيين عدة نقط على المستوي ثم وصل هذه النقط بخط متصل فنجد بصورة تقريبية المنحني الذي يدل على تحول هذا التابع ولندرس الان المنحني الدال على تحول التابع ع = ب س + حـ

٢٩٠ – كيفية رسم الخط البياني الدال على تحول التابع ع = س :

نلاحظ ان كل نقطة فاصلتها تساوي ترتيبها هي نقطة متساوية البعد عن المحورين سَ س ، عَ ع اذن هي واقعة على احد منصفي الزاويتين الحاصلتين بين المحورين المتعامدين .

ولكن النقط التي فاصلتها تساوي ترتيبها بالقيمة المطلقة والاشارة لا يمكن الا ان تقع في الربع الاول او الثالث فالمنصف الذي ينصف هذين الربعين هو الذي يكون الخط البياني للتابع ع = س (شكل ٢٥) .



(شكل ٢٥)

الخلاصة :

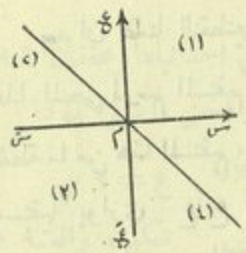
١ً) كل نقطة احداثياها يحققان العلاقة: ع = س (اي عينها تساوي سينها) واقعة على المستقيم المنصف للربع الاول والثالث .

٢ً) وبالعكس كل نقطة واقعة على هذا المستقيم المنصف يكون احداثياها محققين للعلاقة

ع = س لان احداثيي كل نقطة من هذه النقط متساويان بالقيمة المطلقة ومتحدان بالاشارة ، اذن المنحني الدال على تحول التابع ع = س هو منصف الزاويتين [الربعين] (١) ، (٣) .

٢٩١- كيفية رسم الخط البياني الدال على تحول التابع ع = — س :

هنا ايضاً الفاصلة تساوي الترتيب بالقيمة المطلقة في جميع نقط المنحني ، اذن تكون هذه النقط واقعة على احد منصفي زوايا المحورين (شكل ٢٦) . ولكن بما انه يجب ان يكون الاحداثيان مختلفين بالاشارة ، اذن لابد وان تكون هذه النقط واقعة في الربعين (٢) ، (٤) وتكون على منصف زاويتي الربع الثاني والرابع . ومن ذلك نرى :



(شكل ٢٦)

١ً) ان كل نقطة من المستوي احداثياها يحققان العلاقة ع = — س تكون واقعة على هذا المستقيم المنصف .

٢ً) كل نقطة من هذا المنصف احداثياها متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالاشارة ، اي يحققان العلاقة ع = — س ومن ذلك نستنتج ان المنحني للتابع ع = — س هو المستقيم المنصف للزاويتين (٢) ، (٤) .

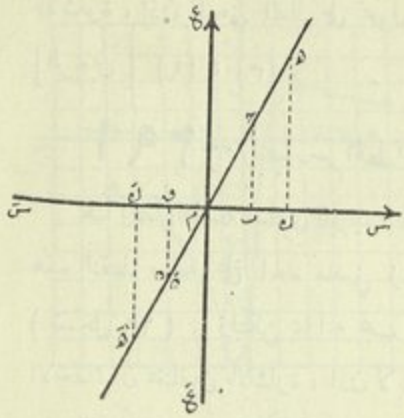
تنبيه : من ما سبق نستنتج ان الخط البياني للتابع ع = ا (س) هو المحل الهندسي لجميع النقط التي احداثياتها تحقق العلاقة ع = ا (س) فمثلاً الخط البياني للتابع ع = س هو المحل الهندسي لجميع النقط التي عينها تساوي سينها .

٢٩٢- كيفية رسم الخط البياني الدال على تحولات التابع :

ع = ٢ س

نلاحظ اولاً ان المنحني الدال على تغيرات هذا التابع واقع في الربعين (١) ، (٣) لان العلاقة ع = ٢ س تدلنا على ان سين وعين كل نقطة من هذا المنحني هما من اشارة واحدة (موجبتان او سالبتان) .

وعندما يكون س = ٠ نرى ان ع = ٠ اذن المنحني يمر من المبدأ م (شكل ٢٧) .



(شكل ٢٧)

وعندما يكون س = ١ نرى ان ع = ٢ فالمنحني يمر اذن من نقطة حـ التي سينها $\overline{م ب} = ١$ والتي عينها $\overline{ب حـ} = ٢$

بعد ان علمنا النقطتين م ، حـ من هذا المنحني لنرسم المستقيم م حـ ولتكن هـ نقطة ما من هذا المستقيم ، ولنرسم من هـ مستقيماً يوازي عَ ع فيقطع المحور سَ س في نقطة ك ونحصل على المثلثين م ب حـ ، م ك هـ المتشابهين ويكون :

$$\frac{\overline{ك هـ}}{\overline{م ك}} = \frac{\overline{ب حـ}}{\overline{م ب}} = \frac{٢}{١}$$

لانه فرضاً : $\overline{ب حـ} = ٢ \overline{م ب}$

اذن : $\overline{ك هـ} = ٢ \overline{م ك}$

اي ان ترتيب النقطة هـ هو ضعف فاصلتها م ك اذن النقطة هـ هي نقطة من الخط البياني اذ ان احداثياتها تحقق العلاقة ع = ٢ س

وبما ان نقطة هـ هي نقطة ما من المستقيم م حـ يمكننا اذن ان نحكم على ان الخط البياني للتابع ع = ٢ س هو المستقيم م حـ فيما اذا تمكنا من البرهان على العكس اي ان كل نقطة تحقق العلاقة ع = ٢ س هي واقعة على م حـ لا محالة .

٢٩٣ — العكس : لنعط الى س قيمة ما ولتكن ق النقطة المقابلة لهذه القيمة من المحور سَ س ولتكن ن نقطة مجهولة واقعة على العمود المقام من ق على سَ س وبحيث يكون :

الفرض : $\overline{ق ن} = ٢ \overline{م ق}$ (١)

ولنبرهن على ان : (المطلوب :) النقطة ب واقعة على المستقيم م حـ .

لذلك لنرسم من نقطة ق مستقيماً يوازي عَ ع فيقطع م حـ في نقطة بَ وحسب ما تقدم (النظرية الاساسية) يكون :

$$\overline{ق بَ} = ٢ \overline{م ق} \qquad (٢)$$

الا انه فرضاً $\overline{ق ب} = ٢ \overline{م ق}$ (١)

اذن : $\overline{ق بَ} = \overline{ق ب}$

اي ان النقطتين بَ ، ب منطبقتان ونقطة ب التي احداثياها يحققان العلاقة ع = ٢ س واقعة على المستقيم م حـ وهو المطلوب . ونلخص ما سبق بقولنا :

١) احداثيات كل نقطة واقعة على م حـ تحقق العلاقة ع = ٢ س

٢) كل نقطة احداثياها يحققان العلاقة ع = ٢ س تكون واقعة على م حـ .

اذن المنحني الدال على تحولات التابع ع = ٢ س هو المستقيم م حـ .

٣٩٦ – كيفية ايجاد الخط البياني للتابع : ع = ب س

لنستعمل نفس الطريقة التي استعملناها في المثال السابق ولنلاحظ انه اذا كانت ب موجبة فالمنحني المطلوب رسمه يكون واقعاً في الربعين (١) ، (٣) .

واذا كانت ب سالبة يكون المنحني واقعاً في الربعين (٢) ، (٤) .

اذ في الحالة الاولى الاحداثيان س ، ع متساويان بالاشارة ، وفي الحالة الثانية مختلفان بالاشارة . ثم لنفرض ان س = ٠ فيكون ع = ٠ مما يدلنا على ان المنحني يمر من المبدأ م .

وعند ما يكون س = ١ نجد ان ع = ب اذن المنحني يمر من النقطة حَ التي احداثياها :

$$\overline{م ب} = ١ \qquad \overline{ب حـ} = ب$$

ولنفرض مثلا ان ب موجبة كما في (الشكل ٢٧) .

ثم لنرسم المستقيم م حـ ولتكن هـ نقطة ما منه فيكون دائماً كما في المثال السابق:

$$\frac{\overline{ك\,هـ}}{\overline{م\,ك}} = \frac{\overline{ب\,حـ}}{\overline{م\,ب}} = \frac{ب}{١} \qquad (١)$$

وذلك من المثلثين المتشابهين م ب حـ ، م ك هـ ومن العلاقة (١) نستنتج ان :

$$\overline{ك\,هـ} = ب \cdot \overline{م\,ك}$$

اي ان احداثيي النقطة هـ يحققان العلاقة ع = ب س وبما ان النقطة هـ هي نقطة ما من المستقيم م حـ لذلك يمكننا ان نحكم على ان الخط البياني للتابع ع = ب س هوالمستقيم م حـ فيما اذا تمكنا من ان نبرهن على العكس :

اي كل نقطة احداثياها يحققان العلاقة ع = ب س هي واقعة على المستقيم م حـ لا محالة .

٢٩٥- العكس : لنعط الى س قيمة ما ولتكن ق النقطة المقابلة لهذه القيمة من المحور سَ س ولتكن ﻫ نقطة ما على العمود المقام من ق على سَ س وعينها :

الفرض : $\overline{ق\,ﻫ} = ب \cdot \overline{م\,ق}$ (٢)

ولنبرهن على ان : (المطلوب) النقطة ﻫ واقعة على المستقيم م حـ .

لذلك لنرسم من نقطة ق موازياً الى عَ ع فيقطع م حـ في نقطة ﻫَ وحسب ما تقدم (النظرية الاساسية) يكون :

$$\overline{ق\,ﻫَ} = ب \cdot \overline{م\,ق} \qquad (٣)$$

فمن العلاقتين (٢) ، (٣) نستنتج ان :

$$\overline{ق\,ﻫ} = \overline{ق\,ﻫَ}$$

اي ان النقطتين ﻫ ، ﻫَ منطبقتان والنقطة ﻫ واقعة على م حـ وهو المطلوب .

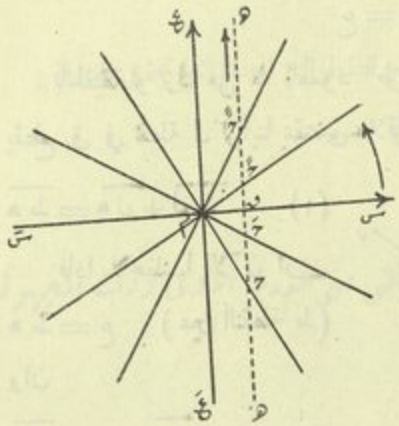
الخلاصة :

١ً) احداثيات كل نقطة من المستقيم م حـ تحقق العلاقة ع = ب س

٢ً) وكل نقطة احداثياها يحققان العلاقة ع = ب س تكون واقعة على م حـ لا محالة . ونلخص كل ما سبق بالنظرية الآتية :

نظرية : الخط البياني للتابع ع = ب س هو مستقيم يمر من المبدأ م ومن نقطة ثانية سينها + ١ وعينها ب .

٢٩٦- الامثال الزاوي او الميل : في التابع ع = ب . س اذا تحولت ب فان النقطة حـ التي سينها س = ١ وعينها ع = ب (اي التي تحقق العلاقة ع = ب س) تتنقل على المستقيم هَ هـ الموازي الى المحور عَ ع والمرسوم من النقطة ق التي فاصلتها = + ١



(شكل ٢٨)

وفي الحالة الخاصة عندما تتزايد ب فان النقطة حـ تتنقل على هذا المستقيم بالاتجاه الموجب هَ هـ وتأخذ الاوضاع حـ ، حَ حً مثلاً (شكل ٢٨) وبنفس الوقت المستقيم م حـ الذي يدل على تحول التابع ع = ب س يدور حول المركز م بنفس الاتجاه ويأخذ الاوضاع م حـ ، م حَ ، م حً وكذلك الزاوية الموجهة الحاصلة بين نصفي المستقيمين م س ، م حـ تتحول فتتزايد الى ان تتقرب من + ٩٠° وبما ان معرفة العدد ب تعين هذه الزاوية تماماً لذلك نسمي العدد ب **الامثال الزاوي** للمستقيم ع = ب س او **ميل** المستقيم ع = ب . س

٢٩٧- كيفية رسم الخط البياني الدال على تحولات التابع :

ع = ب س + حـ

لرسم الخط البياني للتابع ع = ب س + حـ نستند على النظريه الآتية :

نظرية : الخط البياني للتابع ع = ب س + حـ هومستقيم يوازي المستقيم ع = ب . س ويمر من النقطة التي سينها صفر (اي واقعة على محور العينات) وعينها حـ (اي تبعد عن م بالمقدار الجبري حـ) .

البرهان : لنرسم الخط البياني للتابع ع = ب س وليكن المستقيم ق ثم لنعين النقطة د التي سينها تساوي الصفر وعينها تساوي حـ :

$$\text{د} \begin{cases} \text{س} = 0 \\ \text{ع} = \text{حـ} \end{cases}$$

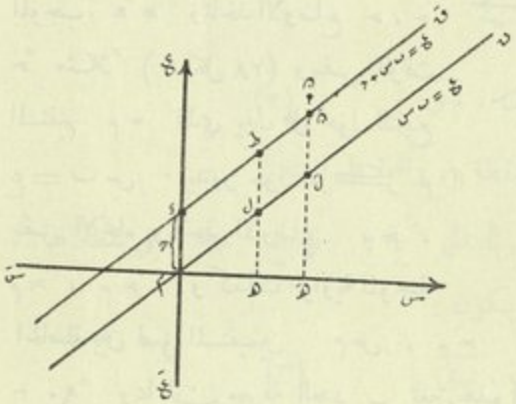
ولنرسم من د المستقيم قَ موازياً الى ق ولنبرهن :

١ً) على ان كل نقطة مثل ط من المستقيم قَ هي نقطة تحقق العلاقة :

ع = ب س + حـ

بالحقيقة لو نزلنا من ط العمود ط هـ على محور السينات وفرضنا ان هذا العمود يقطع ق في نقطة ل لرأينا بمقتضى علاقة شال ان :

$$\overline{\text{هـ ط}} = \overline{\text{هـ ل}} + \overline{\text{ل ط}} \qquad (١)$$



(شكل ٢٩)

فاذا لاحظنا الآن ان

هـ ط = ع (عين النقطة ط)

وان

$\overline{\text{هـ ل}} = \text{ب} . \overline{\text{م هـ}} = \text{ب} . \text{س}$

لان ل واقعة على ق ، ولاحظنا ان $\overline{\text{ل ط}} = \overline{\text{م د}} = \text{حـ}$ من متوازي الاضلاع م د ط ل

لرأينا ان العلاقة (١) اصبحت

ع = ب . س + حـ وهو المطلوب الاول .

٢ً) لنبرهن بالعكس على ان كل نقطة عينها وسينها تحقق العلاقة :

ع = ب س + حـ

لابد وان تكون واقعة على المستقيم قَ . لذلك لنفرض ان النقطة ب هي نقطة عينها = ب × سينها + حـ اي ان النقطة ب تحقق العلاقة :

$$\overline{هَ ب} = ب \times \overline{م هَ} + حـ \qquad (٢)$$

ولنبرهن على ان ب واقعة على المستقيم قَ (شكل ٢٩) .

فحقيقة اما ان تكون ب واقعة على قَ او ان العمود النازل من ب على سَ س يقطع المستقيم قَ في بَ ولنبرهن ان بَ منطبقة على ب فنقول :

بما ان بَ واقعة فرضاً على قَ فبمقتضى القسم الاول من هذه النظرية يكون :

$$\overline{هَ بَ} = ب \cdot \overline{م هَ} + حـ \qquad (٣)$$

ولو قارنا ما بين العلاقة (٢) وبين العلاقة (٣) نستنتج ان :

$$\overline{هَ ب} = \overline{هَ بَ}$$

اي بَ منطبقة على ب وهو المطلوب .

اذن المستقيم قَ هو المحل الهندسي لجميع النقط التي احداثياتها تحقق العلاقة :

$$ع = ب س + حـ$$

اي هو الخط البياني لهذا التابع .

٢٩٨ – الحل البياني للمعادلة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد :

ليكن المطلوب حل المعادلة :

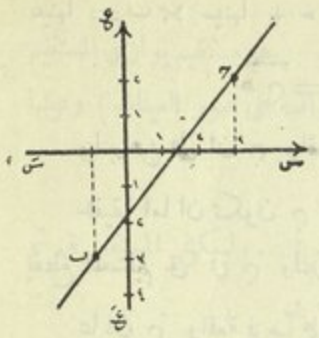
$$\frac{٥}{٤}(س + ١) - ٣ = ٠$$

فلحلها بصورة بيانية ، نرسم الخط البياني الدالة على تحولات التابع :

$$ع = \frac{٥}{٤}(س + ١) - ٣$$

ثم نفتش عن فاصلة نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات ، ففاصلة هذه النقطة التي ترتيبها صفر هي جذر هذه المعادلة .

ولرسم هذا الخط البياني السابق يكفي ان نعين نقطتين منه (شكل ٣٠) مثل



(شكل ٣٠)

نقطة ب (س = − ١ ع = − ٣) ثم

نقطة حـ (س = ٣ ع = ٢) وان نصل

المستقيم ب حـ فهذا المستقيم يقطع المحور س َس في نقطة مثل د فاذا قسنا الفاصلة م د نجد ان :

$$\overline{م د} = ١,٤$$

ويكون حل المعادلة هو :

$$س = ١,٤$$

وذلك بفرض الرسم متقناً تماماً والا فاننا لانحصل الا على قيمة تقريبية لهذا الجذر .

البحث الثامن

الحل البياني للمعادلتين اللتين من الدرجة الاولى وذات المجهولين

حل المتراجحات التي من الدرجة الاولى

الفصل الأول

الحل البياني للمعادلة التي من الدرجة الاولى
وذات المجهولين

٢٩٩ – معادلة المستقيم : لتكن المعادلة :

$$ب\ س + حـ\ ع + د = ٠ \qquad (١)$$

فاذا كانت حـ غير الصفر يمكن حل هذه المعادلة بالنسبة الى ع وكتابة :

$$حـ\ ع = - ب\ س - د$$

ومنها :

$$ع = -\frac{ب}{حـ}\ س - \frac{د}{حـ} \qquad (٢)$$

اذن المعادلة (١) تعين لنا ع كتابع الى س وهذا التابع (٢) يدل على تحوله مستقيم ما مثل ق .

وقد برهنا في البحث السابق ان كل نقطة من هذا المستقيم ق لها احداثيان يحققان المعادلة (٢) وبالعكس كل نقطة لها احداثيان يحققان المعادلة (٢) تكون واقعة على هذا المستقيم المذكور .

ولكن كلما كانت المعادلة (٢) محققة تكون المعادلة (١) محققة ايضاً ، لان هاتين المعادلتين متكافئتان ، فكل حل للثانية هو حل للاولى وبالعكس ، ومن ذلك نستنتج ان:

١) كل نقطة احداثياها يحققان المعادلة (١) هي نقطة واقعة على المستقيم ق .

وبالعكس :

٢) كل نقطة من نقط المستقيم ق لها احداثيان يحققان المعادلة (١) ولذلك نقول: ان المعادلة (١) هي معادلة مستقيم ق ونستنتج النظرية الآتية :

نظرية: المحل الهندسي لجميع النقط التي احداثياتها تحقق المعادلة :

$$ب س + حـ ع + د = ٠$$

هو خط مستقيم وهذه معادلة تسمى **معادلة هذا المستقيم.**

٣٠٠ - حالات خاصة :

الحالة الاولى : $حـ = ٠$ فالمعادلة :

$$ب س + حـ ع + د = ٠$$

تصبح :

$$ب س + د = ٠ \qquad (٣)$$

فاذا فرضنا ان ب في هذه المعادلة (٣) غير الصفر نجد :

$$س = -\frac{د}{ب}$$

واذا لاحظنا ان جميع النقط التي فواصلها تساوي $-\frac{د}{ب}$ هي واقعة على المستقيم ق الذي يوازي محور العينات والمرسوم من النقطة ط الواقعة على محور السينات والتي فاصلتها $\overline{م ط}$ تساوي $-\frac{د}{ب}$ ، وان العكس صحيح : اي ان كل نقطة من هذا المستقيم هي نقطة فاصلتها $-\frac{د}{ب}$ ؛ نستنتج ان المعادلة (٣) هي معادلة المستقيم الموازي لمحور العينات والذي يقطع محور السينات في نقطة ط التي فاصلتها $-\frac{د}{ب}$

الحالة الثانية : ب = ٠ فالمعادلة :

ب س + حـ ع + د = ٠

تصبح : حـ ع + د = ٠ (٤)

ومنها بفرض حـ غير الصفر نجد ان : ع = $-\frac{د}{حـ}$

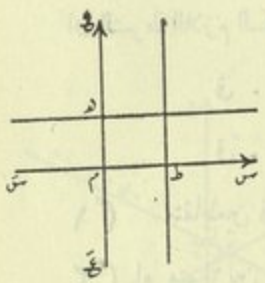
فبنفس المحاكمات السابقة نستنتج ان المعادلة (٤) هي معادلة مستقيم يوازي محور السينات ويقطع محور العينات في نقطة هـ التي عينها :

$\overline{م هـ} = -\frac{د}{حـ}$

اذن في جميع الاحوال المعادلة :

ب س + حـ ع + د = ٠

تدل على مستقيم يمكن رسمه اذا علم نقطتان منه (شكل ٣١) .



(شكل ٣١)

٣٠١ — الحل البياني لمجموعة المعادلتين :

ب س + حـ ع + د = ٠ (١)

بَ س + حـَ ع + دَ = ٠ (٢)

حل هذه المجموعة هو ايجاد قيمتي س ، ع اللتين تحققان في وقت واحد هاتين المعادلتين ، فاذا استعملنا التمثيل البياني نرى ان المعادلة (١) تمثل مستقيما مثل ق ، احداثيات كل نقطة منه ، تحقق هذه المعادلة (١) .

وكذلك نرى ان المعادلة (٢) تدلنا على مستقيم مثل قَ ، احداثيات كل نقطة منه ، تحقق هذه المعادلة (٢) .

فاذا كان المستقيمان ق ، قَ متقاطعين في نقطة واحدة مثل ب فان احداثيات النقطة ب تحقق المعادلة (١) لوجودها على المستقيم ق كما تحقق المعادلة (٢) لوجودها على المستقيم قَ اي ان احداثيات نقطة التقاطع ب هي حل مجموعة المعادلتين (١) و (٢) ، اذن حل المجموعة المذكورة يتعين بواسطة احداثيات النقطة التي تكون على

المستقيم ق والمستقيم قَ بآن واحد ، اي محل تقاطعها . وبالعكس احداثيات النقط المشتركة بين المستقيم ق والمستقيم قَ تحقق المعادلتين (١) و (٢) بآن واحد ومما سبق نستنتج :

نظرية: لحل مجموعة معادلتين ذات مجهولين ومن الدرجة الاولى بصورة بيانية يكفي ان نجد احداثيات نقطة تقاطع المستقيمين المعينين بمعادلتي هذه المجموعة .

نتيجة : استناداً على حل ومناقشة مجموعة المعادلتين اللتين من الدرجة الاولى وذاتي المجهولين (بند ٢٣٤) يمكننا ان نقول :

ان الشرط اللازم الكافي ليكون المستقيمان :

$$ق \ldots\ldots ب س + حـ ع + د = ٠$$

$$قَ \ldots\ldots بَ س + حَـ ع + دَ = ٠$$

١ً) متقاطعين في نقطة واحدة .

٢ً) او متوازيين .

٣ً) او منطبقين على بعضها هو ان يكون :

١ً) $\frac{ب}{بَ} \neq \frac{حـ}{حَـ}$ اي : $(ب حَـ - بَ حـ \neq ٠)$

٢ً) $\frac{ب}{بَ} = \frac{حـ}{حَـ} \neq \frac{د}{دَ}$ او $\left(-\frac{ب}{حـ} = -\frac{بَ}{حَـ}\right)$

اي الامثال الزاوي للاول يساوي الامثال الزاوي للثاني .

٣ً) $\frac{ب}{بَ} = \frac{حـ}{حَـ} = \frac{د}{دَ}$ (اي المعادلتان هما معادلة واحدة) يوجد عدم تعيين ، اى حلول عديدة ، اي نقط مشتركة عديدة .

٣٠٢ — مثال : المطلوب حل المجموعة الآتية بصورة بيانية :

$$٢ع - س - ٣ = ٠ \qquad (١)$$

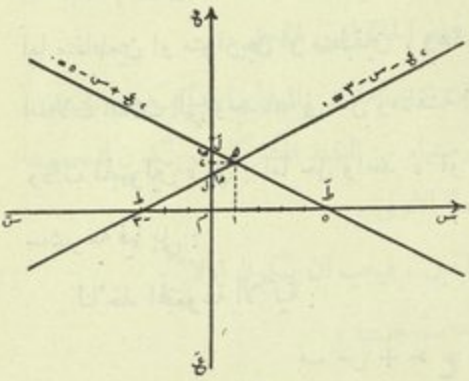
$$٢ع + س - ٥ = ٠ \qquad (٢)$$

الحل : لنكتب المعادلة (١) بالصورة الآتية :

$$ع = \frac{١}{٢}س + \frac{٣}{٢} \qquad (٣)$$

ثم لنرسم الخط المستقيم الدال على تغيرات هذا التابع ، فعندما س = ٠ يكون ع = ١,٥ فنحصل على النقطة ل $\begin{cases} س = ٠ \\ ع = ١,٥ \end{cases}$ وعندما ع = ٠ يكون س = -٣ ونحصل على النقطة ط $\begin{cases} س = -٣ \\ ع = ٠ \end{cases}$

اذن المعادلة (١) تدل على المستقيم ط ل (شكل ٣٢) .



(شكل ٣٢)

وكذلك المعادلة (٢) تكتب :

$$ع = ٢,٥ - ٠,٥ س \qquad (٤)$$

لنرسم المستقيم الدال على تغيرات هذا التابع ، فعندما س = ٠ يكون ع = ٢,٥ ونجد نقطة ل' $\begin{cases} س = ٠ \\ ع = ٢,٥ \end{cases}$

وعندما ع = ٠ يكون س = ٥ فنحصل على النقطة ط' $\begin{cases} س = ٥ \\ ع = ٠ \end{cases}$

فالمعادلة (٢) تدل اذن على المستقيم ط' ل' وهذان المستقيمان يتقاطعان في نقطة هـ التي احداثياها س = ١ ، ع = ٢ فهذان الاحداثيان هما حل مجموعة المعادلتين (١) ، (٢) وهو المطلوب .

٣٠٣- ملاحظة : اذا فرضنا ان $ح \neq ٠$. فان معادلة المستقيم :

$$ب س + ح ع + د = ٠$$

يمكن ان تكتب بالصورة التالية :

$$ع = -\frac{ب}{حـ} س - \frac{د}{حـ}$$

ونرى من هذا الشكل ان الامثال الزاوي هو $-\frac{ب}{حـ}$ وان الترتيب عن المبدأ ، اي ترتيب نقطة تقاطع المستقيم مع محور العينات هو $-\frac{د}{حـ}$

٣٠٦ - مناقشة : نرى مما تقدم ان ايجاد حل مجموعة المعادلتين التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين ؛ وايجاد نقط تقاطع المستقيمين لهاتين المعادلتين مرتبطان بعضهما تمام الارتباط ، وان الثاني منهما ليس الا المعنى الهندسي للاول ، فالمستقيمان يكونان اما متقاطعين او متوازيين او منطبقين ، وهذه الحالات الثلاث يجب ان تنطبق مع الحالات الثلاث التي وجدناها في حل ومناقشة مجموعة المعادلتين التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين ، اي : اما حل واحد ، او عدم امكان ، او عدم تعيين . وهذا ما سنشرحه فيما يلي :

لنأخذ المجموعة الآتية :

$$ب س + حـ ع - د = ٠$$

$$ب' س + حـ' ع - د' = ٠$$

فاذا فرضنا ان حـ ، حـ' غير الصفر يمكننا ان نكتب هاتين المعادلتين بالصورة الآتية :

$$ع = -\frac{ب}{حـ} س + \frac{د}{حـ}$$

$$ع = -\frac{ب'}{حـ'} س + \frac{د'}{حـ'}$$

فالمستقيمان لهاتين المعادلتين يتقاطعان في نقطة واحدة فيما اذا كان الامثال الزاوي للاول لا يساوي الامثال الزاوي للثاني وهذا الشرط هو لازم وكاف .

اذن المجموعة السابقة يكون لها حل وحيد فيما اذا كان :

$$-\frac{ب}{ح} - \neq -\frac{ب}{ح}$$

او $\quad -ب ح \neq -ب ح$

او $\quad ب ح - ب ح \neq .$

وهذا ما وجدناه سابقاً عند ما يكون للمجموعة حل وحيد .

وهذان المستقيمان يكونان متوازيين فيما اذا كان الامثال الزاوي للاول يساوي الامثال الزاوي للثاني ، اعني فيما اذا كان $ب ح - ب ح = .$

فاذا كان بنفس الوقت ؟

١ً) ترتيباهما عن المبدأ مختلفين يكون المستقيمان مختلفين ولا يكون لهما نقطة مشتركة ، اي ان المجموعة في هذه الحالة ليس لها حل .

٢ً) وبالعكس اذا كان بنفس الوقت ترتيباهما عن المبدأ واحداً يكون المستقيمان منطبقين ويكون لهما عدد غيرمنتهاه من النقط المشتركة ، ويكون للمجموعة حلول عديدة جميعها حل للمعادلة الاولى .

ولنر الآن متى يكون المستقيمان منطبقين ، فيجب ان يكون اولاً :

$$ب ح - ب ح = .$$

او $\quad \frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح} \qquad (١)$

ويجب ان يكون ايضاً الترتيبان عن المبدأ متساويين ، اي :

$$\frac{د}{ح} = \frac{د}{ح} \quad \text{ومنها :} \quad \frac{ح}{ح} = \frac{د}{د} \qquad (٢)$$

ومن العلاقتين (١) ، (٢) نرى ان المجموعة تكون غير معينة فيما اذا كان :

$$\frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح} = \frac{د}{د}$$

واما اذا كان : $\frac{ب}{ب} = \frac{ح}{ح}$ وبنفس الوقت

$$\left[\frac{د}{ه} \neq \frac{د'}{ه'} \quad \text{ومنها :} \quad \frac{د}{د'} \neq \frac{ه}{ه'} \right]$$

اي اذا كان :

$$\frac{ب}{ب'} = \frac{ح}{ه'} \neq \frac{د}{د'}$$

يكون المستقيمان متوازيين .

وهذا ينطبق تماماً مع ما وجدناه سابقاً (بند ٢٣٤) .

البحث التاسع

الحل البياني للمتراجحات التي من الدرجة الاولى

الفصل الأول

حل المتراجحة التي من الدرجة الاولى

وذات المجهول الواحد

بصورة بيانية

٣٠٥- حل المتراجحة الواحدة: تعلمنا فيما سبق كيفية حل المتراجحة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد، وسنعيد كيفية هذا الحل بصورة هندسية بيانية:

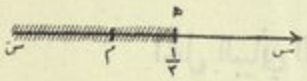
مثال: لتكن المتراجحة: $٣س - ٢ > ٠$ فاذا اخذنا امثال الـ س خارج قوس تصبح:

$$٣\left(س - \frac{٢}{٣}\right) > ٠$$

وبما ان امثال الـ س في هذا المثال موجب + ٣ اذن تكون المتراجحة المعطاة محققة اذا كان:

$$س - \frac{٢}{٣} > ٠ \quad \text{او} \quad س > \frac{٢}{٣}$$

لنلاحظ الآن ان العدد $\frac{٢}{٣}$ هو جذر المعادلة $٣س - ٢ = ٠$ ولنرسم المحور $س'س$ الذي يمثل جميع قيم المتحول س من $-\infty$ الى $+\infty$ فاذا عينا عليه النقطة هـ التي سينها $= \frac{٢}{٣}$ (شكل ٣٣)



(شكل ٣٣)

نجد ان القسم $هـ س'$ يمثل قيم س التي اصغر من $\frac{٢}{٣}$ فهو غير مطلوب نحذفه ، واما القسم $هـ س$ فهو يمثل قيم س التي اكبر من $\frac{٢}{٣}$ اي نقطة تحقق العلاقة $س > \frac{٢}{٣}$ لذلك نبقيه ونقول ان القسم $هـ س$ يمثل حلول المتراجحة المعطاة .

وبصورة اعم : لتكن المتراجحة :

$$ب س - حـ > ٠ \qquad (١)$$

ولنفرض ان $ب \neq ٠$ فهذه المتراجحة تكتب :

$$ب \left(س - \frac{حـ}{ب} \right) > ٠$$

ومن ذلك نستنتج ان الفرق $س - \frac{حـ}{ب}$ يجب ان تكون اشارته كاشارة ب فاذا كانت ب موجبة يجب ان يكون :

$$س > \frac{حـ}{ب}$$

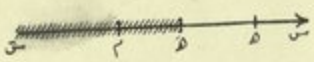
وان كانت ب سالبة يجب ان يكون :

$$س < \frac{حـ}{ب}$$

فاذا لاحظنا الآن ان العدد $\frac{حـ}{ب}$ هو جذر المعادلة $ب س - حـ = ٠$ وفرضنا

مثلا ان ب موجبة فانا ندل على النتيجة $س > \frac{حـ}{ب}$ بالصورة التالية :

نرسم المحور سَ س ونعتبر نقطة م مبدأ عليه (شكل ٣٤) ولتكن هَ نقطة فاصلتها $\frac{حـ}{ب}$ فالنقطة هـ التي فاصلتها س يجب ان تكون



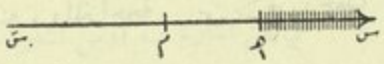
(شكل ٣٤)

واقعة على يمين نقطة هَ لذلك نحذف القسم هَ سَ الذي يدل على قيم س التي اصغر من $\frac{حـ}{ب}$ $\left(س < \frac{حـ}{ب}\right)$ فيبقى القسم هَ س الذي يدلنا على انه يجب ان تكون س اعظم من م هَ المساوية الى $\frac{حـ}{ب}$.

ولو اعتبرنا الآن ب سالبة لكان (الشكل ٣٥) يدلنا على انه يجب ان تكون

$س < \frac{حـ}{ب}$

اي س اصغر من م هـ١



(شكل ٣٥)

٣٠٦ — حل عدة متراجحات مجتمعة : ان الطريقة البيانية السابقة تستعمل على الاكثر عند ما يكون لدينا عدة متراجحات مجتمعة يجب ان تتحقق في وقت واحد ؛ لذلك نجري المحاكمات السابقة لكل منها مستعملين نفس المحور فنرى ان النتيجة تظهر حالاً للعيان ، والمثال الآتي يوضح لنا ذلك .

٣٠٧ — مثال : ١) المطلوب حل مجموعة المتراجحات المجتمعة الآتية :

$$\left.\begin{array}{l} س + ١ > ٠ \\ ٢ س - ١ < ٠ \\ ٢ س - ٩ > ٠ \\ س - ١ > ٠ \end{array}\right\}$$

الحل : ان هذه المتراجحات تكتب كما يلي:

$$س > -١$$

$$س > \frac{١}{٢}$$

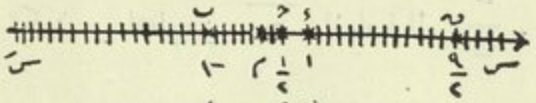
$$س > \frac{٩}{٢}$$

$$س > ١$$

وهذه النتائج تظهر جلية في (الشكل ٣٦) .

فالمتراجحة الاولى $س > -١$ تجعلنا نحذف القسم $س'ب$ من المحور ،

واما المتراجحة $س > \frac{١}{٢}$ تجعلنا نحذف القطعة $ب ح$



(شكل ٣٦)

منه ، والمتراجحة $س > \frac{٩}{٢}$ تجعلنا نحذف القطعة $ق س$ ، واما المتراجحة $س > ١$ تجعلنا نحذف القطعة $د ق$ فلا يبقى من المحور الا القطعة $ح د$ التي تدلنا على ان الحل هو :

$$١ > س > \frac{١}{٢}$$

اي قيم س المحصورة ما بين الـ $\frac{١}{٢}$ والواحد تحقق المتراجحات الاربع بآن واحد وهو المطلوب .

٣٠٨ — مثال : ٢) المطلوب حل مجموعة المتراجحات المجتمعة :

$$\left\{\begin{array}{l} س + ٢ > ٠ \\ ٢س + ٧ < ٠ \\ س + ٣ > ٠ \end{array}\right.$$

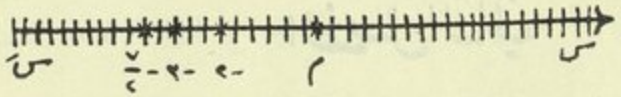
الحل : هذه المتراجحات تكتب :

$$س > -٢$$

$$س > -\frac{٧}{٢}$$

$$س < ٣$$

فاذا رسمنا المحور س َ س ووضعنا عليه النتائج السابقة نجد ان هذه المجموعة غير قابلة للحل اذ لا يبقى من المحور شيء .



(شكل ٣٧)

٣٠٩- ملاحظة : يمكننا ان نتحقق بكل سهولة ان القيمة العددية لذات الحدين ب س + حـ تكون من اشارة ب عند ما نعطي الى س قيمة اكبر من قيمة جذر المعادلة ب س + حـ = ٠ وهي من اشارة مخالفة لاشارة ب عند ما نعطي الى س قيمة اصغر من هذا الجذر . ونلخص ما سبق بقولنا :

القيمة العددية للتركيب ب س + حـ هي من اشارة ب اومن اشارة مخالفة لاشارة ب حسبما نعطي الى س قيمة اكبر او اصغر من جذر المعادلة :

ب س + حـ = ٠ .

مثال : التركيب ٢ س - ٥ يكون موجباً عند ما نعطي الى س قيمة اكبر من $\frac{٥}{٢}$ ويكون سالباً عند ما نعطي الى س قيمة اصغر من $\frac{٥}{٢}$.

كذلك التركيب ٣ - ٤ س يكون سالباً ، اي من اشارة ب (وهي - ٤) عند ما نعطي الى س قيمة اكبر من $\frac{٣}{٤}$ ويكون موجباً عند ما نعطي الى س قيمة اصغر من $\frac{٣}{٤}$.

نتيجة : لحل المتراجحة : ب س + حـ < ٠ يكفي حل المعادلة : ب س + حـ = ٠ والاستفادة من الملاحظة السابقة .

مثال: لحل المتراجحة ٥ − ٣ س > ٠ نحل المعادلة ٥ − ٣ س = ٠

ومنها : س = $\frac{٥}{٣}$ فالمتراجحة تكون محققة عندما س < $\frac{٥}{٣}$.

الفصل الثاني

حل المتراجحات التي من الدرجة الاولى

وذات المجهولين

بصورة بيانية

٣١٠ — تمهيد : اذا كان لدينا معادلة من الدرجة الاولى وذات المجهولين وبدلنا فيها اشارة التساوي باشارة اكبر او اصغر فاننا نحصل على ما نسميه متراجحة من الدرجة الاولى وذات المجهولين . اذن الشكل العام للمتراجحة التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين هو :

ب س + حـ ع + د > ٠

او : ب س + حـ ع + د < ٠

٣١١ — كيفية حل المتراجحات التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين:

المتراجحة التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين (هي كالمعادلة الوحيدة وذات المجهولين) لها حلول عديدة ، والامثلة الآتية توضح لنا ذلك .

مثال : ١) المطلوب حل المتراجحة :

ع − س > ٠

فلو جعلنا س تساوي واحداً لكني ان نأخذ :

ع − ١ > ٠ اي : ع > ١

مما يدلنا على ان القيمتين س = ١ ، ع > ١ تشكل حلاً لهذه المتراجحة ، وبنفس الطريقة لو جعلنا س = $-\frac{١}{٣}$ لرأينا ان القيمتين :

$$س = -\frac{١}{٣} \quad ، \quad ع > -\frac{١}{٣}$$

تشكل حلاً آخر لهذه المتراجحة . وهكذا نرى ان لهذه المتراجحة حلولاً لا نهاية لعددها ، نحصل عليها باعطاء س قيماً اختيارياً وبايجاد قيم ع الموافقة لهذه القيمة الاختيارية .

ولكن لايجاد الحل بصورة تامة نبدل اشارة التراجح باشارة المساواة فنحصل على المعادلة ع − س = ٠ التي تمثل مستقيماً ، فاذا رسمنا هذا المستقيم وليكن ق نجده يقسم مستوى الورقة الى منطقتين نسميها بالمنطقة العلوية والمنطقة السفلية ونرى :

١) ان كل نقطة من هذا المستقيم ق هي نقطة عينها تساوي سينها ، اي تحقق العلاقة : ع − س = ٠

٢) واما كل نقطة مثل ه من المنطقة العلوية هي نقطة عينها اكبر من سينها ، اي احداثياتها تحقق العلاقة :

ع > س او ع − س > ٠

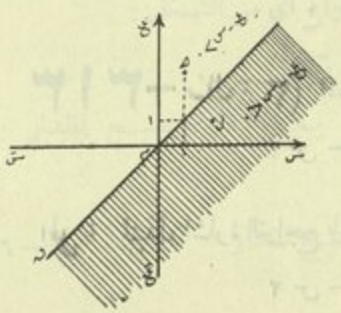
٣) واما كل نقطة مثل ل من المنطقة السفلية فهي نقطة عينها اصغر من سينها ، اي تحقق العلاقة :

ع < س او ع − س < ٠

مما يدلنا على ان المتراجحة المعطاة :

ع − س > ٠

محققة من اجل احداثيات كل نقطة واقعة في المنطقة العلوية ، لذلك في (الشكل ٣٨) ملأنا المنطقة السفلية دلالة على انها غير موافقة ، وابقينا المنطقة العلوية الموافقة .



(شكل ٣٨)

وكثيراً ماتقول اصطلاحاً : المتراجحة ع − س > ٠ محققة من اجل المنطقة العلوية واما المنطقة السفلية فهي تحقق المتراجحة :

ع − س < ٠

٣١٢- مثال : ٢) المطلوب حل المتراجحة :

ع − ٣ س < ٠

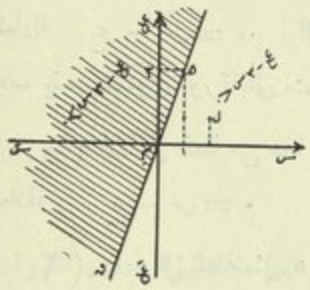
الحل : نبدل اشارة التراجح باشارة مساواة فنحصل على المستقيم :

ع − ٣ س = ٠

فاذا رسمناه وليكن ق (شكل٣٩) نجده يقسم مستوى الورقة الى منطقتين ونرى :

١ً) ان كل نقطة من المنطقة العلوية هي نقطة عينها اكبر من ثلاثة امثال سينها ، اي تحقق العلاقة :

ع > ٣ س او ع − ٣ س > ٠



(شكل ٣٩)

٢ً) واما كل نقطة مثل هـ واقعة على هذا المستقيم ق هي نقطة عينها تساوي ثلاثة امثال سينها ، اي تحقق العلاقة :

ع = ٣ س او ع − ٣ س = ٠

٣ً) واما كل نقطة مثل ل واقعة في المنطقة السفلية هي نقطة عينها اصغر من ثلاثة امثال سينها ، اي تحقق العلاقة :

ع < ٣ س او ع − ٣ س < ٠

اذن في هذا المثال المنطقة السفلية هي الموافقة ، واما العلوية تحقق المتراجحة :

ع − ٣ س > ٠

٣١٣- مثال : ٣) المطلوب حل المتراجحة :

٢ س − ٣ ع − ٦ < ٠

الحل : لنبدل اشارة التراجح باشارة التساوي فنحصل على المستقيم :

٢ س − ٣ ع − ٦ = ٠

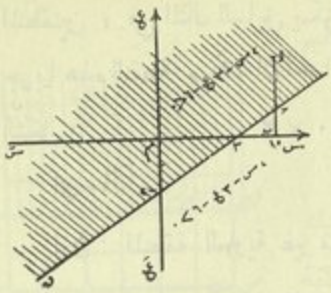
لنرسم هذا المستقيم وليكن ق فكل نقطة من هذا المستقيم تحقق العلاقة :

٢ س − ٣ ع − ٦ = ٠ او ٢ س − ٦ = ٣ ع ٠

وكما في المثالين السابقين فان المستقيم ق يقسم مستوى الورقة الى منطقتين ، منطقة علوية ومنطقة سفلية ، واحداثيات جميع نقط المنطقة العلوية تجعل القيمة العددية للمقدار :

٢ س — ٣ ع — ٦

من اشارة واحدة (موجبة او سالبة) ، واما جميع نقط المنطقة السفلية فهي نقط احداثياتها تجعل القيمة العددية للمقدار :



(شكل ٤٠)

٢ س — ٣ ع — ٦

من اشارة معاكسة للاشارة السابقة الحاصلة بواسطة احداثيات نقط المنطقة العلوية .

ولكي نرى ما سبق يكفي ان نسير على المستقيم ب حـ د الموازي لمحور العينات (شكل ٤٠) والمار من النقطة ب الواقعة على محور السينات والتي سينها تساوي ٤,٥ مثلاً ، فمن اجل احداثيات النقطة ب يأخذ التركيب ٢ س — ٣ ع — ٦ القيمة :

٩ — ٣ × ٠ — ٦ = ٣ الموجبة ، او : ٣ — ٣ × ٠ = ٣

وعند ما نسير بالاتجاه ب حـ فان ٢ س — ٣ ع — ٦ يأخذ الشكل :

٩ — ٣ ع — ٦ = ٣ — ٣ ع

وهكذا كلما زادت ع كبر المطروح وهو [٣ ع] مع ان المطروح منه ثابت = ٣ .

وعند ما تصبح ع واحداً نكون قد وصلنا الى نقطة حـ الواقعة على المستقيم ق واصبح المقدار : ٢ س — ٣ ع — ٦ صفراً ، اي من الشكل :

٢ × ٤,٥ — ٣ × ١ — ٦ = ٠ .

وعند ما نتمم السير فان المطروح ٣ ع يكبر اكثر ويصبح المقدار : ٢ س — ٣ ع — ٦ سالباً .

فلو كانت نقطة د هي نقطة عينها = ٢ لاصبح المقدار ٢ س — ٣ ع — ٦ من الشكل :

٢ × ٤,٥ — ٣ × ٢ — ٦ = ٩ — ٦ — ٦ = ٩ — ١٢ = — ٣

اي سالباً .

اذن لكي نعلم اي المنطقتين توافق يكفي ان نجرب نقطة واحدة من نقط احدى المنطقتين ، في المثال السابق يكفي ان نجرب النقطة م الواقعة في المنطقة العلوية ، فلو جربنا هذه النقطة م نجد ان احداثياتها تجعل المقدار ٢ س - ٣ ع - ٦ من الشكل : ٢ × ٠ - ٣ × ٠ - ٦ = - ٦

اي سالباً .

اذن : المنطقة العلوية غير موافقة تجعل :

٢ س - ٣ ع - ٦ < ٠

واما المنطقة السفلية فهي الموافقة تجعل :

٢ س - ٣ ع - ٦ > ٠

ولذلك في (الشكل ٤٠) ملأنا المنطقة العلوية وابقينا السفلية .

٣١٤- حالات خاصة :

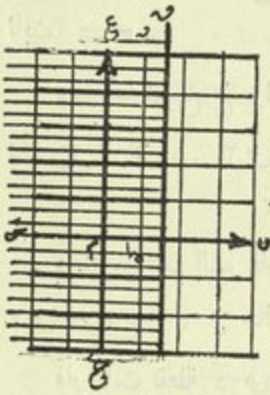
الحالة الاولى : المطلوب حل المتراجحة :

٢ س - ٣ > ٠

الحل : لنبدل كما سبق اشارة التراجح باشارة التساوي ، فنحصل على المستقيم :

٢ س - ٣ = ٠ او س = ١,٥

الموازي لمحور العينات وليكن ق (شكل ٤١) .



(شكل ٤١)

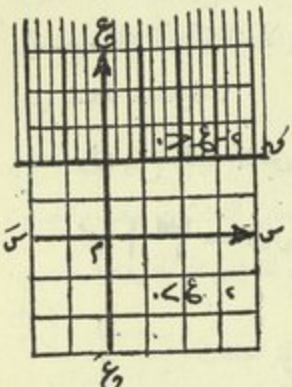
فهذا المستقيم ق يقسم مستوى الورقة الى منطقتين : منطقة يمنى ومنطقة يسرى ، فكل نقطة من المنطقة اليمنى هي نقطة سينها اكبر من ١,٥ اي تحقق العلاقة :

س - ١,٥ > ٠ او ٢ س - ٣ > ٠

مما يدلنا على ان المنطقة اليمنى موافقة مع ان اليسرى غير موافقة ، لذلك ملأناها . وهذا الشكل هو نفس (الشكل ٣٢) مزاداً عليه المحور ع ع والموازي له وهو ق .

الحالة الثانية : المطلوب حل المتراجحة : ٦ - ٣ ع > ٠

قبل الحل نلاحظ ان المتراجحة المعطاة تكافيء المتراجحة ٢ - ع > ٠ واذا بدلنا اشارة التراجح باشارة المساواة نحصل على المستقيم



٢ - ع = ٠

الموازي لمحور السينات وليكن قَ .

فهذا المستقيم قَ (شكل ٤٢) يقسم مستوي الورقة الى منطقتين علوية وسفلية ، كل نقطة من المنطقة السفلية عينها اصغر من ٢ اي تحقق العلاقة :

٢ > ع او ٢ - ع > ٠

اذن المنطقة السفلية هي الموافقة ، واما المنطقة

(شكل ٤٢)

العلوية فكل نقطة منها لها عين اكبر من ٢ اي تحقق العلاقة :

٢ < ع او ٢ - ع < ٠

فهي غير موافقة لذلك ظللناها .

٣١٥ - الخلاصة : اذا كان لدينا المستقيم :

ب س + حـ ع + د = ٠

فهذا المستقيم يقسم مستوي الورقة الى منطقتين ، كل نقطة من المنطقة الواحدة تجعل المقدار ب س + حـ ع + د من اشارة واحدة (موجبة او سالبة) .

وكل نقطة موجودة على هذا المستقيم تجعل المقدار ب س + حـ ع + د مساويا للصفر .

فهذه الخلاصة تدلنا على كيفية حل جميع المتراجحات التي من الدرجة الاولى . ولنذكر مرة ثانية انه لتجريب المناطق نجرب احداثيات نقطة الاصل م وذلك عندما يكون المستقيم ب س + حـ ع + د غير مارٍ من م .

٣١٦ - تطبيقات - كيفية حل مجموعة عدة متراجحات مجتمعة من الدرجة الاولى وذات مجهول او مجهولين :

لحل عدة متراجحات مجتمعة نحل كل متراجحة على حدة بان نظلل المنطقة التي لاتوافق ونبقي المنطقة التي توافق ، فاذا استعملنا شكلاً واحداً وحللنا جميع هذه المتراجحات

المجتمعة ننظر الى الشكل فاذا بقي منطقة غير مظللة تكون المسألة قابلة للحل والمنطقة غير المظللة تمثل جميع الحلول لهذه المتراجحات المجتمعة ، واما اذا رأينا ان جميع المستوي اصبح مظللاً نحكم بانه لا يوجد قيم للمجاهيل تحقق هذه المتراجحات جميعها بآن واحد اي المسألة مستحيلة .

ولنشرح ذلك بالمثالين الاتيين :

٣١٧ – مثال : المطلوب حل مجموعة المتراجحات :

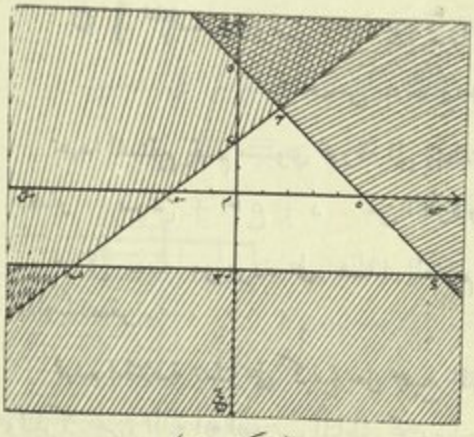
$$ع + ٣ < ٠ \quad (١)$$

$$س + ع - ٥ > ٠ \quad (٢)$$

$$٤س - ٥ع + ١٠ < ٠ \quad (٣)$$

الحل :

١ً) لنرسم المستقيم ذا المعادلة $ع + ٣ = ٠$ فهذا المستقيم هو ب د الموازي لمحور السينات والذي يبعد عنه بمقدار -٣ (شكل٤٣) .



(شكل ٤٣)

والمنطقة الموافقة للمتراجحة الاولى هي المنطقة التي تحوي على المركز م ، لان م تحقق هذه المتراجحة ، لذلك نظلل المنطقة السفلى التي لا تحوي على م .

٢ً) لنرسم المستقيم ذا المعادلة

$س + ع - ٥ = ٠$

الذي يمر من النقطة $(س = ٠ \ ، \ ع = ٥)$ والنقطة $(ع = ٠ \ ، \ س = ٥)$ وليكن د حـ .

فالمنطقة الممنوعة ، اي التي لاتحقق المتراجحة (٢) هي المنطقة التي لا تحوي على المركز م لذلك نظللها .

٣ً) لنرسم المستقيم ذا المعادلة $٤س - ٥ع + ١٠ = ٠$ الذي يمر من

النقطة (س = ٠ ، ع = ٢) ومن النقطة $\left(ع = ٠ \ ، \ س = -\frac{١٠}{٤}\right)$

وهو المستقيم د ب فالمنطقة الممنوعة التي لا تحقق المتراجحة الثالثة هي المنطقة التي لا تحتوى على المبدأ م لذلك نظللها .

واذا نظرنا الان الى الشكل نرى ان المنطقة المحصورة داخل المثلث ب حـ د هي المنطقة الباقية من المستوي . اذن هي التي تحقق المتراجحات الثلاث في وقت واحـد ، فاحداثيات جميع النقط الواقعة داخل هذا المثلث هي حلول للمجموعة المفروضة .

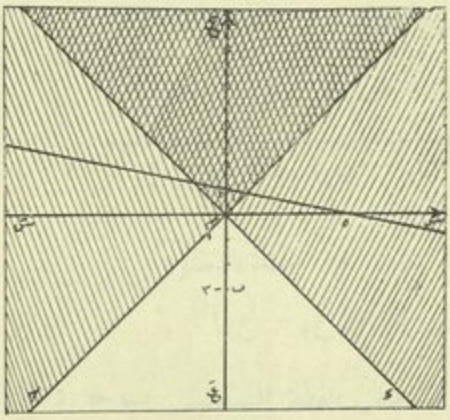
٣١٨- مثال : ٢) المطلوب حل مجموعه المتراجحات :

$$س + ع > ٠ \qquad (١)$$
$$س - ع < ٠ \qquad (٢)$$
$$س + ٥ ع - ٥ > ٠ \qquad (٣)$$

الحل :

١) لنرسم المستقيم ذا المعادلة س + ع = ٠ فهذا المستقيم (شكل ٤٤) هو المنصف م د فلو جربنا النقطة ب (س = ٠ ، ع = - ٣) نرى ان المتراجحة (١) محققة .

اذن المنطقة الممنوعة هي المنطقة العلوية التي تحتوي على الزاوية س م ع لذلك نظللها .



(شكل ٤٤)

٢) لنرسم المستقيم ذا المعادلة

س - ع = ٠

فهذا المستقيم هو المنصف الاول م حـ ونرى ان نفس النقطة تحقق المتراجحة (٢) اذن المنطقة الممنوعة هي المنطقة العلوية التي تحتوي على الزاوية س م ع لذلك نظللها .

٣) لنرسم الخط ذا المعادلة

س + ٥ ع - ٥ = ٠

فانه يمر من النقطة (س = ٠ ، ع = ١) ومن النقطة (ع = ٠ ، س = ٥) ولو جربنا النقطة م نرى ان المنطقة العلوية غير موافقة فنظللها . فبعد هذا اذا نظرنا الى (الشكل ٤٤) نجد ان النقط الواقعة داخل الزاوية القائمة حـ م د هي التي تحقق المتراجحات الثلاث في وقت واحد ، اي ان احداثيات كل نقطة من نقاطها تمثل حلاً لمجموعة المتراجحات المفروضة .

تنبيه : يحسن عند حل المتراجحات المجتمعة ان نحدد المستوي كما في الشكلين ٤٣ ، ٤٤ بمستطيل .

البحث العاشر

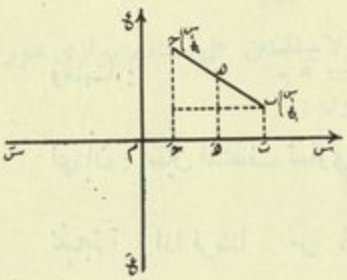
بعض معلومات مهمة تتعلق بالمستقيم

٣١٩- البعد بين نقطتين :

مسألة: المطلوب ايجاد طول القطعة المستقيمة ب حـ الواصلة بين النقطتين :

ب (س١ ، ع١) ، حـ (س٢ ، ع٢)

الحل : لننزل من ب ، حـ الاعمدة ب بَ ، حـ حَ على المحور س سَ ثم لنرسم من ب موازياً لهذا المحور فنحصل على المثلث ب حـ ق (شكل ٤٥) الذي فيه :



$$\overline{ب حـ}^{٢} = \overline{ب ق}^{٢} + \overline{ق حـ}^{٢}$$

ولكن :

$$\overline{ق حـ} = ع٢ - ع١ \quad ، \quad \overline{ب ق} = س٢ - س١$$

(شكل ٤٥)

اذن :

$$\overline{ب حـ}^{٢} = (س٢ - س١)^{٢} + (ع٢ - ع١)^{٢}$$

ومنها :

$$ب حـ = \sqrt{(س٢ - س١)^{٢} + (ع٢ - ع١)^{٢}}$$

نتيجة : المسافة ل ما بين النقطتين ب ، حـ معطاة بالدستور :

$$ل^{٢} = (س٢ - س١)^{٢} + (ع٢ - ع١)^{٢}$$

٣٢٠- احداثيا النقطة هـ منتصف القطعة المستقيمة ب حـ :

١) عين المنتصف : نرى (شكل ٤٥) ان الشكل الرباعي ب بَ حَ حـ

هو شبه منحرف قائم قاعدتة الوسطى هي هَ هـ اذن :

$$\overline{\text{هَ هـ}} = \frac{\overline{\text{بَ بـ}} + \overline{\text{حَ حـ}}}{2} = \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2} = \text{عين النقطة هـ}$$

اي ان عين نقطة المنتصف هـ للقطعة بـ حـ تساوي نصف مجموع العينين للمبدأ بـ والنهاية حـ .

٢ً) سين المنتصف : ثم نرى بنفس الشكل وبمقتضى علاقة شال ان :

$$\text{سين المنتصف} = \overline{\text{م هَ}} = \overline{\text{م حَ}} + \overline{\text{حَ هَ}} = \overline{\text{م حَ}} + \frac{\overline{\text{حَ بَ}}}{2}$$

وبما ان : $\overline{\text{حَ بَ}} = \overline{\text{م بَ}} - \overline{\text{م حَ}}$

فيكون : $\overline{\text{م هَ}} = \overline{\text{م حَ}} + \frac{\overline{\text{م بَ}} - \overline{\text{م حَ}}}{2}$

ومنها : $\overline{\text{م هَ}} = \frac{\overline{\text{م بَ}} + \overline{\text{م حَ}}}{2} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$

اي ان : سين المنتصف تساوي نصف مجموع سين المبدأ وسين النهاية .

نتيجة : اذا فرضنا س ، ع احداثيي نقطة هـ منتصف القطعة بـ حـ يكون :

$$\overline{\text{م هَ}} = \text{س} = \frac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2}$$

$$\overline{\text{هَ هـ}} = \text{ع} = \frac{\text{ع}_1 + \text{ع}_2}{2}$$

٣٢١- معادلة المستقيم المار بنقطتين معلومتين :

لنفرض ان النقطتين هما :

د (س$_1$ ، ع$_1$) ، هـ (س$_2$ ، ع$_2$)

فنحن نعلم ان معادلة كل مستقيم (بفرضه لا يوازي محور العينات) هي :

$$ع = ب\ س + حـ \qquad (١)$$

ولنر الآن كيف نعين المجهولين ب ، حـ فنقول :

بما ان هذا المستقيم يمر من نقطة د اذن احداثيا نقطة د يحققان المعادلة (١) اي يكون :

$$ع_١ = ب\ س_١ + حـ \qquad (٢)$$

فهذا شرط يمكننا من حساب احد المجهولين ب ، حـ ولكن :

بما ان هذا المستقيم يمرمن نقطة هـ فاحداثياها يحققان المعادلة (١) ايضاً ويكون :

$$ع_٢ = ب\ س_٢ + حـ \qquad (٣)$$

فمن المعادلتين (٢) ، (٣) يمكننا اذن ان نستنتج قيم ب ، حـ بالنسبة الى احداثيات النقطتين د ، هـ وبوضع هاتين القيمتين في المعادلة (١) نحصل على معادلة المستقيم المطلوبة . لذلك اذا طرحنا المساواة (٣) من (٢) نجد ان :

$$ع_١ - ع_٢ = ب\ (س_١ - س_٢)$$

وبما ان النقطتين د ، هـ ليستا منطبقتين ولا واقعتين على مستقيم يوازي محور العينات ، اي بما ان $س_١ - س_٢ \neq ٠$ يكون :

$$ب = \frac{ع_١ - ع_٢}{س_١ - س_٢}$$

فهذه هي قيمة المجهول الاول ب .

ولايجاد قيمة المجهول الثاني حـ نضع هذه القيمة في المعادلة (٢) مثلا فنجد :

$$ع_١ = \frac{(ع_١ - ع_٢)}{س_١ - س_٢}\ س_١ + حـ$$

ومنها :

$$ع_١ - \frac{(ع_١ - ع_٢)}{س_١ - س_٢}\ س_١ = حـ$$

اذن معادلة المستقيم المطلوبة هي المعادلة (١) بعد ان نضع محل ب ، حـ قيمة كل منهما .

لذلك لنضع ما يساوي كلا من ب ، حـ في (١) فنجد :

$$ع = \frac{(ع_1 - ع_2)}{س_1 - س_2} س + ع_1 - \frac{(ع_1 - ع_2) س_1}{س_1 - س_2}$$

ومنها : $$ع - ع_1 = \frac{(ع_1 - ع_2)(س - س_1)}{س_1 - س_2}$$

وبتقسيم الطرفين على $ع_1 - ع_2$ اذ فرضاً النقطتان د ، هـ ليستا منطبقتين ولا واقعتين على مستقيم يوازي محور السينات يكون :

$$\frac{ع - ع_1}{ع_1 - ع_2} = \frac{س - س_1}{س_1 - س_2}$$

او $$ع - ع_1 = \frac{ع_1 - ع_2}{س_1 - س_2} (س - س_1)$$

فهذه هي معادلة المستقيم المار من النقطتين د ، هـ وهو المطلوب .

٣٢٢- ملاحظة : نستنتج مما مر ان الميل او الامثال الزاوي للمستقيم الواصل بين نقطتي د ، هـ هو :

$$ب = \frac{ع_1 - ع_2}{س_1 - س_2}$$

باعتبار $س_1$ ، $ع_1$ احداثيي نقطة د ، وباعتبار $س_2$ ، $ع_2$ احداثيي نقطة هـ .

تمرين : اوجد معادلة المستقيم د هـ الذي يمر من النقطتين :

د $\begin{cases} س = ٠ \\ ع = ٣ \end{cases}$ ، هـ $\begin{cases} س = ٢ \\ ع = ٧ \end{cases}$

ما هو الامثال الزاوي لهذا المستقيم ؟

٣٢٣- معادلة المستقيم المار من نقطة معلومة والموازي لمستقيم معلوم :

لتكن د $(س_1 ، ع_1)$ النقطة المعلومة $ع = ب س + حـ$ المستقيم

المعلوم ، فما ان المستقيم المطلوب يوازي هذا المستقيم ، اذن امثالها الزاوي واحد ولا يختلفان الا بترتيبها عن المبدأ . اذن معادلة المستقيم المطلوب هي حتماً من الشكل :

$$ع = ب س + حَ \qquad (١)$$

وبما ان هذا المستقيم يمر من النقطة د اذن يجب ان يكون :

$$ع_١ = ب س_١ + حَ$$

ومنها : $$حَ = ع_١ - ب س_١$$

وبوضع قيمة حَ هذه في (١) نجد :

$$ع - ع_١ = ب (س - س_١)$$

فهذه هي معادلة المستقيم المار من نقطة د $(س_١ ، ع_١)$ والذي امثاله الزاوي ب اي يوازي المستقيم $ع = ب س + حـ$

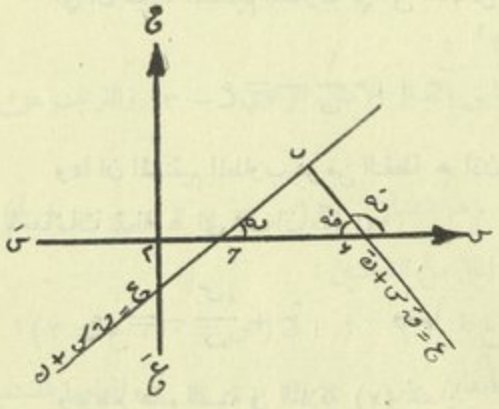
٣٢٤- نظرية : الشرط اللازم الكافي لتعامد المستقيمين :

$$ع = ق \cdot س + ك \qquad (١)$$

$$ع = قَ \cdot س + كَ \qquad (٢)$$

هو ان يكون :

$$ق \cdot قَ = -١$$



مم ه = قَ مم ه = ق

(شكل ٤٦)

البرهان :

لنفرض ان ب حـ هو المستقيم (١) (شكل ٤٦) وان ب د هو المستقيم (٢) فالشرط اللازم الكافي ليكون هذان المستقيمان متعامدين هو ان يكون المثلث ب حـ د قائم الزاوية في ب او ان يكون :

$$ه = ٩٠° - طه \quad \text{او} \quad \text{مم } ه = \frac{١}{\text{مم } طه}$$

واذا لاحظنا ان م ط ه = - م ه َ لرأينا ان الشرط اللازم الكافي لتعامد هذين المستقيمين هو :

$$\text{م ط ه} = -\frac{١}{\text{م ه}_{َ}} \quad \text{او} \quad \text{م ه} \cdot \text{م ه}_{َ} = -١$$

او ق . ق َ = - ١ وهو المطلوب .

٣٢٥ - معادلة المستقيم المار من نقطة معلومة والعمودي على مستقيم معلوم :

لتكن ه (س ١ ، ع ١) النقطة المعلومة ع = ب س + حـ المستقيم المعلوم ، فبما ان المستقيم المطلوب عمودي على المستقيم المعلوم تكون العلاقة بين امثالهما الزاوي ب ، ب َ هي :

$$ب \times ب_{َ} = -١ \quad \text{ومنها :} \quad ب_{َ} = -\frac{١}{ب}$$

اي ان معادلة المستقيم المطلوب هي من الشكل :

$$ع = -\frac{١}{ب} س + حـ_{َ} \qquad (٢)$$

وبما ان المستقيم المطلوب يمر من النقطة ه اذن يجب ان تكون العلاقة (٢) محققة باحداثيات نقطة ه اي يجب ان يكون :

$$ع_{١} = -\frac{س_{١}}{ب} + حـ_{َ} \quad \text{ومنها :} \quad حـ_{َ} = ع_{١} + \frac{س_{١}}{ب}$$

وبوضع هذه القيمة في العلاقة (٢) نجد :

$$ع - ع_{١} = -\frac{١}{ب} (س - س_{١})$$

فهذه هي معادلة المستقيم المار من النقطة ه والعمودي على المستقيم :

$$ع = ب \cdot س + حـ$$

❀❀❀

امثلة وتمارين

١] ارسم محورين متعامدين ، وعين النقطتين :

ب (س = ٢ ، ع = ٣) ؛ حـ (س = ٣ ، ع = − ٢)

ثم احسب طول القطع م ب ، م حـ ، ب حـ ما هي قيمة الزاوية ب م حـ ؟

٢] ارسم محورين متعامدين ، وعين النقطة ب (س = ٤ ، ع = ٣)

ثم ارسم الدائرة التي مركزها م ونصف قطرها ر = ٥ وبرهن على ان هذه الدائرة تمر من النقطة ب .

٣] ارسم المستقيم الذي امثاله الزاوي = ١ والذي ترتيبه عن المبدأ ٢ ، ما هي معادلة هذا المستقيم ؟

٤] اعد نفس السؤال السابق باعتبار الامثال الزاوي − ٣ والترتيب عن المبدأ واحداً .

٥] ما هي معادلة المستقيم م هـ باعتبار هـ (س = − ٢ ، ع = + ٣) ؟

٦] ما هي معادلة المستقيم المار من النقطتين :

هـ (س = − ٢ ، ع = ١) ؛ ق (س = ٠ ، ع = ٣) ؟

٧] ارسم مستقيمين متعامدين مثل م هـ ، م ق واقطعهما بالمستقيم س = ١ او جد العلاقة الكائنة ما بين ميل المستقيمين م ق ، م هـ

٨] ارسم المستقيمات الممثلة لتحولات التوابع الآتية :

١ً) ع = ١ − س

٢ً) ع = ٢ س − ١

٣ً) ع = س ٢ − ١

٤ً) ٣ ع − ٦ س + ٢ = ٠

٥ً) $٣س + ٢ع + ٦ = ٠$

٦ً) $\frac{س}{٣} + \frac{ع}{٤} - ١ = ٠$

٩] اوجد معادلة المستقيم الذي يقطع محور السينات في نقطة هـ التي فاصلتها — ٢ والذي يقطع محور العينات في النقطة د التي ترتيبها + ٥

١٠] ارسم محورين متعامدين ، وعين النقط :

ب (س = — ٣ ، ع = ٢) ، حـ (س = — ٤ ، ع = — ٢) ،

د (س = ٥ ، ع = — ٤)

والمطلوب :

١ً) ما هي معادلة اضلاع المثلث ب حـ د ؟

٢ً) احسب اطوال اضلاع هذا المثلث .

١١] لتكن مجموعة المعادلات :

$$\left.\begin{array}{l} ٢س - ع = ٤ \\ ٦س + ٢ع = ٧ \\ س + ٢ع = ل \end{array}\right\}$$

والمطلوب :

١ً) عين قيمة ل ليكون لهذه المجموعة حل.

٢ً) بفرض $ل = +\frac{١}{٢}$ ارسم المستقيمات الثلاثة الممثلة بهذه المعادلات

ما هو الامثال الزاوي لكل من هذه المستقيمات وما هي خاصة الشكل ؟

١٢] المطلوب حل المجموعات الاتية بصورة بيانية :

١ً)
$$\left.\begin{array}{l} س - ٢ع + ١ = ٠ \\ ٢س - ٥ع - ٣ = ٠ \end{array}\right\}$$

٢ً)
$$\left.\begin{array}{l} ٤س - ٦ع = ٣ \\ ٦س - ٩ع = ١٥ \end{array}\right\}$$

١٢] هل يوجد حل للمجموعات الآتية :

١٣) حل المعادلات الآتية :

١ً) $\left.\begin{array}{l} س - ٣ع = ٠ \\ ٢س - ٥ع - ١ = ٠ \\ ٣ع + س - ٦ = ٠ \end{array}\right\}$

٢ً) $\left.\begin{array}{l} س + ٢ع - ٥ = ٠ \\ ٢س - ٣ع + ١ = ٠ \\ ٣س - ع - ٤ = ٠ \end{array}\right\}$

١٤] لتكن المعادلة :

$$س + ع - ٢ + ك (ع - س) = ٠$$

حيث ك تدل على عدد ما . برهن على ان جميع المستقيمات الممثلة بهذه المعادلة تمر من نقطة ثابتة مهما كانت ك ، واحسب احداثيات هذه النقطة .

١٥] المطلوب حل المتراجحات الاتية بصورة بيانية :

١ً) $س > ٢ع - ٣$

٢ً) $س (س - ١) > ٢ع + س^٢ - ٣$

٣ً) $س^٢ + ع^٢ - ١ < (س - ١)(س + ٢) + ع (ع - ٣)$

٤ً) $(س - ١)(ع + ٢) < ٠$

٥ً) $(س + ع - ١)(س - ع + ١) < ٠$

٦ً) $س (س + ع) > ٠$

١٦] حل المتراجحات المجتمعة الآتية :

١ً) $\left.\begin{array}{l} ٢س + ٥ع - ١ > ٠ \\ س + ٣ع - ٢ < ٠ \end{array}\right\}$

٢ً) $\left.\begin{array}{l} س - ٤ع + ٣ > ٠ \\ ٢س - ٥ع + ١ < ٠ \end{array}\right\}$

٣ً) $\left.\begin{array}{l} ٢س + ٣ع - ٦ > ٠ \\ ع + ٢ < ٠ \\ س + ١ < ٠ \end{array}\right\}$

١٧] هل يمكن تعيين قيم الى ك لتكون مجموعة المتراجحات الاتية مستحيلة ؟

س + ع > ٠ ، س − ع > ٠ ، س + ٢ ع − ك < ٠

١٨] مسألة :

١) قام عند الظهر من بلدة ب رجل متجه نحو بلدة حـ التي تبعد عن ب بمقدار ١٥ ك م ، وسار بسرعة ٥ ك م في الساعة ، فبعد ان وصل الى بلدة حـ استراح فيها مدة ساعة واحدة ، ثم رجع من حـ الى ب ممتطياً دراجة وسائراً بسرعة ١٥ ك م في الساعة . والمطلوب رسم الخط البياني الذي يدل على تغير بعد هذا الرجل عن بلدة ب باعتبار محور السينات يدل على الزمن وباعتبار محور العينات يدل على هذا البعد (يعتبر الظهر مبدأ للزمن) .

٢) هنالك رجل آخر قام من بلدة حـ في الساعة الثانية بعد الظهر واتجه نحو بلدة ب بسرعة ٤ ك م في الساعة . والمطلوب رسم الخط البياني لتغيرات بعد هذا الرجل عن بلدة ب (بواسطة نفس الشكل السابق) .

٣) عين بصورة بيانية زمن تلاقي هذين الرجلين (يؤخذ لرسم الشكل طول ٢ سم للدلالة على الساعة ، وطول $\frac{١}{٢}$ سم للدلالة على الكيلومتر)

٤) قارن ما بين نتائج الحل البياني ونتائج الحل الجبري لهذه المسألة .

مسائل عامة

١] عين قيمة الحرف هـ لاجل ان تكون الافادة :

$$٤ هـ س^{٢} - ٨ س - ٣$$

قابلة للقسمة على $٢ س + ١$

٢] عين قيم الحرفين هـ ، ق لاجل ان تكون الافادة :

$$٢ س^{٢} + (هـ - ٥) س^{٢} - ق س + هـ$$

قابلة القسمة على $(س - ٢)$ وعلى $(س + ٣)$

٣] ضع الكسر :

$$\frac{٦ س^{٢} - ٢ س - ١٤}{(س - ١)(س - ٢)(س + ١)}$$

على الشكل :

$$\frac{ق}{س - ١} + \frac{ك}{س - ٢} + \frac{ل}{س + ١}$$

٤] ضع الكسر :

$$\frac{ب س^{٢} + ح س + د}{(س - هـ)(س - ط)(س - م)}$$

على الشكل :

$$\frac{ق}{س - هـ} + \frac{ك}{س - ط} + \frac{ل}{س - م}$$

وذلك بفرض هـ ، ط ، م اعداداً مختلفة .

٥] سميت الملوك لعائلة مالكة بتسعة اسماء مختلفة ، ثلث عدد ملوكها سمي بالاسم الاول ، والربع بالاسم الثاني ، والثمن بالاسم الثالث ، و $\frac{١}{١٢}$ من ملوكها

سمي بالاسم الرابع ، وبكل اسم من الاسماء الخمسة الباقية سمي ملك واحد . فما عدد ملوك هذه العائلة ؟

٦] قام فارس من بلدة ب متجهاً الى بلدة حـ بسرعة ١٥ ك م في الساعة ، وفي الوقت نفسه قام رجل من ب متجهاً الى حـ بسرعة ٤ ك م في الساعة . وعند وصول الفارس الى بلدة حـ غير اتجاهه وسار نحو ب دون ان يقف في حـ فصادف الرجل في نقطة بعدها عن ب يساوي ١٠ ك م . فما بعد حـ عن ب ؟

٧] عين قيم الحروف ب ، حـ ، د المذكورة في الافادة :

$$ب\,س^{٢} + حـ\,س + د$$

لاجل ان تأخذ هذه الافادة القيم ٤ ، — ٣ ، — ١٣ وذلك عندما س تساوي الاعداد ١ ، ٢ ، — ٢ بالترتيب .

٨] تراهن ثلاثة فرسان في سباق ذي ثلاثة اشواط متتابعة على ان يعطي الفارس المتأخر الى الفارسين الآخرين بقدر ما مع كل منهما ، وبعد اتمام الاشواط الثلاثة ظهر ان كل فارس من الفرسان الثلاثة تأخر مرة ، وان ما بقي مع كل فارس من المال هو ب قرشاً . والمطلوب حساب ما كان لدى كل فارس من المال قبل الشروع في السباق ؟

٩] كل ق كيلوغراماً من ماء البحر تحتوي على قَ كيلوغراماً من الملح . فكم كيلوغراماً من الماء الصافي يجب ان نضيف الى ق كيلوغرام من ماء البحر ليكون في الخليط الجديد كل هـ كيلوغراماً منه حاوياً على هَ كيلوغرام من الملح . (فسر معنى الحل السالب)

تطبيقات عددية :

$$ق = ٣٠ \quad ، \quad قَ = ١٢$$

$$هـ = ٢٠ \quad ، \quad هَ = ١٠$$

١٠] سئل رجل عن عمره فاجاب : لما كان عمري بقدر سنك الحالي كان عمري ضعف عمرك وقتئذٍ ، وعند ما يصبح عمرك بمقدار سني الحالي يصبح مجموع عمرينا وقتئذٍ ٦٣ سنة . فما عمر كل من السائل والمسؤول ؟

١١] لدينا المستطيل ب حـ د ق الذي ضلعه الاول حـ د = هـ والآخر د ق = ط والمطلوب تعيين اربع نقط مثل بَ ، حَ ، دَ ، قَ على اضلاع هذا المستطيل بشرط ان يكون الشكل الرباعي بَ حَ دَ قَ مستطيلاً يشبه مستطيلاً معلوماً . (افرض المسألة محلولة وادرس المثلثات التي يجب ان تكون متشابهة) .

١٢] ساعيان يتحركان على المستقيم غير المحدود ب حـ وفي الاتجاه ب حـ بحركة منتظمة ، سرعة الاول ن وسرعة الآخر نَ . فمع العلم بان الساعي الثاني مر بنقطة حـ بعد مرور الساعي الاول بنقطة ب بـ ق ساعات ، وان البعد بين النقطتين ب ، حـ يساوي هـ . المطلوب تعيين نقطة تلاقي الساعيين .

١٣] لدينا نوعان من الكحول ، سعر الليتر من النوع الاول ب قرشاً وسعر الليتر من النوع الثاني حـ قرشاً ، نريد ان نشكل خليطاً من هذين النوعين حجمه ن ليتر وسعر الليتر منه د قرشاً . فكم ليتراً من كل نوع يجب ان نأخذ ؟ (ناقش) .

١٤] ب حـ د ق شبه منحرف قاعدته العليا ب ق = هـ والسفلى حـ د = ٢ هـ وارتفاعه = ح ، ولتكن ط نقطة ما على القاعدة حـ د ولنصل ط ب ، ط ق ولنرسم مستقيما يوازي القاعدتين فيقطع حـ ب في ك و ط ب في ل و ط ق في م و د ق في ن والمطلوب حساب حـ ط = س و ع بعد المستقيم ك ل م ن عن حـ د لاجل ان يكون :

ك ل = ٢ ل م = ٣ م ن

١٥] احسب اضلاع مثلث متساوي الساقين بعد معرفة ان مجموع هذه الاضلاع يساوي ٢ ك وان ارتفاعه يساوي ط ؟ المناقشة .

١٦] ما هو العدد الذي تجب اضافته لحدي الكسر $\frac{ل}{ق}$ ليصبح مساوياً لمقلوبه $\frac{ق}{ل}$

١٧] اوجد عددين مجموع مقلوبيهما يساوي هـ ومجموعهما يساوي الاول مضروباً في ق ؟

١٨] حوض له حنفيتان ، الاولى تملؤه في مدة ن ساعة ، والثانية تفرغه في مدة ط ساعة ، وعند ما كان هذا الحوض مملوءً لنصفه فتحنا بآن واحد هاتين الحنفيتين . فبعد كم ساعة يصبح هذا الحوض مملوءً تماماً ، او فارغاً تماماً ؟

١٩] المسافة ما بين النقطتين ب ، حـ هي م كيلومتراً ، يقوم بآن واحد من هاتين النقطتين رجلان ممتطيان دراجة ويسيران باتجاه واحد ، سرعة الاول الذي قام من ب هي ط كيلومتراً في الساعة ، وسرعة الثاني الذي قام من حـ هي طَ كيلومتراً في الساعة . والمطلوب معرفة نقطة وزمن تلاقيهما ؟

٢٠] في المثلث المتساوي الساقين ب حـ د معلوم لدينا ان : ب حـ = ب د = هـ سانتيمتراً وان الارتفاع ب ع = ل سانتيمتراً وان القاعدة حـ د = ٢ ط سانتيمتراً . والمطلوب تعيين الموازي حَ دَ الى حـ د لاجل ان يكون :

$$حـ حَ + حَ دَ + دَ د = ٢ ل$$

(يعتبر المجهول بعد حَ دَ عن الرأس ب) .

٢١] المطلوب تقسيم المبلغ م الى ثلاثة اقسام متناسبة عكساً مع الاعداد ب ، حـ ، د المعلومة ؟

٢٢] النقط بَ ، حَ ، دَ محمولة على محور واحد وفواصلها هي بالترتيب ب ، حـ ، د اوجد على المحور نقطة مثل هـ تحقق العلاقة الآتية :

$$\overline{هـ ب}^{٢} = \overline{هـ حـ} \cdot \overline{هـ د}$$

٢٣] النقط بَ ، حَ ، دَ محمولة على محور واحد وفواصلها ب ، حـ ، د اوجد النقطة قَ التي تشكل مع النقط الثلاث السابقة تقسيما توافقياً ؟

٢٤] لدينا نصف دائرة قطرها ب حـ = ٢ ر ومركزها م . والمطلوب تعيين وتر مثل ب د داخل نصف هذه الدائرة على ان يكون :

$$\overline{ب د}^{٢} + \overline{م ق}^{٢} = ك^{٢}$$

باعتبار م ق عموداً على ب د وباعتبار ك^٢ مقداراً معلوماً . المناقشة (يعتبر المجهول هو س = ب دَ باعتبار دَ مرتسم د على ب حـ)

٢٥] لدينا دائرة مركزها م ونصف قطرها ر والنقطة ب بعدها عن

مركز هذه الدائرة م ب = هـ والمطلوب تعيين نقطة مثل حـ على المستقيم م ب بصورة ان يكون طول المماس حـ د المرسوم من نقطة حـ لهذه الدائرة مساوياً الى الطول حـ ب . (يعتبر المجهول س = م حـ)

٢٦] الشبه المنحرف ب حـ د ق معلوم . والمطلوب قسمه الى قسمين متكافئين بواسطة موازٍ لاحدى قاعدتيه .

٢٧] من المثلث ب حـ د علمت القاعدة حـ د = هـ والارتفاع ب ع = ط ارسم داخل هذا المثلث مستطيلاً احد اضلاعه محمولاً على القاعدة حـ د ومشابهاً لمستطيل معلوم بعداه ل ، ك .

٢٨] على القاعدة حـ د من المثلث المعلوم ب حـ د عين نقطة مثل هـ على ان يكون مجموع بعديها عن الضلعين الآخرين ب حـ ، ب د مساوياً لطول معلوم مثل هـ .

٢٩] لدينا مسدسان منتظمان ، ضلع الاول يساوي هـ وضلع الثاني يساوي ط . والمطلوب معرفة ضلع المسدس الذي سطحه يساوي الفرق ما بين سطحي المسدسين الاولين .

تطبيقات عددية: هـ = ٩ سم ، ط = ٦ سم

٣٠] ارسم الخطوط البيانية للتوابع الآتية :

ع = ٣ س - ٣ ، ٣ س + ٥ ع - ٢ = ٠

ع = ١ - س ، ٢ س + ع = ٧

س + ع + ٣ = ٠ ، $ع = \frac{٣ - ٢ س}{٢}$

٣١] ما هي معادلة المستقيم الذي يقطع محور السينات في نقطة سينها ٢ ، ويقطع محور العينات في نقطة عينها - ٢,٥ ؟

٣٢] اكتب معادلات المستقيمات التي تمر من نقطتين ما من النقط الاتية :

ب (٢ ، ٣)

حـ (- ٢ ، - ٣)

د (٣ ، ١)

٢) احسب اطوال اضلاع المثلث ب حـ د وقارن هـذه الاطوال المستخرجة بصورة حسابية مع اطوال هذه الاضلاع المقاسة عملا .

٣) برهن ان اقطار هذا المثلث تتلاقى في نقطة واحدة ، واوجد بعد هذه النقطة عن القاعدة .

٤) اكتب معادلة الخط الواصل ما بين هـ ، ﻫ منتصفي الضلعين ب د ، ب حـ ثم اوجد طول القطعة هـ ﻫ وقارن النتيجة مع طول الضلع حـ د

٥) برهن ان ارتفاعات المثلث ب حـ د تتلاقى في نقطة واحدة .

٢٢] احسب بعد النقطة ب (١ ، ٣) عن المستقيم الذي معادلته :

$$٣ع - ٥س + ٢ = ٠$$

٢٤] المطلوب حل المجموعات الاتية بصورة بيانية :

$$\left.\begin{array}{l} ٣س - ٤ع = ٢ \\ ٢س + ع = ٥ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ٣س - ٢ع = ٣ \\ س + ع = -٤ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} ٥س - ٣ع = ٣ \\ ٥س - ٢ع = ٢ \end{array}\right\}$$

٢٥] عين قيم هـ التي تجعل المستقيمين الاتيين متوازيين :

$$ع = ٥س + ٢ \quad ، \quad ٣ع - هـس = ١$$

٢٦] عين نقط المستوي التي احداثياتها تحقق احدى المتراجحات الاتية :

$$٣س - ٢ < ٠$$

$$٢س + ع > ٣$$

$$٥س + ٢ < ٠$$

$$٣س - ع > ٢$$

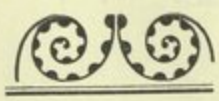
٢٧] المطلوب حل المتراجحات المجتمعة الاتية بواسطة الخطوط البيانية :

$$\left.\begin{array}{l} ٢س - ٥ع + ٨ > ٠ \\ ٣س - ٢ع - ١ < ٠ \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} س + ع < ٣ \\ ٥س - ٣ع > ٥ \\ ٢س - ع < ١ \end{array}\right\}$$

٢٨] المطلوب حل مجموعة المتراجحات المجتمعة الاتية :

$$س ع > ٠$$
$$س + ع - ٢ > ٠$$



فهرس الكتاب

صفحة	
٣	التعاريف والاشارات الجبرية .
١١	الاعداد الموجبة والاعداد السالبة .
١٤	عمليات الاعداد الموجبة .
٢٨	الكسور الجبرية .
٣٢	القوى وخواصها .
٣٧	الجذور الحسابية .
٣٩	خواص الجذور الحسابية .
٥٥	تمارين .
٥٩	تعيين نقطة على محور .
٦٣	الحرارة .
٦٥	قياس الزمن .
٦٦	الحركة المستقيمة المنتظمة .
٧٢	تمارين .
٧٥	الحدود المتشابهة .
٧٨	الجمع الجبري .
٨٠	طرح كثيرات الحدود .
٨٢	ضرب كثيرات الحدود .
٩٥	التقسيم الجبري .
١٠٦	معلومات عن كثيرات الحدود المطابقة للصفر .
١١٠	قابلية القسمة على $س \pm ب$ وعلى $ب س \pm حـ$ ؟
١١٧	الاوضاع المهمة في الجبر .
١٢١	تمارين .

صفحة

١٣١ المعادلات التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد .

١٣٨ حل المعادلة .

١٤٠ مناقشة المعادلة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد .

١٤٥ المعادلات الكسرية .

١٤٩ المعادلات التي يرجع حلها لحل معادلات من الدرجة الاولى وذات مجهول واحد .

١٥٣ تمارين .

١٥٧ المعادلات الصماء التي تحوي على جذر واحد .

١٦٢ كيفية حل المعادلات التي تحوي على جذرين .

١٦٤ تمارين .

١٦٥ المتراجحات العددية .

١٦٦ خواص المتراجحات .

١٦٩ المتراجحات التي تحوي على المجهول س .

١٧٠ خواص المتراجحات الحاوية على المجهول س .

١٧٦ كيفية حل ومناقشة المتراجحات التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد.

١٨٠ المتراجحات التي يعود حلها الى حل متراجحات من الدرجة الاولى .

١٨٥ تمارين .

١٨٨ حل مجموعة المعادلتين ذات المجهولين .

١٩٤ الطرق المختلفة لحل ومناقشة جملة معادلتين ذات مجهولين .

٢٠٦ تركيب المعادلات التي من الدرجة الاولى وذات مجهولين .

١١٢ المعادلات التي من الدرجة الاولى وذات المجاهيل المتعددة .

٢١٧ المعادلات التي يمكن حلها بواسطة مجاهيل مساعدة .

٢١٨ تمارين .

٢٢٣ كيفية حل المسائل التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد او المجاهيل الكثيرة .

٢٣٩ مسائل المعادلة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد .

٢٤٨ الاحداثيات .

صحة

٢٥٢ درس تحولات التابع ع = ب س + حـ
٢٦٠ الخط البياني او التمثيل الخطي للتابع ع = ب س + حـ
٢٧١ الحل البياني للمعادلة التي من الدرجة الاولى وذات مجهولين .
الحل البياني للمعادلتين اللتين من الدرجة الاولى وذات المجهولين .
٢٧٩ حل المتراجحة التي من الدرجة الاولى وذات المجهول الواحد بصورة بيانية .
٢٨٤ حل المتراجحات التي من الدرجة الاولى وذات المجهولين بصورة بيانية .
٢٩٣ بعض معلومات هامة تتعلق بالمستقيم .
٢٩٩ امثلة وتمارين .
٣٠٣ مسائل عامة .

vs. 1&2 to be bound in 1

كتاب

الجبر الابتدائي

لتلاميذ الصف الاول من المدارس التجهيزية

والموافق لبرنامج وزارة معارف الجمهورية السورية

المقرر في سنة ١٩٣٢

الجزء الثاني

لطلاب البكالوريا الاولى

لمؤلفيه

الاساتذة

هاشمي هبراوي بركات

الطبعة الثانية «منقحة»

جميع الحقوق محفوظة

١٣٥٧ هـ المطبعة الحديثة — دمشق ١٩٣٨ م

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARY

الباب الثالث

المعادلات التي من الدرجة الثانية

المبحث الاول

المعادلات التي من الدرجة الثانية وذات المجهول الواحد

الفصل الأول

كيفية حل المعادلة التي من الدرجة الثانية

١ – تعريف : المعادلة التي من الدرجة الثانية ، هي المعادلة التي يمكن ان تكتب بالشكل :

$$ب\,س^{٢} + حـ\,س + د = ٠$$

بعد نقل جميع حدودها الى الطرف الاول وجعل الطرف الثاني صفراً .

فالشكل : $ب\,س^{٢} + حـ\,س + د = ٠$ (١)

هو الشكل العام للمعادلة [المرتبة] التي من الدرجة الثانية .

اذن : المعادلة المرتبة والتي من الدرجة الثانية تحتوي على ثلاثة حدود ، وهي :

١ً) حد من الدرجة الثانية بالنسبة الى س وهو : $ب\,س^{٢}$

٢ً) حد من الدرجة الاولى بالنسبة الى س وهو : $حـ\,س$

٣ً) حد معلوم لا يحوي على س وهو : $د$

فالحروف : ب ، حـ ، د هي اعداد تدعى [امثال المعادلة] التي من الدرجة الثانية .

وبما ان المعادلة التي من الدرجة الثانية تصبح من الدرجة الاولى عند ما تكون ب = ٠ لذلك في جميع ما يأتي وحتى المادة التاسعة نفرض ان : ب ≠ ٠

٢ — حالات خاصة في حل المعادلة التي من الدرجة الثانية :

قبل البدء بحل المعادلة التي من الدرجة الثانية وذات المجهول الواحد بشكلها العام نأخذ حالات خاصة ونحلها ، ثم نبدأ بالحالة العامة .

٣ — الحالة الخاصة الاولى : د = ٠ فالمعادلة (١) تكتب حينئذ بالشكل الآتي :

$$ب س^{٢} + حـ س = ٠ \qquad (٢)$$

وبأخذ س خارج قوس تصبح :

$$س (ب س + حـ) = ٠$$

فلاجل ان يكون الجانب الاول صفراً يكفي اما ان يكون س = ٠ او ان يكون ب س + حـ = ٠

اذن : المعادلة (٢) لها جذران ، وهما :

$$س = ٠ \quad ، \quad س = - \frac{حـ}{ب}$$

وهذا الجذر الثاني موجود دوماً لانه فرضاً ب ≠ ٠

٤ — الحالة الخاصة الثانية : لنفرض الآن ان حـ = ٠ فتصبح عندئذ المعادلة (١) من الشكل :

$$ب س^{٢} + د = ٠$$

$$س + \frac{د}{ب} = ٠ \qquad (٣)$$

في هذه الحالة نميز فرعين :

١ً) $\frac{د}{ب} > ٠$ في هذا الفرع يمكن ان نفرض ان :

$$\frac{د}{ب} = - ك^{٢}$$

وعندئذ تكتب المعادلة (٣) بالشكل الآتي :

$$س^{٢} - ك^{٢} = ٠$$

وهذه تكتب بشكل مضروبين :

$$(س + ك)(س - ك) = ٠$$

فلاجل ان يكون الجانب الاول صفراً ، اما ان يكون :

$$س + ك = ٠ \quad \text{ومنها :} \quad س = - ك$$

او ان يكون : $س - ك = ٠$ ومنها : $س = ك$

فالجذران $س = - ك$ ، $س = ك$ يكتبان بصورة مختصرة بالشكل :

$$س = \pm ك$$

اذن : للمعادلة في هذه الحالة $(حـ = ٠ \quad ، \quad \frac{د}{ب} < ٠)$ جذران متناظران .

مثال : المعادلة $س^{٢} - ٣ = ٠$ تكتب :

$$(س + \sqrt{٣})(س - \sqrt{٣}) = ٠$$

ومنها : $س = \pm \sqrt{٣}$

وبصورة ثانية نقول :

من المعادلة $س^{٢} + \frac{د}{ب} = ٠$ نستنتج ان $س^{٢} = - \frac{د}{ب}$ وبما ان

$- \frac{د}{ب} > ٠$ اذن : $س = \pm \sqrt{- \frac{د}{ب}}$

٢) $\frac{د}{ب} > ٠$ فمهما كانت القيمة العددية الى س يكون الطرف الاول

من المعادلة (٣) موجباً دائماً ولا يمكن ان يكون اذن صفراً ، فلا يكون للمعادلة (٣) جذور .

مثال عددي : المعادلتان : $س^{٢} + ١ = ٠$ او $س^{٢} + ٢٥ = ٠$ ليس لهما جذور لانه لا يمكن ان يكون مجموع موجبين صفراً ، ولان الجانب الاول لكل منهما هو مجموع عددين موجبين احدهما ثابت وغير الصفر .

الخلاصة : لا يكون للمعادلة $ب س^{٢} + د = ٠$ جذور الا اذا كان ب ، د مختلفين بالاشارة . في هذه الحالة فقط يكون لها جذران متناظران ، وهما :

$$س = \pm \sqrt{-\frac{د}{ب}}$$

ملاحظة : اذا كان باحد $حـ = ٠$ و $\frac{د}{ب} = ٠$ [اي $د = ٠$]

يبقى لنا $ب س^{٢} = ٠$ ونقول في هذه الحالة يوجد جذر مضاعف وهو الصفر ، لان $ب س^{٢} = ٠$ تكتب $ب \times س \times س = ٠$

الحالة العامة

٥ — تمهيد : من المطابقة :

$$(س + ق)^{٢} = س^{٢} + ٢ ق س + ق^{٢}$$

التي رأيناها سابقاً يمكننا ان نستنتج المطابقة الاتية :

$$(س + ق)^{٢} - ق^{٢} = س^{٢} + ٢ ق س$$

فاذا فرضنا ان $ق = \frac{حـ}{٢ ب}$ تكتب المطابقة السابقة على الشكل :

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ ب}\right)^{٢} - \frac{حـ^{٢}}{٤ ب^{٢}} = س^{٢} + \frac{حـ}{ب} س$$

ومن هذه المطابقة الاخيرة نستنتج النتيجة المهمة الاتية :

نتيجة : اذا اضفنا مربع نصف امثال الـ س اي $\frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}}$ ، الى المقدار

$س^{٢} + \frac{ح}{ب} س$ لاصبح هذا المقدار $س^{٢} + \frac{ح}{ب} س + \frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}}$ ؛ اي

لاصبح مربعاً كاملا يساوي $\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢}$ [فهذه الاضافة تسمى « جعل

المقدار $س^{٢} + \frac{ح}{ب} س$ مربعاً كاملا »]

٦ — الحالة العامة : المطلوب حل المعادلة :

$$ب س^{٢} + ح س + د = ٠ \qquad (١)$$

الحل : بما ان $ب \neq ٠$ يمكن اذن تقسيم الطرفين على ب فنجد :

$$س^{٢} + \frac{ح}{ب} س + \frac{د}{ب} = ٠ \qquad (٢)$$

وبما ان الحدين $س^{٢} + \frac{ح}{ب} س$ يكتبان حسبما ذكرنا (بند ٥) بالشكل :

$$\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} - \frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}}$$

اذن : المعادلة (٢) تكتب بالشكل :

$$\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} - \frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}} + \frac{د}{ب} = ٠ \qquad (٣)$$

وهذه تكتب ايضاً :

$$\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} - \frac{ح^{٢} - ٤ ب د}{٤ ب^{٢}} = ٠ \qquad (٤)$$

وهنا نميز ثلاث حالات على حسب قيم المقدار $ح^{٢} - ٤ ب د$

الحالة الاولى : $ح^{٢} - ٤ ب د > ٠$ عندئذ المعادلة (٤) تكتب بالشكل:

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^{٢} - \left(\frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}\right)^{٢} = ٠$$

وهذه تكتب :

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ب} + \frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}\right)\left(س + \frac{حـ}{٢ب} - \frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}\right) = ٠$$

وهذه ، تكافيء المعادلتين الآتيتين اللتين كل واحدة منهما من الدرجة الاولى وهما :

$$س + \frac{حـ}{٢ب} + \frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب} = ٠$$

$$س + \frac{حـ}{٢ب} - \frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب} = ٠$$

اذن : جذرا المعادلة هما :

$$س_{١} = \frac{-حـ - \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}$$

$$س_{٢} = \frac{-حـ + \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}$$

اي يوجد للمعادلة المفروضة في هذه الحالة جذران ، وهما يكتبان بشكل عام بالصورة الآتية :

$$\boxed{س = \frac{-حـ \pm \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}}$$

وهذه مساواة يجب حفظها .

الحالة الثانية : $حـ^{٢} - ٤ب د = ٠$

في هذه الحالة تكتب المعادلة (٤) بالشكل الآتي :

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^{٢} = ٠$$

اي بشكل مربع تام ، وهذه تكافيء المعادلة :

$$س + \frac{حـ}{٢ ب} = ٠$$

اذن : المعادلة (٤) لها جذر واحد وهو : $س = \frac{- حـ}{٢ ب}$

وكثيراً ما نقول في هذه الحالة هنا ، ان للمعادلة جذرين متساويين او جذرين منطبقين (او جذراً مضاعفاً) لانه لو جعلنا في الحالة الاولى $حـ^٢ - ٤ ب د$ صفراً

نجد عندئذ ان : $س_١ = \frac{- حـ}{٢ ب}$

وكذلك : $س_٢ = \frac{- حـ}{٢ ب}$

الحالة الثالثة : $حـ^٢ - ٤ ب د < ٠$ اذن : في هذه الحالة يكون المقدار $٤ ب د - حـ^٢ > ٠$ وعندئذ المعادلة (٤) تكتب بالشكل الآتي :

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^٢ + \frac{٤ ب د - حـ^٢}{٤ ب^٢} = ٠$$

ومنها : $$\left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^٢ + \left(\frac{\sqrt{٤ ب د - حـ^٢}}{٢ ب} \right)^٢ = ٠$$

وهذه مجموع مربعي كميتين فلا يمكن ان تكون صفراً الا اذا كان كل من الكميتين صفراً (وهنا الثانية هي فرضاً غير الصفر) . اذن : في هذه الحالة لا يوجد جذور .

طريقة ثانية : من المعادلة $ب س^٢ + حـ س + د = ٠$ نجد بالتسلسل :

$$س^٢ + \frac{حـ}{ب} س + \frac{د}{ب} = ٠ \quad ، \quad س^٢ + \frac{حـ}{ب} س = \frac{- د}{ب}$$

فاذا اضفنا للطرفين المقدار $\frac{حـ^٢}{٤ ب^٢}$ نجد :

$$س^{٢} + \frac{ح}{ب} س + \frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}} = \frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}} - \frac{د}{ب}$$

او
$$\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} = \frac{ح^{٢} - ٤ ب د}{٤ ب^{٢}}$$

فلتتميم الحل يجب ان نأخذ الجذر التربيعي للطرفين فتنشأ الحالات الثلاث السابقة نفسها ، وهي :

١°) $ح^{٢} - ٤ ب د > ٠$ فنجد :

$$س + \frac{ح}{٢ ب} = \pm \frac{\sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

ومنها : $$س = \frac{- ح \pm \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

٢°) $ح^{٢} - ٤ ب د = ٠$ فيبقى :

$$س + \frac{ح}{٢ ب} = ٠ \quad \text{ومنها :} \quad س = - \frac{ح}{٢ ب}$$

٣°) $ح^{٢} - ٤ ب د < ٠$ فلا يمكن اخذ الجذر التربيعي للطرف الثاني وليس للمعادلة جذر .

٧ — القاسمة : ان الكمية $ح^{٢} - ٤ ب د$ تدعى القاسمة ويرمز اليها عادة بالرمز (فا) او (Δ) .

٨ — يمكن ان نجمع الحالات الثلاث المذكورة في (البند ٦) بالنظرية الاتية :

نظرية : المعادلة التي من الدرجة الثانية $ب س^{٢} + ح س + د = ٠$

١°) يكون لها جذران حقيقيان ومختلفان فيما اذا كانت قاسمتها $فا > ٠$ وهذان الجذران هما :

$$س = \frac{- ح \pm \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

٢°) يكون لها جذران متساويان او منطبقان فيما اذا كانت قاسمتها $\Delta = 0$.

وهذا الجذر المضاعف هو : $س = \frac{-ح}{٢ب}$

٣°) يكون لها جذران وهميان اي ليس لها جذور فيما اذا كانت قاسمتها $\Delta < 0$.

٩ — ملاحظة : يمكن ان نستنتج الحالتين الخاصتين المذكورتين (بند ٣ ، ٤) من الحالة العامة الاولى ، وذلك بان نجعل في القاسمة اولا $د = 0$ ثم $ح = 0$.

فاذا جعلنا $د = 0$ تصبح القاسمة $ح^٢$ ويكون الجذران عندئذ هما :

$$س_١ = \frac{-ح + ح}{٢ب} = \frac{0}{٢ب} = 0$$

$$س_٢ = \frac{-ح - ح}{٢ب} = \frac{-ح}{ب}$$

وهذا ما وجدناه سابقاً .

واما اذا جعلنا $ح = 0$ فتصبح القاسمة $-٤ب د$ فلكي يكون للمعادلة جذران حقيقيان يجب ان يكون $-٤ب د < 0$.

اي يجب ان يكون $ب$ ، $د$ مختلفي الاشارة ، وعندئذ يكون :

$$س = \pm \frac{\sqrt{-٤ب د}}{٤ب^٢} = \pm \sqrt{\frac{-د}{ب}}$$

وهذا ما وجدناه سابقاً ايضاً .

ملاحظة : ينتج مما تقدم انه اذا كانت قاسمة المعادلة :

$$ب س^٢ + ح س + د = 0$$

١°) موجبة فانه يمكن وضع جانبها الاول على شكل فضل مربعين او على شكل مضروبين من الدرجة الاولى :

$$\left(س + \frac{ح}{٢ب} - \frac{\sqrt{ح^٢ - ٤ب د}}{٢ب}\right)\left(س + \frac{ح}{٢ب} + \frac{\sqrt{ح^٢ - ٤ب د}}{٢ب}\right) = 0$$

٢) واذا كانت القاسمة تساوي الصفر فان جانبها الاول يكون مربعاً كاملاً :

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ ب}\right)^{٢} = ٠$$

٣) واذا كانت القاسمة اصغر من الصفر يمكن وضع جانبها الاول على شكل مجموع مربعين :

$$\left(س + \frac{حـ}{٢ ب}\right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٤ ب د - حـ^{٢}}}{٢ ب}\right)^{٢} = ٠$$

١٠ — حالة خاصة : $ب = ٠$ ، $حـ \neq ٠$.

فيما سبق عند حل المعادلة التي من الدرجة الثانية بالصورة العامة فرضنا فرضاً اساسياً ان $ب \neq ٠$. فاذا كانت $ب = ٠$ تنقلب عندئذ المعادلة (١) الى المعادلة $حـ س + د = ٠$ التي هي من الدرجة الاولى والتي ليس لها سوى جذر واحد وهو :

$$س = \frac{- د}{حـ} \quad \text{فيما اذا كان} \quad حـ \neq ٠$$

توسع : نستنتج مما سبق انه اذا جعلنا الامثال ب في المعادلة (١) يتقرب الى الصفر بدون نهاية ، وجعلنا $حـ \neq ٠$. نجد ان احد جذري هذه المعادلة يُفقد ، ولنرَ كيف فقد هذا الجذر ؟

لنلاحظ اولا انه اذا كانت $حـ \neq ٠$. واخذت ب قيمة صغيرة جداً فان الكمية $٤ ب د$ تأخذ ايضاً قيمة صغيرة جداً ، ويمكن ان نأخذ قيمة ب صغيرة جداً حتى يكون $٤ ب د$ اصغر من $حـ^{٢}$. اذن : في هذه الحالة القاسمة $حـ^{٢} - ٤ ب د$ تكون موجبة ويكون للمعادلة جذران وهما :

$$س_{١} = \frac{- حـ + \sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \quad ، \quad س_{٢} = \frac{- حـ - \sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

وعندما تصبح ب صفراً فان الكمية المجذورة تصبح $\sqrt{حـ^{٢}}$ التي هي القيمة المطلقة للعدد حـ لذلك نميز فرعين :

الفرع الاول : $حـ > ٠$ فيكون $\sqrt{حـ^{٢}} = |حـ| = حـ$ وعندما

يكون ب = ٠ فالصورة في $س_١$ تصبح $-ح + ح = ٠$ والمخرج صفر ، اذن : $س_١ = \div$ اي يصبح $س_١$ في شكل غير معين ، فلاجل رفع عدم التعيين هذا نضرب الصورة والمخرج بمزواج الصورة وهو :

$$-ح - \sqrt{ح^٢ - ٤ ب د}$$

فيصبح $س_١$ هو : $$س_١ = \frac{٢ د}{-ح - \sqrt{ح^٢ - ٤ ب د}}$$

وعند ما تكون ب = ٠ عندئذ تصبح $$س_١ = \frac{٢ د}{-٢ ح} = -\frac{د}{ح}$$

وهذا هو جذر المعادلة ح س + د = ٠ واما في $س_٢$ فعند ما تكون ب = ٠ فان الصورة الى $س_٢$ تصبح $-ح - ح = -٢ ح$ وبما ان المخرج صفر عندئذ $س_٢$ يصبح ما لا نهاية ، ونقول اتفاقاً : ان $س_٢$ يصبح في ما لا نهاية .

الفرع الثاني : ح < ٠ فيكون $\sqrt{ح^٢} = |ح| = -ح$

وعند ما تكون ب = ٠ فالصورة في $س_١$ تصبح $-ح - ح = -٢ ح$ اي غير الصفر واما المخرج ٢ ب فيكون صفراً ، اذن $س_١$ يصبح في ما لا نهاية . واما $س_٢$ فتكون صورته $-ح + ح = ٠$ وعندئذ يصبح من الشكل $\div$ فلاجل رفع عدم التعيين هذا نضرب الصورة والمخرج بمزواج الصورة فنجد بنفس الطريقة السابقة ان : $$س_٢ = \frac{٢ د}{-ح + \sqrt{ح^٢ - ٤ ب د}}$$

وعند ما تكون ب = ٠ تصبح عندئذ $س_٢$ هي :

$$س_٢ = \frac{-٢ د}{٢ ح} = -\frac{د}{ح}$$

وهذا هو جذر المعادلة ح س + د = ٠ .

الخلاصة : عند ما ب تتقارب من الصفر بشرط ان تبقى ح غير الصفر فان احد الجذرين يصبح في ما لا نهاية والآخر يكون جذر المعادلة ح س + د = ٠ .

طريقة ثانية : من المعادلة : $ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$ نجد ان :

$$ب = - \frac{حـ س + د}{س^{٢}}$$

فعند ما تكون $ب = ٠$ اما ان تكون الصورة تساوي الصفر ، ومنها :

$$حـ س + د = ٠ \quad \text{او} \quad س = \frac{- د}{حـ}$$

واما ان يكون المخرج $س^{٢} = \infty$ ومنها : $س = \infty$

وهكذا نكون فهمنا معنى قولنا ان الجذر الثاني قد اي اصبح في ما لا نهاية .

١١ — مثال : ١) المطلوب حل المعادلة : $س^{٢} - ٥ س + ٦ = ٠$

الحل : لنشكل اولاً القاسمة $حـ^{٢} - ٤ ب د$ فنجد :

$$حـ = - ٥ \quad ، \quad ب = ١ \quad ، \quad د = ٦$$

اذن : $حـ^{٢} - ٤ ب د = ٢٥ - ٢٤ = ١$

اي القاسمة موجبة ويوجد للمعادلة جذران حقيقيان ، وهما :

$$س = \frac{- حـ \pm \sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} = \frac{٥ \pm ١}{٢}$$

اي : $س_{١} = \frac{١ + ٥}{٢} = ٣$ ، $س_{٢} = \frac{١ - ٥}{٢} = ٢$

ويمكن اذن (بند ٩) وضع المعادلة المعطاة بالشكل :

$$(س - ٢)(س - ٣) = ٠$$

وحقيقة يكفي حل هذين القوسين لنحصل على المعادلة المعطاة .

١٢ — مثال : ٢) المطلوب حل المعادلة :

$$س^{٢} - ٦ س - ٥ = ٠$$

الحل : لنشكل القاسمة فا $= حـ^{٢} - ٤ ب د$ بملاحظة ان :

حـ = − ٦ ، ب = ١ ، د = − ٥

فنجد : ا = ٣٦ + ٢٠ = ٥٦

وهذه ايضاً موجبة ، اذن يكون جذرا المعادلة :

$$س_١ = \frac{٦ + \sqrt{٥٦}}{٢} \quad ، \quad س_٢ = \frac{٦ - \sqrt{٥٦}}{٢}$$

١٣ — مثال : ٣) المطلوب حل المعادلة :-

$$٩ س^٢ + ٦ س + ١ = ٠$$

الحل : لنشكل القاسمة بملاحظة ب = ٩ ، حـ = ٦ ، د = ١

فنجد : ا = حـ^٢ − ٤ ب د = ٣٦ − ٣٦ = ٠

اذن : للمعادلة جذر واحد مضاعف وهو :

$$س = \frac{- حـ}{٢ ب} = \frac{- ٦}{١٨} = - \frac{١}{٣}$$

ويمكن (بند ٩) كتابة المعادلة المعطاة بالشكل : $\left(س + \frac{١}{٣} \right)^٢ = ٠$

اي بشكل مربع تام .

١٤ — مثال : ٤) المطلوب حل المعادلة : $س^٢ + س + ١ = ٠$

الحل : لنشكل القاسمة فنجد ا = ١ − ٤ = − ٣ اذن : القاسمة سالبة وللمعادلة جذران وهميان ، اي ليس لها جذور حقيقية .

١٥ — ملاحظة : ١) اذا كانت الكميتان ب ، د مختلفتين بالاشارة يكون للمعادلة حتماً جذران حقيقيان ومختلفان لان القاسمة حـ^٢ − ٤ ب د تكون وقتئذ موجبة دائماً حيث انها تصبح مكونة من مجموع عددين موجبين وهما حـ^٢ الموجب و − ٤ ب د الموجب ايضاً . اي :

$$حـ^٢ - ٤ ب د = حـ^٢ + (- ٤ ب د)$$

١٦ — ملاحظة : ٢) ان قانون جذري المعادلة التي من الدرجة الثانية يختصر فيما اذا كانت حـ زوجية ، لذلك لنفرض ان $حـ = ٢ حَ$ اي ان حـ هي عدد زوجي ، فعندئذ تصبح القاسمة :

$$حـ^{٢} - ٤ ب د = ٤ حَ^{٢} - ٤ ب د = ٤ (حَ^{٢} - ب د)$$

ويصبح جذرا المعادلة هما :

$$س = \frac{- ٢ حَ \pm \sqrt{٤ (حَ^{٢} - ب د)}}{٢ ب}$$

وباخراج المضروب ٤ خارج الجذر نجد :

$$س = \frac{- ٢ حَ \pm ٤ \sqrt{حَ^{٢} - ب د}}{٢ ب}$$

او :

$$\boxed{س = \frac{- حَ \pm \sqrt{حَ^{٢} - ب د}}{ب}}$$

فهذا هو القانون الزوجي الذي يجب حفظه ، والذي يعطي جذري المعادلة عند ما تكون حـ زوجية تساوي ضعف حَ .

تمارين

١] $٣س^{٢} - ٢س = ٠$ ٢] $س^{٢} - ٩ = ٠$

٣] $-٥س^{٢} + ٦س = ٠$ ٤] $٢س^{٢} + ٥ = ٠$

٥] $س^{٢} - ٧س + ١٠ = ٠$ ٦] $٢س^{٢} - ٥س - ٣ = ٠$

٧] $٢س^{٢} - ٣,١س + ٠,٤٢ = ٠$ ٨] $٩س^{٢} + ٦س + ١ = ٠$

٩] $٨س^{٢} - س + ٣ = ٠$ ١٠] $\frac{١}{س} + \frac{٣}{٢} = \frac{١}{س + ٣}$

١١] $\frac{س + ٢}{١ + ٢س} = \frac{٣س + ٤}{٣ + ٤س}$ ١٢] $\frac{س}{س - ١} + \frac{س}{س - ٩} = ٠$

١٣] $-٥س^{٢} + ١٢س + ٩ = ٠$ ١٤] $س(س - ٥) = ٢س - ٣$

١٥] $\left(س - \frac{١}{٢}\right)\left(س - \frac{١}{٣}\right) + \left(س - \frac{١}{٣}\right)\left(س - \frac{١}{٤}\right) =$

$\left(س - \frac{١}{٤}\right)\left(س - \frac{١}{٥}\right)$

١٦] $(هـ س - حـ)(حـ س - هـ) = ط^{٢}$

١٧] $\sqrt{٢}\, س^{٢} - ٢\sqrt{٣}س + \sqrt{٢} = ٠$

١٨] $(\sqrt{٣} + ١)س^{٢} + (\sqrt{٢} - \sqrt{٣})س - (١ + \sqrt{٢}) = ٠$

١٩] $(\sqrt{٥} + \sqrt{٢})س^{٢} - ٢\sqrt{٢}س - ٤\sqrt{٥} = ٠$

٢٠] $(\sqrt{هـ} + ١)س^{٢} + ٢\sqrt{هـ}س + \sqrt{هـ} - ١ = ٠$

٢١] المطلوب حل المعادلة :

$ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$

مع العلم ان : $ب + حـ + د = ٠$

[٢٢] كرر السؤال السابق مع العلم ان : ب — حـ + د = ٠

[٢٢] » » » » » » » ٩ب + ٣حـ + د = ٠

[٢٤] » » » » » » » ٤ب — ٢حـ + د = ٠

[٢٥] $\frac{س + ١}{س} + \frac{س + ١}{س - ٨} = ١$

[٢٦] $\frac{١}{س - ٨} + \frac{١}{س - ٦} + \frac{١}{س + ٦} + \frac{١}{س + ٨} = ٠$

[٢٧] $\frac{س + هـ}{س - هـ} + \frac{س + ل}{س - ل} + \frac{٢(س + ٢ط)}{٢ط - س} = ٠$

[٢٨] $\frac{١}{س - ١} + \frac{٢}{س - ٢} + \frac{٣}{س - ٣} - \frac{٦}{س - ٦} = ٠$

[٢٩] $\frac{٤}{س} - \frac{٣}{س + هـ} - \frac{٢}{س + ٢هـ} + \frac{١}{س + ٣هـ} = ٠$

[٢٠] $\frac{١}{س - هـ} - \frac{٢}{س - ٢هـ} + \frac{٣}{س - ٣هـ} = ٠$

[٢١] $\frac{هـ}{س - هـ} + \frac{ل}{س - ل} = \frac{٢ط}{س - ط}$

[٢٢] $١ + ل س + \frac{س^٢}{هـ - س} = \frac{هـ^٢}{هـ - س}$

[٢٣] $\left[\frac{ط + س}{ط - س}\right]^٢ = ١ + \frac{ق س}{ط هـ}$

[٢٤] $\frac{س}{س - ١} - \frac{٢}{س + ١} = \frac{٨}{س^٢ - ١}$

[٢٥] $\frac{٢}{س^٢ - ٤} - \frac{١}{س(س - ٢)} + \frac{س - ٤}{س(س + ٢)} = ٠$

٣٦] $\frac{(٣-س)^{٢}+(٤-س)^{٢}}{(٣-س)^{٢}+(٤-س)^{٢}}=٧$

٣٧] $\frac{(س-ب)(س-د)}{(ح-ب)(ح-د)}+\frac{(س-ح)(س-د)}{(ب-ح)(ب-د)}=١$

٣٨] $\frac{١}{س}+\frac{١}{ب}+\frac{١}{ح}=\frac{١}{س+ب+ح}$

٣٩] $\frac{ب}{س+ب}+\frac{ح}{س+ح}=\frac{(ب+ح)^{٢}}{ب ح}$

٤٠] $\frac{س}{ب}+\frac{ح}{س}+\frac{ح^{٢}}{س^{٢}}=١+\frac{ح}{ب}+\frac{ح^{٢}}{ب^{٢}}$

٤١] عين قيمة الحرف ب المذكور في المعادلة :

$$\frac{س-ب}{٢}-\frac{س+٣}{٤}=٣\left[٢س+\frac{٤}{١-\frac{س+ب}{س-ب}}\right]$$

لاجل ان يكون لها جذر يساوي ٢٩ ؟

٤٢] $(ط-١)س^{٢}-ط س+١=٠$

٤٣] $س^{٢}+٤ح س=ب^{٢}+٢ب ح-٣ح^{٢}$

٤٤] $س^{٢}-٢(هـ+١)س+٤هـ=٠$

٤٥] $(ب^{٢}-ح^{٢})س^{٢}-٢ب س+١=٠$

٤٦] $ب(ب+١)س^{٢}+س-ب(ب-١)=٠$

٤٧] $(ب^{٢}+ب-٢)س^{٢}+(٢ب^{٢}+ب+٣)س+ب^{٢}-١=٠$

٤٨] بين بأن للمعادلتين :

$(٢ب^{٢}-٣ب-٢)س^{٢}+(ب^{٢}+٧ب+٢)س-ب^{٢}-٢ب=٠$

$(٤ب^{٢}+٤ب+١)س^{٢}-(٤ب^{٢}+٢ب)س+ب^{٢}=٠$

جذر مشترك ؟

٤٩] $س^{٢} - ١٧ س^{٢} + ١٦ س = ٠$

٥٠] $٣ س^{٢} + ٧ س^{٢} + ٥ س + ١ = ٠$

٥١] $٦ س^{٢} - ١٣ س^{٢} + ٤ س + ٣ = ٠$

٥٢] $٣ س^{٢} - ٦ س^{٢} - س + ٢ = ٠$

مسائل
بسيطة من الدرجة الثانية

١] المثلث ب ح د قائم الزاوية ، واطوال اضلاعه اعداد صحيحة متتابعة فما هي اطوال اضلاعه ؟

٢] اضلاع المثلث ب ح د هي ٧ ، ١٤ ، ١٥ فما هو الطول الواحد الذي يجب طرحه من اضلاع هذا المثلث ليصبح قائم الزاوية ؟

٣] اوجد عدداً مركباً من جداء ثلاثة اعداد صحيحة متتابعة ، مع معرفة ان مجموع حواصل القسمة الناشئة من تقسيم هذا العدد على احد كل مضروب من مضاربيه يساوي ٤٧ .

٤] اوجد عدداً مجموع مربعه مع مكعبه يساوي ٩ امثال العدد الذي يليه .

٥] اشترى رجل حاجة ثم باعها بمبلغ ٢١ ديناراً فخسر بالمئة بمقدار رأسمال هذه الحاجة . فكم خسر ؟

٦] في المثلث ب ح د الزاوية ح = ٦٠° والضلع ب د = ٥ $\sqrt{٣}$ والضلع ح د = ١٠ احسب طول الضلع ب ح

٧] صنبوران يملآن معاً حوضاً بمدة ٤٨ ساعة ، والاول وحده يملأ الحوض بمدة تنقص ٤٠ ساعة عن المدة اللازمة للثاني ليملأ هذا الحوض وحده . فبكم ساعة يملأ كل منهما الحوض ؟

٨] قسم العدد ٢٠ الى جزئين على ان يكون اكبرهما وسطاً هندسياً بين العدد وبين الجزء الصغير .

٩] باي ميزان للعد يكتب العدد ٦٧ بالشكل ١٥١ ؟

١٠] ما هو العدد الذي الفرق بين مقلوبه ومقلوب الذي يليه يساوي ٠,٠٥

الفصل الثاني

علاقات جذور المعادلة التي من الدرجة الثانية مع امثال حدودها

اشارات الجذور

مجموع الجذرين وحداؤهما

١٧ — لتكن المعادلة : $ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$ (١)

ولنفرض ان قاسمتها $ا > ٠$ اي لنفرض ان لها جذرين حقيقيين وهما $س_{َ}$ ، $س_{ً}$ فاذا بدلنا في هذه المعادلة المجهول س بالعدد $س_{َ}$ فان $س_{َ}$ يحققها ، اي يجعل الطرف الاول صفراً . اذن : الجانب الاول من هذه المعادلة (١) يقبل القسمة على $(س - س_{َ})$ وكذلك لو بدلنا س بالعدد $س_{ً}$ فانه يحققها . اذن : المعادلة (١) تقبل القسمة على $(س - س_{ً})$ ايضاً . اذن : هي تقبل القسمة على جداثها [لان $س_{َ}$ ، $س_{ً}$ مختلفان $ا > ٠$ (انظر المادة ١٤١ ، ١٤٤)] ونحصل على المطابقة الآتية :

$$ب س^{٢} + حـ س + د \equiv ب (س - س_{َ}) (س - س_{ً})$$

وبحل الاقواس في الجانب الثاني نجد :

$$ب س^{٢} + حـ س + د \equiv ب س^{٢} - ب (س_{َ} + س_{ً}) س + ب س_{َ} س_{ً}$$

فمن هذه المطابقة الاخيرة نستنتج انه يجب ان تكون امثال القوى المتساوية في الطرفين متساوية (بند ١٣٤ الجزء الاول) لانه لو نقلنا جميع الحدود للجانب الاول نحصل على كثيرة حدود مطابقة للصفر . اذن : يجب ان يكون :

$$حـ = - ب (س_{َ} + س_{ً}) \quad (٢)$$

$$د = ب س_{َ} س_{ً} \quad (٣)$$

فمن العلاقة (٢) نستنتج ان : $\boxed{س_{\alpha} + س_{\beta} = -\frac{ح}{ب}}$

ومن العلاقة (٣) نستنتج ان : $\boxed{س_{\alpha} \cdot س_{\beta} = \frac{د}{ب}}$

نتيجة : ١) مجموع الجذرين يساوي خارج قسمة نظير امثال الـ س على امثال الـ $س^{٢}$

٢) ان جداء الجذرين يساوي خارج قسمة العدد الثابت د على امثال الـ $س^{٢}$

٣) المعادلة التي جذراها $س_{\alpha}$ ، $س_{\beta}$ تكتب بالشكل :

$$ب(س - س_{\alpha})(س - س_{\beta}) = ٠$$

١٨ — ملاحظة : ان القانونين المذكورين سابقاً يأخذان شكلا سهلا عند ما تكون $ب = ١$ اي عند ما تكون المعادلة من الشكل :

$$س^{٢} + هـ س + و = ٠$$

فيكون وقتئذ : $س_{\alpha} + س_{\beta} = -هـ$ ، $س_{\alpha} \cdot س_{\beta} = و$

طريقة ثانية

لايجاد مجموع الجذرين وجدائهما

١٩ — يمكن ايجاد مجموع الجذرين بصورة ثانية ، فلو فرضنا ان القاسمة ما موجبة يكون للمعادلة جذران حقيقيان هما :

$$س_{\alpha} = \frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ب د}}{٢ب} \quad ، \quad س_{\beta} = \frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}$$

فبجمع هاتين المساواتين نجد ان : $س_{\alpha} + س_{\beta} = \frac{-٢ح}{٢ب} = -\frac{ح}{ب}$

وهذا ما وجدناه سابقاً .

٢٠ — ايجاد جداء الجذرين : يمكن ايضاً ايجاد جداء الجذرين بالطريقة الثانية الاتية : لو فرضنا ان ا موجبة يكون للمعادلة جذران حقيقيان ، وهما :

$$س_{\alpha} = \frac{-حـ + \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب} \quad ، \quad س_{\beta} = \frac{-حـ - \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}$$

فبضرب هاتين المساواتين نجد ان :

$$س_{\alpha} \cdot س_{\beta} = \left[\frac{-حـ + \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}\right]\left[\frac{-حـ - \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}}{٢ب}\right]$$

فالصورة في الطرف الثاني من هذه المساواة هي من الشكل :

$$(ك + ط)(ك - ط)$$

فهي اذن تساوي $ك^{٢} - ط^{٢}$ وذلك بفرض ان :

$$ك = -حـ \quad ، \quad ط = \sqrt{حـ^{٢} - ٤ب د}$$

اذن :
$$س_{\alpha} \cdot س_{\beta} = \frac{حـ^{٢} - (حـ^{٢} - ٤ب د)}{٤ب}$$

ومنها :
$$س_{\alpha} \cdot س_{\beta} = \frac{د}{ب}$$

وهذا ما وجدناه بالطريقة الاولى .

٢١ — العكس : لنفتش عن المعادلة التي من الدرجة الثانية والتي مجموع جذريها يساوي $-\frac{حـ}{ب}$ والتي جداء جذريها يساوي $\frac{د}{ب}$ اي التي جذراها $س_{\alpha}$ ، $س_{\beta}$ يحققان المساواتين :

$$س_{\alpha} + س_{\beta} = -\frac{حـ}{ب} \quad ، \quad س_{\alpha} س_{\beta} = \frac{د}{ب}$$

فهذه المعادلة (بند ١٧) تكون من الشكل :

$$ب(س - س_{\alpha})(س - س_{\beta}) = ٠$$

وبعد فك الاقواس والترتيب نجد ان المعادلة المطلوبة هي :

$$ب\,س^{٢} - ب\,(س_{١} + س_{٢})\,س + ب\,س_{١}\,س_{٢} = ٠$$

وبتبديل $س_{١} + س_{٢}$ ، $س_{١}\,س_{٢}$ بما يساويهما ، نجد ان المعادلة المطلوبة هي :

$$ب\,س^{٢} + حـ\,س + د = ٠$$

ولا يكون لهذه المسألة المفروضة طبعاً حل الا اذا كانت القاسمة $حـ^{٢} - ٤\,ب\,د$ موجبة او صفراً . ومما سبق نستنتج النظرية الاتية :

نظرية : الشرط اللازم والكافي لاجل ان يكون العددان $س_{١}$ ، $س_{٢}$ جذري المعادلة التي من الدرجة الثانية $ب\,س^{٢} + حـ\,س + د = ٠$ هو ان يكون مجموعهما يساوي $-\frac{حـ}{ب}$ وجداؤهما يساوي $\frac{د}{ب}$ وكل ذلك بفرض :

$$حـ^{٢} - ٤\,ب\,د \geqslant ٠$$

٢٢ — تطبيقات : اوجد عددين علم مجموعهما مح وحاصل ضربهما ح .

الحل : بحسب النظرية المتقدمة ، ان هذين العددين هما جذرا المعادلة التي من الدرجة الثانية : $س^{٢} - مح\,س + ح = ٠$

ولا يكون هذان العددان موجودين الا اذا كان $مح^{٢} - ٤\,ح \geqslant ٠$ فاذا كان $مح^{٢} - ٤\,ح > ٠$ يكون العددان هما :

$$س_{١} = \frac{مح + \sqrt{مح^{٢} - ٤\,ح}}{٢} \quad ، \quad س_{٢} = \frac{مح - \sqrt{مح^{٢} - ٤\,ح}}{٢}$$

واما اذا كان $مح^{٢} - ٤\,ح = ٠$ فان العددين يكونان متساويين وكل منهما يساوي $\frac{مح}{٢}$ واذا كان $مح^{٢} - ٤\,ح < ٠$ فالمسألة غير قابلة الحل ، والعددان غير موجودين .

٢٣ — نظرية : اذا كان مجموع عددين موجبين ثابتاً ، فجداؤهما يكون اعظم ما يمكن [اي في نهايته العظمى] عند ما يكون العددان متساويين .

البرهان : لنفرض فيما سبق ان المجموع مح ثابت مع ان الجداء ح متحول وان مح ، ح عددان موجبان ، فالكمية $مح^{٢} - ٤ ح$ تكون موجبة او صفراً طالما $\frac{مح^{٢}}{٤} \geqslant ح$ اي طالما $ح \leqslant \frac{مح^{٢}}{٤}$ اذن اعظم قيمة تأخذها ح هي $\frac{مح^{٢}}{٤}$ فتكون القاسمة وقتئذ صفراً ، ويكون العددان متساويين وهو المطلوب .

مثال : ازواج الاعداد ١ ، ٧ ؛ ٢ ، ٦ ؛ ٣ ، ٥ ؛ ٤ ، ٤ مجموعها ثابت ، اعظمها جداء الزوج الاخير عند ما يساوي العددان $٤ \times ٤ = ١٦$

نتيجة : نستنتج من النظرية السابقة ومن الوجهة الهندسية النتيجة الاتية :
مساحة المربع هي اعظم من جميع مساحات المستطيلات المتساوية معه بالمحيط .

نظرية : ٢) اذا كان لدينا عددان موجبان حاصل ضربهما ثابت ، يكون مجموعهما اصغر ما يمكن (في نهايته الصغرى) عند ما يكونان متساويين .

البرهان : لنفرض الآن ان الجداء ح ثابت مع ان مح متحول . فمن العلاقة $\frac{مح^{٢}}{٤} \geqslant ح$ نستنتج ان $مح^{٢} \geqslant ٤ ح$ اي القيمة الصغرى الى $مح^{٢}$ هي ٤ ح ومنها القيمة الصغرى الى مح هي $٢ \sqrt{ح}$ وذلك بملاحظة ان مح ، ح موجبان ، الا انه عند ما يكون $مح = ٢ \sqrt{ح}$ اي عند ما يكون المجموع في نهايته الصغرى تكون القاسمة $مح^{٢} - ٤ ح$ صفراً فيكون العددان متساويين ، وهو المطلوب .

مثال : ازواج الاعداد : ١ ، ١٦ ؛ ٢ ، ٨ ؛ ٤ ، ٤ جداؤها ثابت اقلها مجموعا الزوج الاخير عند ما تساوى العددان .

نتيجة : محيط المربع هو اصغر من محيط جميع المستطيلات المتساوية معه بالسطح .

٣٦ — توسع — مجموع القوى المتساوية لجذري المعادلة التي من الدرجة الثانية :

ليكن $س_1$ ، $س_2$ جذري المعادلة :

$$ب س^2 + حـ س + د = 0 \qquad (1)$$

ولنجد المجموعات : $س_1^2 + س_2^2$ ، $س_1^3 + س_2^3$ ، $س_1^4 + س_2^4$ ...
حيث القوى متساوية .

لذا لنفرض ان :

$$م_1 = س_1 + س_2$$
$$م_2 = س_1^2 + س_2^2$$
$$م_3 = س_1^3 + س_2^3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$م_{ن-1} = س_1^{ن-1} + س_2^{ن-1}$$
$$م_ن = س_1^ن + س_2^ن$$
$$م_{ن+1} = س_1^{ن+1} + س_2^{ن+1}$$

بما ان $س_1$ ، $س_2$ جذرا المعادلة (١) فاننا نحصل على المطابقتين الاتيتين :

$$ب س_1^2 + حـ س_1 + د = 0 \qquad (2)$$
$$ب س_2^2 + حـ س_2 + د = 0 \qquad (3)$$

وبالجمع نجد : $ب (س_1^2 + س_2^2) + حـ (س_1 + س_2) + 2 د = 0$

وبما ان : $س_1 + س_2 = م_1$ ، $س_1^2 + س_2^2 = م_2$ يكون :

$$ب م_2 + حـ م_1 + 2 د = 0$$

وبما ان : $م_1 = -\frac{حـ}{ب}$ فيكون : $ب م_2 - \frac{حـ^2}{ب} + 2 د = 0$

ومنها : $م_2 = \frac{حـ^2 - 2 ب د}{ب^2}$

اي : $$\boxed{س_{ن-٢}'' + س_{ن}'' = \frac{حـ^{٢} - ٢ د ب}{ب^{٢}}}$$

لنضرب طرفي المعادلة (٢) بالعدد $س_{ن}'$ وطرفي المعادلة (٣) بالعدد $س_{ن}''$ فنجد بعد الجمع ان :

$$ب (س_{ن-٢}'' + س_{ن}'') + حـ (س_{ن-١}' + س_{ن}'') + د (س_{ن}' + س_{ن}'') = ٠$$

لنعوض كل معترضة بما يساويها فنجد :

$$ب م_{٣} + حـ م_{٢} + د م_{١} = ٠$$

ومنها : $$م_{٣} = -\frac{١}{ب} (حـ م_{٢} + د م_{١})$$

فاذا عوضنا $م_{٢}$ ، $م_{١}$ بقيمتيهما نجد :

$$\boxed{س_{ن-٢}'' + س_{ن}''^{٢} = \frac{٣ ب حـ د - حـ^{٣}}{ب^{٣}}}$$

وبصورة عامة لنضرب طرفي المعادلة (٢) بالعدد $س_{ن-٢}'$ وطرفي المعادلة (٣) بالعدد $س_{ن-٢}''$ فبعد الجمع نجد :

$$ب (س_{ن-٢}' + س_{ن}'') + حـ (س_{ن-١}' + س_{ن}'') + د (س_{ن-٢}' + س_{ن}'') = ٠$$

ومنها : $$ب م_{ن} + حـ م_{ن-١} + د م_{ن-٢} = ٠ \qquad (٤)$$

ومنها نجد انه يمكن ايجاد $م_{ن}$ عندما نعلم $م_{ن-١}$ ، $م_{ن-٢}$ لان المساواة (٤)

تعطينا : $$م_{ن} = -\frac{١}{ب} [حـ م_{ن-١} + د م_{ن-٢}] \qquad (٥)$$

ولو كانت المعادلة من الشكل $س^{٢} + هـ س + ط = ٠$ فان القانون (٥) يصبح ابسط ، لان :

$$\frac{ح}{ب} = هـ \quad ، \quad \frac{د}{ب} = ط$$

اذن : يصبح القانون (٥) من الشكل :

$$م = - \begin{bmatrix} هـ م_{ن-١} + ط م_{ن-٢} \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نستنتج النظرية الاتية :

نظرية : ان مجموع القوى المتساوية الموجبة لجذري المعادلة :

$$س^{٢} + هـ س + ط = ٠$$

هي كثيرات حدود صحيحة بالنسبة الى هـ ، ط لان المخارج $ب ، ب^{٢} ، ب^{٣} ، \ldots$ تصبح واحداً .

طريقة ثانية : ١°) من الوجهة العملية يكفي ان نعلم ان :

$$س'^{٢} + س''^{٢} = (س' + س'')^{٢} - ٢ س' \cdot س''$$

اي :

قاعدة : مجموع مربعي الجذرين يساوي مربع مجموعهما ناقصاً ضعف جدائهما .

٢°) $س'^{٢} + س''^{٢} = (س' + س'')^{٢} - ٣ س' س'' (س' + س'')$

اي :

قاعدة : مجموع مكعبي الجذرين يساوي مكعب المجموع مطروحاً منه ثلاثة امثال حاصل ضرب الجداء في المجموع .

اشارة الجذرين

٣٥ — ان العلاقات السابقة الكائنة ما بين جذري المعادلة التي من الدرجة الثانية والامثال تساعدنا على تعيين اشارة كل من الجذرين ، كما تساعدنا على مقارنة الجذرين بدون حسابها .

في الحقيقة لنأخذ المعادلة :

$$ب س^{٢} + ح س + د = ٠$$

ولنفرض ان : $ح^{٢} - ٤ ب د > ٠$ فيكون للمعادلة جذران ، وهما :

$س'$ ، $س''$ وقد وجدنا (بند ١٧) ان $س' \cdot س'' = \frac{د}{ب}$ اذن معرفة اشارة

$\frac{د}{ب}$ وحدها تعلمنا فيما اذا كان الجذران من اشارة واحدة او من اشارتين مختلفتين ،

لذلك نجد ثلاث حالات :

١ً) $\frac{د}{ب} > ٠$ فيكون جداء الجذرين موجباً اي : الجذران متحدان بالاشارة

٢ً) $\frac{د}{ب} < ٠$ فيكون جداء الجذرين سالباً اي : الجذران مختلفان بالاشارة

٣ً) $\frac{د}{ب} = ٠$ فيكون احد الجذرين صفراً واما الآخر فيساوي المجموع .

٢٦ — الحالة الاولى $\frac{د}{ب}$ **موجب** : بعد ان علمنا ان الجذرين هما من اشارة واحدة وجب علينا ان نعلم ما هي هذه الاشارة ، فهذه الاشارة هي اشارة مجموع الجذرين ، لذلك ندرس علامة مجموعهما وهو : $س' + س'' = -\frac{ح}{ب}$

فان كان : $-\frac{ح}{ب} > ٠$ يكون الجذران موجبين .

وان كان : $-\frac{ح}{ب} < ٠$ يكون الجذران سالبين .

٢٧ — الحالة الثانية : $\frac{د}{ب} < ٠$ فالجذران مختلفان بالاشارة ،

ودرس اشارة مجموعهما يدلنا على ايهما اكبر بالقيمة المطلقة .

بالحقيقة عند ما نجمع عددين مختلفين بالاشارة ، فان اشارة المجموع تكون كاشارة العدد الاكبر بالقيمة المطلقة . لذلك اذا كان الجذران $س'$ ، $س''$ مختلفين بالاشارة

اي اذا كان $\frac{د}{ب} < ٠$ فاننا نميز ثلاثة فروع :

١ً) اذا كان $-\frac{ح}{ب}$ موجباً يكون الجذر الموجب هو الاكبر بالقيمة المطلقة

٢ً) اذا كان $-\frac{ح}{ب}$ سالباً يكون الجذر السالب هو الاكبر بالقيمة المطلقة

٣ً) اذا كان $-\frac{ح}{ب}$ صفراً يكون الجذران متناظرين ، اي متساويان بالقيمة المطلقة ومختلفان بالاشارة ، كما تكون المعادلة من الشكل :

$$ب س^{٢} + د = ٠$$

٢٨ — الحالة الثالثة : $\frac{د}{ب} = ٠$ او $د = ٠$ فالمعادلة التي من الدرجة الثانية تصبح من الشكل :

$$ب س^{٢} + ح س = ٠ \quad \text{او} \quad س (ب س + ح) = ٠$$

ولاجل ان يكون الطرف الاول من هذه المعادلة صفراً وجب ان يكون :

اما $س = ٠$ واما $ب س + ح = ٠$ ومنها : $س = -\frac{ح}{ب}$

اذن : يوجد في هذه الحالة جذر يساوى الصفر ، واما الآخر فيساوي المجموع :

$$-\frac{ح}{ب} \cdot$$

فان كان $-\frac{ح}{ب} > ٠$ يكون الجذر الثاني موجباً ، وان كان $-\frac{ح}{ب} < ٠$

يكون الجذر الثاني سالباً ، وان كان $-\frac{ح}{ب} = ٠$ اي : $ح = ٠$ عندئذ تصبح المعادلة من الشكل $ب س^{٢} = ٠$ اي ان لها جذراً مضاعفاً وهو الصفر .

٣٩ — الخلاصة : يمكن ان نلخص كل ما مر سابقاً بالجدول الآتي :

١) $\frac{د}{ب} > ٠$ — يوجد حتماً للمعادلة جذران مختلفان بالاشارة

- اذا كان $-\frac{ح}{ب} > ٠$: يكون الجذر الموجب هو الاكبر بالقيمة المطلقة
- اذا كان $-\frac{ح}{ب} < ٠$: يكون الجذر السالب هو الاكبر بالقيمة المطلقة
- اذا كان $-\frac{ح}{ب} = ٠$: يكون الجذران متناظرين .

٢) $\frac{د}{ب} < ٠$ — هنا يجب ان تكون القاسمة موجبة او صفراً

- $ح^٢ - ٤ ب د > ٠$: يوجد جذران متحدان بالاشارة
  - اذا كان $-\frac{ح}{ب} > ٠$: يكون الجذران موجبين
  - اذا كان $-\frac{ح}{ب} < ٠$: يكون الجذران سالبين
- $ح^٢ - ٤ ب د = ٠$: يوجد جذر مضاعف وهو : $\frac{-ح}{٢ ب}$
- $ح^٢ - ٤ ب د < ٠$: لا يوجد للمعادلة جذور .

٣) $\frac{د}{ب} = ٠$ — احد الجذرين صفر والجذر الثاني يساوي $-\frac{ح}{ب}$

- اذا كان $-\frac{ح}{ب} > ٠$: يكون الجذر الثاني موجباً
- اذا كان $-\frac{ح}{ب} < ٠$: يكون الجذر الثاني سالباً
- اذا كان $-\frac{ح}{ب} = ٠$: يكون الجذر الثاني صفراً (اي يوجد جذر مضاعف وهو الصفر)

ولنوضح ما مر بالامثلة الآتية :

٣٠ — مثال: ١) لتكن المعادلة $س^٢ - ٢٠ س + ٧٥ = ٠$ ولنشكل قاسمتها فنجد :

$$ح^٢ - ب د = ١٠٠ - ٧٥ = ٢٥$$

مما يدلنا على ان لها جذرين ، وبما ان جداء هذين الجذرين موجب يساوي ٧٥ ، اذن : الجذران متحدان بالاشارة ، وبما ان مجموعهما ٢٠ موجب ايضاً ، اذن : هما موجبان . وحقيقة لو حسبنا هذين الجذرين نجد احدهما ٥ والآخر ١٥

٣١ — مثال : ٢) لتكن المعادلة $س^{٢} + ١١ س + ١٥ = ٠$ ولنشكل قاسمتها فنجد :

$$حـ^{٢} - ٤ ب د = ١٢١ - ٦٠ = ٦١$$

مما يدلنا على ان لها جذرين ، وبما ان جداءهما ١٥ موجب ، اذن : هذان الجذران متحدان بالاشارة ، وبما ان مجموعهما -١١ سالب ، اذن : هذان الجذران سالبان .

٣٢ — مثال : ٣) لتكن المعادلة $س^{٢} + ٤ س - ١٥ = ٠$ فاذا لاحظنا ان ب ، د مختلفا الاشارة نحكم استناداً على ما مر (بند ١٥) بان لهذه المعادلة جذرين حقيقيين مختلفين بالاشارة ، وبما ان مجموعهما -٤ سالب ، اذن : الكبير بالقيمة المطلقة هو السالب .

٣٣ — تطبيقات : ادرس بحسب تحول قيمة هـ وجود واشارة جذري المعادلة :

$$هـ س^{٢} + (٢ هـ - ١) س + هـ + ٢ = ٠$$

الحل : ١°) ليكون لهذه المعادلة جذران يجب ان تكون قاسمتها فا ≥ ٠ لذلك لنشكل القاسمة فنجد :

$$حـ^{٢} - ٤ ب د = (٢ هـ - ١)^{٢} - ٤ هـ (هـ + ٢) \geq ٠$$

او $\quad ٤ هـ^{٢} - ٤ هـ + ١ - ٤ هـ^{٢} - ٨ هـ \geq ٠$

ومنها : $\quad -١٢ هـ + ١ \geq ٠$

ومنها : $\quad \boxed{هـ \leq \frac{١}{١٢}}$ فهذا هو شرط القاسمة .

٢°) لندرس الآن علامة جداء الجذرين وهو $\frac{هـ + ٢}{هـ}$ فنحن نعلم ان اشارة الكسر $\frac{ص}{م}$ هي عين اشارة الجداء $ص \times م$ لذلك لندرس اشارة الجداء

هـ (هـ + ٢) وذلك بواسطة الجدول الآتي : (انظر الجزء الاول ، مادة ٢١٦) .

	$-\infty$		-٢		٠		$+\infty$
هـ							
هـ	−		−		+		+
هـ + ٢	−		+		+		+
هـ (هـ + ٢)	+		−		+		+

لندرس الآن اشارة مجموع الجذرين وهو $\frac{١ - ٢ هـ}{هـ}$ لذلك ندرس اشارة الجداء هـ (١ − ٢ هـ) بالجدول الآتي :

	$-\infty$		٠		$\frac{١}{٢}$		$+\infty$
هـ							
هـ	−		+		+		+
١ − ٢ هـ	+		+		−		−
هـ (١ − ٢ هـ)	−		+		−		−

ولو جمعنا هذين الجدولين بجدول واحد ولاحظنا شرط القاسمة فاننا نحصل على الجدول الآتي :

هـ		$-\infty$		-٢		٠		$\frac{١}{١٢}$		$\frac{١}{٢} + \infty$
فا	+		+		+		+	٠	−	
ح	+		+	٠	−	∞	+			
مح	−		−		+	∞	+			
النتائج	$٠ > س'' > س'$ الجذران سالبان		$س'' = ٠ ، س' = -\frac{٥}{٢}$		السالب اكبر في القيمة المطلقة $س'' > ٠ > س'$		$س' = ٢ ، س'' = \infty$		$س'' > ٠ > س'$ الجذران موجبان	$س' = س'' = ٥$ القاسمة سالبة ولا يوجد جذور

فهذا الجدول يرينا انه :

١") اذا كانت $هـ > -٢$ تكون القاسمة موجبة ويكون جداء الجذرين موجباً ، اذن : الجذران موجودان ومتحدان بالاشارة ، وبما ان المجموع سالب ، اذن : الجذران سالبان .

٢") واذا كانت $-٢ < هـ < ٠$. فالقاسمة موجبة والجداء سالب ، اذن : الجذران موجودان ومختلفان بالاشارة ، وبما ان المجموع سالب ، اذن : الكبير بالقيمة المطلقة سالب .

٣") واذا كانت $٠ < هـ < \frac{١}{١٢}$ فالقاسمة موجبة والجداء موجب ، اذن : الجذران موجودان ومتحدان بالاشارة ، وبما ان المجموع موجب ايضاً ، اذن: الجذران موجبان .

٤") اذا كانت $هـ > \frac{١}{١٢}$ فالقاسمة سالبة ولا يوجد جذور .

ولندرس الآن الحالات الخاصة الآتية :

الحالة الاولى : $هـ = -٢$ فيكون جداء الجذرين صفراً ، اي احدهما $س'' = ٠$ والآخر هو قيمة مجموع الجذرين $\frac{١ - ٢هـ}{هـ}$ بعد ابدال الـ $هـ$ بـ -٢ اي هو $س' = -\frac{٥}{٢}$ وحقيقة في هذه الحالة تصبح المعادلة من الشكل :

$$-٢س^٢ - ٥س = ٠$$

فجذراها هما : $س'' = ٠$ ، $س' = -\frac{٥}{٢}$

الحالة الثانية : $هـ = ٠$ في هذه الحالة يفقد الحد $س^٢$ وتصبح المعادلة من الشكل :

$$س + ٢ = ٠$$

اي من الدرجة الاولى ، اي يكون اصبح احد جذريها في ما لا نهاية كما مر معنا (بند ١٠) ، واما الثاني فهو : س = ٢

الحالة الثالثة : $هـ = \frac{١}{١٢}$ فتكون قاسمة المعادلة صفراً ، اي للمعادلة جذر مضاعف يساوي قيمة نصف المجموع $\frac{١ - ٢هـ}{٢هـ}$ بعد ابدال هـ بـ $\frac{١}{١٢}$ اي

$س_{ن} = س_{٢}$ = ٥ وحقيقة عند ما $هـ = \frac{١}{١٢}$ تصبح المعادلة من الشكل :

$$\frac{س^{٢}}{١٢} - \frac{٥}{٦} س + \frac{٢٥}{١٢} = ٠$$

او : $س^{٢} - ١٠ س + ٢٥ = ٠$ او : $(س - ٥)^{٢} = ٠$

ومنها : س = ٥ فالجدول السابق يلخص كل ما سبق .

الفصل الثالث

المعادلات الصماء

٣٤ — ذكرنا في الفصلين السابقين كيفية حل ومناقشة المعادلة التي من الدرجة الثانية ، ولنذكر الآن كيفية حل المعادلة الصماء التي يعود حلها الى حل معادلة من الدرجة الثانية ، وذلك بأن نعزل الجذر اولاً وان نربع الطرفين كي نذهب الجذر ثانياً . ولكن قبل التربيع يجب ان نناقش ، لانه من المعلوم (بند ١٨٦ الجزء الاول) ان التربيع قد يدخل جذوراً اجنبية ولا يعطي معادلات متكافئة تماماً ، والامثلة الآتية توضح لنا ذلك :

٣٥ — مثال : المطلوب حل المعادلة :

$$س + \sqrt{س} = ٣٠ \qquad (١)$$

الحل : لنعزل الجذر على حدة فنجد :

$$\sqrt{س} = ٣٠ - س \qquad (٢)$$

مما يدلنا على انه يجب ان تكون $\boxed{س < ٣٠}$ لان الجانب الاول موجب فيجب ان يكون الجانب الثاني موجباً ايضاً .

لنربع طرفي المعادلة (٢) فنجد :

$$س = (٣٠ - س)^{٢} \qquad (٣)$$

وهذه المعادلة الاخيرة تدلنا على ان س سوف تكون موجبة .

وبحل الاقواس نجد :

$$س = ٩٠٠ - ٦٠ س + س^{٢}$$

ومنها : $س^{٢} - ٦١ س + ٩٠٠ = ٠$ (٤)

فهذه معادلة من الدرجة الثانية ، لنحلها مبتدئين بتشكيل قاسمتها فنجد :

$$\text{ا} = ح^{٢} - ٤ ب د = ٣٧٢١ - ٣٦٠٠ = ١٢١$$

اذن $\text{ا} > ٠$ اي يوجد للمعادلة (٤) جذران حقيقيان وهما :

$$س_{١} = \frac{٦١ + \sqrt{١٢١}}{٢} = \frac{٦١ + ١١}{٢} = ٣٦$$ وهو غير مقبول .

$$س_{٢} = \frac{٦١ - \sqrt{١٢١}}{٢} = \frac{٦١ - ١١}{٢} = ٢٥$$ وهو مقبول .

المناقشة : ان المعادلة (٣) [التي ترينا ان س موجب حتما] لا تكافيء المعادلة (٢) فقط بل انها تحوي ايضاً على جذور المعادلة :

$$- \sqrt{س} = ٣٠ - س$$ (٥)

وحقيقة لو ربعنا طرفي هذه المعادلة (٥) نحصل بالنتيجة على نفس المعادلة (٤) ، الا انه كما قلنا سابقاً اذا لاحظنا ان كل حل للمعادلة (٢) يجب ان يجعل المقدار $٣٠ - س$ موجباً مع ان كل حل للمعادلة (٥) يجعل المقدار $٣٠ - س$ سالباً نحكم ان الحل الوحيد المقبول للمعادلة (٢) هو الحل الذي يكون اصغر من ٣٠ اذن : يجب ان نقبل الجذر $س = ٢٥$ فقط ، واما الجذر الثاني $س = ٣٦$ فهو اجنبي لا يحقق المعادلة المعطاة (٢) بل يحقق المعادلة (٥) التي تنشأ من المعادلة (٢) بتغيير اشارة احد الجانبين [تغيير اشارة الجذر] .

٣٦ — مثال : ٢) المطلوب حل المعادلة :

$$\sqrt{س} + \sqrt{٢ س + ١} = ٥$$ (١)

الحل : لنعزل احد الجذرين فنجد :

$$\sqrt{٢ س + ١} = ٥ - \sqrt{س}$$ (٢)

مما يدلنا على انه يجب ان يكون :

$$\sqrt{س} < ٥$$ اي : $س < ٢٥$

ثم لنربع الطرفين فنجد :

$$(٢س + ١) = (٥ - ١\overline{س})^{٢} \qquad (٣)$$

او :

$$٢س + ١ = ٢٥ - ١٠ \, ١\overline{س} + س$$

لنعزل الجذر مرة ثانية فنجد :

$$١٠ \, ١\overline{س} = ٢٤ - س \qquad (٤)$$

مما يدلنا على انه يجب ان يكون :

$$س < ٢٤$$

ثم لنربع الطرفين مرة ثانية فنجد :

$$١٠٠ س = (٢٤ - س)^{٢} \qquad (٥)$$

مما يدلنا على ان س موجبة حتماً ، او :

$$١٠٠ س = ٥٧٦ - ٤٨ س + س^{٢}$$

واخيراً :

$$س^{٢} - ١٤٨ س + ٥٧٦ = ٠ \qquad (٦)$$

فهذه معادلة من الدرجة الثانية لنحلها مبتدئين بتشكيل قاسمتها لكي نعلم فيما اذا كان لها جذور ام لا ؟ فنجد ان القاسمة هي :

$$\Delta = ح^{٢} - ب د = (٧٤)^{٢} - ٥٧٦ = ٤٩٠٠$$

اذن :

$$\Delta > ٠$$

اي يوجد للمعادلة (٦) جذران وهما :

$$س' = ٧٤ + ٧٠ = ١٤٤$$ وهو غير مقبول

$$س'' = ٧٤ - ٧٠ = ٤$$ وهو مقبول

المناقشة : جذور المعادلة الاخيرة (٦) لا تكون مقبولة الا اذا كانت تجعل بآن واحد الجانب الثاني من المعادلة (٤) موجباً ، والجانب الثاني من المعادلة (٢) موجباً ايضاً ، فلاجل ان يكون الجانب الثاني من المعادلة (٤) موجباً يكفي ان يكون $س < ٢٤$ وليكون الجانب الثاني من المعادلة ٢ موجباً يكفي ان يكون $س < ٢٥$

اذن : يجب ان ننتخب من جذور المعادلة (٦) الجذر الذي اصغر من ٢٤ وهو $س' = ٤$ وان نهمل الآخر . ويستحسن احياناً تجريب كل من الجذرين رأساً لمعرفة الموافق منهما بطريقة التحقيق .

٣٧ — ملاحظة : ان المعادلات الاربع الآتية :

$$(١) \quad \overline{س}^{٢} + \overline{٢ س + ١}^{٢} = ٥$$

$$(٢) \quad \overline{س}^{٢} - \overline{٢ س + ١}^{٢} = ٥$$

$$(٣) \quad - \overline{س}^{٢} + \overline{٢ س + ١}^{٢} = ٥$$

$$(٤) \quad - \overline{س}^{٢} - \overline{٢ س + ١}^{٢} = ٥$$

تعطينا نفس المعادلة (٦) فالمعادلة (٣) منها تقبل الجذر $س = ١٤٤$ واما المعادلتان (٢) ، (٤) ليس لها جذور ، وهذا ظاهر في المعادلة (٤) لان جانبها الاول سالب والثاني موجب . واما في المعادلة (٢) فالجذر الاول $\overline{س}^{٢}$ يدلنا على انه يجب ان يكون س موجباً ، اذن : لا يمكن ان يكون $\overline{س}^{٢}$ اكبر من $\overline{٢ س + ١}^{٢}$ فالفرق بين هذين الجذرين سالب لا يمكنه ان يتساوى مع العدد ٥ الموجب .

تمارين

١] هل يوجد للمعادلة $-٣س^{٢}+١١س+٤=٠$ جذران حقيقيان ؟ وما علامة كل منهما ؟ حقق ان العدد $-\frac{١}{٣}$ هو جذر لها . ما هو الجذر الآخر ؟

٢] حقق ان العدد $\sqrt{٥}$ هو جذر للمعادلة $س^{٢}+س-٥-\sqrt{٥}=٠$ ما هو الجذر الآخر ؟

٣] ادرس بحسب قيم هـ وجود جذري المعادلة :

$$(هـ+٣)س^{٢}-(هـ-١)س+(هـ-١)=٠$$

وعلامة كل منهما .

اعد السؤال نفسه من اجل المعادلة :

$$(هـ+٢)س^{٢}+(هـ-١)س+(هـ-١)=٠$$

٤] عين قيم الحرف هـ لاجل ان يكون للمعادلات :

$$س^{٢}-٦س+٤هـ+٨=٠$$

$$(هـ-٣)س^{٢}-٢س+هـ^{٢}+١=٠$$

$$(هـ^{٢}+١)س^{٢}+٦س-٢هـ+٥=٠$$

جذران من علامتين مختلفتين .

٥] عين قيمة الحرف هـ لاجل ان يكون للمعادلة :

$$٦س^{٢}-٥س+٢هـ-٥=٠$$

١ً) جذران موجبان .

٢ً) لاجل ان يكون العدد $\frac{١}{٢}$ جذراً لها ، وما هو الجذر الآخر عندئذ ؟

٦] عين قيمة الحرف هـ لاجل ان يكون للمعادلة ؟

$س^{٢} + ٧ س + ٥ هـ + ٢ = ٠$

جذران سالبان .

٧] كون معادلة من الدرجة الثانية جذراها :

$٣\frac{١}{٢}$ ، $-٢\frac{١}{٢}$	٢ ، -٩
$١ + \sqrt{٣}$ ، $١ - \sqrt{٣}$	$-٧ + \sqrt{٢}$ ، $٧ + \sqrt{٢}$
$ب + حـ$ ، $ب - حـ$	$\frac{ب + حـ}{ب - حـ}$ ، $\frac{ب - حـ}{ب + حـ}$
$(ب + حـ)^{٢}$ ، $-(ب - حـ)^{٢}$	$\frac{ب - ١}{ب}$ ، $-\frac{ب}{ب + ١}$
$\frac{١}{ب + حـ}$ ، $\frac{١}{ب - حـ}$	$\frac{ب - حـ}{ب - ٢ حـ}$ ، $-\frac{ب + حـ}{ب + ٢ حـ}$
$-\frac{ب - ١}{ب + ٢}$ ، $-\frac{ب + ١}{ب - ١}$	

٨] عين عددين مجموعهما $٣\frac{٦}{٧}$ وجداؤهما -٢٢ ؟

» » » ١ » $-هـ^{٢} + ٥ هـ - ٦$ ؟

٩] لدينا المعادلة :

$(هـ + ٥) س^{٢} - ٢ (هـ + ١,٥) س + هـ = ٠$

والمطلوب :

١ً) تعيين قيم هـ لاجل ان يكون لهذه المعادلة جذران حقيقيان .

٢ً) عين قيم الحرف هـ لاجل ان يكون للمعادلة (١) جذران يحققان العلاقة : $\frac{١}{س_{١}^{٢}} + \frac{١}{س_{٢}^{٢}} = ٥$ واحسب عندئذ الجذرين $س_{١}$ ، $س_{٢}$

١٠] بفرض $س_{١}$ ، $س_{٢}$ جذري المعادلة :

$ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$

شكل معادلة من الدرجة الثانية جذراها ، هما :

$$١ - \frac{٣}{س_{ا}} \quad ، \quad ١ - \frac{٣}{س_{ب}}$$

١١] $س_{ا}$ ، $س_{ب}$ جذرا المعادلة :

$$س^{٢} + ق\,س + ط = ٠$$

شكل معادلة من الدرجة الثانية جذراها ، هما :

$$\frac{س_{ا}}{٢} + ٣\,س_{ب} \quad ، \quad \frac{س_{ب}}{٢} + ٣\,س_{ا}$$

١٢] احسب المقدار $(١ + \overline{ا}^{٣})^{٧} + (١ - \overline{ا}^{٣})^{٧}$ دون فك القوس ؟

١٣] بفرض $س_{ا}$ ، $س_{ب}$ جذري المعادلة :

$$س^{٢} - ٢\,س + هـ = ٠$$

و $ع_{ا}$ ، $ع_{ب}$ قيمتا الافادة :

$$ع = س^{٢} + هـ\,س + هـ$$

من اجل $س = س_{ا}$ ، $س = س_{ب}$ على الترتيب . إحسب المقدار :

$$ص = \frac{ع_{ا}}{س_{ا}^{٣}} + \frac{ع_{ب}}{س_{ب}^{٣}} + ٢\left(\frac{ع_{ا}}{س_{ا}^{٢}} + \frac{ع_{ب}}{س_{ب}^{٢}}\right) + ٤\left(\frac{ع_{ا}}{س_{ا}} + \frac{ع_{ب}}{س_{ب}}\right)$$

بدلالة هـ .

١٤] المطلوب حل المعادلة :

$$٢\,(ب^{٢} + حـ^{٢})\,س^{٢} - ٣\,س + ب + حـ = ٠$$

باعتبار ب ، حـ جذري المعادلة :

$$س^{٢} - ق\,س + \frac{ق^{٢} - ١}{٢} = ٠$$

١٥] بفرض $س_{ا}$ ، $س_{ب}$ جذري المعادلة :

$$ا\,(س) = ب\,س^{٢} + حـ\,س + د = ٠$$

احسب المقادير :

١") $٤ س_{ن} س_{ن}^{٢} - س_{ن}^{٣} + ٢ س_{ن} س_{ن} + ٤ س_{ن}^{٢} س_{ن} - س_{ن}^{٢}$

٢") $\frac{(٣ س_{ن} + ١)(٣ س_{ن} + ١)}{(٢ س_{ن} - ٩)(٢ س_{ن} - ٩)}$

٣") $\frac{١}{(ب س_{ن} + حـ)^{٢}} + \frac{١}{(ب س_{ن} + حـ)^{٢}}$

بدلالة ب ، حـ ، د ؟

١٦] باعتبار $س_{ن}$ ، $س_{ن}$ جذري المعادلة :

$س^{٢} - هـ س + ٦ = ٠$

عين الحرف هـ لتتحقق العلاقة :

$٩ س_{ن} س_{ن}^{٢} + ٣ س_{ن}^{٣} + ٩ س_{ن} س_{ن}^{٢} + ٣ س_{ن}^{٢} = ١٠٢٩$

١٧] ما قيمة هـ التي تجعل الفرق بين جذري المعادلة :

$٢ س^{٢} - (هـ + ١) س + هـ + ٣ = ٠$

يساوي الواحد ؟

١٨] برهن على ان الفرق بين جذري المعادلة :

$٥ س^{٢} - ٢ (٥ هـ + ٣) س + ٥ هـ^{٢} + ٦ هـ + ١ = ٠$

غير تابع الى هـ .

١٩] لدينا المعادلتان :

$س^{٢} - ٥ س + ط = ٠$ ، $س^{٢} - ٧ س + ٢ ط = ٠$

والمطلوب تعيين ط لاجل ان يكون احد جذري المعادلة الثانية مثلي احد جذري الاولى .

٢٠] عين الحرف هـ المذكور في المعادلة :

$س^{٢} + ٤ (هـ - ٢) س + ٤ هـ^{٢} + ٥ = ٠$

لاجل ان يكون جذرها الواحد ضعف جذرها الآخر .

٢١] نأخذ على مستقيم غير محدود الطولين م ك ، م $ك_{ن}$ المساويين لجذري المعادلة $ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$ ثم نأخذ الطولين م ل ، م $ل_{ن}$ المساويين لجذري المعادلة $ب_{ن} س^{٢} + حـ_{ن} س + د_{ن} = ٠$.

ما هي العلاقة التي يجب ان تكون ما بين الامثال ب ، حـ ، د ؛ بَ ، حـَ ، دَ لاجل ان تصبح العلاقة :

$$\overline{ك\,ط}^{\,2} = \overline{ط\,ل} \times \overline{ط\,لَ}$$

محققة ، وذلك بفرض ط منتصف ك كَ ؟

٢١] فرق الافادات الآتية الى مضروبين كل منهما من الدرجة الاولى :

١) $س^2 - ١٠ س + ٢١$

٢) $٢ س^2 - ٩ س + ١٠$

٣) $س^2 - \left(\frac{حـ}{د} + \frac{د}{حـ}\right) س + ١$

٤) $٤ ب حـ س^2 - ٢ ب (ب + حـ^2) س + ب^2 حـ^2$

٢٢] اختصر الافادات الاتية :

١) $\frac{س - ١}{٢ س^2 - س - ١}$

٢) $\frac{٢ س^2 - ٥ س + ٢}{س^2 - ٣ س + ٢}$

٣) $\frac{س^2 - ٢ حـ س - ٤ ب (ب - ٢ حـ) - ٣ حـ^2}{س^2 - ٤ ب س - حـ^2 + ٤ ب^2}$

٤) $\frac{(٢ س^2 - ١١ س + ١٥)(٢ س^2 - ٥ س + ٣)}{(٢ س^2 - ٧ س + ٦)(٢ س^2 - ١٣ س + ٢٠)}$

٢٤] ضع الافادة :

$$س^2 - (حـ + د) س + حـ^2 - حـ د + د^2$$

على شكل مجموع مربعين .

٢٥] عين قيمة هـ في الافادة :

$$س^2 - (٣ هـ - ١) س + ٥ هـ^2 - ٤$$

لتصبح هذه الافادة مربعاً تاماً .

٢٦] المطلوب حل المعادلات الآتية :

١) $\sqrt{٣س - ١١} - \sqrt{س} = ١$

٢) $\sqrt{س + ١} + \sqrt{٢س + ٣} = ٥$

٣) $٢س + ١ + \sqrt{٧ - ٦س} = ٠$

٤) $٣س + \sqrt{٦س + ١٠} = ٣٥$

٢٧] لتكن المعادلة :

$$س^{٢} + (هـ - ٢)س - (هـ + ٣) = ٠$$

والمطلوب :

١ً) بين ان لهذه المعادلة جذرين واحسب مجموعها وحاصل ضربها .

٢ً) ما هو مجموع مربعي هذين الجذرين ؟

٣ً) عين قيمة هـ ليكون مجموع مربعي هذين الجذرين مساوياً لعدد معلوم مثل ك ، وما هي القيمة الصغرى التي يمكن اعطاؤها الى ك ؟

«البكالوريا السورية»

٢٨] ما هي قيم هـ التي تجعل جذري المعادلة :

$$س^{٢} - ٢(هـ + ١)س + هـ^{٢} - \frac{هـ}{٢} - ٤ = ٠$$

محققين للعلاقة :

$$(س' - ١)(س'' - ١) + ٦ = ٠$$

البحث الثاني

اشارة ذات الحدود الثلاثة التي من الدرجة الثانية

المتراجحات التي من الدرجة الثانية وذات المجهول الواحد

الفصل الأول

اشارة ذات الحدود الثلاثة التي من الدرجة الثانية

٣٨ — تمهيد : ذات الحدود الثلاثة التي من الدرجة الثانية ، هي كثيرة حدود من الدرجة الثانية بالنسبة للمتحول س ، اي تحتوي على ثلاثة حدود وهي :

١°) حد من الدرجة الثانية .

٢°) حد من الدرجة الاولى .

٣°) حد ثابت .

اي هي من الشكل : $ب س^{٢} + حـ س + د$

فاذا اعطينا الى المتحول س قيماً متحولة ، فان القيم المطابقة لكثيرة الحدود هذه تتحول وتتبع في تحولها تحول قيم س ، اذن : هي تابع الى س لذلك نكتب :

$$ا (س) = ب س^{٢} + حـ س + د$$

فاذا جعلنا الطرف الثاني من ذات الحدود الثلاثة صفراً تصبح ذات الحدود الثلاثة معادلة من الدرجة الثانية ، فعندئذ يمكننا ان نكتب :

$$ا (س) = ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$$

لجذور هذه المعادلة تسمى « بجذور ذات الحدود الثلاثة » وقاسمتها تسمى « بقاسمة ذات الحدود الثلاثة »

وسندرس الآن اشارة ثا (س) عند ما تتحول س بأخذها جميع القيم الممكنة من $-\infty$ الى $+\infty$.

٣٩ — الوضع الدرسي لذات الحدود الثلاثة : لدرس اشارة ذات الحدود الثلاثة نكتبها بوضع يشبه الوضع الذي كتبت به المعادلة التي من الدرجة الثانية عند استخراج قانون جذريها .

مثال : لتكن ذات الحدود الثلاثة :

$$\text{ثا}(س) = ب س^{٢} + ح س + د \qquad (١)$$

ولنضع ب خارج قوس فيكون :

$$\text{ثا}(س) = ب \left(س^{٢} + \frac{ح}{ب} س + \frac{د}{ب} \right)$$

فهذه يمكن ان تكتب :

$$\text{ثا}(س) = ب \left[\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} + \frac{د}{ب} - \frac{ح^{٢}}{٤ ب^{٢}} \right]$$

او

$$\text{ثا}(س) = ب \left[\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} + \frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب^{٢}} \right] \qquad (٢)$$

فهذا الوضع الاخير يسمى « **الوضع الدرسي لذات الحدود الثلاثة** » ونرى من هذا الوضع (٢) ان ثا (س) مكون من جداء قسمين : الاول ب ، والثاني القوس الكبير .

والقسم الموضوع داخل القوس الكبير مكون من جزئين : الاول $\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢}$ مربع كامل ، اي موجب دائماً او يساوي الصفر . فيبقى علينا اذن ان ندرس اشارة الجزء الثاني $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب^{٢}}$ وهذا الجزء تابع في اشارته الى اشارة $٤ ب د - ح^{٢}$ لان مخرجه موجب . اذن : تعود المسألة لدرس اشارة المقدار $٤ ب د - ح^{٢}$ او المقدار $ح^{٢} - ٤ ب د$ اي لمعرفة فيما اذا كان يوجد لذات الحدود الثلاثة جذران حقيقيان ام لا ؟

٤٠ — الحالة الاولى: $ح^{٢} - ٤ ب د < ٠$ اي لايوجد لذات الحدود الثلاثة جذران حقيقيان ، فيكون في هذه الحالة ، اذن : $٤ ب د - ح^{٢} > ٠$ ويمكن عندئذ ان نكتب المساواة (٢) بالصورة التالية :

$$\text{ا}(س) = ب \left[\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} + \left(\frac{\sqrt{٤ ب د - ح^{٢}}}{٢ ب} \right)^{٢} \right]$$

فالقسم الموضوع داخل القوس الكبير موجب لانه مجموع مربعي مقدارين احدهما غير الصفر فرضاً ، اذن : تكون في هذه الحالة اشارة $\text{ا}(س)$ كاشارة $ب$ مهما اخذت $س$ من القيم ، فاذا فرضنا اننا اعطينا الى $س$ قيمة مثل $هـ$ يكون :

$$\text{ا}(هـ) = ب هـ^{٢} + ح هـ + د$$

كما يكون دوماً في هذه الحالة :

$$\boxed{ب \text{ ا}(هـ) > ٠}$$

٤١ — الحالة الثانية: $ح^{٢} - ٤ ب د = ٠$ فالمساواة (٢) تكتب في هذه الحالة اذن بالشكل :

$$\text{ا}(س) = ب \left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢}$$

اي $\text{ا}(س)$ مكونة من جداء مقدارين احدهما $\left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢}$ موجب دائماً او صفر لانه مربع كامل ، اذن : اشارة $\text{ا}(س)$ كاشارة $ب$ دائماً مهما كانت $س$ وبفرض $س \neq - \frac{ح}{٢ ب}$ اي في هذه الحالة يكون :

$$\boxed{ب \text{ ا}(هـ) > ٠}$$

وذلك مهما كانت $هـ$ وبفرض :

$$\boxed{هـ \neq - \frac{ح}{٢ ب}}$$

٤٢ — الحالة الثالثة: $ح^{٢} - ٤ ب د > ٠$ اي للمعادلة جذران

حقيقيان ، عندئذ المعادلة (٢) يمكن ان تكتب بالشكل :

$$\text{ا}(س) = ب \left[\frac{حـ^{٢} - ٤ ب د}{٤ ب^{٢}} - \left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢} \right]$$

او

$$\text{ا}(س) = ب \left[\left(\frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \right)^{٢} - \left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢} \right]$$

فالقوس الكبير هنا هو فرق ما بين مربعين ، اي يمكننا ان نكتبه بشكل مضروبين فنجد :

$$\text{ا}(س) = ب \left[\left(س + \frac{حـ}{٢ ب} + \frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \right) \times \right.$$

$$\left. \left(س + \frac{حـ}{٢ ب} - \frac{\sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \right) \right] \qquad (٣)$$

وبما ان جذري ذات الحدود الثلاثة ، هما :

$$س_{َ} = \frac{- حـ - \sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \quad ، \quad س_{ً} = \frac{- حـ + \sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

اذن : يمكننا ان نكتب العلاقة الاخيرة (٣) بالشكل :

$$\text{ا}(س) = ب (س - س_{َ}) (س - س_{ً})$$

باعتبار $س_{َ}$ ، $س_{ً}$ جذري ذات الحدود الثلاثة :

$$ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$$

لنفرض الآن ان $س_{ً} > س_{َ}$ ولندرس تحول اشارة ذات الحدود الثلاثة (التي اصبحت بشكل مضاريب من الدرجة الاولى بالنسبة الى س) عند ما تتحول س من $- \infty$ الى $+ \infty$ بواسطة الجدول الاتي :

س	$- \infty$	$س_{َ}$	$س_{ً}$	$+ \infty$
$س - س_{َ}$	−	+	+	
$س - س_{ً}$	−	−	+	
$(س - س_{َ}) (س - س_{ً})$	+	−	+	

فهذا الجدول يرينا ان :

١ً) الجداء (س — سَ) (س — سً) هو سالب عند ما تأخذ س قيماً محصورة بين سَ ، سً ونقول عندئذ ان س واقعة بين الجذرين ، اي : سَ < س < سً

٢ً) هذا الجداء موجب عند ما تكون س خارجة عن فاصلة الجذرين ، اي اما س اصغر من الصغير سَ واما س اكبر من الكبير سً ، اي : اما (س < سَ واما س > سً)

نتيجة هامة : ١ً) اشارة ما (س) = ب (س — سَ) (س — سً) كاشارة ب اذا كانت س خارجة عن الجذرين .

٢ً) اشارة ما (س) مخالفة لاشارة ب اذا كانت س واقعة بين الجذرين

ونلخص كل ما مر بالجدول الآتي :

ما (س) = ب س٢ + ح س + د

الفرض	النتيجة
١ً) Δ > ٠	فيكون ب ما (هـ) > ٠ مهما كانت هـ
٢ً) Δ = ٠	» ب ما (هـ) > ٠ » » هـ بفرض هـ ≠ $-\frac{ح}{٢ب}$
٣ً) Δ < ٠	» ب ما (هـ) > ٠ فيما اذا كانت هـ خارجة عن الجذرين » ب ما (هـ) < ٠ » » » هـ محصورة بين »

ولنذكر الان النظرية الجامعة لكل ما سبق .

٤٣ — نظرية : اشارة القيمة العددية ما (هـ) لذات الحدود الثلاثة ما (س) هي دائماً كاشارة ب مهما كانت القيمة العددية المعطاة الى س وهي هـ ؛ ويشذ عن ذلك حالة واحدة ، وهي :

اذا كان لذات الحدود الثلاثة جذران واعطينا س قيمة عددية محصورة بين الجذرين فان اشارة القيمة العددية الى ما (س) تكون، وقتئذ مخالفة لاشارة ب .

[وبصورة مختصرة] ب . ما (هـ) موجب دوماً ، الا اذا كانت هـ محصورة بين الجذرين .

الفصل الثاني

حل المتراجحات التي من الدرجة الثانية
وذات المجهول الواحد

٦٦ — ان الشكل العام للمتراجحة التي من الدرجة الثانية ، هو :

$$ب\ س^{٢} + حـ\ س + د \gtrless ٠$$

وذلك بعد حذف المخارج (بفرض حذفها ممكناً) وجمع الحدود المتشابهة ونقل جميع الحدود للجانب الاول .

وبضرب جانبي المتراجحة الثانية $ب\ س^{٢} + حـ\ س + د > ٠$ بـ (-١) تصبح من شكل المتراجحة الاولى ، اذن : يمكننا ان نقول ان الشكل العام للمتراجحات التي من الدرجة الثانية هو :

$$ب\ س^{٢} + حـ\ س + د < ٠$$

فحل هذه المتراجحة هو ايجاد جميع قيم س التي تجعل جانبها الاول اكبر من الصفر .

فلحلها نفرض ان $ا\ (س) = ب\ س^{٢} + حـ\ س + د > ٠$ وان $ب > ٠$ مثلا ، اذن : يجب معرفة قيم س التي تجعل علامة ذات الحدود الثلاثة $ا\ (س)$ كعلامة ب . وقد مر معنا (مادة ٤٠ — ٤٣) انه :

١ً) اذا كانت القاسمة $حـ^{٢} - ٤\ ب\ د > ٠$ تكون علامة $ا\ (س)$ كعلامة ب دوماً . في هذه الحالة [كل قيمة الى س تحقق المتراجحة]

٢ً) اذا كانت القاسمة $حـ^{٢} - ٤\ ب\ د = ٠$ فتكون علامة $ا\ (س)$ كعلامة ب ايضاً ، (الا انه اذا كانت $س = -\frac{حـ}{٢\ ب}$ فان الجانب

الاول منها عندئذ يساوي الصفر) ، اذن : في هذه الحالة [كل قيمة الى س عدا القيمة $-\frac{ح}{٢ب}$ توافق المتراجحة .

٣) واخيراً اذا كانت القاسمة $ح^{٢} - ٤ ب د > ٠$ تكون علامة ا (س) كعلامة ب اذا اعطينا الى س قيمة عددية خارجة عن جذري المتراجحة .

اي : اذا كان اما $س < س'$ واما $س > س''$ (وذلك بفرض $س'$ ، $س''$ جذرا المتراجحة) تكون المتراجحة موجبة اي من علامة ب

واما اذا اعطينا الى س قيمة عددية محصورة ما بين الجذرين تكون المتراجحة من اشارة مخالفة الى اشارة ب ، اي سالبة . اذن : اذا كان $س' < س < س''$ تكون المتراجحة سالبة من علامة مخالفة لعلامة ب] .

ومن السهل اعادة هذه الحالات ومحاكمتها عند ما تكون $ب < ٠$ والامثلة الاتية توضح لنا ذلك .

٥٦ — مثال : ١) المطلوب حل المتراجحة :

$$٣ س^{٢} - س + ١٥ > ٠$$

الحل : اولا لنشكل القاسمة فنجد :

$$\Delta = ح^{٢} - ٤ ب د = ١ - ٤ \times ٣ \times ١٥$$

مما يدلنا على ان القاسمة سالبة ، اذن : اشارة ذات الحدود المعطاة هذه هي دائما كاشارة ب اي كاشارة امثال $س^{٢}$ وهو $+ ٣$ وبما انه موجب ، اذن : المتراجحة محققة دوماً مهما كانت القيمة العددية المعطاة الى س .

٥٦ — مثال : ٢) المطلوب حل المتراجحة :

$$٢ س^{٢} - س - ١٠ < ٠$$

الحل : نرى حالا ان لذات الحدود الثلاثة هذه جذرين ، اذ ان ب ، د مختلفا الاشارة ، وهذان الجذران هما : — ٢ ، $\frac{٥}{٢}$ اذن اذا اعطينا الى س قيمة محصورة بين العددين — ٢ ، $\frac{٥}{٢}$ تكون اشارة القيمة العددية لذات الحدود الثلاثة مخالفة لاشارة امثال $س^{٢}$ الذي هو + ٢ اي تكون سالبة .

واما اذا اعطينا الى س قيما خارجة عن العددين — ٢ ، $\frac{٥}{٢}$ تكون اشارة قيمة ذات الحدود كاشارة ب اي موجبة . وبما ان المطلوب ان تكون ذات الحدود سالبة ، اذن : وجب ان نعطي الى س قيمة محصورة ما بين الجذرين ، اي يجب ان يكون $\frac{٥}{٢} > س > — ٢$ لتكون المتراجحة المعطاة محققة .

٤٧ — مثال : ٣) المطلوب حل المتراجحة :

$$— ٥ س^{٢} — ١٩ س + ٤ < ٠$$

الحل : نرى هنا ايضاً انه يوجد لذات الحدود الثلاثة جذران ، اذ ان ب ، د مختلفا الاشارة ، وهذان الجذران هما : — ٤ ، $\frac{١}{٥}$ فاذا اعطينا الى س قيمة محصورة بين — ٤ ، $\frac{١}{٥}$ تكون اشارة قيمة ذات الحدود مخالفة لاشارة امثال $س^{٢}$ وهو — ٥ اي تكون موجبة ، واذا اعطينا الى س قيمة خارجة عن الجذرين تكون اشارتها كاشارة — ٥ اي تكون سالبة ، وبما ان المطلوب ان تكون اشارة قيمة ذات الحدود الثلاثة سالبة . اذن : وجب ان يكون :

اما $س > — ٤$ واما $س > \frac{١}{٥}$ لتكون المتراجحة محققة .

٤٨ — مثال : ٤) المطلوب حل المتراجحة :

$$\text{ا}(\text{س}) = ٤\,\text{س}^{٢} - ١٢\,\text{س} + ٩ > ٠$$

الحل : بما ان قاسمة هذه المتراجحة تساوي $٣٦ - ٣٦ = ٠$ فعلامة قيمة الافادة ا (س) تكون كعلامة $\text{ب} = +٤$ مهما كانت القيمة العددية المعطاة الى س ويفرض ان $\text{س} \neq -\frac{\text{ح}}{٢\,\text{ب}}$ اي $\text{س} \neq \frac{٣}{٢}$ اذن الافادة ا (س) تكون موجبة دوماً مهما كانت س ويفرض ان $\text{س} \neq \frac{٣}{٢}$ لان القيمة $\text{س} = \frac{٣}{٢}$ تجعل قيمة هذه الافادة ا (س) صفراً اي ان :

$$\text{ا}\left(\frac{٣}{٢}\right) = ٠$$

مما يدلنا على ان المتراجحة المعطاة ليس لها حل مطلقاً .

٩٥ — المتراجحات التي طرفها الاول جداء جملة مضاريب :

لحل متراجحة من هذا الشكل ندرس اشارة كل مضروب على حدة ونجمع النتائج بجدول (انظر الجزء الاول بند ٢١٦) ثم نستنتج اشارة الجداء ونعين الفواصل التي تكون فيها س محققة للمتراجحة المعطاة ، والمثال الآتي يوضح لنا ذلك :

٥٠ — مثال : المطلوب حل المتراجحة :

$$(\text{س} + ٣)(\text{س}^{٢} - \text{س} + ٧)(\text{س} - ١)^{٢}(\text{س}^{٢} - ٧\,\text{س} + ١٢) < ٠$$

الحل : بما ان المقدار $(\text{س} - ١)^{٢}$ هو مربع كامل ، فهو موجب دوماً الا من اجل $\text{س} = ١$ فانه ينعدم . وهذه القيمة لا توافق المتراجحة ، اذن : يمكن حذفه .

وكذلك المقدار $\text{س}^{٢} - \text{س} + ٧$ هو موجب دوماً (لان قاسمته سالبة ، وامثال الـ $\text{س}^{٢}$ فيه موجبة تساوي $+١$) . اذن : يمكن حذفه ايضاً .

اذن : اشارة المتراجحة المعطاة هي عين اشارة جداء المضاريب الباقية لذلك .

لندرس الآن اشارة المضاريب الباقية بالجدول الآتي :

	$-\infty$		-٣		٣		٤		$+\infty$
س									
$س + ٣$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
$س^{٢} - ٧ س + ١٢$	$+$		$+$		$+$		$-$		$+$
الجداء	$-$		$+$		$+$		$-$		$+$
المتراجحة	محققة		غير محققة		غير محققة		محققة		غير محققة

فنرى من هذا الجدول ومما سبق ان هذه المتراجحة لا تكون محققة الا اذا كان :

اما $س < -٣$ واما $٣ < س < ٤$

وهو المطلوب :

٥١ — المتراجحات التي من الشكل : $\frac{ص}{م} < ٠$

اذا لاحظنا ان اشارة خارج القسمة $\frac{ص}{م}$ هي نفس اشارة الجداء $ص \cdot م$

نستنتج انه لحل المتراجحة $\frac{ص}{م} < ٠$ يكفي ان نحل المتراجحة $ص \times م < ٠$

وحقيقة يمكننا ان ننتقل من المتراجحة $\frac{ص}{م} < ٠$ الى المتراجحة :

$ص \cdot م < ٠$ بضرب طرفي الاولى بالمقدار الموجب $م^{٢}$ فهذا الضرب لا يغير اتجاه المتراجحة .

٥٢ — مثال : المطلوب حل المتراجحة :

$$\frac{س - ١}{س^{٢} - س - ٦} < ٠$$

الحل : لحل هذه المتراجحة يكفي ان نحل المتراجحة :

$$(س - ١)(س^{٢} - س - ٦) < ٠$$

ولحل هذه ندرس اشارة كل مضروب على حدة ، كما نرى ذلك بالجدول الآتي :

	$-\infty$		-٢		١		٣	$+\infty$
س								
س — ١	—		—		—		+	
$س^{٢}$ — س — ٦	+		—		—		+	
الجداء	—		+		—		+	
المتراجحة	غير محققة		محققة		غير محققة		محققة	

فهذا الجدول يدلنا على ان المتراجحة لا تكون محققة الا اذا كان :

اما $-٢ < س < ١$ واما $س > ٣$

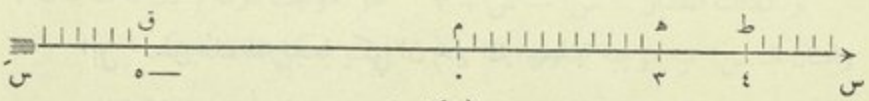
٥٣ — حل جملة المتراجحات التي من الدرجة الثانية وذات المجهول الواحد :

لحل مجموعة متراجحات مجتمعة ندرس كل متراجحة على حدة ، ثم نضع النتائج على محور موجه (انظر الجزء الاول ٢١٩ ، ٣٠٦) ونحذف من هذا المحور الاقسام التي لا تتحقق بها المتراجحات (وذلك بواسطة خطوط متوازية) . فالقسم الباقي من المحور هو الذي فواصل نقطه تحقق المتراجحات المجتمعة بآن واحد ، واذا لم يبق من المحور شيء نفهم ان المتراجحات المجتمعة لا يمكن ان تتحقق في وقت واحد ، اي المجموعة مستحيلة ، والامثلة الآتية توضح لنا ذلك :

٥٤ — مثال : ١) المطلوب حل جملة المتراجحات :

$$س^{٢} — ٣س > ٠ \quad ، \quad س^{٢} + س — ٢٠ < ٠$$

الحل : بحسب ما تقدم نرى ان المتراجحة الاولى تتحقق عند ما تكون س خارجة عن الجذرين وهما : (٠ ، ٣) واما الثانية فهي تتحقق عند ما تكون س محصورة ما بين الجذرين وهما : (— ٥ ، ٤) ولكي نجد قيم س التي تحقق هاتين المتراجحتين بآن واحد نرسم محوراً موجهاً (شكل ١) ونعين عليه النقطة م ثم



(شكل ١)

النقطة هـ التي فواصلها هي : (٠ ، ٣) فالمتراجحات الاولى محققة من اجل جميع نقط المحور ما عدا نقطة القطعة م هـ لذلك حذفنا القطعة م هـ وبنفس الطريقة حذفنا من اجل المتراجحة الثانية القسمين ط س ، ق سَ فالقسم الباقي من المحور يرينا ان المتراجحتين محققتان في وقت واحد عند ما يكون :

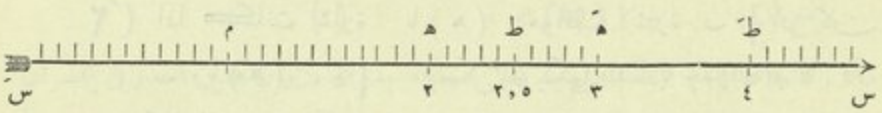
اما ٤ > س > ٣ اي : س محصورة ما بين ٤ ، ٣

او ٠ > س > — ٥ اي : س » » » ٠ ، — ٥

٥٥ — مثال: ١) المطلوب حل جملة المتراجحات :

س٢ — ٥ س + ٦ > ٠ ، ٢ س٢ — ١٣ س + ٢٠ < ٠

الحل : بنفس الطريقة لنعين على المحور الموجه سَ س النقط هـ ، هَ ط ، طَ التي فواصلها هي بالترتيب ٢ ، ٣ ؛ ٢,٥ ، ٤ جذور هاتين المتراجحتين فنرى ان المتراجحة الاولى حذفت القسم هـ هَ من المحور (شكل ٢) ،



(شكل ٢)

واما المتراجحة الثانية فهي تحذف القسم ط سَ والقسم طَ س فلا يبقى من المحور الا القطعة هَ طَ التي تدلنا على ان جملة المتراجحتين محققة عند ما يكون ٣ < س < ٤ اي عند ما تكون س محصورة ما بين العددين ٣ ، ٤

الفصل الثالث

مقارنة عدد بجذري المعادلة التي من الدرجة الثانية

٥٦ — نظرية : بفرض ا (هـ) القيمة العددية لذات الحدين الثلاثة التي من الدرجة الثانية عند ما نبدل س بالعدد (هـ) يكون :

١ً) اذا كانت اشارة ا (هـ) مخالفة لاشارة ب [بان كان ب . ا (هـ) < .] يكون للمعادلة جذران مختلفان ، وتكون هـ واقعة بين هذين الجذرين .

٢ً) اذا كانت اشارة ا (هـ) موافقة لاشارة ب [بان كان ب . ا (هـ) > .] فيمكن ان يكون للمعادلة جذران او لا ، فان كان لها جذران تكون هـ خارجة عن هذين الجذرين .

البرهان : ١ً) لنرجع الى الجدول المذكور في (البند ٤٢) فنجد انه اذا لم يكن للمعادلة جذران او اذا كان لها جذر واحد ، فان اشارة ا (هـ) تكون دائماً كاشارة ب ولا يوجد اختلاف ما بين اشارة ب واشارة ا (هـ) الا في حالة واحدة وهي حالة وجود جذرين مع فرض هـ محصورة ما بين هذين الجذرين . اذن : يكون للمعادلة حتماً جذران عند مايكون هنالك اختلاف ما بين اشارة ب واشارة ا (هـ) وتكون وقتئذ هـ محصورة ما بين الجذرين ، والا فلا يكون ب . ا (هـ) سالباً

وبصورة ثانية نقول : اما ان يكون للمعادلة جذران يحصران بينهما العدد هـ وهو المطلوب ، او لا يكون ذلك فينتج ان ب . ا (هـ) > . وهذا خلاف الفرض .

٢ً) اذا كانت اشارة ا (هـ) موافقة لاشارة ب فيمكن ان يكون للمعادلة جذران او لا ، فان كان هنالك جذران فلا بد وان تكون هـ خارجة عن

الجذرين ، والا وجب ان تكون اشارة ا (هـ) مخالفة لاشارة ب اي ب . ا (هـ) < . وهذا خلاف الفرض .

٥٧ — نظرية : الشرط اللازم الكافي ليكون لكثيرة الحدود :

ا (س) = ب س٢ + حـ س + د = .

جذر واحد محصور ما بين العددين هـ ، ط هو ان يكون :

ا (هـ) . ا (ط) < .

١°) **لزوم الشرط :** الفرض : ا (هـ) × ا (ط) < .

المطلوب : احد الجذرين محصور ما بين هـ ، ط

البرهان : طالما ا (هـ) . ا (ط) < . اذن : يمكننا ان نفرض مثلاً ان :

ب . ا (هـ) < . (١)

مع ان : ب . ا (ط) > . (٢)

فالعلاقة (١) ترينا انه يوجد حتماً للمعادلة جذران ، وان هذين الجذرين يحصران بينهما العدد هـ . واما العلاقة (٢) فترينا ان ط هي خارجة عن الجذرين . اذن : اما ان يكون ط < سَ < هـ < سً او سَ < هـ < سً < ط وهو المطلوب .

٢°) **كفاية الشرط :** الفرض : سَ < هـ < سً < ط

المطلوب : ا (هـ) . ا (ط) < .

البرهان : بما ان هـ محصورة ما بين الجذرين اذن :

ب . ا (هـ) < . (١)

وبما ان ط خارجة عن الجذرين اذن :

ب . ا (ط) > . (٢)

ومن العلاقتين (١) ، (٢) نستنتج ان :

ب٢ . ا (هـ) . ا (ط) < . او ا (هـ) . ا (ط) < .

وهو المطلوب .

٥٨ — كيفية مقارنة عدد ما بجذري المعادلة :

$$\text{ا}(\text{س}) = \text{ب}\,\text{س}^{٢} + \text{حـ}\,\text{س} + \text{د} = ٠$$

لمقارنة العدد هـ بجذري المعادلة سَ ، س" بدون ان نحسب هذين الجذرين ، نشكل ب . ا (هـ) ونستخدم نظرية اشارة ذات الحدود الثلاثة :

١ً) اذا كان ب ا (هـ) < ٠ يكون للمعادلة جذران حتماً وتكون هـ واقعة بينهما ، اى يكون : سَ < هـ < س"

٢ً) واما اذا كان ب ا (هـ) > ٠ فيمكن ان يكون للمعادلة جذران او لا ، فان كانت القاسمة $\Delta > ٠$ يكون للمعادلة جذران وتكون هـ خارجة عنهما ، اذن هى اما اكبر من الكبير او اصغر من الصغير ، لذلك نقارنها بعدد واقع بين الجذرين ، فان كانت هـ اكبر من هذا العدد تكون اكبر من الكبير اذ انها لا يمكنها ان تقع بين الجذرين .

وان كانت هـ اصغر منه وجب ان تكون اصغر من الصغير .

والعدد المستعمل للمقارنة هو غالباً نصف مجموع الجذرين ، اى $-\frac{\text{حـ}}{٢\,\text{ب}}$

لان نصف المجموع هو حتماً واقع بين الجذرين .

وقد يؤخذ الصفر للمقارنة فيما اذا كان الجذران مختلفين بالاشارة ، او يؤخذ عدد ما علم بنتيجة المناقشة انه واقع بين الجذرين ، ونلخص كل ما مر بالجدول الآتي :

$$\text{ا}(\text{س}) = \text{ب}\,\text{س}^{٢} + \text{حـ}\,\text{س} + \text{د} = ٠$$

الفرض		النتيجة
١ً) ب ا (هـ) < ٠		س" > هـ > سَ
٢ً) ب ا (هـ) > ٠ ، $\Delta > ٠$	هـ > $-\frac{\text{حـ}}{٢\,\text{ب}}$	هـ > س" > سَ
	هـ < $-\frac{\text{حـ}}{٢\,\text{ب}}$	هـ < سَ < س"

٥٩ — مثال : ١) قارن العدد ٢ بجذري المعادلة :

$$\text{ا}(س) = ٣س^{٢} - ١٥س + ٢ = ٠$$

الحل : لنبدل س بالعدد ٢ فنجد ان :

$$\text{ا}(٢) = ١٢ - ٣٠ + ٢ = -١٦$$

اي ان اشارة ا (٢) مخالفة لاشارة امثال $س^{٢}$ وهو + ٣ اي :

$$ب \cdot \text{ا}(٢) < ٠$$

اذن : (بند ٥٦) للمعادلة جذران مختلفان والعدد ٢ واقع بينهما ، اي :

$$س' < ٢ < س''$$

٦٠ — مثال : ٢) قارن العدد ١ بجذري المعادلة :

$$\text{ا}(س) = ٣س^{٢} - س + ٤ = ٠$$

الحل : لنبدل كل س بالعدد ١ فيكون :

$$\text{ا}(١) = ٣ - ١ + ٤ = ٦$$

اي ان علامة ا (١) كعلامة ب لذلك لنكون الآن القاسمة فنجد :

$$ف = حـ^{٢} - ٤ ب د = ١ - ٤٨ = -٤٧$$

اذن : لا يوجد للمعادلة جذور اصلا وليس للمسألة حل .

٦١ — مثال : ٣) قارن العدد — ٢ بجذري المعادلة :

$$\text{ا}(س) = -٢س^{٢} + ٨س - ٣ = ٠$$

الحل : لنبدل كل س بالعدد — ٢ فيكون :

$$\text{ا}(-٢) = -٨ - ١٦ - ٣ = -٢٧$$

اي ان علامة ا (— ٢) كعلامة ب اذن لنكون القاسمة فنجد :

$$ف = حـ^{٢} - ب د = ١٦ - ٦ = ١٠$$

مما يدلنا على انه يوجد للمعادلة جذران ، وان العدد — ٢ خارج عنهما .

لنقارن هذا العدد بنصف مجموع الجذرين وهو ٢ فنجد ان — ٢ < ٢

اذن : العدد — ٢ اصغر من الصغير ، اي : — ٢ < س" < س'

٦٢ — مثال : ٤) قارن العدد ١ بجذري المعادلة :

ا (س) = ٣ س٢ + ٥ س — ٢ = ٠

الحل : لنبدل كل س بالعدد ١ فيكون :

ا (١) = ٣ + ٥ — ٢ = ٦

اي ان اشارة ا (١) كاشارة ب وهي + ٣ اذن العدد ١ هو خارج عن الجذرين .

لنقارن هنا الواحد بالصفر (اذ الجذران مختلفان بالاشارة) فبما ان ١ > ٠

اذن : الواحد اعظم من الجذرين ، اي : ١ > س" > ٠ > س'

ملاحظة هامة : اذا كان العدد هـ خارجاً عن الجذرين ، واردنا ان نعلم هل هـ اصغر من الصغير او اكبر من الكبير وجب ان نقارن ما بين العدد هـ ونصف مجموع الجذرين لا بين ا (هـ) ونصف مجموع الجذرين .

وسنبين الآن انواع المسائل التي تأتي في هذا الموضوع ، وهي على فرعين :

٦٣ — الفرع الاول : امثال المعادلة تابعة لوسيط ، ويطلب منا ان ندرس بحسب تحول هذا الوسيط وجود الجذرين ، وموقع عدد ما بالنسبة الى الجذرين .

اذن : حل هذه المسألة يعود لدرس اشارة كل من ب ، ا (هـ) و Δ وجمع النتائج . ولنوضح ذلك بالامثلة الاتية :

٦٤ — مثال : ١) لتكن المعادلة :

ا (س) = ٢ هـ س٢ — ٢ س — هـ = ٠

ادرس بحسب تحول هـ وجود الجذرين وقارنهما بالعدد ١ .

الحل : لنكون القاسمة فنجد : Δ' = ح'٢ — ب د = ١ + ٢ هـ٢ ≥ ٠ .

اي ان القاسمة موجبة دوماً ، اذن : يوجد للمعادلة جذران حقيقيان مهما كانت هـ .

لنشكل ا (١) فنجد :

ا (١) = ٢ هـ — ٢ — هـ = هـ — ٢

اذن : ا (١) يكون موجباً اذا كانت هـ > ٢ وصفراً اذا كانت هـ = ٢ وسالباً اذا كانت هـ < ٢

يمكننا اذن ان نجمع هذه النتائج بالجدول الآتي :

هـ	Δ	ب	ا (١)	م/٢	الجذور
$-\infty$	+	−	−	م/٢ < ١	١ > س" > س'
٠		٠			س" = ∞ ، س' = ٠
	+	+	−		١ < س" < س'
٢			٠		س" = ١ ، س' = −٠,٥
$+\infty$	+	+	+	م/٢ < ١	١ > س" > س'

فهذا الجدول يرينا انه :

١") اذا كانت هـ < ٠ تكون القاسمة موجبة ، اذن : يوجد جذران ، وبما ان ب و ا (١) متحدان بالاشارة ، اذن : الواحد خارج عن الجذرين ، لنقارنه بنصف مجموع الجذرين وهو : $\frac{١}{٢هـ}$ فبما ان هـ < ٠ اذن نصف المجموع $\frac{م}{٢}$ سالب اي اصغر من الواحد ويكون : ١ > س" > س'

٢") اذا كانت ٠ < هـ < ٢ تكون القاسمة موجبة ، اذن : يوجد جذران ، وبما ان اشارة ا (١) مخالفة لاشارة ب اذن : الواحد واقع بين الجذرين ، اي : س" > ١ > س'

٣") اذا كانت هـ > ٢ تكون القاسمة موجبة ، اذن : يوجد جذران ، وبما ان اشارة ا (١) موافقة لاشارة ب يكون الواحد خارجا عن الجذرين .

لنقارنه بنصف مجموع الجذرين $\frac{١}{٢هـ}$ فنرى ان هذه الكمية اصغر من الواحد لان

هـ > ٢ اذن : الواحد خارج عن الجذرين واكبر من كل منهما ، اي :

$$١ > س'' > س'$$

ولندرس الآن الحالات الخاصة .

٤°) عند ما تكون هـ = ٠ تصبح المعادلة من الدرجة الاولى ويصبح احد الجذرين في ما لا نهاية ، واما الجذر الآخر فهو جذر المعادلة :

$$-٢س = ٠ \quad \text{اي :} \quad س = ٠$$

٥°) وعند ما تكون هـ = ٢ يكون ما (١) = ٠ اي الواحد احد الجذرين س'' = ١ فلكي نجد الجذر الثاني نطرح الواحد من مجموع الجذرين فيكون :

$$س' = \frac{١}{هـ} - ١ = \frac{١}{٢} - ١ = -\frac{١}{٢}$$

اي الجذران هما : $س'' = ٠$ ، $س' = -\frac{١}{٢}$

ملاحظة : اذا علم احد الجذرين يكون الآخر = المجموع — المعلوم .

٦٥ — مثال : ٢) ادرس بحسب تحول هـ موقع العددين صفر و $\frac{١}{٢}$ بالنسبة لجذري المعادلة :

$$ما (س) = (هـ - ٣) س^٢ - ٢ هـ س + هـ + ٢ = ٠$$

الحل : لنشكل القاسمة فنجد :

$$Δ' = ح'^٢ - ب د = هـ^٢ - (هـ - ٣)(هـ + ٢) = هـ + ٦$$

وكذلك نجد : $ما (٠) = هـ + ٢$

$$ما \left(\frac{١}{٢}\right) = \frac{هـ - ٣}{٤} - \frac{هـ^٢}{٢} + هـ + ٢ = \frac{هـ + ٥}{٤}$$

$$ب = هـ - ٣$$

مما يدلنا على ان القاسمة Δ' تكون سالبة او صفراً او موجبة حسبما تكون هـ

اصغر او تساوي او اكبر من -٦ اي :

$$\Delta \begin{cases} > ٠ & \text{عندما } هـ > -٦ \\ = ٠ & \text{« « } هـ = -٦ \\ < ٠ & \text{« « } هـ < -٦ \end{cases}$$

وكذلك يكون ما (٠) سالباً او صفراً او موجباً حسبما تكون $هـ > -٢$ او $هـ = -٢$ او $هـ < -٢$

وكذلك يكون ما $\left(\frac{١}{٢}\right) > ٠$ او $= ٠$ او < ٠ حسبما تكون $هـ$ اصغر من -٥ او $هـ = -٥$ او $هـ < -٥$

وكذلك $ب$ تكون سالبة او صفراً او موجبة حسبما تكون $هـ > ٣$ او $= ٣$ او < ٣ ولنجمع الآن جميع هذه النتائج بالجدول الاتي :

$هـ$	Δ	$ب$	ما (٠)	ما $\left(\frac{١}{٢}\right)$	$\frac{د}{٢}$	النتائج
$-\infty$	—	—	—	—		لا يوجد جذور
-٦	٠					$س' = س'' = \frac{٢}{٣}$
	+	—	—	—	$\frac{د}{٢} < \frac{١}{٢}$	$٠ < \frac{١}{٢} > س' > س''$
-٥				٠		$س'' = \frac{٣}{٤}$ ، $س' = \frac{١}{٢}$
	+	—	—	+		$٠ < س' < \frac{١}{٢} > س''$
-٢			٠			$س' = ٠$ ، $س'' = \frac{٤}{٥}$
	+	—	+	+		$س' > ٠ > \frac{١}{٢} > س''$
٣		٠				$س'' = \infty$ ، $س' = \frac{٥}{٦}$
	+	+	+	+	$\frac{د}{٢} < \frac{١}{٢}$	$٠ < \frac{٢}{١} > س' > س''$
$+\infty$						

فهذا الجدول يدلنا على انه :

١ً) اذا كانت $هـ < -٦$ فالقاسمة سالبة وليس للمعادلة جذور .

٢ً) اذا كانت $-٦ < هـ < -٥$ تكون $\Delta > ٠$ اذن : يوجد جذران ، وبما ان $ا \left(\frac{١}{٢}\right)$ ، $ا (٠)$ متحدان بالاشارة مع $ب$ اذن كلا العددين $\frac{١}{٢}$ ، ٠ خارج عن الجذرين .

لنقارنها بنصف مجموع الجذرين . وهو : $\frac{هـ}{هـ - ٣}$ فنجد ان :

$$\frac{هـ}{هـ - ٣} - \frac{١}{٢} = \frac{٢هـ - هـ + ٣}{٢(هـ - ٣)} = \frac{هـ + ٣}{٢(هـ - ٣)} \quad (١)$$

وبما ان $هـ$ محصورة بين -٦ ، -٥ اذن : كل من الصورة والمخرج سالب ، اي اشارة هذا الكسر موجبة ، اذن : الـ $\frac{١}{٢}$ اصغر من الصغير ، لذلك يكون الصفر ايضاً اصغر من الصغير حتماً ، ويكون :

$$٠ < \frac{١}{٢} < س_{ن} < س_{١}$$

٣ً) اذا كانت $-٥ < هـ < -٢$ تكون القاسمة موجبة ، اذن : يوجد جذران ، وبما ان اشارة $ا \left(\frac{١}{٢}\right)$ مخالفة لاشارة $ب$ اذن : يكون الـ $\frac{١}{٢}$ واقعاً بين الجذرين ، واما اشارة $ا (٠)$ فهي موافقة لاشارة $ب$ اذن : يكون الصفر خارجاً عن الجذرين ، وبما ان $\frac{١}{٢}$ واقع بين الجذرين ، اذن : يكون الصفر اصغر من الصغير اي :

$$٠ < س_{ن} < \frac{١}{٢} < س_{١}$$

٤°) اذا كانت $-٢ < هـ < ٣$ تكون القاسمة موجبة ويكون $ا\left(\frac{١}{٢}\right)$ ، $ا(٠)$ مختلفين بالاشارة مع $ب$ اذن : كل من الصفر والنصف واقع بين الجذرين ، اي :

$$سَ < ٠ < \frac{١}{٢} < س''$$

٥°) اذا كانت $هـ > ٣$ تكون القاسمة موجبة ويكون $ا\left(\frac{١}{٢}\right)$ ، $ا(٠)$ متحدين بالاشارة مع $ب$ اذن العددان : « صفر ، نصف » خارجان عن الجذرين .

لنقارنها بنصف مجموع الجذرين كما قارنا في (٢°) فنجد في العلاقة (١) ان كلا من الصورة والمخرج موجب (لان $هـ > ٣$) اذن : النتيجة موجبة ويكون $\frac{م}{٢} < \frac{١}{٢}$ (ويكفي لنرى ذلك ان نجرب العدد $هـ = ٤$ مثلا) اذن الصفر والـ $\frac{١}{٢}$ اصغر من الجذرين ، اي يكون :

$$٠ < سَ < س'' < \frac{١}{٣}$$

ولندرس الآن الحالات الخاصة .

٦°) اذا كانت $هـ = -٦$ فتكون القاسمة $\Delta = ٠$ اي يكون للمعادلة جذر مضاعف وهو :

$$س = -\frac{حـ}{٢ب} = \frac{هـ}{هـ - ٣}$$

عندما $هـ = -٦$ اي يكون :

$$سَ = س'' = \frac{-٦}{-٦ - ٣} = \frac{-٦}{-٩} = \frac{٢}{٣}$$

٧°) اذا كانت $هـ = -٥$ يكون $ا\left(\frac{١}{٢}\right) = ٠$ اذن الـ $\frac{١}{٢}$

هو احد الجذرين ، ولما كان مجموع الجذرين هو :

$$س_{\text{ا}} + س_{\text{ب}} = \frac{٢ هـ}{٣ - هـ} = \frac{١٠}{-٥ - ٣} = \frac{-١٠}{٨} = \frac{٥}{٤}$$

وبما ان $س_{\text{ا}} = \frac{١}{٢}$ اذن الجذر الثاني هو :

$$س_{\text{ب}} = \frac{٥}{٤} - \frac{١}{٢} = \frac{٥ - ٢}{٤} = \frac{٣}{٤}$$

اي اننا نحصل على الجذر الثاني بطرح المعلوم من مجموع الجذرين .

٨ً) اذا كانت $هـ = -٢$ تكون $ا (٠) = ٠$ اذن : الصفر احد الجذرين ويكون الآخر مساوياً لمجموع الجذرين وهو :

$$س_{\text{ا}} + س_{\text{ب}} = \frac{٢ هـ}{٣ - هـ} = \frac{-٤}{-٢ - ٣} = \frac{٤}{٥}$$

اي في هذه الحالة $س_{\text{ا}} = ٠$ يكون $س_{\text{ب}} = \frac{٤}{٥}$

٩ً) اذا كانت $هـ = ٣$ تكون ب مساوية للصفر ، ويكون احد الجذرين في ما لا نهاية ، والمعادلة تصبح من الشكل :

$$-٢ هـ س + هـ + ٢ = ٠$$

وبما ان $هـ = ٣$ يكون :

$$-٦ س + ٥ = ٠ \quad \text{ومنها :} \quad س_{\text{ا}} = \frac{٥}{٦}$$

اذن : الجذور في هذه الحالة هي :

$$س_{\text{ب}} = \infty \quad ، \quad س_{\text{ا}} = \frac{٥}{٦}$$

٦٦ — الفرع الثالث : الامثال في المعادلة تابعة لوسيط ، ويطلب منا تعيين قيم هذا الوسيط حتى يكون للمعادلة جذران لهما وضع معين سلفاً بالنسبة لعدد او لعددين معينين ، وسندرس الحالات التي هي اكثر استعمالا في هذا الموضوع .

٦٧— الحالة الاولى : لتكن المعادلة :

$$\text{ا}(س) = \text{ب}\, س^{٢} + \text{حـ}\, س + \text{د} = ٠$$

والمطلوب تعيين قيم الوسيط حتى يكون لهذه المعادلة جذران يحصران بينهما العدد ط ، اي يجب ان يكون $س' < \text{ط} < س''$ اعني يجب ان يكون للمعادلة جذران احدهما اكبر من ط والاخر اصغر من ط .

حل هذه المسألة يعود الى النظرية التي رأيناها في (بند ٥٦) لذلك نقول :

لكي يكون للمعادلة $\text{ا}(س) = ٠$ جذران حاصران بينهما العدد ط يجب ويكفي ان يكون $\text{ب}\, \text{ا}(\text{ط}) < ٠$ ولنبين ذلك بالمثال الاتي :

٦٨— مثال : عين قيم هـ ليكون للمعادلة :

$$\text{ا}(س) = (٢\text{هـ} - ١)\, س^{٢} - (\text{هـ} - ١)\, س + ٤ = ٠ \qquad (١)$$

جذران يحصران بينهما العدد (-٢)

الحل : لنحسب $\text{ا}(-٢)$ فنجد :

$$\text{ا}(-٢) = (٢\text{هـ} - ١)\, ٤ + ٢(\text{هـ} - ١) + ٤ = ١٠\,\text{هـ} - ٢$$

اذن : الشرط اللازم الكافي ليكون للمعادلة المعطاة جذران حاصران بينهما العدد -٢ هو $\text{ب}\, \text{ا}(-٢) < ٠$ اي :

$$٢(٢\text{هـ} - ١)(٥\,\text{هـ} - ١) < ٠ \qquad (٢)$$

فلو قسمنا الطرفين على ٢ ونظرنا الى الجانب الاول كمتراجحة من الدرجة الثانية بالنسبة الى هـ نجد :

١°) ان امثال الـ $\text{هـ}^{٢}$ هو $٢ \times ٥ = ١٠$ اي موجب .

٢°) الجذران هما $\text{هـ}'' = \frac{١}{٢}$ ، $\text{هـ}' = \frac{١}{٥}$ وبما ان المتراجحة يجب ان تكون سالبة ، اي من اشارة مخالفة لاشارة امثال الـ $\text{هـ}^{٢}$ اذن : وجب ان تكون هـ محصورة ما بين الجذرين ، اي يجب ان يكون $\left[\frac{١}{٥} < \text{هـ} < \frac{١}{٢}\right]$ لتكون

المتراجحة (٢) محققة ، اي ليكون للمعادلة (١) جذران يحصران بينهما العدد — ٢ وهو المطلوب .

الحالة الثانية : لتكن المعادلة :

$$ا(س) = ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$$

والمطلوب تعيين الوسيط حتى يكون لهذه المعادلة جذران اكبر من ط اي ليكون الجذران محققين العلاقة : $س'' > س' > ط$

الحل : لحل هذه المسألة يجب ان يكون :

$$ب\ ا(ط) > ٠ \quad و \quad -\frac{حـ}{٢ب} > ط$$

ولكن هذين الشرطين لا يوجبان وجود الجذرين ، اذن : يجب ان نشترط ان تكون ايضاً $\Delta > ٠$ فعندئذ تكون شروط هذه المسألة هي :

$$\begin{cases} ١') & \Delta > ٠ \\ ٢') & ب\ ا(ط) > ٠ \\ ٣') & -\frac{حـ}{٢ب} > ط \end{cases}$$

٦٩ — ملاحظة : لكي يكون للمعادلة جذران اصغر من ط يكفي ان نبدل الشرط $-\frac{حـ}{٢ب} > ط$ بالشرط $-\frac{حـ}{٢ب} < ط$ وعندئذ تصبح شروط المسألة هي :

$$\begin{cases} ١') & \Delta > ٠ \\ ٢') & ب\ ا(ط) > ٠ \\ ٣') & -\frac{حـ}{٢ب} < ٠ \end{cases}$$

٧٠ — مثال : عين قيم هـ حتى يكون للمعادلة :

$$ا(س) = (هـ - ١) س^{٢} + ٢ هـ س + هـ - ٣ = ٠$$

جذران اصغر من -١ اي ليكون : $س_{ن} < س_{ن}'' < -١$

الحل : لنشكل القاسمة فنجد :

$$\Delta' = هـ^{٢} - (هـ - ١)(هـ - ٣) = ٤هـ - ٣$$

ثم لنشكل : $ا(-١) = هـ - ١ - ٢هـ + هـ - ٣ = -٤$

فالشروط التي يجب تحقيقها لحل هذه المسألة هي اذن :

$\Delta > ٠$ ومنها : $هـ > \frac{٣}{٤}$

$ب ا(-١) < ٠$ « $هـ < ١$

$\frac{م}{٢} < -١$ « $هـ > ١$

وبما ان هذه الشروط لا يمكن ان تتحقق في وقت واحد ، اذن ليس للمسألة حل .

ملاحظة : في المسألة السابقة لو طلب ان يكون الجذران اكبر من -١

لكفي ان نأخذ $١ > هـ > \frac{٣}{٤}$

٧١- الحالة الثالثة : لتكن المعادلة :

$$ا(س) = ب س^{٢} + ح س + د = ٠$$

عين هـ ليكون لهذه المعادلة جذران احدهما فقط محصور بين العددين ك ، ن

وذلك بفرض ان $ك < ن$ اي يجب ان يكون :

$$س_{ن}'' > ك > س_{ن} > ن \quad (١)$$

او :

$$ك > س_{ن}'' > ن > س_{ن} \quad (٢)$$

فالشرط اللازم الكافي لكي تتحقق العلاقة (١) او (٢) هو (بند ٥٧) ان يكون : $ا(ك) \cdot ا(ن) < ٠$

في الحقيقة الشرط لازم في الحالة (١) : بما ان ك واقعة بين الجذرين ، اذن : يلزم ان يكون : $ب ا(ك) < ٠$

وبما ان ح خارجة عن الجذرين يلزم ان يكون : ب ا (ح) > ٠

فيكون الجداء : ب٢ ا (ك) ٠ ا (ح) > ٠ سالباً .

وبما ان ب٢ عدد موجب يمكننا تقسيم الطرفين على ب٢ فيبقى :

ا (ك) ٠ ا (ح) > ٠ وهو الشرط اللازم

ويمكننا اعادة نفس المحاكمات من اجل الترتيب (٢) .

٢ً) الشرط كاف : اذا فرض ان ا (ك) ا (ح) > ٠ فلا بد وان تكون علامة احد العددين ا (ك) ، ا (ح) توافق علامة ب وعلامة الآخر تخالف علامة ب ، اذن : احد العددين ك ، ح واقع بين الجذرين والآخر خارج عن الجذرين فيكون لدينا اما الترتيب (١) او الترتيب (٢) ويمكن تمييزهما بمقارنة ك او ح مع نصف المجموع ، ففي الترتيب (١) يكون $ح > \frac{م}{٢}$

وفي الترتيب (٢) يكون $ك > \frac{م}{٢}$

٧٢ — مثال : عين قيم هـ ليكون للمعادلة :

ا (س) = ٢ هـ س٢ — ٣ س — هـ = ٠

جذران احدهما فقط محصور بين الصفر والواحد .

الحل : ان الشرط اللازم الكافي ليكون لهذه المعادلة جذر واحد محصور بين الصفر والواحد هو ان :

ا (٠) × ا (١) > ٠

لذلك لنشكل ا (٠) ، ا (١) فنجد :

ا (٠) = — هـ

ا (١) = ٢ هـ — ٣ — هـ = هـ — ٣

اذن : الشرط هو — هـ (هـ — ٣) > ٠ او هـ (هـ — ٣) > ٠

ومنها يجب ان يكون : اما [هـ > ٣ او هـ < ٠] ليكون للمعادلة جذر واحد محصور بين الصفر والواحد .

٧٣- الحالة الرابعة : لتكن المعادلة:

$$ا(س) = ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$$

عين قيم هـ ليكون لهذه المعادلة جذران محصوران بين $ك$ ، $ح$ اي ليكون :

$$ك < س'' < س' < ح$$

الحل : لكي يكون للمعادلة جذران محققان للعلاقة $س'' < س' < ح$ يجب ان يكون :

$$\begin{cases} ٠ < \Delta \\ ب\, ا(ح) > ٠ \\ ح < \frac{م}{٢} \end{cases}$$

ولكي يكون لها جذران محققان للعلاقة :

$$ك < س'' < س'$$

يجب ان يكون :

$$\begin{cases} ٠ < \Delta \\ ب\, ا(ك) > ٠ \\ ك < \frac{م}{٢} \end{cases}$$

وبجمع هذه الشروط نرى انه بآن واحد يجب ان يكون :

$$\begin{cases} ٠ < \Delta \\ ب\, ا(ح) > ٠ \\ ب\, ا(ك) > ٠ \\ ح < \frac{م}{٢} \\ ك > \frac{م}{٢} \end{cases}$$

مما يدلنا على انه ليكون للمسألة حل يجب ان نتمكن من ايجاد قيم الى هـ تحقق الشروط الخمسة السابقة بآن واحد .

٧٦— مثال : عين قيم هـ ليكون للمعادلة :

$$\text{با}(س) = س^{٢} - ٢هـ س + ٤هـ^{٢} - ١ = ٠$$

جذران محصوران بين العددين -١ ، $+١$

الحل : يكفي ايجاد قيم هـ التي تحقق بآن واحد الشروط الخمسة الآتية :

١ً)	ب با $(-١) > ٠$	ومنها	$٦هـ > ٠$
٢ً)	ب با $(+١) > ٠$	»	$٢هـ > ٠$
٣ً)	$\Delta > ٠$	»	$هـ^{٢} - ٤هـ + ١ > ٠$
٤ً)	$\frac{م}{٢} > -١$	»	$هـ > -١$
٥ً)	$\frac{م}{٢} < ١$	»	$هـ < ١$

فنرى بواسطة محور موجه (بند ٥٤) ان قيم هـ التي تحقق هـذه المتراجحات المجتمعة بآن واحد هي القيم المحصورة بين الصفر و $(٢ - \sqrt{٣})$

٧٥— تنبيه : يطلب منا في بعض المسائل ان نعين الوسيط ليكون جذرا المعادلة :

$$ب س^{٢} + ح س + د = ٠ \qquad (١)$$

محققين علاقة ما مثل با $(س' ، س'') = ٠$

فلحل هذه المسألة نستعيض عن المعادلة (١) بالمعادلتين :

$$س' + س'' = -\frac{ح}{ب} \quad ، \quad س' \cdot س'' = \frac{د}{ب}$$

فاذا اضفنا لهاتين المعادلتين العلاقة التي يجب ان يحققها الجذران نحصل على مجموعة ثلاث معادلات ، وهي :

$$\begin{cases} \text{ما}\,(س_{\circ}\ ،\ س_{\circ}'') = \circ \\ س_{\circ} + س_{\circ}'' = -\frac{ح}{ب} \\ س_{\circ} \cdot س_{\circ}'' = \frac{د}{ب} \end{cases}$$

فاذا اذهبنا ما بين هـذه المعادلات الثلاث المجهولين $س_{\circ}$ ، $س_{\circ}''$ نحصل على معادلة وحيدة حاوية على الوسيط فقط ، فبحلها نجد قيم الوسيط المطلوبة ونحصل على المطلوب .

٧٦ - مثال : لتكن المعادلة :

$$س^{٢} - ٢(هـ + ٢)\,س + ٩هـ - ١ = \circ$$

والمطلوب تعيين قيم هـ لاجل ان يكون جذرا هذه المعادلة محققين للعلاقة الآتية :

$$٢\,س_{\circ} - س_{\circ}'' = ٣$$

الحل : نستعيض عن المعادلة المعطاة بمعادلتي المجموع وحاصل الضرب فنجد المجموعة الآتية :

$$٢\,س_{\circ} - س_{\circ}'' = ٣ \qquad (١)$$

$$س_{\circ} + س_{\circ}'' = ٢(هـ + ٢) \qquad (٢)$$

$$س_{\circ} \cdot س_{\circ}'' = ٩هـ - ١ \qquad (٣)$$

لنذهب الـ $س_{\circ}$ ، $س_{\circ}''$ ما بين هذه المعادلات الثلاث فنجد من المعادلتين (١) ، (٢) ان :

$$س_{\circ} = \frac{٢هـ + ٧}{٣} \quad ، \quad س_{\circ}'' = \frac{٤هـ + ٧}{٣}$$

وبوضع هاتين القيمتين في المعادلة الثالثة نجد المعادلة التي لا تحوي الا على الوسيط هـ وهي :

$$(٢هـ + ٧)(٤هـ + ٥) = ٩(٩هـ - ١)$$

فبحل الاقواس والاختصار والترتيب نجد المعادلة :

$$٨هـ^{٢} - ٤٣هـ + ٤٤ = \circ$$

وبما ان : $\Delta = (٤٣)^{٢} - ٤ \times ٨ \times ٤٤ = ٤٤١$

اذن : $هـ = \frac{٤٣ \pm ٢١}{١٦}$ ومنها : $هـ' = ٤$ ، $هـ'' = \frac{١١}{٨}$

وحقيقة عند ما $هـ = ٤$ تصبح المعادلة المعطاة من الشكل :

$$س^{٢} - ١٢ س + ٣٥ = ٠$$

وجذراها هما $س' = ٥$ ، $س'' = ٧$ اي يحققان العلاقة المطلوبة .

وعند ما $هـ = \frac{١١}{٨}$ فان المعادلة المعطاة تصبح من الشكل :

$$٨ س^{٢} - ٥٤ س + ٩١ = ٠$$

وجذراها هما $س' = \frac{١٣}{٤}$ ، $س'' = \frac{١٤}{٤}$ اي يحققان حقيقة

العلاقة المطلوبة وهي : $٢ س' - س'' = ٣$ وهو المطلوب .

٧٧— ملاحظة : ١) من الخطأ الفادح ان نحسب في المسألة السابقة الجذرين رأساً وان نضع قيمتيها في العلاقة المطلوبة لتعيين قيم الوسيط .

٢) تكون احياناً العلاقة المطلوبة تناظرية بالنسبة للجذرين ، اي لا تتغير بتبديل $س'$ بـ $س''$ وبالعكس ، ففي هذه الحالة يمكن دوماً حساب العلاقة المطلوبة رأساً بدلالة المجموع وحاصل الضرب ، كما رأينا ذلك عند ما حسبنا مجموع مربعات ومكعبات الجذرين .

فالعلاقة $\frac{س'^{٢} + س''^{٢}}{س' \cdot س''} = \frac{٥}{٢}$ مثلا ، هي تناظرية بالنسبة للجذرين . يمكن حساب جانبها الاول بدلالة المجموع وحاصل الضرب ، كما يرى ذلك بسهولة .

مثال : لو طلب منا تعيين قيم الوسيط هـ في المعادلة :

$$س^{٢} - (هـ + ١) س + هـ = ٠$$

ليكون جذراها محققين العلاقة السابقة ، نكتب رأساً العلاقة السابقة بالشكل الآتي :

$$\frac{(س' + س'')^{٢} - ٢ س' \cdot س''}{س' \cdot س''} = \frac{(هـ + ١)^{٢} - ٢ هـ}{هـ} = \frac{٥}{٢}$$

ومنها : $٢ هـ^{٢} - ٥ هـ + ٢ = ٠$ ومنها : $هـ'' = ٢$ ، $هـ' = \frac{١}{٢}$

ويمكننا ان نتحقق بسهولة ان هاتين القيمتين مقبولتان ، وهو المطلوب .

تمارين

١] عين مواضع الاعداد : $-٣ ، -١ ، ٠ ، ١ ، ٢$ بالنسبة الى جذري المعادلة : $٣س^{٢} - ٥س + ١ = ٠$

٢] عين مواضع الاعداد : $\frac{٣}{٧} ، ٣ ، ٥ ، ٩$ بالنسبة الى جذري المعادلة : $٧س^{٢} - ٦١س + ٤٠ = ٠$

٣] عين مواضع الاعداد : $٦ ، ٥ ، ٤ ، ٠ ، -٢$ بالنسبة الى جذري المعادلة : $س^{٢} - ٦س + ٧ = ٠$

٤] عين مواضع الاعداد : $-٤ ، \frac{١}{١٠٠} ، \frac{١}{١٠} ، ٩٩ ، ١٠٣$ بالنسبة الى جذري المعادلة : $س^{٢} - ١٠٠س + ١ = ٠$

٥] برهن على ان للمعادلتين :

$$(س - ب)(س - حـ) - د^{٢} = ٠$$

$$\frac{١}{س - ب} + \frac{١}{س - حـ} + \frac{١}{س - د} = ٠ \qquad ب < حـ < د$$

جذرين حقيقيين دوماً .

٦] برهن على ان للمعادلة :

$$\frac{٢}{س - ط} + \frac{٢}{س - ق} + ١ = ٠$$

جذرين حقيقيين دوماً مهما كانت ط ، ق

٧] برهن على ان للمعادلة :

$$\frac{ب^{٢}}{س - ط} + \frac{حـ^{٢}}{س - ق} - ١ = ٠$$

جذرين حقيقيين مهما كانت قيم الحروف ب ، حـ ، ق ، ط ؟

٨] المطلوب حل المتراجحات الآتية :

$س^{٢} - ١٠٠ س + ٤٢ > ٠$ ، $- ٥ س^{٢} - ١٠ س + ٧ < ٠$

$س + \frac{١}{س} < ٣$ ، $س - ١ > \frac{١}{س + ١}$

$(هـ س - ١)(هـ س + ٣) > ٠$ ، $(س^{٢} - ١)(س^{٢} - ٨ س + ٧) < ٠$

٩] المطلوب حل المتراجحتين الآتيتين :

$$\frac{س^{٢} - ٣ س + ٢}{س^{٢} - ٥ س - ٦} < \frac{س^{٢} - ٥ س - ٦}{س^{٢} - ٣ س + ٢} \quad (١)$$

$$\frac{س}{س - ب} - \frac{٢ ب}{س + ب} < \frac{س^{٢} + ب^{٢}}{س^{٢} - ب^{٢}} \quad (٢)$$

١٠] المطلوب تعيين قيم هـ التي تكون من اجلها المتراجحات الآتية محققة مهما كانت س

$$- ٣ س^{٢} + ٢ هـ س - ١٢ < ٠$$

$$(هـ + ١) س^{٢} - ٨ س + هـ + ١ < ٠$$

$$\frac{٤}{٣} < \frac{س^{٢} - ٦ س - ٧}{س^{٢} - ٢ هـ س + هـ^{٢}}$$

$$س^{٢} + ٢ هـ س + هـ > \frac{٣}{١٦}$$

١١] المطلوب حل المتراجحات :

$٣ (هـ + ١) س^{٢} - ٦ (هـ^{٢} + هـ + ١) س + ٧ (هـ^{٢} - ١) > ٠$

$(هـ + ١) س^{٢} - ٢ (هـ + ١) س + هـ - ٣ < ٠$

$(هـ - ٤) س^{٢} - (هـ - ٦) س + هـ - ٥ > ٠$

باعتبار هـ عدداً جبرياً معلوماً .

١٢] المطلوب حل المجموعة :

$س + ٢ ع - هـ = ٠$ ، $٣ س + ٤ ع - ١١ = ٠$

ثم ليكن $س_{\circ}$ ، $ع_{\circ}$ حلاً لهذه المجموعة . عين الحرف هـ لاجل ان تكون المتراجحة :

$$(س_{\circ} - ١)^{٢} + (ع_{\circ} - ٢)^{٢} < ٩$$ محققة .

١٢] عين الحدود التي تتغير ضمنها ط لاجل ان تكون المتراجحة :

$$\frac{٣(٢ط + ١)س^{٢} - ٢(٤ط + ٥)س + ٥ط + ٩}{٥س^{٢} - ٦س + ٥} < ط + ٢$$

محققة مهما كانت س .

١٤] المطلوب تعيين الحرفين ب ، حـ المذكورين في التابع :

$$ا(س) = س^{٤} + س^{٢} - ٧س^{٢} + بس + حـ$$

حتى ينعدم هذا التابع من اجل $س = ١$ ومن اجل $س = -٣$ بعد ابدال ب ، حـ بقيمتيهما المستخرجتين سابقاً .

المطلوب حل المتراجحة : $ا(س) < ٠$.

١٥] المطلوب حل المتراجحات الاتية :

$$\frac{٢(\sqrt{٣} + \sqrt{٢})س - (\sqrt{٦} + ١)}{٤س^{٢} - ١} < ١$$

$$\frac{١}{س^{٢} - ٢س - ١٥} > \frac{١}{س^{٢} - س - ٢}$$

$$\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - س - ٢} - \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + س - ٢} - \frac{٣س}{س^{٢} - ٤} < ٠$$

١٦] لدينا المعادلة :

$$\left(ط^{٢} - \frac{١٣}{٣}ط + \frac{١٣}{٩}\right)س^{٢} + ٣ط س + ٢ = ٠$$

والمطلوب تعيين ط لاجل ان يكون لهذه المعادلة جذران مربع احدهما يساوي ضعف جذائها .

١٧] عين قيم ب التي من اجلها يكون للافادة :

$$س^{٢} - ٥ س + ٦ + ب (س^{٢} + ١)$$

جذران حقيقيان .

١٨] عين قيم ط التي من اجلها يكون المقدار :

$$ط س^{٢} + ٢ (٢ ط + ١) س + ٥ ط + ٤$$

اكبر من الصفر مهما كانت س .

١٩] لدينا المعادلة :

$$س^{٢} - (هـ + ٢) س + ٢ هـ + ١ = ٠$$ والمطلوب :

١ً) تعيين قيم هـ التي من اجلها يكون لهذه المعادلة جذران حقيقيان ، وما علامات هذين الجذرين عندئذ ؟

٢ً) اوجد علاقة كائنة بين الجذرين $س'$ ، $س''$ وغير تابعة الى هـ

٣ً) استخدم هذه العلاقة في حساب الجذرين مع فرض ان $\frac{س'}{س''} = \frac{٨}{٥}$

٢٠] عين قيم هـ التي تجعل للمعادلة :

$$(هـ^{٢} + ٣ هـ + ٣) (س + ١) س + هـ^{٢} = ٠$$

جذرين حقيقيين يحصران بينهما العدد $\left(-\frac{١}{٢}\right)$

٢١] المطلوب حل ومناقشة المعادلة :

$$(ط - ١) س^{٢} - ٢ (ط - ٢) س + ٣ (ط + ٣) = ٠$$

بحسب قيم ط .

٢٢] ناقش وجود جذور المعادلات الاتية واشارتها بحسب قيم الوسيط ط :

$$س^{٢} - ٢ (ط - ١) س + ٢ ط + ١ = ٠$$

$$٣ ط س^{٢} - ٣ (٣ ط - ٢) س + ٣ (ط - ١) = ٠$$

$$(ط - ٢) س^{٢} - ٢ ط س + ٢ ط - ٣ = ٠$$

٢٣] عين مواضع العددين -١ ، ٠ بالنسبة الى جذري المعادلة :

$$(٢ هـ - ٣) س^{٢} - ٢ هـ س + هـ + ٢ = ٠$$

٢٤] عين الحرف هـ لاجل ان يكون لكل من المعادلات :

$(هـ + ٢) س^٢ - ٢ (هـ - ١) س - ٣ (هـ + ١) = ٠$

$(هـ - ٢) س^٢ + ٢ س + هـ - ٢ = ٠$

$(٢ هـ - ١) س^٢ - (هـ + ١) س - (هـ + ٩) = ٠$

جذران حقيقيان ، وان يكون العدد (-١) محصوراً بينهما .

٢] عين الحرف هـ لاجل ان يكون للمعادلة :

$(هـ^٢ - ١) س^٢ - ٢ (هـ - ١) س + ٣ = ٠$

جذران حقيقيان احدهما ينحصر بين -١ والصفر ؛ والآخر اصغر من -١

٢٦] لدينا ذات الحدود الثلاثة :

$ا (س) = (٣ ط - ٢) س^٢ + ٢ ط س + ٣ ط$ والمطلوب :

١°) تعيين قيم ط التي من اجلها يكون للمعادلة : $ا (س) = ٠$

جذر ينحصر بين الصفر وبين -١

٢°) تعيين قيم ط التي من اجلها يكون للمعادلة : $ا (س) = ٠$

جذران غير واقعين بين الصفر وبين -١

٢٧] ادرس موضع العدد -١ بالنسبة الى جذري المعادلة :

$س^٢ + ٢ (هـ + ١) س + ٢ هـ = ٠$

وموضع العدد -١ ايضاً بالنسبة الى جذري المعادلة :

$(هـ + ١) س^٢ + ٤ هـ س + هـ - ٣ = ٠$

٢٨] ادرس موضع العدد ٢ بالنسبة الى جذري كل من المعادلتين :

$(هـ - ٢) س^٢ - ٢ (هـ + ١) س + ٣ (هـ + ٢) = ٠$ (١)

$(٢ هـ - ٣) س^٢ - ٢ (هـ + ١) س + هـ + ٧ = ٠$ (٢)

٢٩] انتخب العدد هـ لاجل ان يكون احد جذري المعادلة :

$٣ س^٢ + (هـ - ١) س + ٣ هـ + ٢ = ٠$

اكبر من ٣ مع ان جذرها الآخر اصغر من ٢

٢٠] كيف تنتخب الحرف هـ لاجل ان يكون المعادلة :

$$(هـ + ١)س^{٢} - ٣هـ س + ٤هـ = ٠$$

جذران حقيقيان كلاهما اكبر من -١ ؟

٢١] عين قيم هـ التي تجعل للمعادلة :

$$س^{٢} - هـ س - ٢هـ^{٢} = ٠$$

جذرين حقيقيين ، احدهما اصغر من -١ والاخر محصور بين العددين $(+١)$ ، (-١)

٢٢] عين قيم ط التي من اجلها يكون للمعادلة :

$$(٣ط + ١)س^{٢} + (٤ط + ١)س + ١٢ط = ٠$$

جذران حقيقيان ، وما هي الحدود التي تتغير ضمنها ط لاجل ان يكون جذرا هذه المعادلة اكبر من $+٢$ ؟

٢٣] عين قيم ط التي من اجلها يكون للمعادلة :

$$س^{٢} - ٢ط س + ٤ = ٠$$

جذران كل منهما اصغر من (-١)

٢٤] المطلوب حل ومناقشة المعادلة : $\frac{٢ حـ^{٢} س}{٣ - حـ^{٢} س} = ط$

٢٥] المطلوب حل ومناقشة المعادلة :

$$هـ(١ - حـ^{٢} س) + (٢هـ^{٢} - هـ + ١) حـ س - ٣هـ + ١ = ٠$$

٢٦] عين قيم هـ في المعادلة :

$$٢س^{٢} - ٤(هـ + ١)س + ٢هـ^{٢} - هـ - ٨ = ٠$$

لاجل ان يكون :

$$(س^{ء} - ١)(س^{ـ} - ١) + ٦ = ٠$$

٢٧] المطلوب حل ومناقشة المعادلة :

$$ط^{٢} حـ^{٢} س - ٢ حـ س + ٢ = ٠$$

٣٨] عين قيم هـ في المعادلة : $٦ س^{٢} - ٧ س + هـ - ١ = ٠$ ليكون الجذران محققين للعلاقة : $٣ س^{ً} + ٢ س^{َ} = ٣$

٣٩] عين قيم هـ في المعادلة :

$$هـ س^{٢} = (٢ هـ + ١) س + هـ = ٠$$

لاجل ان يكون احد الجذرين اربعة امثال الآخر.

٤٠] عين قيم هـ في المعادلة :

$$(هـ^{٢} - ١١) س^{٢} - ٢ (هـ + ١) س + ١ = ٠$$

ليكون مجموع مقلوبي جذريها مساوياً ٦ .

٤١] عين قيم هـ في المعادلة :

$$س^{٢} - ٣ س + هـ - ١ = ٠$$

لاجل ان يكون مجموع مكعبي جذريها مساوياً ٩ .

٤٢] اولاً : اختصر الافادة :

$$\frac{٢ س^{٢} - س}{٢ س^{٢} - ٥ س + ٢} - \frac{٦٣ س^{٢} - ٨٤ س + ٢٨}{(٢١ س - ١٤)(٢ س - ٣)} +$$

$$\frac{ط س}{٤ س - ٥} + \frac{١٢ س - ٦}{٣ س^{٢} - ١٢ س + ١٢}$$

بجعلها على ابسط شكل ممكن .

ثانياً : بجعل ناتج الافادة السابقة مساوياً $\frac{٣ ط + ٩}{٢}$ ينتج معادلة من الدرجة الثانية .

يطلب مناقشة وجود جذريها وعلامتها بحسب قيم الوسيط ط ؟

٤٣] لدينا المعادلة :

$$٢ ط س^{٢} - ٢ س - ٣ ط - ٢ = ٠$$

والمطلوب :

١ً) تعيين الوسيط ط لاجل ان يكون لهذه المعادلة جذر يساوي الصفر ، وما هو عندئذ جذرها الاخر ؟

٢ً) بين بان لهذه المعادلة جذرين حقيقيين مهما كانت ط .

٣ً) ايجاد قيم الوسيط ط التي من اجلها يكون احد جذري المعادلة اكبر من الواحد ، وجذرها الاخر اصغر من الواحد .

٤٤] عين قيم ط التي من اجلها يكون للمعادلة :

$$٢ س^{٢} - ٢ (٢ ط + ١) س + ط (ط - ١) = ٠$$

جذران مثل $س_{١}$ ، $س_{٢}$ وان يكون الوسيط ط بينهما .

٤٥] لدينا المعادلتان :

$$س^{٢} - س - ١ = ٠$$

$$س^{٢} + هـ س - ١ = ٠$$

والمطلوب تعيين مواضع جذورهما بحسب قيم هـ .

المبحث الثالث

المعادلات التي يعود حلها الى حل معادلة من الدرجة الثانية

الفصل الأول

المعادلات المضاعفة التربيع

٧٨— المعادلة المضاعفة التربيع : هي معادلة من الدرجة الرابعة لا تحوي الا على القوى الزوجية للمجهول س .

فبحسب هذا التعريف تكون المعادلة المضاعفة التربيع من الشكل :

$$ب\ س^٤ + ح\ س^٢ + د = ٠ \qquad (١)$$

ولحلها نفرض ان : $س^٢ = ع$ ومنها : $س^٤ = ع^٢$

اي اننا نستعمل المجهول المساعد وهو $ع = س^٢$ فتكون ع جذراً للمعادلة :

$$ب\ ع^٢ + ح\ ع + د = ٠ \qquad (٢)$$

وهذه المعادلة (٢) تسمى بالمعادلة الحالة للمعادلة المضاعفة التربيع (١)

يدلنا ما سبق على ان مربع كل جذر للمعادلة (١) يحقق المعادلة (٢) وبالعكس اذا كان $ع = ط$ جذراً للمعادلة (٢) فكل جذر للمعادلة $س^٢ = ط$ (٣) يحقق المعادلة (١) ، وينتج من ذلك :

نتيجة : نحصل على جميع جذور المعادلة المضاعفة التربيع بايجاد :

١ً) جميع جذور المعادلة الحالة (٢)

٢ً) ومن ثم ايجاد جميع جذور المعادلة (٣) حيث ط تدل على قيمة ع جذر المعادلة الحالة (٢) .

٧٩ — المناقشة : لكي يكون للمعادلة المضاعفة التربيع جذور يجب ان يكون للمعادلة الحالة (٢) جذور ، ومن ثم يجب ان يكون للمعادلة (٣) جذور ايضاً ولا يكون للمعادلة (٣) جذور الا اذ كانت ع موجبة ، لذلك نتوصل الى المناقشة الآتية :

٨٠ — الحالة الاولى: $ح^{٢} - ٤ ب د > ٠$ فيكون للمعادلة الحالة جذران ، ولكي يكون للمعادلة المضاعفة التربيع جذور يجب ان تكون جذور المعادلة الحالة موجبة ، لذلك نميز ثلاثة فروع :

الفرع الاول : $\frac{د}{ب} > ٠$ ، $-\frac{ح}{ب} > ٠$ فيكون للمعادلة الحالة جذران موجبان ، وهما $ع_{َ}$ ، $ع_{ً}$ ويكون للمعادلة (١) اربعة جذور وهي جذور المعادلتين : $س^{٢} = ع_{َ}$ ، $س^{٢} = ع_{ً}$

فكل معادلة من هاتين المعادلتين تعطينا قيمتين متقابلتين الى س فنحصل بالنتيجة اذن على اربعة جذور ، وهي :

$$س = \pm \sqrt{ع_{َ}} \quad ، \quad س = \pm \sqrt{ع_{ً}}$$

وبما ان :

$$ع_{ً} = \frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب} \quad ، \quad ع_{َ} = \frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

اذن : جذور المعادلة المفروضة هي :

$$س' = \sqrt{\frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}}$$

$$س'' = -\sqrt{\frac{-ح + \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}}$$

$$س''' = \sqrt{\frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}}$$

$$س'''' = -\sqrt{\frac{-ح - \sqrt{ح^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}}$$

ويمكننا ان نجمع هذه الجذور الاربعة بالقانون الاتي :

$$س = \pm \frac{-حـ \pm \sqrt{حـ^{٢} - ٤ ب د}}{٢ ب}$$

الفرع الثاني : $\frac{د}{ب} > ٠$ ، $-\frac{حـ}{ب} < ٠$ فيكون للمعادلة

الحالة جذران سالبان وهما $ع_{\alpha}$ ، $ع_{\beta}$ واما المعادلة المضاعفة التربيع فليس لها حلول اذ انه لايوجد للمعادلتين : $س^{٢} = ع_{\alpha}$ ، $س^{٢} = ع_{\beta}$ حلول ، وذلك لان $ع_{\alpha}$ ، $ع_{\beta}$ سالبان .

الفرع الثالث : $\frac{د}{ب} < ٠$ فيكون للمعادلة الحالة جذر موجب $ع_{\beta}$ وجذر سالب $ع_{\alpha}$ ، فالجذر السالب $ع_{\alpha}$ لا يعطي قيماً الى س ، واما الجذر الموجب $ع_{\beta}$ يعطي قيمتين متقابلتين الى س وهما : $س = \pm \sqrt{ع_{\beta}}$ اذن في هذه الحالة يكون للمعادلة المضاعفة التربيع جذران فقط .

٨١ — حالة خاصة: عند ما يكون $د = ٠$ يكون للمعادلة الحالة جذران ، وهما : الصفر و $-\frac{حـ}{ب}$ ويكون للمعادلة المضاعفة التربيع جذور هي جذور المعادلتين : $س^{٢} = ٠$ ، $س^{٢} = -\frac{حـ}{ب}$ فالاولى تعطينا الجذر المضاعف $س = ٠$ واما الثانية فتعطينا الجذرين المتناظرين $س = \pm \sqrt{-\frac{حـ}{ب}}$ فيما اذا كان $-\frac{حـ}{ب} > ٠$ وهي ليس لها جذور فيما اذا كان $-\frac{حـ}{ب} < ٠$.

الحالة الثانية : $حـ^{٢} - ٤ ب د = ٠$ فالمعادلة الحالة تصبح :

$$ب \left(ع + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢} = ٠$$

ويكون لها جذر مضاعف وهو : $ع = -\frac{ح}{٢ب}$

واما المعادلة الاصلية فتصبح :

$$ب\left(س^{٢} + \frac{ح}{٢ب}\right)^{٢} = ٠$$

وجذورها هي جذور المعادلة :

$$س^{٢} = -\frac{ح}{٢ب}$$

لذلك نميز ثلاثة فروع :

الفرع الاول : $-\frac{ح}{٢ب} > ٠$ فيكون للمعادلة المضاعفة التربيع

جذران وهما : $س'' = \sqrt{-\frac{ح}{٢ب}}$ ، $س' = -\sqrt{-\frac{ح}{٢ب}}$

ويمكن ان نعتبر ان كلا منهما هو جذر مضاعف للمعادلة الاصلية المضاعفة التربيع .

الفرع الثاني : $-\frac{ح}{٢ب} < ٠$ ليس للمعادلة المفروضة جذور .

الفرع الثالث : $-\frac{ح}{٢ب} = ٠$ اي $ح = ٠$ فتصبح المعادلة الاصلية : $ب س^{٤} = ٠$ ويكون لها جذور هي $س = ٠$ وعددها اربعة منطبقة ، لان المعادلة المفروضة يمكن ان تكتب وقتئذ :

$$ب \times س \times س \times س \times س = ٠$$

ويكفي ان يكون احد المضاريب صفراً ليكون الجانب الاول صفراً .

٨٣ — الحالة الثالثة: $ح^{٢} - ٤ ب د < ٠$ فالمعادلة الحالة ليس لها جذور ، وكذا المعادلة المفروضه ليس لها جذور ايضاً .

٨٦— الخلاصة : يمكن ان نلخص كل ما مر بالجدول الآتي :

$$ب\,س^{٤} + حـ\,س^{٢} + د = ٠$$

$$حـ^{٢} - ٤\,ب\,د > ٠ \begin{cases} \frac{د}{ب} > ٠ \begin{cases} -\frac{حـ}{ب} > ٠ & \text{يوجد للمعادلة اربعة جذور} \\ -\frac{حـ}{ب} < ٠ & \text{ليس للمعادلة جذور} \end{cases} \\ \frac{د}{ب} < ٠ \quad \text{يوجد للمعادلة جذران} \end{cases}$$

$$حـ^{٢} - ٤\,ب\,د = ٠ \begin{cases} \frac{د}{ب} = ٠ \begin{cases} ١) & \text{للمعادلة جذر مضاعف وهو الصفر} \\ ٢) & \begin{cases} -\frac{حـ}{ب} > ٠ & \text{يوجد جذران آخران} \\ -\frac{حـ}{ب} < ٠ & \text{لايوجد جذر آخر} \end{cases} \end{cases} \\ -\frac{حـ}{ب} > ٠ \quad \text{للمعادلة جذران مضاعفان} \\ -\frac{حـ}{ب} < ٠ \quad \text{ليس لها جذور} \\ -\frac{حـ}{ب} = ٠ \quad \text{للمعادلة جذر مضاعف مرتين يساوي الصفر} \end{cases}$$

$$حـ^{٢} - ٤\,ب\,د < ٠ \quad \text{ليس للمعادلة جذور}$$

٨٥— [توسع] ذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع :

ان درس ذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع ينتج بصورة سهلة من درس ذات الحدود الثلاثة التي من الدرجة الثانية ، اذ لا تفرق الاولى عن الثانية الا بابدال $س^{٢}$ بـ (س) او ع .

٨٦— اشارة ذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع :

القيمة العددية لذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع :

$$ب\ س^{٤} + حـ\ س^{٢} + د \qquad (١)$$

من اجل قيمة معينة لـ س هي عين القيمة العددية لذات الحدود الثلاثة :

$$ب\ ع^{٢} + حـ\ ع + د \qquad (٢)$$

عند ما نعطي الى المتحول المستقل ع القيمة س٢ .

فاذا كان لذات الحدود الثلاثة (٢) جذران مختلفان عَ ، عً فان اشارتها عند ما يكون ع = س٢ [اي اشارة ذات الحدود الثلاثة (١)] تتبع موقع العدد س٢ بالنسبة لهذين الجذرين . واذا لم يكن للمعادلة (٢) جذور ، او كان لها جذر واحد فان اشارتها وبالنتيجة اشارة (١) تكون كاشارة ب (وذلك بغض النظر عن القيمة التي تجعلها صفراً عند ما يكون هنالك جذر مضاعف) .

لذلك لدرس اشارة المقدار $ب\ س^{٤} + حـ\ س^{٢} + د$ عند ما س = ط يكفي ان ندرس اشارة $ب\ ع^{٢} + حـ\ ع + د$ عند ما ع = ط٢

ولندرس الآن بصورة مفصلة الحالة الاولى :

٨٧— [توسع] الحالة الاولى : لنفرض ان لذات الحدود الثلاثة الحالة (٢) جذرين موجبين : عَ ، عً ولنفرض ان عً > عَ اذن : يوجد لذات الحدود الثلاثة (١) اربعة جذور ، اذا رتبناها بالنسبة لقيمها نجد :

$$-\sqrt{عً} < -\sqrt{عَ} < \sqrt{عَ} < \sqrt{عً}$$

فبواسطة هذا الترتيب نجد الفروع الاتية :

الفرع الاول : عند ما يكون س < $-\sqrt{عً}$ يكون س٢ > عً ودلك لان س عدد سالب قيمته المطلقة اكبر من $\sqrt{عً}$ اذن س٢ ليس واقعاً ما بين جذري المعادلة الحالة (٢) ، اذن : اشارة هذه عند ما ع = س٢ ويفرض س < $-\sqrt{عً}$ كاشارة ب ، وكذلك اشارة (١) في هذا الفراغ كاشارة ب .

الفرع الثاني : عند ما يكون $-\sqrt{ع} < س < \sqrt{ع}$ يكون

$ع < س^{٢} < ع$

اي يكون $س^{٢}$ واقعاً ما بين جذري الحالة (٢) اذن : في هذا الفراغ اشارة الحالة واشارة الافادة الاصلية (١) هما خلاف الاشارة ب .

الفرع الثالث : عند ما يكون $-\sqrt{ع} < س < \sqrt{ع}$ يكون

$س^{٢} < ع$ اي $س^{٢}$ خارج عن جذري الافادة الحالة (٢) فتكون اذن اشارة ذات الحدود الثلاثة (١) او (٢) كاشارة ب .

الفرع الرابع : عند ما يكون $\sqrt{ع} < س < \sqrt{ع}$ يكون

$ع < س^{٢} < ع$

اي : تكون $س^{٢}$ واقعة بين جذري المعادلة الحالة (٢) وتكون اشارة ذات الحدود الثلاثة الحالة (٢) او (١) خلاف اشارة ب .

الفرع الخامس : عند ما يكون $س > \sqrt{ع}$ يكون $س^{٢} > ع$

اي $س^{٢}$ واقعة خارج الجذرين للمعادلة الحالة (٢) وتكون اشارة ذات الحدود الثلاثة (٢) او (١) كاشارة ب .

الخلاصة :

من	$-\sqrt{ع}$	خلاف	$-\sqrt{ع}$	من	$\sqrt{ع}$	خلاف	$\sqrt{ع}$	من
اشارة		اشارة		اشارة		اشارة		اشارة
ب		ب		ب		ب		ب

٨٨ — [توسع] الحالة الثانية : عند ما يكون لذات الحدود الثلاثة (٢) جذر واحد موجب مثل ع" والآخر سالب ، فذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع يكون لها جذران فقط ، وهما : $-\sqrt{ع}$ ، $\sqrt{ع}$ فاذا لاحظنا ان $س^{٢}$ هو عدد موجب دائماً ، اي اكبر من الجذر السالب ، نجد الفروع الاتية :

الفرع الاول : ان كان $س < -\sqrt{ع}$ يكون $س^{٢} > ع$" اذن

س٢ اكبر من الجذرين ع' ، ع'' وتكون اشارة ذات الحدود الثلاثة (٢) ، (١) كاشارة ب .

الفرع الثاني : اذا كان $-\sqrt{ع''} < س < \sqrt{ع'}$ يكون س٢ < ع'' اي س٢ واقع بين الجذرين ع' ، ع'' وتكون اشارة ذات الحدود الثلاثة (٢) ومن ثم (١) خلاف اشارة ب .

الفرع الثالث : اذا كان $س > \sqrt{ع'}$ يكون س٢ > ع'' اي س٢ واقع خارج الجذرين ع' ، ع'' وتكون اشارة ذات الحدود الثلاثة (٢) ومن ثم (١) كاشارة ب .

الخلاصة :

من	$-\sqrt{ع''}$	خلاف	$\sqrt{ع'}$	من
اشارة		اشارة		اشارة
ب		ب		ب

٨٩ — [توسع] الحالة الثالثة : اذا كان لذات الحدود الثلاثة (٢) جذران سالبان ، فالكمية س٢ الموجبة دوماً تكون حتماً اكبر من الجذرين ، وتكون اشارة ذات الحدود الثلاثة (١) كاشارة ب دائماً ، ويمكن ان نقارب هذه النتيجة من الحالة حـ٢ — ٤ ب د < ٠ في معادلة الدرجة الثانية ، ونقول :

اذا لم يكن لذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع جذور فتكون اشارتها دائماً كاشارة ب .

وكذلك اذا كان لها جذران مضاعفان بان كان حـ٢ — ٤ ب د = ٠ وكان $-\frac{حـ}{ب} > ٠$ فتكون اشارتها دائماً كاشارة ب ايضاً ، لانها تصبح :

$$ب\left(س^{٢} + \frac{حـ}{٢ب}\right)^{٢}$$

٩٠ — [توسع] يبرهن ان :

نظرية : اذا وجدنا عددين مثل هـ ، ح ووضعناهما محل س في ذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع :

$$ا(س) = ب س^٤ + ح س^٢ + د$$

ورأينا ان النتيجتين مختلفتان بالاشارة بان كان ا(هـ) . ا(ح) < ٠ نحكم بان لذات الحدود الثلاثة جذوراً حتما ، ويكون احد هذه الجذور او ثلاثة منها محصورة بين العددين هـ ، ح

البرهان: كما رأينا سابقاً ان اشارة ذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع لا تتغير بل تبقى كاشارة ب مهما كانت س . ويشذ عن ذلك حالة وجود جذور . فاذا دققنا جميع الاحوال الممكنة نرى ان ابدال س بالعددين هـ ، ح لا يعطي نتيجتين مختلفتين بالاشارة الا اذا كان واقعاً بين هـ ، ح جذر او ثلاثة جذور (اي عدد وتر من الجذور) .

٩١ — [توسع] موقع عدد ما مثل هـ بالنسبة لجذور ذات الحدود الثلاثة والمضاعفة التربيع :

لتكن المعادلة المضاعفة التربيع :

$$ب س^٤ + ح س^٢ + د = ٠ \qquad (١)$$

ولنفرض ان لها جذرين او اربعة جذور ، فللمعادلة الحالة :

$$ب ع^٢ + ح ع + د = ٠ \qquad (٢)$$

لها اذن جذر او جذران موجبان . فلمقارنة العدد هـ بجذري المعادلة (١) نقارن اولا العدد هـ^٢ بالنسبة لجذري المعادلة الحالة ، لذلك نبدل ع بالعدد هـ^٢ [اعني نبدل س بالعدد هـ] فاشارة النتيجة مضافاً اليها مقارنة هـ^٢ بالكمية $-\frac{ح}{٢ب}$ عند الحاجة تعطينا موقع العدد هـ^٢ بالنسبة لجذري المعادلة الحالة ، ونستنتج من ذلك حالا موقع هـ بالنسبة لجذور المعادلة المضاعفة التربيع .

ليكن مثلاً ع" ، ع' جذرين موجبين للمعادله الحالة ولنفرض اننا وجدنا

$هـ^{٢} > ع''$ فستنتج اذن $هـ > \sqrt{ع''}$ اذا كانت هـ موجبة .

او : $هـ < -\sqrt{ع''}$ اذا كانت هـ سالبة(*)

ولكن اذا كان $هـ^{٢} > عَ$ فيكون حتماً $-\sqrt{عَ} < هـ < \sqrt{عَ}$ (**)

واما اذا كان $عً > هـ^{٢} > عَ$ فيكون :

$\sqrt{عً} > هـ > \sqrt{عَ}$ اذا كانت هـ موجبة .

او : $-\sqrt{عً} < هـ < -\sqrt{عَ}$ اذا كانت هـ سالبة .

٩٣ — مثال : ١) المطلوب حل المعادلة :

$$س^{٤} - ١٠ س^{٢} + ٩ = ٠$$

الحل : ان المعادلة الحالة لهذه المعادلة هي :

$$ع^{٢} - ١٠ ع + ٩ = ٠$$

وجذرا هـذه هما ١ ، ٩ اذن جذور المعادلة المعطاة هي جذور المعادلتين الآتيتين $س^{٢} = ١$ ، $س^{٢} = ٩$ فمنها نجد ان جذور المعادلة المعطاة هي:

$$س_{١} = ١ \qquad س_{٢} = -١ \qquad س_{٣} = ٣ \qquad س_{٤} = -٣$$

٩٣ — مثال : ٢) المطلوب حل المعادلة :

$$س^{٤} + س^{٢} - ١٢ = ٠$$

الحل : ان المعادلة الحالة هي :

$$ع^{٢} + ع - ١٢ = ٠$$

وجذراها هما ٣ ، -٤ اذن يوجد للمعادلة المعطاة جذران فقط ناتجان من الجذر الموجب ، اي هما : $\sqrt{٣}$ ، $-\sqrt{٣}$

(*) لنرى ذلك بسهولة يكفي ان ننظر الى المتراجحة $هـ^{٢} - ع'' > ٠$ كمتراجحة من الدرجة الثانية تحوي على المجهول هـ

(**) لنرى ذلك ننظر الى $هـ^{٢} - عَ > ٠$ كمتراجحة من الدرجة الثانية بالنسبة الى هـ

٩٤ — مثال : ٣) المطلوب حل المعادلة :

$$س^{٤} + س^{٢} + ١ = ٠$$

الحل : ان المعادلة الحالة هي :

$$ع^{٢} + ع + ١ = ٠$$

فهذه المعادلة الحالة ليس لها جذور ، اذن : المعادلة المعطاة ليس لها جذور ايضاً .

٩٥ — مثال : ٤) ادرس موقع العدد (٣) بالنسبة لجذور المعادلة :

$$س^{٤} - ٥٠ س^{٢} + ١١٢ = ٠$$

الحل : ان المعادلة الحالة هي :

$$ع^{٢} - ٥٠ ع + ١١٢ = ٠$$

فهذه المعادلة الحالة لها جذران موجبان ، اذن : يوجد للمعادلة المضاعفة التربيع اربعة جذور ، بعد ان علمنا ذلك ، لنعوض ع في المعادلة الحالة بالعدد $٣^{٢}$ [اي لنقارن $٣^{٢}$ بجذري الحالة] فنجد :

$$٨١ - ٤٥٠ + ١١٢ = -٢٥٧$$

مما يدلنا على ان العدد $٣^{٢}$ واقع بين جذري المعادلة الحالة ، اي ان :

$$ع'' < ٣^{٢} < ع'$$ ونستنتج منها ان : $$\overline{ع'}^{٢} < ٣ < \overline{ع''}^{٢}$$

اي العدد ٣ واقع بين الجذرين الموجبين للمعادلة المضاعفة التربيع وهو المطلوب .

الفصل الثاني

كيفية حل مجموعة المعادلات التي من الدرجة الثانية

وذات المجاهيل المتعددة

٩٦ — لحل مجموعة اربع معادلات ، احداها من الدرجة الثانية ، وتحوي على المجاهيل س ، ع ، ص ، ف ؛ نأخذ منها المعادلات الثلاث التي من الدرجة الاولى ونحلها بدلالة احد المجاهيل وليكن س مثلا ، فنحصل على قيم ع ، ص ، ف بدلالة س ثم نضع هذه القيم في المعادلة الرابعة التي من الدرجة الثانية فنحصل على معادلة واحدة من الدرجة الثانية بالنسبة الى س ، فنحلها نجد قيم س ثم نجد قيم المجاهيل الثلاثة الباقية بواسطة المعادلات الثلاث الاول ، ولنوضح ذلك بالامثلة الاتية :

٩٧ — مثال : ١) المطلوب حل مجموعة المعادلتين الاتيتين :

س + ع = م (١) ، س ع = ح (٢)

الحل : نستخرج من الاولى ع بدلالة س فنجد : ع = م − س وبوضع هذه القيمة في المعادلة (٢) نجد :

س (م − س) = ح او $س^{٢}$ − م س + ح = ٠ (٣)

وبحل هذه المعادلة نجد لـ س قيمتين ، وهما : $س_{َ}$ ، $س_{"}$ يقابلهما :

$ع_{َ}$ = م − $س_{َ}$ ، $ع_{"}$ = م − $س_{"}$

وبما ان : $س_{َ}$ + $س_{"}$ = م نستنتج ان :

$ع_{َ}$ = $س_{"}$ ، $ع_{"}$ = $س_{َ}$

اي ان احد الجذرين $س_{َ}$ ، $س_{"}$ هو قيمة س والآخر هو قيمة ع .

اذن : يوجد لمجموعة المعادلتين المعطاة حل واحد ، وهو :

$$س = س_{ن} \quad ، \quad ع = س_{ن+1}$$

او بالعكس . والمسالة الآتية تؤدي لنفس مجموعة المعادلتين (١) ، (٢) السابقتين :

مسألة: « اوجد عددين مجموعهما يساوي م وجداؤهما يساوي ح » .

ويمكن الوصول الى المعادلة (٣) مباشرة وذلك بفرض ان العددين جذران لمعادلة من الدرجة الثانية ، فبحسب (البند ٢٢) نجد رأساً المعادلة الآتية :

$$س^{٢} - م س + ح = ٠$$

٩٨ — مثال : ٢) المطلوب حل مجموعة المعادلات الآتية :

$$س^{٢} + ٢ ع^{٢} + ص^{٢} = ٥ \qquad (١)$$

$$٣ س + ع - ص = ١ \qquad (٢)$$

$$٥ س - ٣ ع + ٢ ص = ٩ \qquad (٣)$$

الحل : لحل هذه المجموعة نبدأ بايجاد قيم ع ، ص بدلالة س مثلا ، وذلك من المعادلتين (١) ، (٢) فبضرب المعادلة (٢) بـ ٢ وجمعها مع المعادلة (٣) نجد :

$$١١ س - ع = ١١ \quad \text{ومنها :} \quad ع = ١١ (س - ١) \qquad (٤)$$

وكذلك بضرب المعادلة (٢) بـ ٣ وجمعها مع المعادلة (٣) نجد :

$$١٤ س - ص = ١٢ \quad \text{ومنها :} \quad ص = ٢ (٧ س - ٦) \qquad (٥)$$

فبوضع قيمة ع وقيمة ص المستخرجتين آنفاً بدلالة س في المعادلة (١) نجد :

$$س^{٢} + ٢٤٢ (س - ١)^{٢} + ٤ (٧ س - ٦)^{٢} = ٥$$

وبعد فك الاقواس ونقل الحدود لجانب واحد نجد :

$$٤٣٩ س^{٢} - ٨٢٠ س + ٣٨١ = ٠$$

وبحلها نجد : $س_{ن+1} = ١$ ، $س_{ن} = \frac{٣٨١}{٤٣٩}$

اذن المجموعة المعطاة تقبل الحلين الاتيين :

س	ع	ص
١	٠	٢
$\frac{٣٨١}{٤٣٩}$	$\frac{٥٨ \times ١١}{٤٣٩}$	$\frac{٦٦}{٤٣٩}$

٩٩ — مثال : ٣) المطلوب حل المجموعة الاتية :

$$س + ط\,ع - ط = ٠ \qquad (١)$$

$$س^{٢} + ع^{٢} - س = ٠ \qquad (٢)$$

الحل : لنستخرج قيمة ع من المعادلة (١) فنجد بفرض $ط \neq ٠$ ان :

$$ع = \frac{ط - س}{ط} \qquad (٣)$$

ولنضع قيمة ع هذه في المعادلة (٢) فنجد المعادلة :

$$س^{٢} + \left(\frac{ط - س}{ط}\right)^{٢} - س = ٠$$

او :
$$(ط^{٢} + ١)\,س^{٢} - ط\,(ط + ٢)\,س + ط^{٢} = ٠ \qquad (٤)$$

فلاجل ان يكون لهذه المعادلة جذران حقيقيان يجب ان تكون قاسمتها اكبر او تساوي الصفر ، اي ان يكون :

$$ط^{٢}\,(ط + ٢)^{٢} - ٤\,ط^{٢}\,(ط^{٢} + ١) \geqslant ٠$$

او :
$$(ط + ٢)^{٢} - ٤\,(ط^{٢} + ١) \geqslant ٠$$

او :
$$-٣\,ط^{٢} + ٤\,ط \geqslant ٠$$

اذن : يجب ان يكون :
$$٠ < ط \leqslant \frac{٤}{٣}$$

فاذا فرضنا ان ط منحصرة بين العددين $\left(٠ \text{ ، } \frac{٤}{٣}\right)$ يكون للمعادلة

(٤) جذران حقيقيان مختلفان ، ولنفرضهما $س'$ ، $س''$ فبوضعهما في (٣) نجد ان :

$$ع' = \frac{ط - س'}{ط} \quad ، \quad ع'' = \frac{ط - س''}{ط}$$

اي ان للمجموعة السابقة حلين ، وهما :

$$س' ، ع' \quad ؛ \quad س'' ، ع''$$

١٠٠ — الحالات الخاصة :

١ً) اذا فرضنا ان $ط = \frac{٤}{٣}$ يكون للمعادلة (٤) جذر مضاعف يساوي

$\frac{٤}{٥}$ كما ان يكون لـ ع جذر مضاعف يساوي $\frac{٢}{٥}$

٢ً) اذا فرضنا ان $ط = ٠$ يكون للمعادلة (٤) جذر مضاعف يساوي الصفر ، ويكون لـ ع من المعادلة (٢) جذر مضاعف يساوي الصفر ايضاً [كما نرى ذلك رأساً في المعادلة (١) ، (٢)] .

١٠١ — تمرين : اعد المسألة السابقة مبتدئاً باستخراج قيمة س بالنسبة الى ع من المعادلة (١) .

١٠٢ — مجموعة المعادلات المتناظرة : المعادلة المتناظرة بالنسبة الى المجهولين س ، ع هي معادلة لا يتغير شكلها عند ابدال كل س بـ ع وبالعكس .

حل مجموعة المعادلات المتناظرة يكون بواسطة حساب مجموع المجهولين وجدائها ، والامثلة الآتية توضح لنا كيفية حل مجموعة المعادلات المتناظرة .

١٠٣ — مثال : ١ً) المطلوب حل المجموعة :

$$س + ع = -١ \qquad (١)$$

$$س^٢ + ع^٢ = -١٩ \qquad (٢)$$

الحل : بما ان المجموع $س + ع$ معلوم ، فلنبحث عن الجداء $س ع$. لذلك نفرق المعادلة (٢) الى مضروبين فنجد :

$$(س + ع)(س^٢ - س ع + ع^٢) = -١٩$$

ومنها :

$$س^٢ - س ع + ع^٢ = ١٩ \qquad (٣)$$

وبتربيع جانبي المعادلة (١) ثم طرح مربعها من المعادلة (٣) نجد :

$$-٣ س ع = ١٨ \quad \therefore \quad س ع = -٦$$

اذن المعادلة : $ص^{٢} + ص - ٦ = ٠$ تعطينا حل المجموعة المعطاة ، فبحل هذه المعادلة الاخيرة نجد ان :

$$ص' = -٣ \quad ، \quad ص'' = ٢$$

اذن : $س = -٣$ ، $ع = ٢$ (او بالعكس) هو حل المجموعة المعطاة ، وهو المطلوب .

١٠٤ — مثال : ٢) المطلوب حل المجموعة الاتية :

$$س ع^{٢} + ع س^{٢} = ٦ \qquad (١)$$

$$س^{٢} + ع^{٢} = ٩ \qquad (٢)$$

الحل : لنفرض ان : $س + ع = ص$ ، $س ع = ف$ اي لنستعمل المجهولين المساعدين ص ، ف ولنكتب المعادلتين (١) ، (٢) على الشكل :

$$س ع (س + ع) = ٦$$

$$(س + ع)(س^{٢} - س ع + ع^{٢}) = ٩$$

اذن :

$$ص . ف = ٦ \qquad (٣)$$

$$ص (ص^{٢} - ٣ ف) = ٩ \qquad (٤)$$

من الاخيرة نجد ان : $ص^{٣} - ٣ ص ف = ٩$

وابدال ص ف بمساويه نجد :

$$ص^{٣} = ٢٧ \quad \therefore \quad ص = ٣ \quad \text{ومنها :} \quad ف = ٢$$

بما ان مجموع العددين $س + ع = ٣$ وجداءهما $س ع = ٢$ اذن :

هذان العددان هما جذرا المعادلة : $س^{٢} - ٣ س + ٢ = ٠$

والعددان هما : ١ ، ٢

تمرين : اضرب طرفي المعادلة (١) بـ ٣ ثم اجمعها مع المعادلة (٢) وتمم . . .

١٠٥ — مثال : ٣) المطلوب حل المجموعة :

$$\left.\begin{array}{l} س^{٢} + ع^{٢} = ١٣ \qquad (١) \\ (س + ٢ ع)(ع + ٢ س) = ٥٦ \qquad (٢) \end{array}\right\}$$

الحل : بفك اقواس المعادلة (٢) نجد :

$$٢ (س^{٢} + ع^{٢}) + ٥ س ع = ٥٦ \qquad (٣)$$

وبأخذ قيمة $س^{٢} + ع^{٢}$ من المعادلة (١) ووضعها في (٣) نجد :

$$٥ س ع = ٣٠ \quad \therefore \quad س ع = ٦$$

(مما يدلنا على ان س ، ع من اشارة واحدة) وباضافة المقدار :

$٢ س ع = ١٢$ لجانبي المعادلة (١) وطرحه مرة اخرى نجد :

$$(س + ع)^{٢} = ٢٥ \quad ، \quad (س - ع)^{٢} = ١$$

اذن : $س + ع = \pm ٥$ ، $س - ع = \pm ١$

وبحل هذه المعادلات الاخيرة نجد الحلول الاربعة الاتية :

س :	+ ٣	- ٣	+ ٢	- ٢
ع :	+ ٢	- ٢	+ ٣	- ٣

واذا تذكرنا ان المجموعة تناظرية نكتفي بالحلين :

$$\begin{cases} س : & + ٣ & - ٣ \\ ع : & + ٢ & - ٢ \end{cases}$$

وهو المطلوب .

١٠٦ — مثال : ٤) المطلوب حل المجموعة :

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{س}{ع}} + \sqrt{\frac{ع}{س}} = ١ + \frac{٦١}{\sqrt{س ع}} & (١) \\ \sqrt[٤]{\frac{س}{ع}} + \sqrt[٤]{\frac{ع}{س}} = \frac{٧٨}{\sqrt{س ع}} & (٢) \end{cases}$$

الحل : لتربيع جانبي المعادلة (٢) فنجد :

$$\sqrt{\frac{س}{ع}} + \sqrt{\frac{ع}{س}} = ٢ - \frac{(٧٨)^{٢}}{س ع} \qquad (٣)$$

فاذا لاحظنا ان الجانبين الاولين من المعادلتين (١) ، (٣) متساويان نستنتج انه يجب ان يكون جانباهما الثانيان متساويين ايضاً ، اي ان يكون :

$$٢ - \frac{(٧٨)^{٢}}{س\,ع} = ١ + \frac{٦١}{\sqrt{س\,ع}} \qquad (٤)$$

وبفرض : $\sqrt{س\,ع} = ص$ تصبح المعادلة (٤) على الشكل :

$$٣\,ص^{٢} + ٦١\,ص - (٧٨)^{٢} = ٠ \qquad \text{ومنها :}$$

$$ص = \frac{-٦١ \pm \sqrt{(٦١)^{٢} + ١٢ \times (٧٨)^{٢}}}{٦} = \frac{-٦١ \pm ٢٧٧}{٦}$$

اي ان : $ص' = ٣٦$ ، $ص'' = -٥٦,٣$

فالجواب : $ص''$ لا يوافق لانه سالب .

واما لحساب المجموع $س + ع = مح$ فاننا نضرب جانبي المعادلة (١) بـ $\sqrt{س\,ع}$ فنجد :

$$س + ع = ٦١ + \sqrt{س\,ع} \qquad \text{ومنها :} \qquad مح = س + ع = ٩٧$$

بعد ان علمنا المجموع مح والجداء $ص'^{٢}$

لنشكل الآن معادلة من الدرجة الثانية بمجموع جذريها ٩٧ وجداؤهما $(٣٦)^{٢}$ فهذه المعادلة هي :

$$س^{٢} - ٩٧\,س + (٣٦)^{٢} = ٠$$

$$\text{ومنها :} \qquad س = \frac{٩٧ \pm \sqrt{(٩٧)^{٢} - ٤\,(٣٦)^{٢}}}{٢}$$

$$\text{او :} \qquad س = \frac{٩٧ \pm \sqrt{(٩٧ + ٧٢)\,(٩٧ - ٧٢)}}{٢}$$

$$\text{او :} \qquad س = \frac{٩٧ \pm \sqrt{١٦٩ \times ٢٥}}{٢} = \frac{٩٧ \pm ١٣ \times ٥}{٢}$$

ومنها : $س' = ٨١$ ، $س'' = ١٦$

اذن : $س = ٨١$ ، $ع = ١٦$

تمارين

١] المطلوب حل المعادلات الآتية :

١) $س^٤ - ١٠ س^٢ + ٩ = ٠$

٢) $٣٦ س^٤ - ١٣ س^٢ + ١ = ٠$

٣) $١٦ س^٤ - ٨ س^٢ + ١ = ٠$

٤) $ل^٤ س^٤ + (ق^٢ ل^٢ - ك^٢ ل^٢) س^٢ - ق^٢ ك^٢ = ٠$

٢] المطلوب حل المعادلات الآتية :

١) $\left(\frac{س}{س - ١}\right)^٢ + \left(\frac{س}{س - ١}\right) = ط (ط - ١)$

٢) $٤ س^٦ - ٣ س^٣ = ٢٣٢$

٣) $\frac{٢ \sqrt{س^٢ - ٣ س - ١} - ٧}{٢ \sqrt{س^٢ - ٣ س - ١} + ١} = \frac{٥ \sqrt{س^٢ - ٣ س - ١} - ١}{١}$

٣] عين مواضع الاعداد : ٣ ، ٣,٥ ، ١ ، -٢ بالنسبة الى جذور المعادلة : $س^٤ - ١٣ س^٢ + ٤٠ = ٠$ وفرق الجانب الاول من هذه المعادلة الى مضاريب من الدرجة الاولى .

٤] المطلوب حل المجموعة الآتية :

$س + ع = ٥$ ؛ $٣ س^٢ - ٢ ع + ٥ س - ع + ١ = ٠$

٥] المطلوب حل المجموعات :

١) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ع} = \frac{٢}{د}$ ؛ $\frac{١}{ب - س} + \frac{١}{ب - ع} = \frac{٢}{ب - د}$

٢) $\begin{cases} س + ع = ٣,٥ \\ س^{٢} - ع^{٢} = ١,٧٥ \end{cases}$

٣) $\begin{cases} س - ع = ٢ \\ س^{٢} - ع^{٢} = ٩٧ \end{cases}$

٤) $\begin{cases} \dfrac{س + ع}{س - ع} = ٣ \\ س^{٢} - ع = ١٢ \end{cases}$

٦] المطلوب حل المجموعة :

$$\begin{cases} س + ع + ص = ١ \\ \dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{ع} + \dfrac{١}{ص} = ١ \\ ب س + حـ ع + د ص = ١ \end{cases}$$

٧] المطلوب حل المجموعات الآتية :

١) $س + ع = \dfrac{٢١}{٨}$ ، $\dfrac{س}{ع} - \dfrac{ع}{س} = \dfrac{٣٥}{٦}$

٢) $\begin{cases} (س + ب)(ع - حـ) - (س - ب)(ع + حـ) = \\ ٢(ع^{٢} - حـ^{٢}) \\ ب ع + حـ س = ٢ ب حـ \end{cases}$

٣) $\begin{cases} س + ع = \dfrac{ب^{٢} + ٦ ب حـ + حـ^{٢}}{٢(ب + حـ)} \\ ٢ ب س - س ع = ب^{٢} \end{cases}$ ،

٨] المطلوب حل ومناقشة المجموعة :

$$\begin{cases} س + ٢ ص = (ط + ١) س - ٤ ط \\ س + ص = ط س - ٢ ط - ١ \\ ع^{٢} - ٢ ص^{٢} + ٢ س ع - س ص - س - ٢ ع + ٨ ط^{٢} - ٨ ط = ٢ \end{cases}$$

٩] المطلوب حل المجموعة :

$$\left.\begin{array}{l} س + ع + ص = ب \\ س - ع + ص = ﻫ \\ س^{٢} + ع^{٢} + ص^{٢} = د\,(س + ع - ص) \end{array}\right.$$

١٠] المطلوب حل المجموعتين :

١) $س + \frac{١}{ع} = ١$ ، $ع + \frac{١}{س} = ٤$

٢) $\left.\begin{array}{l} (س + ٣ع)(ع + ٣س) = ٤٨٣ \\ (س^{٢} + ع^{٢}) = ٦١ \end{array}\right.$

١١] المطلوب حل المجموعتين :

١) $\left.\begin{array}{l} س^{٢} - ع^{٢} + ٣ع = ٠ \\ س^{٢} + ٣س ع + ٢ع^{٢} + ٢س + ٤ع = ٠ \end{array}\right.$

٢) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{س + ع} + \sqrt{س - ع} = ١٤ \\ س^{٢} + ع^{٢} = ٢٦٩٦ \end{array}\right.$

١٢] المطلوب حل المجموعات الاتية :

١) $\left.\begin{array}{l} س^{٢} + ع^{٢} + ٢\,(س + ع) = ٢٣ \\ س^{٢} + ع^{٢} + س ع = ١٩ \end{array}\right.$

٢) $\left.\begin{array}{l} (س + ع)(س ع + ١) = ١٨\, س ع \\ (س^{٢} + ع^{٢})(س^{٢} ع^{٢} + ١) = ٢٠٨\, س^{٢} ع^{٢} \end{array}\right.$

٣) $\left.\begin{array}{l} \frac{س^{٥} + ع^{٥}}{س^{٢} + ع^{٢}} = \frac{٣١}{٧} \\ س^{٢} + س ع + ع^{٢} = ٣ \end{array}\right.$

١٢] المطلوب حل المجموعات الاتية :

١) $\left.\begin{array}{l} س + ع + ص = ١٩ \\ ع^{٢} = س\ ص \end{array}\right\}$ ، $س^{٢} + ع^{٢} + ص^{٢} = ١٣٣$ ،

٢) $\left.\begin{array}{l} س + ع + ص = ب \\ ١٦\ ع\ ص = ٢٥\ س^{٢} \end{array}\right\}$ ، $\frac{٢}{س} = \frac{١}{ع} + \frac{١}{ص}$ ،

٣) $\left.\begin{array}{l} س + ع + ص = ٠ \\ س^{٢} + ع^{٢} - ص^{٢} = ٢٠ \\ س^{٤} + ع^{٤} - ص^{٤} = ٥٦٠ \end{array}\right\}$

٤) $\left.\begin{array}{l} س + ع + ص + ف = ٢٢ \quad ، \quad س\ ع\ ص\ ف = ٦٤٨ \\ \frac{١}{س} + \frac{١}{ع} = \frac{٧}{١٢} \quad ، \quad \frac{١}{ص} + \frac{١}{ف} = \frac{٥}{١٨} \end{array}\right\}$

١٤] المطلوب حل المجموعات الآتية :

١) $\left.\begin{array}{l} س + ع + ص = ب \\ س^{٢} + ع^{٢} + ص^{٢} = ح^{٢} \\ س\ ع = د \end{array}\right\}$

٢) $\left.\begin{array}{l} س + ع = ٢\ ص \\ س^{٢} + ع^{٢} = ١٠\ ص^{٢} \\ س^{٤} + ع^{٤} = ب\ ص^{٢} \end{array}\right\}$

٣) $\left.\begin{array}{l} س + ع = ٤\ ص \\ س^{٢} + ع^{٢} = ٥٠\ ص^{٢} \\ س\ ع\ ص = ١٢ \end{array}\right\}$

١٥] عين الحرف هـ ليكون للمعادلات :

$$س\sqrt{٣} + ع = ١$$

$$س + ع = هـ$$

$$س^{٢} + ع^{٢} = ١$$

حل مشترك .

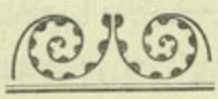
١٦] المطلوب تعيين الحرفين ب ، حـ المذكورين في المعادلة :

$$\frac{ب}{حـ} = \left(\frac{س - ب}{س - حـ}\right)^{٢} \qquad (١)$$

ليمكن وضعها على الشكل :

$$س^{٢} - ٢٤ س - ٧٢ = ٠ \qquad (٢)$$

ثم استخدام المعادلة (١) لحل المعادلة (٢) ؟



البحث الرابع

الفصل الأول

مسائل الدرجة الثانية

١٠٧ — تعريف : المسألة ، كما رأينا في السنين السابقة ، هي مجموعة شروط تحققها كميات معلومة و كميات مجهولة يطلب حسابها بدلالة الكميات المعلومة .

فالمسائل التي من الدرجة الثانية هي المسائل التي يؤول حلها الى حل معادلة من الدرجة الثانية ، ونميز من هذه المسائل نوعين اساسيين :

١٠٨ — النوع الاول — المسائل العددية : وهي المسائل التي تكون فيها الكميات المعلومة معطاة بقياساتها العددية .

فلحل مسألة من هذا النوع لابد لنا من المراحل الثلاث الآتية :

١°) انتخاب المجهول (او المجاهيل) وذلك بتسميتها باحد احرف الكلمة (سعفص)

٢°) وضع المعادلة (او المعادلات) وذلك بكتابة شروط المسألة بواسطة المساوات والعلائق الكائنة ما بين الكميات المعلومة والمجهولة والمعطاة بنص المسألة او المستخرجة من خواص الشكل الهندسي للمسألة (فيما اذا كان يوجد للمسألة شكل هندسي) .

٣°) حل المعادلة (او المعادلات) واستخراج قيم المجاهيل .

١٠٩ — النوع الثاني — المسائل الحرفية : هي المسائل العامة التي تكون فيها الكميات المعلومة معطاة بقياسات حرفية تدل عليها .

ولحل مسألة من هذا النوع لابد لنا ايضاً من المراحل الخمس الآتية :

١ً) انتخاب المجهول (او المجاهيل) كما في المسائل العددية .

٢ً) وضع المعادلة (او المعادلات) .

٣ً) اصلاح المعادلة ووضعها على ابسط شكل ممكن لها .

٤ً) حل ومناقشة هذه المعادلة .

٥ً) التفسير الهندسي في بعض حالات خاصة .

١١٠ – ملاحظة : تنشأ المناقشة غالباً في مسائل الدرجة الثانية من الاسباب الآتية :

١ً) شرط القاسمة ، اي شرط وجود الجذور .

٢ً) يكون المجهول احياناً طولاً هندسياً فيجب ان يكون موجباً ، لذلك لا تكون الجذور مقبولة الا اذا كانت موجبة ، ومن هنا يكون للمسألة حل واحد او حلان او ليس لها حل حسبما يكون لمعادلة المسألة جذر موجب او جذران موجبان او ليس لها جذر موجب .

٣ً) في بعض المسائل يجب ان يكون الجذر اكبر من طول معين مثل ط فالجذور لا تكون مقبولة الا اذا كانت اكبر من ط .

٤ً) في بعض المسائل يجب ان يكون المجهول اصغر من طول معين مثل ل فالجذور لا تكون مقبولة الا اذا كانت اصغر من ل .

٥ً) في بعض المسائل يجب ان يكون المجهول محصوراً ما بين طولين مثل هـ ، ق فالجذور لا تكون مقبولة الا اذا كانت محصورة ما بين هـ ، ق اي الا اذا كانت تحقق العلاقة : $هـ < س < ق$

والامثلة الآتية توضح لنا ذلك :

١١١ – مسألة : ١) اوجد عددين مجموعهما مع جدائهما يساوي ١١ وحاصل طرح مجموعهما من مجموع مربعيهما يساوي ٨

الحل : لنفرض ان احد العددين س والآخر ع فتكون معادلات المسألة هي :

$$(١) \quad \begin{cases} س + ع + س ع = ١١ \\ س^{٢} + ع^{٢} - (س + ع) = ٨ \end{cases}$$

وبما ان كلا من معادلتي هذه المجموعة هي من الدرجة الثانية ، وتناظرية لذلك لنحل هذه المجموعة بواسطة المجهولين المساعدين :

$$م = س + ع \quad ، \quad ح = س \cdot ع$$

فتصبح المجموعة من الشكل :

$$(٢) \quad \begin{cases} م + ح = ١١ \\ م^{٢} - ٢ ح - م = ٨ \end{cases}$$ وهذه تكافىء :

$$(٣) \quad \begin{cases} ح = ١١ - م \\ م^{٢} - ٢(١١ - م) - م = ٨ \end{cases}$$ او :

$$\begin{cases} ح = ١١ - م \\ م^{٢} + م - ٣٠ = ٠ \end{cases}$$

ولحل المعادلة : $م^{٢} + م - ٣٠ = ٠$ نجد :

$$م = \frac{-١ \pm \sqrt{١٢١}}{٢}$$ ومنها :

$$\begin{cases} م' = ٥ \\ م'' = -٦ \end{cases}$$ اذن : من الاولى نجد : $$\begin{cases} ح' = ٦ \\ ح'' = ١٧ \end{cases}$$

بعد ان وجدنا قيمتين للمجموع وحاصل الضرب لنجد العددين س ، ع فالقيمتان $م'$ ، $ح'$ تدلاننا على ان س ، ع هما جذرا المعادلة :

$$ص^{٢} - ٥ ص + ٦ = ٠$$ ومنها :

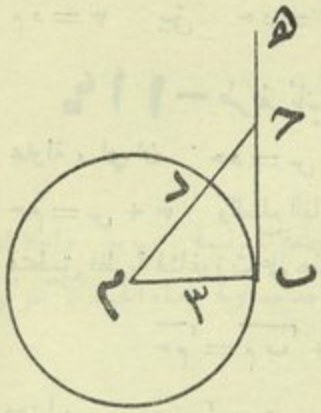
$$ص = \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٢٤}}{٢}$$ ومنها : $$\begin{cases} س = ص' = ٢ \\ ع = ص'' = ٣ \end{cases}$$

واما القيمتان $م''$ ، $ح''$ تقودانا لحل المعادلة $ص^{٢} + ٦ س + ١٧ = ٠$ التي ليس لها جذور . اذن : يوجد للمسألة جواب واحد وهو :

$$س = ٢ \quad ، \quad ع = ٣$$

١١٢ - مسألة : ٢) لدينا دائرة مركزها م ونصف قطرها ر = ٣ سم نرسم لهذه الدائرة المماس في نقطة ما مثل ب وليكن ب هـ (شكل ٣) ، والمطلوب :

عين على هذا المماس ب هـ نقطة مثل حـ اذا وصلت للمركز م كان الطول ب حـ مساوياً لضعف القسم الخارج عن الدائرة من م حـ وهو حـ د



(شكل ٣)

الحل - الطريقة الاولى : لتعيين النقطة حـ على نصف المستقيم ب هـ يكفي تعيين الطول ب حـ = س اذن : يجب تعيين قيمة س لاجل ان يكون :

$$ب حـ = ٢ حـ د \qquad (١)$$

لذلك لنحسب كلا من الطولين ب حـ ، حـ د بدلالة س والاشياء المعلومة فمن المجهول المنتخب نجد رأساً ان : ب حـ = س واما لحساب حـ د فنقول :

$$حـ د = م حـ - م د = م حـ - ر = \sqrt{س^٢ + ر^٢} - ر$$

$$= \sqrt{س^٢ + ٩} - ٣$$

اذن معادلة المسألة هي : $س = ٢(\sqrt{س^٢ + ٩} - ٣)$ (٢)

لنحل هذه المعادلة مبتدئين بعزل الجذر فنجد :

$$س + ٦ = ٢\sqrt{س^٢ + ٩}$$

وبتربيع الطرفين نجد :

$$س^٢ + ١٢ س + ٣٦ = ٤ س^٢ + ٣٦$$

ومنها :

$$٣ س^٢ - ١٢ س = ٠ \quad او : \quad س^٢ - ٤ س = ٠ \quad او : \quad س (س - ٤) = ٠$$

ومنها : $س_١ = ٠$ حل نهائي ؛ $س_٢ = ٤$ وهو حل مقبول لانه موجب .

١١٣ - ملاحظة : بما ان المسألة عددية فمن السهل التحقق من الجواب السابق ، فحقيقة اذا كان ب حـ = ٤ يكون الوتر م حـ = ٥ وبما ان م د = ٣ يبقى حـ د = ٢ اي نصف ب حـ وهو المطلوب .

١١٤ - طريقة ثانية : لنفرض ان ب حـ = ٢ س وان المسألة محلولة ، اي ان حـ د = س فيكون في المثلث القائم م ب حـ الوتر حـ م = س + ٣ والضلع القائم م ب = ٣ والضلع القائم ب حـ = ٢ س فبتطبيق نظرية فيثاغورث على هذا المثلث القائم نجد ان س تحقق العلاقة الاتية :

$$\overline{حـ م}^{٢} = \overline{م ب}^{٢} + \overline{ب حـ}^{٢} \quad \text{اي :} \quad (س + ٣)^{٢} = ٩ + ٤ س^{٢}$$

ومنها : $٣ س^{٢} - ٦ س = ٠$ او : $س (س - ٢) = ٠$

ومنها : $س = ٠$ حل نهائي ، $س = ٢$ وهو حل مقبول يعطي ب حـ = ٢ س = ٤ وهو المطلوب .

١١٥ - ملاحظة : لو مددنا المماس ب هـ بالاتجاه هـ ب نرى ان للمسألة حلين متناظرين بالنسبة الى القطر المار من نقطة ب .

١١٦ - مسألة : ٣) اشترى رجل اكياس قمح بمبلغ ٥٤٠ فرنكا ، ولو نقص ثمن الكيس الواحد ثلاثة فرنكات لتمكن من شراء كيسين زيادة على الاكياس التي اشتراها قبلا . فما عدد الاكياس التي اشتراها ، وما ثمن الكيس الواحد ؟

الحل : لنفرض ان عدد الاكياس ع وثمن كل كيس س فرنكا ، فبحسب منطوق المسألة يكون :

$$س ع = ٥٤٠ \quad ، \quad (س - ٣)(ع + ٢) = ٥٤٠$$

فبازالة س بين هاتين المعادلتين نجد المعادلة :

$$ع^{٢} + ٢ ع - ٣٦٠ = ٠$$

وبحلها نجد ان ع = ١٨ كيساً ، ومن ثم س = ٣٠ فرنكا ثمن كل كيس .

١١٧ — ملاحظة: يمكن ايجاد قيمة الكيس الواحد س رأساً بحل المعادلة :

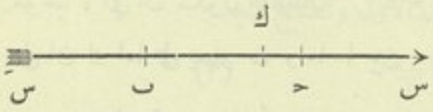
$$\frac{٥٤٠}{س - ٣} - \frac{٥٤٠}{س} = ٢$$

ومن ثم نستنتج ان : $ع = \frac{٥٤٠}{س}$

١١٨ — مسألة : ٤) المطلوب تقسيم القطعة المستقيمة ب حـ داخلا او خارجا بشرط ان تكون ثلاثة امثال مربع الجزء الواحد مساوية لجداء الجزء الآخر في القطعة كلها .

الحل : لنفرض ان القطعة ب حـ محمولة على المحور سَ س الذي اتجاهه الموجب هو سَ س (شكل ٤) وليكن بعد النقطة القاسمة ك ، الواجب تعيينها ، عن ب هو س اي ان :

$\overline{ب ك} = س$



(شكل ٤)

ولنفرض ان طول القطعة المعلومة $\overline{ب حـ} = ط$ فبمقتضى منطوق المسألة يجب ان يكون :

$$٣\overline{ب ك}^{٢} = \overline{ك حـ} \cdot \overline{ب حـ} \qquad (١)$$

وبمقتضى علاقة شال نرى ان :

$$\overline{ك حـ} = \overline{ب حـ} - \overline{ب ك} = ط - س$$

فاذا بدلنا في العلاقة (١) كل طول بقيمته نجد ان معادلة المسألة هي :

$$٣ س^{٢} = ط (ط - س)$$

او : $ما (س) = ٣ س^{٢} + ط س - ط^{٢} = ٠$ (٢)

وبما ان علامة د خلاف علامة ب نستنتج ان لهذه المعادلة جذرين احدهما موجب والاخر سالب ، وهما :

$$س = \frac{- ط (١ \pm \sqrt{١٣})}{٦}$$

فالجذر السالب يقابله نقطة مثل كَ واقعة على يسار ب وقاسمة ب حـ خارجا، واما الجذر الموجب فيقابله نقطة اخرى على يمين ب .

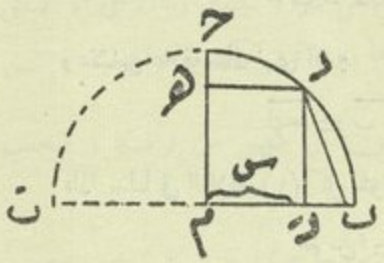
ولمعرفة موضع النقطة الثانية ك بالنسبة الى نقطة حـ وهل هي بين ب و حـ او على يمين حـ ، نقارن سين النقطة حـ التي هي ط بجذري المعادلة ا (س) = . ولهذا نشكل ا (ط) فنجد :

$$ا(ط) = ٣ط^{٢} + ط^{٢} - ط^{٢} = ٣ط^{٢} > .$$

اذن ط اما اكبر من جذري المعادلة (١) او اصغر من كليهما ، الا انه اذا لاحظنا ان ط موجبة مع ان احد جذري المعادلة سالب نستنتج ان ط اكبر من جذريي المعادلة ، اي ان النقطة الثانية ك التي توافق هذه المسألة تقع بين ب و حـ .

ملاحظة : نصل الى نفس النتيجة السابقة بملاحظة العلاقة (١) عن كثب فنقول : بما ان جانبها الاول $٣ \overline{ب ك}^{٢}$ موجب ، اذن : يجب ان يكون جانبها الثاني موجباً ، اي ان تكون القطعتان $\overline{ك حـ}$ ، $\overline{ب حـ}$ من اتجاه واحد ، وهذا يدل على ان ك اما على يسار ب واما ما بين ب ، حـ

١١٩ - مسألة : ٥) لدينا ربع الدائرة المحدودة بنصفي القطرين م ب ، م حـ والمطلوب تعيين نقطة مثل د على القوس ب حـ على ان يكون الوتر ب د مساوياً للعمود النازل من د على م حـ وليكن د هـ (شكل ٥) .



(شكل ٥)

الحل - اولا : لننتخب المجهول فنقول: لتعيين النقطة د يكفي تعيين مرتسمها دَ على م ب ، ولتعيين النقطة دَ تكفي معرفة المسافة م دَ لذلك لنفرض ان :

م دَ = س

ثانياً : لتشكيل معادلة المسألة نقول :

طلب منا ان يكون ب د = د هـ لذلك لنحسب كلا من ب د ، د هـ بالنسبة للمجهول المنتخب س والاشياء المعلومة وهي في مثالنا نصف القطر ر فقط

فنرى رأساً ان د هـ = م دَ = س (وذلك بملاحظة القيم المطلقة فقط) .

ثم لو تصورنا تتميم نصف الدائرة ولاحظنا المثلث القائم ب د بَ لرأينا في هذا المثلث ان :

$$\overline{ب د}^{٢} = ب بَ \times ب دَ = ٢ ر (ر - س)$$

اذن : معادلة المسألة هي :

$$س = \sqrt{٢ ر (ر - س)} \qquad (١)$$

ثالثاً : لنضع هذه المعادلة على ابسط شكل لها ، لذلك لنربع الطرفين بعد ملاحظة انه يجب ان يكون س > ٠ فنجد :

$$س^{٢} = ٢ ر (ر - س) \qquad (٢)$$

مما يدلنا على ان س < ر حتماً ، لان الجانب الثاني موجب ، اذن : الجانب الاول موجب اي س حتماً اصغر من ر .

لننقل جميع حدود المعادلة (٢) للجانب الاول ولنصلح فنجد :

$$س^{٢} + ٢ ر س - ٢ ر^{٢} = ٠ \qquad (٣)$$

رابعاً : لنناقش هذه المعادلة ولنحلها فنقول : بما ان اشارة ب = + ١ الموجبة خلاف اشارة د = - ٢ ر^٢ السالبة دوماً ، اذن يوجد لهذه المعادلة (٣) جذران مختلفان احدهما موجب والاخر سالب . فالجذر السالب غير مقبول لان س تدل على طول هندسي موجب . واما الجذر الموجب فلا يكون مقبولا الا اذا كان اصغر من ر لان المسافة م دَ لا يمكن ان تكون اعظم من م ب اي لا يمكن ان تكون النقطة دَ على يمين النقطة ب ، فاذا تذكرنا ما قلناه سابقاً عند ما وصلنا الى المعادلة (٢) نجد ان الجذر الموجب مقبول لانه اصغر من ر اذن : يوجد للمسألة دوماً حل وحيد وهو :

$$س = \frac{-حـ + \sqrt{حـ^{٢} - ب د}}{ب} = -ر + \sqrt{ر^{٢} + ٢ ر^{٢}}$$

$$= ر (\sqrt{٣} - ١) = ٠,٧ ر \text{ تقريباً}$$

١٢٠ - ملاحظة : رأينا انه يوجد للمعادلة السابقة (٣) جذر سالب

وجذر آخر موجب اصغر من ر . لذلك انقارن بصورة ثانية الصفر والـ ر بجذري هذه المعادلة فنجد :

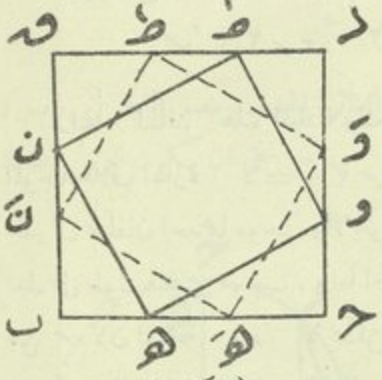
$$ب = +١ > ٠$$

$$\text{دوماً} \quad ٠ > ر٢ - = (٠) \text{ا} > ٠$$

اذن : الصفر محصور ما بين الجذرين ، اي : $س_{\text{َ}} < ٠ < س_{\text{ً}}$

$\text{ا}(ر) = ر٢ > ٠$ دوماً ، اذن : الـ ر خارجة عن الجذرين ، وبما ان الصفر محصور بينهما .·. الـ ر اكبر من الجذرين ، اي $س_{\text{َ}} < ٠ < س_{\text{ً}} < ر$ وهذا ما وصلنا اليه سابقاً .

١٢١ - مسألة : ٦) لدينا المربع ب حـ د ق الذي طول ضلعه يساوي ل . نأخذ على اضلاعه ، اعتباراً من الرؤوس وباتجاه واحد ، الاطوال المتساوية ب هـ = حـ و = د ط = ق ن = س فيتشكل معنا مربع جديد وهو هـ و ط ن (شكل ٦) ، والمطلوب تعيين الطول س ليكون سطح هذا المربع الجديد مساوياً لعدد معلوم ح٢ .



(شكل ٦)

الحل : بما ان المجهول منتخب في مقول المسألة وهو ب هـ = س لذلك لنركب رأساً معادلة المسألة فنقول : يجب ان يكون :

$$\text{سطح هـ و ط ن} = ح٢$$

او :

$$\overline{هـ و}٢ = ح٢$$

الا ان :

$$\overline{هـ و}٢ = \overline{هـ حـ}٢ + \overline{حـ و}٢ = (ل - س)٢ + س٢$$

اذن : معادلة المسألة هي :

$$(ل - س)٢ + س٢ = ح٢$$

وباصلاحها تصبح :

$$٢ س٢ - ٢ ل س + ل٢ - ح٢ = ٠ \qquad (١)$$

المناقشة : بما ان س يدل على طول هندسي لذلك يجب ان يكون $س \geqslant ٠$.

اي ان جذور المعادلة (١) لا تكون مقبولة الا اذا كانت موجبة ، اذن يكون المسألة حلول عددها يساوي عدد الجذور الموجبة للمعادلة (١) لذلك لنقارن الصفر بجذري المعادلة (١) فنجد ان :

$$ب = ٢ > ٠$$

$$ا(٠) = ل^{٢} - ح^{٢}$$

وهنا نميز الحالات الاتية :

١) $ح > ل$ فيكون $ب ا(٠) > ٠$ ونحصل على الترتيب الاتي :

$$س_{١} < ٠ < س_{٢}$$

اي للمسألة حل مقبول وهو : $س_{٢}$

٢) $ح = ل$ فيكون $ا(٠) = ٠$ اي الصفر احد الجذور والآخر المجموع ، اي :

$$س_{١} = ٠ \quad ، \quad س_{٢} = \frac{-ح}{ب} = ل$$

اذن : للمسألة في هذه الحالة حلان نهائيان مقبولان ، ويكون المربع الجديد هـ و ط ي منطبقاً على المربع الاصلي : ب ح د ق

٣) $ح < ل$ فيكون $ب ا(٠) < ٠$ اي الصفر خارج عن الجذرين ، وبما ان نصف المجموع $\frac{ل}{٢} > ٠$ اذن الجذران بفرض وجودهما موجبان ، اي مقبولان ، وليكونا موجودين يجب ان تكون القاسمة موجبة ، اي :

$$\Delta = ح^{٢} - ب د = ل^{٢} - ٢(ل^{٢} - ح^{٢}) > ٠$$

ومنها : $ح^{٢} > \frac{ل^{٢}}{٢}$ او $ح > \frac{ل}{\sqrt{٢}}$

(وذلك بملاحظة ان كلا من ح ، ل موجب) ، اذن : في هذه الحالة الثالثة لا يكفي ان يكون $ح < ل$ فقط ، بل بنفس الوقت يجب ان يكون $ح > \frac{ل}{\sqrt{٢}}$ وهذا ممكن .

لذلك اذا كان $\frac{ل}{٢\sqrt{٢}} < ح < ل$ يكون للمسألة حلان مقبولان كل منهما

اصغر من ل ، اذ هما موجبان ومجموعهما ل ، ومن كون مجموع الجذرين يساوي ل نستنتج ان الحلين ، اي المربعين هـ ط و ب ، هَ طَ وَ بَ متناظران (شكل ٦) بالنسبة لاحد اقطار المربع الاصلي ب ح د ق

٤) $ح = \frac{ل}{٢\sqrt{٢}}$ فتكون القاسمة صفر ونحصل على الحل المضاعف المقبول

$$س_{َ} = س_{ً} = \frac{ح}{٢ ب} = \frac{ل}{٢}$$

اي يكون للمسألة في هذه الحالة حل وحيد وتكون رؤوس المربع الجديد هي منتصفات اضلاع المربع الاصلي .

٥) $ح < \frac{ل}{٢\sqrt{٢}}$ القاسمة سالبة وليس للمسألة حل.

الخلاصة :

١)	$ح < ل$	حل وحيد	$س_{ً} = \frac{ل + \sqrt{٢ ح^{٢} - ل^{٢}}}{٢}$
٢)	$ح = ل$	حلان نهائيان	$س_{َ} = ٠$ ، $س_{ً} = ل$
٣)	$\frac{ل}{٢\sqrt{٢}} < ح < ل$	حلان مقبولان	$س = \frac{ل \pm \sqrt{٢ ح^{٢} - ل^{٢}}}{٢}$
٤)	$ح = \frac{ل}{٢\sqrt{٢}}$	حل مضاعف	$س_{َ} = س_{ً} = \frac{ل}{٢}$
٥)	$ح < \frac{ل}{٢\sqrt{٢}}$	لا يوجد للمسألة حل	

تمرين : ارسم شكل المسألة السابقة عند ما $س < ل$ واكتب معادلة المسألة بواسطته وتمم .

١٢٢- مسألة : ٧) لدينا مخروط قائم دائري نصف قطر قاعدته ر وارتفاعه ح ، والمطلوب :

١ً) اي طول يجب اضافته لقاعدته وطرحه من ارتفاعه على ان لا يتغير حجمه ؟

٢ً) ما هي العلاقة التي يجب ان تكون بين ر ، ح لاجل ان يكون الطول المضاف الى ر يساوي ر ؟

الحل : ١ً) من المعلوم ان حجم المخروط يقدر بـ $\frac{١}{٣}\pi ر^٢ ح$ اذن : يجب ان يكون :

$$\frac{١}{٣}\pi ر^٢ ح = \frac{١}{٣}\pi (ر + س)^٢ (ح - س) \qquad (١)$$

وذلك بفرض س الطول الواجب اضافته الى ر وطرحه من ح ، فالعلاقة (١) هي معادلة هذه المسألة ، وباختصارها ونقل حدودها الى جانب واحد نجد :

$$س[س^٢ + (٢ر - ح)س + ر(ر - ٢ح)] = ٠$$

فبقطع النظر عن الجذر $س = ٠$ (الممثل لحل نهائي) تبقى لنا المعادلة :

$$ا(س) = س^٢ + (٢ر - ح)س + ر(ر - ٢ح) = ٠ \qquad (٢)$$

المناقشة : لامكان حل هذه المسألة يجب ان يكون س موجباً واصغر من ح وذلك لانه يلزم ان يكون $ح - س > ٠$ اذن لنشكل ا(٠) ، ا(ح) فنجد : $ب = ١ > ٠$

$$ا(٠) = ر(ر - ٢ح) \quad ، \quad ا(ح) = ر^٢ > ٠$$

اذن ح دوماً خارجة عن الجذرين . فاذا كان :

١ً) $ر > ٢ح$ يكون ب ، ا(٠) سالباً ، ويكون :

$$س_َ < ٠ < س_ً < ح$$

اي يوجد للمعادلة (٢) جذران حقيقيان احدهما $س_ً$ موجب والآخر $س_َ$ سالب . فالجذر السالب لا يوافق المسألة ، واما الجذر الموجب فيوافقها لانه اصغر من ح .

٢ً) ر = ٢ ح في هذه الحالة يكون ا (٠) = ٠ اي الجذر الواحد يساوي الصفر وهو موافق ، واما الجذر الاخر فانه :

يساوي المجموع = $\frac{-ح}{ب}$ = - ٣ ح ولا يوافق المسألة .

٣ً) ر < ٢ ح فيكون كل من المقدارين ا (٠) ، ا (ح) موجباً ، وعندئذ يجب تشكيل قاسمة هذه المعادلة ، ولكن في هذه المسألة يمكن الاستغناء عن تشكيل القاسمة ، لانه في هذه الحالة جداء جذري هذه المعادلة موجب ومجموعها سالب . فلو فرضنا ان للمعادلة (٢) جذوراً حقيقية تكون هذه الجذور سالبة ولا توافق المسألة .

الخلاصة : اذا كان ر ≤ ٢ ح فللمسألة حل واحد مقبول .

الحل : ٢ً) نتوصل للعلاقة المطلوبة بابدال س ، في المعادلة (٢) ، بـ ر فنجد:

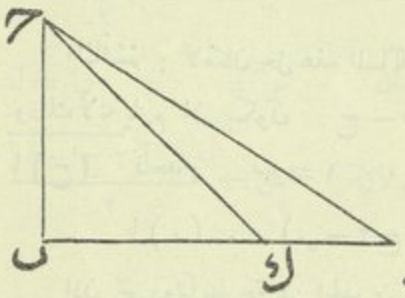
٤ ر^{٢} - ٣ ر ح = ر (٤ ر - ٣ ح) = ٠

ومنها : ٤ ر = ٣ ح وهي العلاقة المطلوبة ، وهو المطلوب .

١٢٣ - مسألة : ٨) ب ح د مثلث قائم الزاوية في ب فيه ب د = حَ ، ب ح = دَ

والمطلوب :

١ً) تعيين نقطة مثل ك على الضلع ب د وبين ب و د (شكل ٧) بشرط ان يكون الطول ح ك يساوي نصف مجموع الطولين ب ك ، ب د



(شكل ٧)

نافش .

٢ً) في حال وجود نقطتين مثل ك ، كَ توافقان هذه المسألة ، احسب بدلالة حَ ، دَ كلا من المقدارين :

ح ك + ح كَ ، ح ك × ح كَ

الحل : ١ً) لنفرض ب ك = س فنجد في المثلث القائم ب ك ح ان :

$$\overline{حك}^{٢} = د^{٢} + س^{٢}$$

وبما انه يجب ان يكون : $حك = \frac{ح + س}{٢}$ ∴ معادلة المسألة هي :

$$\left(\frac{ح + س}{٢}\right)^{٢} = د^{٢} + س^{٢}$$

او : $\quad ا(س) = ٣س^{٢} - ٢ح س + ٤د^{٢} - ح^{٢} \quad (١)$

المناقشة : يكون للمسألة حل فيما اذا كان يوجد للمعادلة (١) جذر محصور مابين الصفر و ح اي يحقق العلاقة : $٠ \leq س \leq ح$ لذلك نقارن الصفر و ح بجذري هذه المعادلة فنجد :

$$ب = ٣ > ٠$$

$$ا(٠) = ٤د^{٢} - ح^{٢} = (٢د + ح)(٢د - ح)$$

$ا(ح) = ٤د^{٢}$ دوماً موجب ، اذن الـ ح دوماً خارجة عن الجذرين .

والآن نميز الحالات الاتية :

١) $ح > ٢د$ فيكون $ب ، ا(٠) > ٠$ ونحصل على الترتيب الآتي : $س' < ٠ < س'' < ح$ اي للمسألة حل واحد وهو $س''$.

٢) $ح = ٢د$ فيكون $ا(٠) = ٠$ اذن :

$$س' = ٠ \quad ، \quad س'' = -\frac{ح}{ب} = \frac{٢ح}{٣}$$

اي للمسألة حلان احدهما نهائي وهو $س''$.

٣) $ح < ٢د$ فيكون $ب ، ا(٠) > ٠$ اي كل من الصفر والـ ح خارج عن الجذرين ، فالجذران بفرض وجودهما يكونان مقبولين اذا كان :

$$٠ < س' < \frac{-ح}{٢ب} < س'' < ح \quad \text{اي} \quad ٠ < \frac{ح}{٣} < ح$$

وبما ان هذين الشرطين محققان ، اذن : الجذران بفرض وجودهما موافقان وليكونا موجودين يجب ان تكون القاسمة موجبة اي :

$$\Delta = ح^{٢} - ٣(٤د^{٢} - ح^{٢}) \leqslant ٠$$

او :
$$٤(ح^{٢} - ٣د^{٢}) \leqslant ٠$$

او :
$$٤(ح + د\sqrt{٣})(ح - د\sqrt{٣}) < ٠$$

اذن : في هذه الحالة الثالثة لا يكفي ان يكون $ح < ٢د$ بل بنفس الوقت يجب ان يكون $ح < د\sqrt{٣}$ (وهذا ممكن) لتكون القاسمة موجبة . لذلك اذا كان $٢د < ح < د\sqrt{٣}$ يكون للمسألة حلان .

٤ً) $ح = د\sqrt{٣}$ فيكون للمسألة حل مضاعف وهو :

$$س = س' = \frac{-ح}{٢ب} = \frac{ح}{٣} = \frac{د\sqrt{٣}}{٣}$$

٥ً) $ح < د\sqrt{٣}$ فالقاسمة سالبة وليس للمسألة حل .

الخلاصة :

١ً) $ح < ٢د$ يوجد حل واحد وهو

$$س = \frac{ح + ٢\sqrt{ح^{٢} - ٣د^{٢}}}{٣}$$

٢ً) $ح = ٢د$ حلان $س = ٠$ ، $س' = \frac{٢ح}{٣}$

٣ً) $٢د < ح < د\sqrt{٣}$ حلان $س = \frac{ح \pm ٢\sqrt{ح^{٢} - ٣د^{٢}}}{٣}$

٤ً) $ح = د\sqrt{٣}$ حل مضاعف وهو $س = س' = \frac{ح}{٣}$

٥ً) $ح > د\sqrt{٣}$ ليس للمسألة حل .

الحل : ٢ً) ان المقدار :

$$\text{ح ك}_{\text{ج}} + \text{ح ك}_{\text{ج}}'' = \frac{\text{ب ك}_{\text{ج}} + \text{ح}_{\text{ج}}}{٢} + \frac{\text{ب ك}_{\text{ج}}'' + \text{ح}_{\text{ج}}}{٢} = \frac{(\text{س}_{\text{ج}} + \text{س}_{\text{ج}}'') + ٢\,\text{ح}_{\text{ج}}}{٢} =$$

$$\frac{\frac{٢\,\text{ح}_{\text{ج}}}{٣} + ٢\,\text{ح}_{\text{ج}}}{٢} = \frac{٤\,\text{ح}_{\text{ج}}}{٣}$$

واما المقدار :

$$\text{ح ك}_{\text{ج}} \cdot \text{ح ك}_{\text{ج}}'' = \frac{(\text{س}_{\text{ج}} + \text{ح}_{\text{ج}})(\text{س}_{\text{ج}}'' + \text{ح}_{\text{ج}})}{٢} = \frac{\text{س}_{\text{ج}}\,\text{س}_{\text{ج}}'' + (\text{س}_{\text{ج}} + \text{س}_{\text{ج}}'')\,\text{ح}_{\text{ج}} + \text{ح}_{\text{ج}}^{٢}}{٤} =$$

$$\frac{\frac{٤\,\text{د}_{\text{ج}}^{٢} - \text{ح}_{\text{ج}}^{٢}}{٣} + \frac{٢\,\text{ح}_{\text{ج}}^{٢}}{٣} + \text{ح}_{\text{ج}}^{٢}}{٤} = \frac{\text{ح}_{\text{ج}}^{٢} + \text{د}_{\text{ج}}^{٢}}{٣}$$

وهو المطلوب .

١٢٦ – مسألة : ٩) عين في دائرة معلومة وتراً مجموع طوله مع بعده عن المركز يساوي طولا معلوماً مثل ل .

الحل : لتعيين الوتر ب ح داخل الدائرة م (شكل ٨) يكفي تعيين بعده عن المركز م لذلك ننتخب المجهول م د = س

فمعادلة المسألة ب ح + م د = ل تصبح

ب ح + س = ل

لنحسب ب ح بالنسبة للمجهول المنتخب س

فنجد : ب ح = ٢ د ح = ٢ $\sqrt{\text{ر}_{\text{ج}}^{٢} - \text{س}_{\text{ج}}^{٢}}$

اذن : معادلة المسألة هي :



(شكل ٨)

٢ $\sqrt{\text{ر}_{\text{ج}}^{٢} - \text{س}_{\text{ج}}^{٢}}$ + س = ل ومنها : ٢ $\sqrt{\text{ر}_{\text{ج}}^{٢} - \text{س}_{\text{ج}}^{٢}}$ = ل – س (١)

مما يدلنا على انه يجب ان تكون س ≦ ل فبفرض س > ل نربع طرفي المعادلة (١) فنجد :

٤ (ر$_{\text{ج}}^{٢}$ – س$_{\text{ج}}^{٢}$) = (ل – س)^{٢} (٢)

مما يدلنا على ان $س > ر$ حتما [لان الجانب الثاني مربع تام ، اذن : الجانب الاول موجب] ، وبالترتيب نجد :

$$٥ س^{٢} - ٢ ل س + ل^{٢} - ٤ ر^{٢} = ٠ \qquad (٣)$$

المناقشة : بما ان س يدل على طول هندسي ، لذلك يجب ان يكون س موجباً ؛ كما انه يجب ان يكون اصغر من ل لتكون المعادلة (١) محققة [لان جانبها الاول موجب] . واما المعادلة (٢) فهي تدلنا من نفسها على ان $س > ر$ اذن : يكون للمسألة حل فيما اذا كان يوجد للمعادلة (٣) جذر محصور ما بين الصفر و ل اي يحقق العلاقة $٠ \leqslant س \leqslant ل$ لذلك لنقارن الصفر و ل بجذري المعادلة (٣) فنجد :

$ب = ٥ > ٠$

$ا (٠) = ل^{٢} - ٤ ر^{٢} = (ل + ٢ ر)(ل - ٢ ر)$

$ا (ل) = ٤ (ل^{٢} - ر^{٢}) = ٤ (ل + ر)(ل - ر)$

لذلك نميز عدة حالات :

١ً) $ل < ر$ فيكون $ب ا (ل) < ٠$ ، $ب ا (٠) < ٠$

$س_{ا} < ٠ < ل < س_{ب}$ وليس للمسألة حل .

٢ً) $ل = ر$ فيكون $ا (ل) = ٠$ ، $ب ا (٠) < ٠$ اي

$س_{ا} < ٠ < ل = س_{ب}$ وللمسألة حل واحد نهائي ، وهو الجذر الموجب :

$س_{ب} = ل = ر$ فيكون الوتر $ب ح$ وقتئذ صفراً .

٣ً) $٢ ر > ل > ر$ فيكون $ب ا (ل) > ٠$ مع ان $ب ا (٠) < ٠$ اي $س_{ا} < ٠ < س_{ب} < ل$ ويكون للمسألة حل واحد وهو الجذر الموجب $س_{ب}$

٤ً) $ل = ٢ ر$ فيكون $ب ا (ل) > ٠$ ، $ا (٠) = ٠$

اي $س_{ا} = ٠ < س_{ب} < ل$ وبما ان $س_{ا} = ٠$ اذن : $س_{ب}$ يساوي المجموع ، اي في هذه الحالة يوجد للمسألة حلان احدهما نهائي وهو : $س_{ا} = ٠$

والآخر : $س_{ب} = - \frac{ح}{ب} = \frac{٢ ل}{٥} = \frac{٤ ر}{٥}$

٥°) ل > ٢ ر فيكون ب ا (ل) > ٠ ، ب ا (٠) > ٠

اي الصفر و ل خارجان عن الجذرين ؛ فليكون الجذران مقبولين ، بفرض وجودهما ، يجب ان ان يكون لدينا الترتيب الآتي :

$$٠ < س_{\circ} < \frac{-ح}{٢ ب} < س' < ل \quad \text{اي:} \quad ٠ < \frac{ل}{٥} < ل$$

وبما ان هذين الشرطين محققان ، اذن : الجذران ، بفرض وجودهما ، مقبولان ؛ وليكونا موجودين يجب ان تكون القاسمة Δ موجبة ، لذلك لنشكل القاسمة فنجد :

$$\Delta = ح^{٢} - ب د = ٤ (٥ ر^{٢} - ل^{٢}) > ٠$$

او :

$$٤ (ر \sqrt{٥} + ل) (ر \sqrt{٥} - ل) > ٠$$

مما يدلنا على ان القاسمة تكون موجبة اذا كان $ر \sqrt{٥} > ل$ لذلك في هذه الحالة الخامسة يكون للمعادلة جذران مقبولان فيما اذا كان $ل > ٢ ر$ وبنفس الوقت $ر \sqrt{٥} > ل$ اي فيما اذا كان $ر \sqrt{٥} > ل > ٢ ر$ وهذا قابل ، لان $\sqrt{٥} > ٢$

٦°) $ل = ر \sqrt{٥}$ فيكون للمعادلة جذر مضاعف وهو :

$$س_{\circ} = س' = \frac{-ح}{٢ ب} = \frac{ل}{٥} = \frac{ر \sqrt{٥}}{٥}$$

اي للمسألة في هذه الحالة حل واحد .

٧°) $ل < ر \sqrt{٥}$ فتكون القاسمة سالبة وليس للمسألة حل .

الخلاصة :

١°) $ل < ر$ لايوجد للمسألة حل

٢°) $ل = ر$ يوجد حل واحد $س' = ر$

٣°) $٢ ر > ل > ر$ حل واحد $س' = \frac{ل + ٢ \sqrt{٥ ر^{٢} - ل^{٢}}}{٥}$

٤°) $ل = ٢ ر$ حلان احدهما نهائي $س_{\circ} = ٠$ ، $س' = \frac{٤ ر}{٥}$

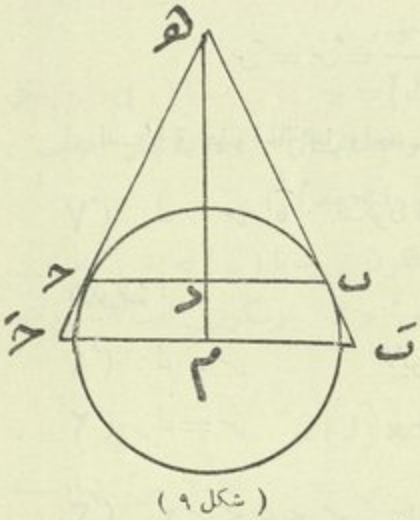
٥°) $ر\sqrt{٥} > ل > ٢ر$ حلان $س = \frac{ل \pm ٢\sqrt{٥ر^٢ - ل^٢}}{٥}$

٦°) $ل = ر\sqrt{٥}$ حل مضاعف $س_١ = س_٢ = \frac{ر\sqrt{٥}}{٥}$

٧°) $ل < ر\sqrt{٥}$ ليس للمسألة حل

١٣٥ — الحل الهندسي : لنحل المسألة السابقة بصورة هندسية ، لذلك نفرض ان المسألة محلولة وان الوتر المطلوب هو $ب_١ حـ$ فاذا مددنا $م د$ بقدر $ب_١ حـ$ بان اخذنا الطول $د هـ = ب_١ حـ$ نرى في المثلث $هـ ب_١ حـ$ ان القاعدة $ب_١ حـ$ تساوي الارتفاع $هـ د$ ، ولو رسمنا من م القطر الموازي الى $ب_١ حـ$ لوجب ان يكون في المثلث $هـ ب_٢ حـ_٢$ المشابه للمثلث $هـ ب_١ حـ$ لوجب ان يكون الارتفاع $هـ م$ مساوياً للقاعدة $ب_٢ حـ_٢$ ايضاً ، ومن هنا ينشأ الحل الاتي :

نرسم قطراً ما ونأخذ على هذا القطر الطول : $م ب_٢ = م حـ_٢ = \frac{ل}{٢}$ نرفع من م عموداً على $ب_٢ حـ_٢$ ونأخذ على هذا العمود الطول $م هـ = ل$ فاذا وصلنا $هـ ب_٢$ ، $هـ حـ_٢$ نجد نقطتي $ب_١ ، حـ$ (شكل ٩) .



(شكل ٩)

وهنا نرى ايضاً بسهولة :

١°) ليكون للمسألة حل يجب ان تكون هـ خارجة عن الدائرة م او واقعة عليها ، اي يجب ان يكون : $ل \leq ر$

٢°) اذا كان $ل < ر$ فيكون للمسألة حل واحد او حلان اوحل مضاعف او ليس لها حل حسبما يكون $هـ ب_٢$ قاطعاً للدائرة في نقطة واحدة او نقطتين او مماساً لها او غير قاطع لها . ومن السهل الوصول لنفس النتائج التي حصلنا عليها في الجبر وهو المطلوب .

تمارين

١] يوجد في وسط حديقة مربعة ، قطعة مربعة مزروعة فاكهة وحول هذه القطعة يوجد طريق عرضه ٤ امتار ، وحول هذا الطريق يوجد حافة ازهار عرضها ٦ امتار . والمطلوب معرفة سطح قطعة الفاكهة مع العلم ان مجموع سطح حافة الازهار مع قطعة الفاكهة ٧٢١ متراً .

٢] لدينا عربة محيط عجلتها ٤ امتار ، ولو زاد الزمن اللازم لتدور عجلتها دورة واحدة بمقدار ثانية واحدة لنقصت سرعة هذه العربة مقدار ٣٫٨٤ كم في الساعة . فما سرعة هذه العربة ؟

٣] المسافة ما بين المحطتين ب ، حـ تساوي ٣٠٠ كيلومتر ، قام من من ب ، حـ وبآن واحد قطاران واتجه كل منهما نحو الآخر ، فبعد ان تقابلا وصل القائم من ب الى محطة حـ بعد مضي تسع ساعات ، ووصل القائم من محطة حـ الى محطة ب بعد مضي اربع ساعات . فما سرعة كل منهما ؟

٤] الحنفيتان ب ، حـ تصبان في بركة ، فالاولى ب لوحدها تملأ البركة باكثر مما تملؤها حـ لوحدها بـ ٢٢ دقيقة ، والحنفيتان تملآن البركة في ساعة واحدة . فما هو الزمن اللازم لكل من الحنفيتين ب ، حـ لتملأ البركة ؟

٥] عين عدداً يتركب من اربعة ارقام ، بعد العلم ان :

١) عكس هذا العدد يزيد على العدد الاصلي بـ ١٩٨ .

٢) مجموع ارقام هذا العدد يساوي ١٥ .

٣) جداء آحاده والوفه يساوي ١٥ .

٦] عددان كتبا بميزان مجهول واحد بالشكلين ٥٠٤ ، ٣٠٤ ورمز جدائها بالميزان السعي هو ١٠٦١٠٠ . فبأي ميزان كتب العددان ؟

٧] اشترى رجل قطعة ارض للبناء ومزرعة مجاورة لها مجموع مساحتيهما ١ هكتار و ٥٦ آراً ، وثمن قطعة الارض ١٩٢٠٠ فرنك ، وثمن المزرعة ٤٠٠٠ فرنك ، وثمن المتر المربع من قطعة الارض اكثر من ثمن المتر المربع من المزرعة بـ ١١ فرنكا . فما ثمن المتر المربع من قطعة الارض ومن المزرعة ؟

٨] مبلغان وضعا في مصرف بالربح البسيط بسعر ٣ ٪ ، مجموعهما يساوي ٥٠٠٠٠ فرنك ، والمبلغ الاول بقي في المصرف ٣ شهور اكثر من المبلغ الثاني ، فكانت فائدة كل منهما ٦٠٠ فرنك . احسب كلا من المبلغين ومدة بقائها في المصرف .

٩] حسم صراف حوالتين ، القيمة الاسمية للاولى ٢١٠٠ فرنك ومدتها ١٠ اشهر ، والقيمة الاسمية للثانية ٣٠٦٠ فرنكا ومدتها ٤ اشهر ، وكان الحسم على اساس الحطيطة الخارجية ، فدفع لصاحبها ٥٠٠٠ فرنك . فكم كان سعر الحسم ؟

١٠] سيارة قطعت طريقاً طوله ٢٧٣٠ متراً ، فدار دولابها الامامي ٣٩٢ دورة زيادة على دولابها الخلفي ، ولو زدنا محيط كل من دولابيها الامامي والخلفي ٣٠ر٠ متراً لكانت زيادة عدد دورات الدولاب الامامي على عدد دورات الدولاب الخلفي ٣٢٥ دورة للطريق نفسه . فما محيط كل من الدولابين الامامي والخلفي ؟

١١] ب حـ د مثلث متساوي الاضلاع ضلعه يساوي هـ . والمطلوب تعيين مستقيم يوازي حـ د ويقطع ب حـ ، ب د او امتدادهما في نقطتين مثل حَ ، دَ على الترتيب على ان يكون :

$$\overline{حَ}^{2} + \overline{حَ دَ}^{2} + \overline{دَ}^{2} = ط^{2}$$

وذلك باعتبار ط طولا مفروضاً .

١٢] لدينا نصف دائرة قطرها بَ بَ = ٢ ر ومركزها م . من نقطة ك الواقعة على محيطها ، رسمنا مماساً لها ، فقطع المماس لها في ب في نقطة حـ ، والمماس لها في بَ في نقطة ق ، وقطع نصف قطر الدائرة

العمودي على ب ب في د . والمطلوب حساب ب ح = س بشرط ان يكون محيط الشبه المنحرف م ب ح د يساوي الطول المفروض ط .

١٢] ب ح د مثلث قائم الزاوية في ب ، زاويته د تساوي ٣٠° ومن نقطة ل الواقعة على ب ح وبين ب و ح انزل ل ك عموديا على الوتر د ح والمطلوب تعيين ح ل لاجل ان يكون المثلثان ح ك ل ، ل ب د متكافئين .

١٤] لدينا نصف دائرة قطرها ب ح = ٢ ر والمطلوب تعيين نقطة مثل ك على نصف هذا المحيط بشرط ان يكون :

$$\overline{ب\,ل}^{٢} + \overline{ل\,ح}^{٢} + \overline{ك\,ل}^{٢} = ط^{٢}$$

وذلك باعتبار ان ل موقع العمود النازل من ك على ب ح وان ط يساوي طولا مفروضا .

١٥] في المثلث ب ح د ؛ ب ح = ٨ امتار ، ب د = ٥ امتار ، ح د = ٧ امتار . والمطلوب تعيين نقطة مثل ق على ب ح بين ب و ح ونقطة مثل ل على ب د بين ب و د بشرط ان يكون محيط المثلث ب ق ل يساوي محيط الشكل الرباعي ق ل د ح وان يكون سطح المثلث ب ق ل يكافيء سطح الشكل الرباعي ق ل د ح .

١٦] احسب الضلعين القائمين لمثلث قائم الزاوية بعد العلم ان وتره يساوي ب وان مجموع احد ضلعيه القائمين مع مرتسم الضلع القائم الاخر على وتره يساوي ط .

١٧] احسب اضلاع المثلث القائم ب ح د بعد معرفة ل الفرق بين ضلعيه القائمين و م مجموع وتره مع الارتفاع المتعلق به .

١٨] لدينا نصف دائرة قطرها ب ح = ٢ ر ومركزها م . والمطلوب تعيين وتر مثل ب د بشرط اذا انزل العمود م ق على ب د كان :

$$\overline{ب\,د}^{٢} + \overline{م\,ق}^{٢} = ط^{٢}$$

١٩] لدينا نصف دائرة قطرها ب ح = ٢ ر والمطلوب حساب طول الوتر ك ل الموازي الى ب ح بشرط ان يحقق العلاقة :

$$\overline{ب\,ك}^{٢} + \overline{ك\,ل}^{٢} + \overline{ل\,حـ}^{٢} = ط^{٢}$$

(اعتبر نصف ك ل مجهولا في حل هذه المسألة) .

٢٠] ب حـ د مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه ب حـ = دَ ، ب د = حَ والمطلوب ايجاد نقطة على الوتر حـ د مثل ك بشرط ان يكون جداء بعديها عن الضلعين القائمين مساويا ط٢

٢١] لدينا نصف دائرة قطرها ب حـ = ٢ ر والمطلوب ايجاد نقطة على محيطها مثل ك تحقق العلاقة :

$$ك\,ل + ٢\,ب\,ل = ط$$

وذلك بفرض ل مرتسم ك على ب حـ

٢٢] سَ م س ، عَ م ع محوران متعامدان ، ونقطة ك واقعة في الزاوية ع م س وعلى بعدين متساويين عن كل من المحورين سَ س ، عَ ع والمطلوب ان نمد من نقطة ك مستقيما قاطعا للمحورين بشرط ان يكون القسم المحصور منه بينهما يساوي ط (مسألة بابوس) .

٢٢] ب ، حـ ، د ، ق اربع نقط مأخوذة على مستقيم واحد ومتساوية الابعاد عن بعضها ، اي ان ب حـ = حـ د = د ق = هـ والمطلوب تعيين نقطة مثل ك على هذا المستقيم توافق العلاقة :

$$\overline{ك\,ب}^{٢} + \overline{ك\,حـ}^{٢} + \overline{ك\,د}^{٢} + \overline{ك\,ق}^{٢} = ط^{٢}$$

٢٤] ب حـ د مثلث قائم الزاوية في ب اضلاعه بَ ، حَ ، دَ معلومة والمطلوب ايجاد نقطة مثل ك على القطعة حـ د توافق العلاقة :

$$\overline{ك\,حـ}^{٢} + \overline{ك\,د}^{٢} - \overline{ك\,ب}^{٢} = \frac{\overline{حـ\,د}^{٢}}{٤}$$

٢٥] ب حـ د مثلث قائم الزاوية في ب وتره حـ د مترات . والمطلوب حساب الضلع ب حـ = س بعد العلم ان :

$$ب\,حـ + د\,ل = ط$$

وذلك بفرض ل مرتسم ب على حـ د وبفرض ط طولا معلوما .

٢٦] عين د بدلالة ب ، حـ على ان يكون سَ ، سَّ جذرا الافادة :
ب س٢ + حـ س + د موافقين للعلاقة :

ب سَ + حـ سَّ + د = ٠

٢٧] احسب وتر المثلث القائم ، بعد العلم ان احد ضلعيه القائمين يساوي حـ وان الفرق بين ضعف وتره وبين ضلعه القائم الآخر يساوي الطول المعلوم هـ ، ثم احسب قيمة الضلع القائم الآخر الموافقة لقيمة الوتر المحسوبة .

٢٨] لدينا مثلث اطوال اضلاعه بَ ، حَ ، دَ والمطلوب ايجاد طول اذا اضيف لاضلاع هذا المثلث او طرح منها انقلب هذا المثلث الى مثلث قائم الزاوية .

٢٩] احسب قيم الحرفين ق ، ط المذكورين في المعادلتين :

س٢ + ق س + ط = ٠ (١)

ص٢ - ق٢ ص + ق ط = ٠ (٢)

بعد العلم ان كلا من جذري المعادلة الاولى يزيد على نظيره من جذري المعادلة الثانية واحداً .

٣٠] ب حـ د ق مستطيل ارتفاعه ق د = ١ متراً . والمطلوب ايجاد نقطة مثل ل على ضلعه ق د حتى اذا دار الشكل الرباعي ب ل د حـ اولا حول ب ق ثانياً حول حـ د كانت نسبة الحجم الحادث الاول الى الثاني تساوي $\frac{٢٦}{١٩}$

٣١] ب حـ د مثلث متساوي الاضلاع ، ضلعه يساوي هـ . اقيم من حـ عمود على ب حـ ومن د عمود على ب د فتلاقيا في ق . قدر بدلالة هـ الحجم الحادث من دوران الشكل الرباعي ب حـ د ق حول ب حـ

٣٢] احسب نصف قطر قاعدة المخروط القائم الدائري س وارتفاعه ع ، بعد العلم ان حجمه يساوي $\frac{٤}{٣}$ π ب٢ وان سطحه الكلي يساوي π حـ٢

٣٣] ب حـ د ق شبه منحرف قائم في ب . قاعدته ب حـ = ب د = ط

باعتبار ط طولا معلوماً ، والمطلوب :

١ً) حساب القاعدة د ق = س والارتفاع ب ق = ع بشرط ان تكون نسبة الحجم الحادث من دوران هذا الشبه المنحرف حول ب ق الى حجم كرة قطرها ب ق تساوي هـ ؟

المناقشة .

دقق الحالة الخاصة عندما هـ = ٢

٢ً) ما قيمة هـ التي تجعل المثلث ب ح د متساوي الاضلاع .

٢٤] ارسم منشوراً قائماً قاعدته مثلث متساوي الاضلاع وسطحه الكلي يساوي ط ومجموع حروفه التسعة يساوي هـ .

ناقش .

٢٥] م ب ح د ق هرم رباعي منتظم رأسه م وقاعدته المربع ب ح د ق والمطلوب حساب ٢ س طول ضلع قاعدته وارتفاعه ع ، بعد العلم ان حجمه يساوي $\frac{٤}{٣}$ ط^{٣} وان سطحه الكلي يساوي ٤ ط^{٢}

المبحث الخامس

الفصل الأول

تحولات توابع الدرجة الثانية

ع = ب س٢ + حـ س + د

١٢٦ — تمهيد: لقد درسنا في السنة السابقة تحولات التوابع التي من الدرجة الاولى ع = ب س + حـ ورأينا ان الخط البياني لهذه التوابع هو مستقيم. وسندرس الآن تحولات التوابع التي من الدرجة الثانية :

ع = ب س٢ + حـ س + د

وذلك عند ما تتحول س من — ∞ الى + ∞ . وكما سنرى ان الخط البياني لهذه التوابع التي من الدرجة الثانية هو منحن ، يسمى بالقطع المكافىء ، ويشبه شكله الشكل الذي يأخذه خيط غير مشدود علق من طرفيه .

وكما فعلنا في درس الخطوط البيانية المستقيمة ، لنبدأ بالحالات الخاصة الآتية :

١٢٧ — كيفية درس تحولات التابع ع = س٢ :

لنذكر اولا ان التابع ع = ا (س) يكون متزايداً فيما اذا كان المتحول س والتابع ع يتحولان باتجاه واحد ، اي يتزايدان معاً ويتناقصان معاً ، وبالعكس يكون التابع متناقصاً فيما اذا كان س ، ع يتحولان باتجاهين متعاكسين ، اذا زاد المتحول س نقص التابع ع وبالعكس .

واذا لاحظنا الآن ان المربع لعدد ما يتحول باتجاه تحول قيمته المطلقة ، وتذكرنا

ايضاً ان الاعداد السالبة تكبر كلما صغرت قيمتها المطلقة ، نستنتج النتائج المهمة الآتية :

نتيجة : ١) يكون التابع : ع = س^{٢} متناقصاً اذا كانت س سالبة ، وحقيقة عند ما تزداد س من — ٤ الى — ٣ فان ع يتناقص من ١٦ الى ٩ .

نتيجة : ٢) يكون التابع : ع = س^{٢} متزايداً عند ما تكون س موجبة وحقيقة عند ما تزداد س من + ٢ الى + ٥ فان ع يزداد ايضاً من ٤ الى ٢٥

واذا لاحظنا الآن ان التابع ع = س^{٢} هو موجب دوماً ، اصغر قيمة له هي ع = ٠ عند ما س = ٠ ولاحظنا ايضاً ان ع يساوي + ∞ عند ما تكون س عظيمة جداً في القيمة المطلقة ، اي اما — ∞ او + ∞ نستنتج النتيجة الثالثة الاتية :

نتيجة : ٣) عند ما تزداد س من — ∞ الى الصفر ، فان التابع ع = س^{٢} يتناقص من + ∞ الى الصفر .

وعند ما تزداد س من الصفر الى + ∞ فان هذا التابع يزداد من الصفر الى + ∞ وهو في نهايته الصغرى ع = ٠ عند ما س = ٠ .

واخيراً : لما كان للاعداد المتناظرة مربعات واحدة ، نستنتج اننا اذا اعطينا الى س قيمتين متناظرتين مثل : + ق ، — ق فاننا نحصل على قيمة واحدة الى ع وهي ق^{٢} . مما يدلنا على ان التابع ع = س^{٢} تناظري بالنسبة الى محور العينات عَ ع .

ويمكن تلخيص ما سبق بالنظرية الاتية والجدول التالي :

١٢٨ — نظرية : التابع ع = س^{٢} متناقص عند ما تكون س سالبة ؛ ومتزايد عند ما تكون س موجبة ، كما في الجدول الآتي :

س	— ∞		٠		+ ∞
ع	+ ∞	↙	٠	↖	+ ∞
		يتناقص		يتزايد	

حيث الاشارة ↙ تدل على التناقص ، والاشارة ↖ تدل على التزايد .

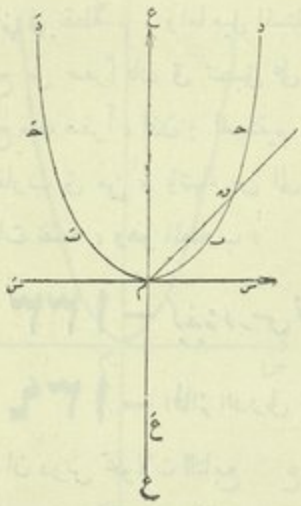
١٢٩ — التمثيل الخطي : لنذكر اولاً ان الخط البياني للتابع :

ع = ق (س) هو المحل الهندسي لجميع النقط التي عينها وسينها تحقق العلاقة :

ع = ق (س) فالخط البياني للتابع ع = س٢ هو المحل الهندسي لجميع النقط التي عينها تساوي مربع سينها .

لنأخذ الآن ورقة مسطرة ومقسمة الى مربعات صغيرة متساوية ، ولنرسم داخلها محورين متعامدين مثل س َس ، ع َع ولنرسم بعض نقط المنحني ، فنجد انه عند ما يكون :

س = ٠	تكون	ع = ٠	ونحصل على نقطة	م
س = ١	»	ع = ١	» » »	ب
س = ٢	»	ع = ٤	» » »	حـ
س = ٣	»	ع = ٩	» » »	د
س = — ١	»	ع = ١	» » »	بَ
س = — ٢	»	ع = ٤	» » »	حَ
س = — ٣	»	ع = ٩	» » »	دَ



(شكل ١٠)

فاذا وصلنا ما بين هذه النقط ومددنا ، نحصل على المنحني (شكل ١٠) الذي يمثل تحولات التابع ع = س٢ فهذا المنحني يسمى في الهندسة بالقطع المكافىء وهو في مثالنا واقع كله فوق محور السينات ، اذ ان ع دوماً موجبة . وكما نرى اصغر قيمة للتابع ع = س٢ (النهاية الصغرى) ممثلة بالنقطة م التي سينها صفر وعينها صفر ايضاً ، فهذه النقطة تسمى بذروة القطع المكافىء .

١٣٠ — نظرية : المنحني ع = س٢ تناظري بالنسبة لمحور العينات .

البرهان : لو اعطينا الى س قيمتين متناظرتين (+ ٢ ، — ٢ مثلا) نحصل على نفس القيمة الى ع (وهي + ٤) ونحصل على نقطتين مثل ح ، ح' واقعتين على المنحني من جهة ومتناظرتين بالنسبة لمحور العينات ع'ع من جهة ثانية وهكذا كلما اعطينا س قيمتين متناظرتين وجدنا نقطتين متناظرتين بالنسبة الى ع'ع من المنحني ، وهو المطلوب .

١٣١ — ملاحظة : لتوضيح شكل القوس ب م ب' يمكننا ان نعين منه نقطاً ثانوية نحصل عليها باعطاء س قيما محصورة بين — ١ ، + ١

١٣٢ — نظرية : محور السينات س'س يمس المنحني ع = س٢ في نقطة المبدأ م

البرهان : لتكن ق نقطة من المنحني ع = س٢ وقريبة من المبدأ م اذن : سين وعين النقطة ق هما (س ، س٢) وذلك بفرض س قريبة من الصفر . واما ميل المستقيم م ق فهو $\frac{ع}{س} = \frac{س^2}{س} = س$ فعندما تتقرب س من الصفر ايضاً فان نقطة ق تتقرب من م والمستقيم م ق يتقرب من المماس للمنحني في نقطة م . واما ميل المستقيم م ق فيتقرب من الصفر ايضاً ، وعندما تصبح س صفراً فان ق تنطبق على م اي يصبح م ق مماساً للمنحني في م كما يصبح ميله صفراً ، اذن : للمستقيم م ق وضع نهائي وهو محور السينات وذلك عند ما تتقارب ق من م بانتهاء س الى الصفر ، اي المماس للمنحني في نقطة المبدأ هو محور السينات نفسه ، وهو المطلوب .

١٣٣ — كيفية درس تحولات التابع : ع = ب س٢

١٣٤ — الحالة الاولى : ب > ٠

ان درس تحولات التابع ع = ب س٢ (باعتبار ب > ٠) تنشأ رأساً من درس تحولات التابع ع = س٢ وذلك بملاحظة انه :

اذا ضربنا كمية متحولة (س مثلا) بعدد موجب (ب مثلا) فان حاصل الضرب

ب س^{٢} يتحول بعين اتجاه تحول المضروب س^{٢}

وحقيقة اذا اعطينا الى س قيمتين مثل س$_{١}$ ، س$_{٢}$ وفرضنا ان س$_{١}^{٢}$ < س$_{٢}^{٢}$ فبما ان ب موجبة يكون (استناداً على خواص المتراجحات) ب . س$_{١}^{٢}$ < ب . س$_{٢}^{٢}$ ايضاً ، اي الكميتان س^{٢} ، ب س^{٢} تتحولان باتجاه واحد . ومن هذه الملاحظة ينشأ الجدول الآتي :

ب < ٠

س	$-\infty$	٠	$+\infty$
س^{٢}	$+\infty$ ↙	٠ ↖	$+\infty$
ع = ب س^{٢}	$+\infty$ ↙	٠ ↖	$+\infty$

فهذا الجدول يرينا انه :

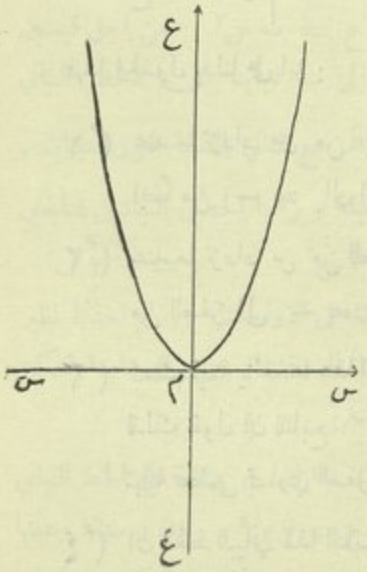
١) عندما تزداد س من $-\infty$ الى الصفر ، فان التابع ع = ب س^{٢} يتناقص من $+\infty$ الى الصفر .

٢) عندما تزداد س من الصفر الى $+\infty$ فان ع يزداد ايضاً من الصفر الى $+\infty$

٣) اصغر قيمة يأخذها التابع ع = ب س^{٢} هي ع = ٠ وذلك عندما س = ٠ لذلك نقول ان للتابع ع = ب س^{٢} نهاية صغرى تساوي الصفر ، ونحصل عليها عندما س = ٠

٤) الخط البياني هو ايضاً قطع مكافىء مماس لمحور السينات في نقطة المبدأ م (عين الاثبات الذي رأيناه في التابع ع = س^{٢}) وواقع فوق محور السينات لان ع = ب س^{٢} موجب دوماً .

وهنا ايضاً النقطة م تمثل النهاية



(شكل ١١)

الصغرى ، وتسمى **بذروة القطع المكافئ** وهذا القطع (شكل ١١) تناظري ايضاً بالنسبة لمحور العينات ع ع

١٣٥ — الحالة الثانية : ب < ٠

ان درس تحولات التابع ع = ب س^{٢} (باعتبار ب سالبة) تنشأ ايضاً رأساً من درس تحولات التابع ع = س^{٢} وذلك بملاحظة انه :

اذا ضربنا كمية متحولة (س^{٢} مثلا) بعدد سالب (ب مثلا) فان حاصل الضرب ب س^{٢} يتحول باتجاه معاكس لتحول المضروب س^{٢} وحقيقة اذا اعطينا الى س قيمتين مثل س$_{١}$ ، س$_{٢}$ وكان س$_{١}^{٢}$ > س$_{٢}^{٢}$ فاذا ضربنا الطرفين بـ ب يكون ب . س$_{١}^{٢}$ < ب . س$_{٢}^{٢}$ اي المقداران س^{٢} ، ب س^{٢} يتحولان باتجاهين متعاكسين اذا زاد الاول نقص الثاني وبالعكس .

فمما سبق ، ومن درس تحول التابع ع = س^{٢} نستنتج الجدول الآتي :

ب < ٠

س	− ∞	٠	+ ∞
س^{٢}	+ ∞ ↙	٠ ↙	+ ∞ ↗
ع = ب س^{٢}	− ∞ ↘	٠ ↘	− ∞

فهذا الجدول يدلنا على انه :

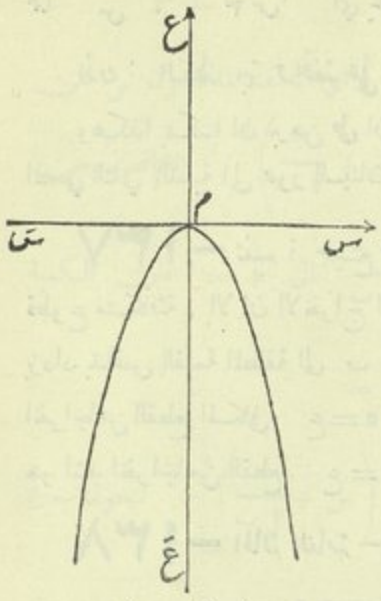
١) عند ما تزداد س من − ∞ الى الصفر فان ع = ب س^{٢} يزداد ايضاً من − ∞ الى الصفر .

٢) عند ما تزداد س من الصفر الى + ∞ فان ع = ب س^{٢} يتناقص من الصفر الى − ∞

٣) اعظم قيمة يأخذها هذا التابع هي ع = ٠ وذلك عند ما س = ٠ لذلك نقول ان للتابع ع = ب س^{٢} (بفرض ب < ٠ طبعاً) نهاية عظمى تساوي الصفر ونحصل عليها عند ما س = ٠

٤) ان الخط البياني لهذا التابع هو ايضاً قطع مكافيء يماس لمحور السينات في نقطة م وواقع تحت محور السينات لان ع = ب س^{٢} سالب دوماً

وهذا المنحني هو تناظري بالنسبة لمحور العينات ع َ ع (شكل ١٢) اي ع َ ع هو محور تناظر له .



(شكل ١٢)

الخلاصة :

ان الخط البياني للتابع ع = ب س٢ هو قطع مكافيء مماس لمحور السينات في نقطة الاصل م وتناظري بالنسبة الى المحور ع َ ع الذي يسمى بمحور هذا القطع المكافيء ، فان كانت ب > ٠ كان هذا القطع فوق محور السينات وله نهاية صغرى ممثلة بالنقطة م وان كانت ب < ٠ يكون هذا القطع تحت محور السينات وله نهاية عظمى ممثلة بالنقطة م ايضاً .

١٣٦ - ملاحظة :

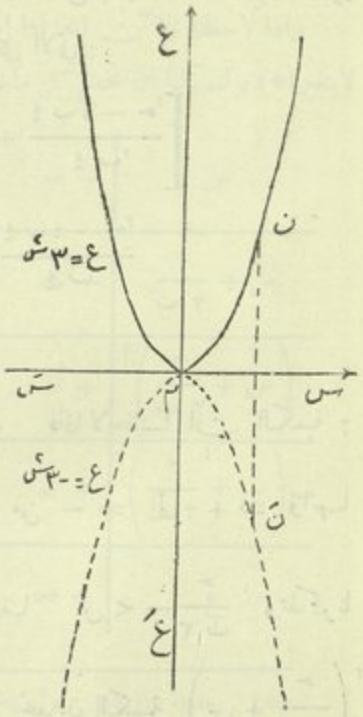
اذا رسمنا على شكل واحد الخطين البيانيين للتابع ع = ب س٢ من اجل قيمتين متناظرتين الى ب لرأينا ان الخط البياني الاول متناظر مع الثاني بالنسبة لمحور السينات .

بالحقيقة لو رسمنا الخطين البيانيين للتابعين

ع = ٣ س٢ ، ع = - ٣ س٢

واخذنا نقطة على الاول مثل ن ثم اخذنا نظير النقطة ن بالنسبة الى محور السينات ولتكن ن َ لرأينا انه :

١ً) بما ان ن واقعة على الخط البياني للتابع ع = ٣ س٢ اذن : سينها وعينها هما س ، ٣ س٢ (شكل ١٣) اي يحققان العلاقة ع = ٣ س٢



(شكل ١٣)

٢) وبما ان النقطة ب' هي نظير ب بالنسبة لمحور السينات ، اذن : سينها وعينها هما س ، — ٣ س٢ اي يحققان العلاقة : ع = — ٣ س٢

اذن : النقطة ب' واقعة على الخط البياني للتابع : ع = — ٣ س٢

وهكذا يمكننا ان نبرهن على ان كل نقطة من المنحني الاول متناظرة مع نقطة من المنحني الثاني بالنسبة الى محور السينات ، وهو المطلوب .

١٣٧ — تنبيه : جميع الخطوط البيانية للتوابع ع = ب س٢ هي قطوع متكافئة ، الا ان الانفراج الكائن ما بين فرعي كل قطع من هذه القطوع يزداد بتناقص القيمة المطلقة الى ب فالقطع المكافىء ع = ٣ س٢ هو اشد انفراجا من القطع المكافىء ع = ٥ س٢ وكذلك القطع المكافىء ع = — ٣ س٢ هو اشد انفراجا من القطع ع = — ٥ س٢ وهكذا .

١٣٨ — الحالة العامة — كيفية درس تحولات التابع :

ع = ب س٢ + حـ س + د .

لتكن ذات الحدود الثلاثة ع = ب س٢ + حـ س + د فكثيرة الحدود هذه كما رأينا (بند ٣٩) يمكن ان تكتب بالشكل الآتي :

$$ع = ب \left[\left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢} + \frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب^{٢}} \right]$$

او :

$$ع = ب \left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢} + \frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب}$$

فبعد الوصول الى هذا الوضع الاخير نميز حالتين :

١٣٩ — الحالة الاولى : ب > ٠ فاذا لاحظنا ان الكمية :

$س + \frac{حـ}{٢ ب}$ متزايدة دوماً عندما تتحول س من — ∞ الى + ∞ وانها سالبة عندما $س < \frac{- حـ}{٢ ب}$ وموجبة عندما $س > - \frac{حـ}{٢ ب}$ وتذكرنا ما اسلفناه سابقاً عند درس التابع ع = س٢ نجد ان الكمية $\left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢}$

متناقصة عندما $س < \frac{-حـ}{٢ب}$ ومتزايدة عند ما $س > \frac{-حـ}{٢ب}$ [لان مربع كمية يتحول باتجاه تحول قيمتها المطلقة] اي انه عند ما تتحول س من $-\infty$ الى $-\frac{حـ}{٢ب}$ فالكمية $\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^٢$ تتناقص من $+\infty$ الى الصفر، وعند ما تزداد س من $\frac{-حـ}{٢ب}$ الى $+\infty$ فان الكمية $\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^٢$ تزداد من الصفر الى $+\infty$

وبما ان $ب > ٠$ اذن الكمية $ب\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^٢$ تتحول بعين تحول المضروب $\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^٢$

واذا لاحظنا الآن انه اذا اضفنا لكمية متحولة مقداراً ثابتاً فان اتجاه التحول لايتغير(*)، لتمكنا ان نجمع كل ما سبق بالجدول الاتي: $ب > ٠$

س	$-\infty$	يتزايد	$\frac{-حـ}{٢ب}$	يتزايد	$+\infty$
$س + \frac{حـ}{٢ب}$	$-\infty$	يتزايد	٠	يتزايد	$+\infty$
$\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^٢$	$+\infty$	يتناقص	٠	يتزايد	$+\infty$
$ب\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^٢$	$+\infty$	يتناقص	٠	يتزايد	$+\infty$
ع	$+\infty$	يتناقص $\frac{٤ب د - حـ^٢}{٤ب}$		يتزايد	$+\infty$

(*) حقيقة اذا كان $ع'' > ع'$ واضفنا للطرفين المقدار الثابت م يكون ايضاً:
$ع'' + م > ع' + م$

١٤٠ - الحالة الثانية : ب < ٠

ان تحول $\left(س + \frac{ح}{٢ ب}\right)^{٢}$ في هذه الحالة هو نفس التحول المذكور في البند السابق ، الا انه عندما نضرب بالعدد السالب ب فان اتجاه التحول يتغير ونحصل عندئذ على الجدول الآتي : ب < ٠

س	$-\infty$	يتزايد	$\frac{-ح}{٢ ب}$	يتزايد	$+\infty$
$س + \frac{ح}{٢ ب}$	$-\infty$	يتزايد	٠	يتزايد	$+\infty$
$\left(س + \frac{ح}{٢ ب}\right)^{٢}$	$+\infty$	يتناقص	٠	يتزايد	$+\infty$
$ب\left(س + \frac{ح}{٢ ب}\right)^{٢}$	$-\infty$	يتزايد	٠	يتناقص	$-\infty$
ع	$-\infty$	يتزايد	$\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$	يتناقص	$-\infty$

١٤١ - النهاية الصغرى والنهاية العظمى :

اذا دققنا ملياً في الجدولين السابقين نرى انه :

١) عندما ب > ٠ فان اصغر قيمة يأخذها ع هي : $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$

وذلك عندما $س = \frac{-ح}{٢ ب}$ لذلك نقول :

اذا كانت ب > ٠ يكون للتابع $ع = ب س^{٢} + ح س + د$ نهاية صغرى قدرها $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$ ونحصل عليها عندما $س = -\frac{ح}{٢ ب}$

٢) بنفس الطريقة نجد انه عندما ب < ٠ يكون للتابع :

ع = ب س^{٢} + حـ س + د

نهاية عظمى قدرها $\frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب}$ ونحصل عليها عند ما س = $\frac{- حـ}{٢ ب}$

نتيجة هامة : يكون للتابع ع = ب س^{٢} + حـ س + د نهاية صغرى او نهاية عظمى حسبما تكون ب موجبة او سالبة .

فان كانت ب > ٠ يكون **تقعر المنحني منجرفاً نحو الجهة العليا .**

وان كانت ب < ٠ يكون **تقعر المنحني منجرفاً نحو الجهة السفلى .**

[توسع] وبصورة عامة نقول : يكون التابع ع = ا (س) في نهايته الصغرى ا (ر) فيما اذا كان هذا التابع ينقلب من متناقص الى متزايد عند ما تمر س بالقيمة س = ر

و كذلك نقول : ان للتابع ع = ا (س) نهاية عظمى ا (ط) فيما اذا كان هذا التابع ينقلب من متزايد الى متناقص عند ما تمر س بالقيمة س = ط

فمثلا التابع ع = س^{٢} له نهاية صغرى عند ما يكون س = ٠ واما التابع ع = - س^{٢} فله نهاية عظمى عند ما س = ٠ .

الخلاصة : التابع ع = ب س^{٢} + حـ س + د يتحول باتجاه معين عند ما تتحول س من - ∞ الى - $\frac{حـ}{٢ ب}$ ثم يغير اتجاه تحوله عند ما تتحول س من - $\frac{حـ}{٢ ب}$ الى + ∞

فان كانت ب > ٠ يكون لهذا التابع نهاية صغرى عند ما س = $\frac{- حـ}{٢ ب}$

وقيمة هذه النهاية هي $\frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب}$ وهو يتناقص من + ∞ الى $\frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب}$ عند ما تتزايد س من - ∞ الى $\frac{- حـ}{٢ ب}$

ثم يتزايد من $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$ الى $+\infty$ عندما تتزايد س من $\frac{- ح}{٢ ب}$

الى $+\infty$

وان كانت $ب < ٠$ يكون لهذا التابع نهاية عظمى عندما س $= \frac{- ح}{٢ ب}$

وقيمة هذه النهاية هي $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$ وهو يتزايد من $-\infty$ الى $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$

عندما تتزايد س من $-\infty$ الى $- \frac{ح}{٢ ب}$ ثم يتناقص من $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$

الى $-\infty$ عندما تتزايد س من $\frac{- ح}{٢ ب}$ الى $+\infty$

١٤٢ - ملاحظة : اذا كانت ب موجبة تكون اشارة النهاية الصغرى $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$ كاشارة الصورة ، اي مخالفة لاشارة القاسمة Δ فان كانت Δ موجبة تكون النهاية الصغرى سالبة . وبما ان التابع ع يبدأ من $+\infty$ ويتحول ماراً بقيمة نهايته الصغرى السالبة ثم يعود الى $+\infty$ ، اذن : لابد له ان يصبح صفراً من قبل ومن بعد المرور من هذه النهاية ، اي للمعادلة في هذه الحالة **جذران حقيقيان** بفاصلتي نقطتي تقاطع المنحني مع محور السينات .

وبالعكس اذا كانت Δ سالبة فان النهاية الصغرى تكون موجبة ويكون التابع دائماً موجباً ، اي لا يصبح صفراً ، ولا يوجد جذور .

واما اذا كانت القاسمة صفراً فيكون المنحني مماساً لمحور السينات في ذروته التي تمثل جذراً مضاعفاً قدره س $= - \frac{ح}{٢ ب}$

واذا كانت $ب < ٠$ فالنهاية العظمى $\frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}$ تكون

اشارتها كاشارة Δ فان كانت Δ موجبة تكون هذه النهاية موجبة ، وبما ان التابع يبدأ من $-\infty$ ماراً بنهايته العظمى الموجبة ثم يعود الى $-\infty$ فلا بد له اذن من ان يكون صفراً من قبل ومن بعد مروره من هذه النهاية ، اي يوجد للمعادلة في هذه الحالة جذران ايضاً .

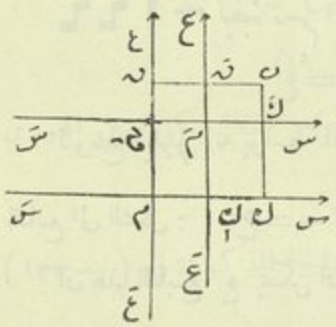
وبالعكس اذا كانت Δ سالبة فان هذه النهاية تكون سالبة ايضاً ويكون التابع سالباً دائماً ، اي لا يصبح صفراً ، ولا يوجد جذور .

واما اذا كانت Δ صفراً يكون المنحني مماساً لمحور السينات في ذروته الممثلة لجذر مضاعف قدره $س = -\frac{ح}{٢ ب}$

١٤٣ — تغيير محوري الاحداثيين — مسألة : ليكن المحوران المتعامدان س َ س ، ع َ ع ولنحركهما (على ان يبقيا موازيين لوضعهما الاول) الى ان يأخذا مثلا الوضع س َ س ، ع َ ع (*) (باعتبار المركز الجديد م َ معيناً باحداثييه س ، ع بالنسبة للمحورين الاساسيين س م ع) والمطلوب ايجاد العلاقة الكائنة بين احداثيات نقطة ما مثل ب بالنسبة للمحاور القديمة والمحاور الجديدة .

الحل : لتكن ب نقطة ما من المستوي ، ولنرسم منها العمودين ب ق َ ق ، ب ك َ ك على المحورين ولنسم س ، ع احداثيي النقطة ب بالنسبة الى المحورين القديمين س َ س ، ع َ ع ولنسم

س ، ع احداثييها بالنسبة الى المحورين الجديدين س َ س ، ع َ ع فيكون كما في (الشكل ١٤) :



(شكل ١٤)

$س = \overline{م ك}$ $\quad ع = \overline{م ق}$

$س = \overline{م َ ك َ}$ $\quad ع = \overline{م َ ق َ}$

وبالفرض :

(*) حرف الرقعة يدل على المحاور الجديدة .

$$\text{س} = \text{م}_{١}\text{ك} \quad ، \quad \text{ع} = \overline{\text{م}_{١}\text{ق}}$$

فاذا لاحظنا ان $\overline{\text{م ك}} = \overline{\text{م}_{١}\text{ك ك}}$ ، $\overline{\text{م ق}} = \overline{\text{م}_{١}\text{ق ق}}$

نستنتج ان $\text{س} = \overline{\text{م}_{١}\text{ك ك}}$ ، $\text{ع} = \overline{\text{م}_{١}\text{ق ق}}$

وبناءً على نظرية شال (بند ٧٨ الكتاب الاول) نجد ان :

$$\overline{\text{م ك}} = \overline{\text{م}_{١}\text{ك}} + \overline{\text{م}_{١}\text{ك ك}}$$

$$\overline{\text{م ق}} = \overline{\text{م}_{١}\text{ق}} + \overline{\text{م}_{١}\text{ق ق}}$$

اي :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{س} &= \text{س}_{\text{ح}} + \text{س} \\ \text{ع} &= \text{ع}_{\text{ح}} + \text{ع} \end{aligned}}$$

فهاتان العلاقتان (الواجب حفظها) صحيحتان مهما كانت النقطة م وباي ربع كانت وبواسطتها ننتقل من الاحداثيات الجديدة الى القديمة وبالعكس ، وذلك بعد معرفة احداثيي المركز الجديد م' .

تمرين : اعد البرهان السابق عند ما تكون م في الربع الثالث بالنسبة للمحاور القديمة او الجديدة .

١٤٤ - كيفية رسم الخط البياني لتحولات التابع :

$$\text{ع} = \text{ب س}^{٢} + \text{حـ س} + \text{د}$$

لنوضح فيما يلي انه بواسطة انتخاب محورين جديدين موافقين يمكننا ان نرجع هذا التابع الى الشكل : $\text{ع} = \text{ب س}^{٢}$ الذي نعلم كيفية رسمه (بند ١٣٣) .

ان هذا التابع ع يمكن ان يكتب (بند ٣٩) بالشكل الآتي :

$$\text{ع} = \text{ب}\left(\text{س} + \frac{\text{حـ}}{٢\text{ ب}}\right)^{٢} + \frac{٤\text{ ب د} - \text{حـ}^{٢}}{٤\text{ ب}}$$

او بالشكل :

$$ع - \frac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب} = ب \left(س + \frac{ح}{٢ ب} \right)^{٢} \qquad (١)$$

فاذا فرضنا الآن ان :

$$\left\{ \begin{array}{l} س = س + \dfrac{ح}{٢ ب} \\ ع = ع - \dfrac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب} \end{array} \right. \qquad (٢)$$

اي :

$$\left\{ \begin{array}{l} س = س - \dfrac{ح}{٢ ب} \\ ع = ع + \dfrac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب} \end{array} \right. \qquad (٣)$$

اي: اذا لاحظنا الآن المحورين الجديدين المعرفين بالعلاقتين السابقتين حيث نرى بوضوح ان احداثيات المركز الجديد مَ هي :

$$\left\{ \begin{array}{l} س_{م} = - \dfrac{ح}{٢ ب} \\ ع_{م} = \dfrac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب} \end{array} \right.$$

نرى بواسطة هذا الفرض ان التابع (١) يصبح من الشكل :

$$ع = ب س^{٢} \qquad (٤)$$

وقد تعلمنا كيفية رسم هذا التابع (بند ١٣٣) ، اذن : يكفي تعيين المحورين الجديدين ثم رسم المنحني $ع = ب س^{٢}$

وبهذه الصورة نكون ارجعنا هذه المسألة الى الحالة المذكورة في (بند ١٣٣) ولنوضح الآن كيفية رسم المنحني .

١٤٥ - رسم المنحني : لنرسم محورين متعامدين مثل سَ س ، عَ ع ولنعين النقطة مَ التي احداثياها هما :

$$\left.\begin{array}{l} س_{ه} = -\dfrac{ح}{٢ ب} \\ ع_{ه} = \dfrac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب} \end{array}\right\}$$

ثم لنرسم منها المحورين المتعامدين سَ سـ ، عَ ع الموازيين للمحورين السابقين والمتحدين معها بالاتجاه (شكل ١٥) .

فالنقطة ه من المنحني المطلوب والتي احداثياها بالنسبة للمحورين سَ س ، عَ ع هما س ، ع المرتبطين بالعلاقة (١) يكون احداثياها بالنسبة للمحورين الجديدين [سَ سـ ، عَ ع المعينين بالعلاقة (٣)] هما سـ ، ع المرتبطين بالعلاقة (٤) اذن : المنحني الدال على تحول التابع

ع = ب س^٢ بالنسبة للمحورين الجديدين

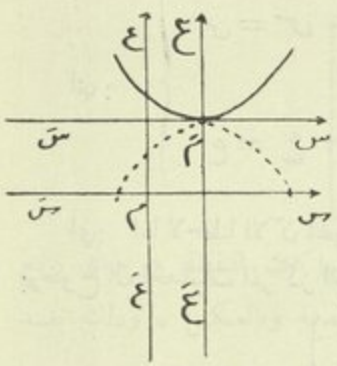
سَ سـ ، عَ ع هو عين المنحني الدال على تحولات التابع :

ع = ب س^٢ + ح س + د

بالنسبة للمحورين القديمين ، اي هو القطع المكافىء العلوي او القطع المكافىء السفلي المنقط حسبما تكون ب موجبة او سالبة . ويمكننا استناداً على خواص القطع المكافىء

ع = ب س^٢ ان نلخص كل ما سبق بالنظرية المهمة الاتية :

١٤٦ - نظرية : المنحني الدال على تحولات تابع من الدرجة الثانية ع = ب س^٢ + ح س + د هو قطع مكافىء ، محور تناظره يوازي المحور عَ ع ، ويقطع القطع المكافىء محور تناظره هذا في النقطة $\left(\dfrac{-ح}{٢ ب} ، \dfrac{٤ ب د - ح^{٢}}{٤ ب}\right)$ الممثلة للذروة ، ويكون تقعر هذا القطع متجهاً نحو ع الموجبة فيما اذا كانت ب موجبة



(شكل ١٥)

ونحو عَ السالبة فيما اذا كانت ب سالبة .

١٤٧ – ملاحظة : بعد ان وضعنا التابع :

$$ع = ب س^{٢} + حـ س + د$$

بالشكل : $$ع = ب \left(س + \frac{حـ}{٢ ب} \right)^{٢} + \frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب}$$

يمكننا رأساً ان نبرهن على ان المستقيم الموازي لمحور العينات والذي معادلته :

$س = - \frac{حـ}{٢ ب}$ هو محور تناظر للمنحني .

وحقيقة اذا اعطينا الى س قيمتين متناظرتين بالنسبة للقيمة $\frac{- حـ}{٢ ب}$ مثل

$$\frac{- حـ}{٢ ب} + ط \quad ، \quad \frac{- حـ}{٢ ب} - ط$$

نرى اننا نحصل على نفس القيمة الى ع وهي :

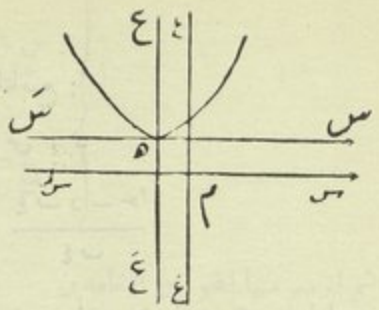
$$ع = ب . ط^{٢} + \frac{٤ ب د - حـ^{٢}}{٤ ب}$$

مما يدلنا على ان المستقيم $س = \frac{- حـ}{٢ ب}$ هو محور تناظر للمنحني لان النقطتين اللتين لهما نفس الترتيب (نفس العين) واللتين لهما فاصلتان (سينتان) متناظرتان بالنسبة للقيمة $\frac{- حـ}{٢ ب}$ هما نقطتان متناظرتان بالنسبة للمستقيم او المحور الذي معادلته

$س = \frac{- حـ}{٢ ب}$ وهو المطلوب .

١٤٨ – الاوضاع المختلفة للقطع المكافئ بالنسبة للمحورين :

في التابع $ع = ب س^{٢} + حـ س + د$ الامثال ب وحدها تعين فتحة المنحني واتجاهها ، واما الامثال حـ ، د ، ب معاً تعين وضع المنحني بالنسبة للمحورين ، والاشكال الاتية ترينا الاوضاع المختلفة الممكن تصورها للقطع المكافىء :

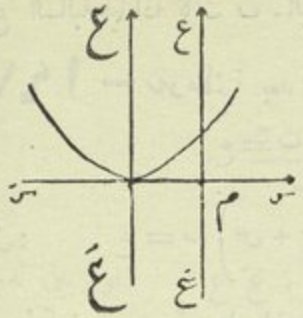


(شكل ١٦)

ب > ٠ حـ٢ − ٤ ب د < ٠

وتكون ذروته في الربع الاول او الثاني حسبما يكون :

$-\frac{حـ}{٢ب} > ٠$ او > ٠

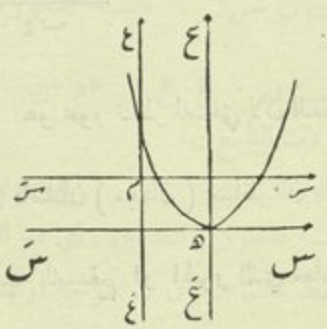


(شكل ١٧)

ب > ٠ حـ٢ − ٤ ب د = ٠

وتكون ذروته في الربع الاول او الثاني حسبما تكون :

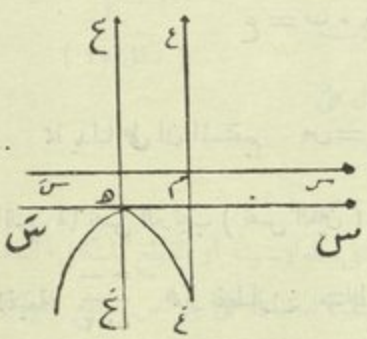
$-\frac{حـ}{٢ب} > ٠$ او > ٠



(شكل ١٨)

ب > ٠ حـ٢ − ٤ ب د < ٠

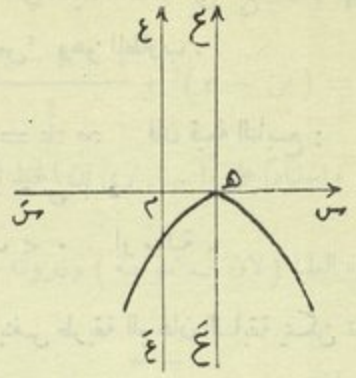
$$\left.\begin{array}{l} س = -\frac{حـ}{٢ب} \\ ع = \frac{٤ب د - حـ^{٢}}{٤ب} \end{array}\right\} هـ$$



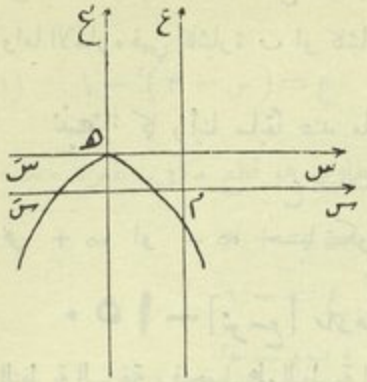
(شكل ١٩)

ب < ٠ حـ٢ − ٤ ب د > ٠

$$\left.\begin{array}{l} س = -\frac{حـ}{٢ب} \\ ع = \frac{٤ب د - حـ^{٢}}{٤ب} \end{array}\right\} هـ$$



(شكل ٢٠)



(شكل ٢١)

ب > ٠ ، حـ٢ − ٤ ب د = ٠

هـ { س = − حـ / ٢ ب ، ع = (٤ ب د − حـ٢) / ٤ ب }

ب < ٠ ، حـ٢ − ٤ ب د < ٠

هـ { س = − حـ / ٢ ب ، ع = (٤ ب د − حـ٢) / ٤ ب }

١٤٩ – نظرية : القيمة المطلقة للتابع :

ع = ب س٢ + حـ س + د

عند ما س = ± ∞ هي ما لا نهاية ، واشارة هذه القيمة هي كاشارة حده الاول ب س٢ الذي من الدرجة الثانية .

البرهان: اذا اخذنا س٢ خارج قوس نجد ان :

$$ع = س^{٢} \left(ب + \frac{حـ}{س} + \frac{د}{س^{٢}} \right)$$

فعند ما تتقرب س من ± ∞ فان كلا من الكسرين : $\frac{حـ}{س}$ ، $\frac{د}{س^{٢}}$ يتهي الى الصفر اي تنتهي المعترضة الى ب وتكون قيمتها قريبة من ب بقدر ما نريد اذن : عند ما س = ± ∞ فان قيمة ع تساوي قيمة ب س٢ ، وبما ان

س = ± ∞ اذن س^{٢} = + ∞ اي القيمة المطلقة الى ع ما لا نهاية ، واما الاشاره فهي كاشارة ب او كاشارة ب س^{٢} وهو المطلوب .

نتيجة : كما رأينا سابقاً عند ما س = ± ∞ فان قيمة التابع :

ع = ب س^{٢} + حـ س + د

هي + ∞ او − ∞ حسبما تكون ب > ٠ او سالبة .

١٥٠ — [توسع] ملاحظة : بنفس طريقة البرهان السابقة يمكن تعميم النظرية السابقة ، فنحصل على النظرية الآتية :

١٥١ — نظرية : القيمة المطلقة لكثيرة الحدود :

$$\text{ما}(س) = ب س^{ن} + حـ س^{ن-١} + \ldots + ل$$

عند ما س = ± ∞ هي ما لا نهاية ، واشارة هذه القيمة هي كاشارة الحد الاول ب س^{ن} الذي درجته اعظم ما يمكن ، (يكفي للبرهان اخذ س خارج قوس) .

المسألة

في كيفية رسم الخطوط البيانية

١٥٢ — مثال : ١) المطلوب رسم الخط البياني للتابع :

ع = س^{٢} − ٦ س + ٨

الحل — الطريقة الاولى : اذا لاحظنا ان :

ب = ١ ، حـ = − ٦ ، د = ٨

نرى انه يمكننا ان نكتب هذا التابع استناداً على الشكل :

$$ع = ب\left(س + \frac{حـ}{٢ب}\right)^{٢} + \frac{٤ب د - حـ^{٢}}{٤ب}$$

بالصورة الاتية :

$$ع = (س - ٣)^{٢} + \frac{٣٦ - ٨ \times ٤}{٤} \quad \text{او} \quad ع = (س - ٣)^{٢} - ١ \qquad (١)$$

واستناداً على ما سبق نرى ان الخط البياني المطلوب هو قطع مكافىء تقعره متجه للجهة العليا (لان ب موجبة) وذروته م$_{َ}$ $\begin{cases} س = + ٣ \\ ع = - ١ \end{cases}$

لان : $\frac{- ب}{٢ ب} = ٣$ ، $\frac{٤ ب د - ب^{٢}}{٤ ب} = - ١$

ومحوره هو المستقيم ع$_{َ}$ ع الموازي لمحور العينات والذي معادلته س = ٣

وبما ان النهاية الصغرى سالبة ، مع ان التقعر متجه للجهة العليا ، اذن : لابد لهذا المنحني من ان يقطع محور السينات في نقطتين ، فلاجل حساب سين كل من هاتين النقطتين يكفي ان نجد قيم س التي تجعل ع صفراً ، اي يكفي ان نجد جذري المعادلة :

$$س^{٢} - ٦ س + ٨ = ٠$$

او بمقتضى العلاقة (١) يكفي ان نجد جذري المعادلة :

$$(س - ٣)^{٢} - ١ = ٠$$

فمنها نجد : $(س - ٣)^{٢} = ١$ او $س - ٣ = \pm ١$

ومنها : $س_{ً} = ٤$ ، $س_{َ} = ٢$

اذن : المنحني المطلوب يمر من الذروة م$_{َ}$ ومن النقطتين ق$_{ً}$ ، ق$_{َ}$ اللتين :

$$ق_{ً} \begin{cases} س = ٤ \\ ع = ٠ \end{cases} \quad ، \quad ق_{َ} \begin{cases} س = ٢ \\ ع = ٠ \end{cases}$$

واذا لاحظنا الآن انه عندما س = ٠ فان ع = ٨ نستنتج ان المنحني يقطع محور العينات في النقطة ن $\begin{cases} س = ٤ \\ ع = ٨ \end{cases}$ فاذا رسمنا الآن محورين متعامدين س$_{َ}$ س ، ع$_{َ}$ ع وعينا بدقة النقط المعلومة من المنحني ووصلنا بينها باقواس مناسبة ، ولاحظنا ان

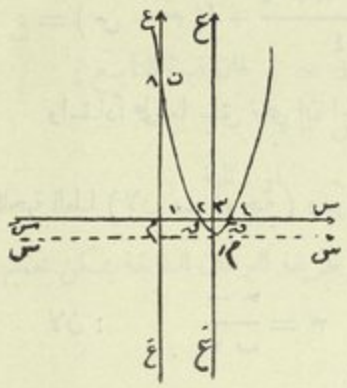
ع َع هو محور تناظر ، نحصل على المنحني المطلوب ، كما في (الشكل ٢٢) .

طريقة ثانية :

لرسم المنحني بهذه الطريقة الثانية نشكل جدولا ذا سطرين يرينا تحولات التابع ، ففي سطره الاول يحوي على القيم المهمة الى س وهي ست على الاكثر :

$$-\infty \ ، \ +\infty \ ، \ \text{الصفر} \ ، \ -\frac{\text{حـ}}{٢\text{ب}}$$

ثم قيمتا س اللتان يكون من اجلهما ع صفراً .



(شكل ٢٢)

واما في سطره الثاني فيحوي على قيم ع الموافقة للقيم المهمة الى س ، وبعد كتابة هذا الجدول نعين كما في الطريقة السابقة النقط المهمة الاتية : مَ ، قَ ، قً ، ن فلو اتبعنا هذه الطريقة في مثالنا السابق نجد الجدول الآتي :

س	$-\infty$	٠	٢	٣	٤	$+\infty$
ع	$+\infty$ ↙	٨ ↙	٠ ↙	-١ ↗	٠ ↗	$+\infty$ ↗
	ن	قَ	النهاية	قً		
			الصغرى مَ			

وبواسطة هذا الجدول حيث يجب ان تكون قيم [السطر الاول] مرتبة بحسب كبرها ، الاصغر فالاكبر ، نحصل على نفس المنحني (شكل ٢٢) الذي وجدناه بواسطة الطريقة الاولى .

١٥٣ - تنبيه: في الطريقتين السابقتين رسمنا المنحني المطلوب بدون درس تحولاته ، اذ استندنا على الحالة العامة ، ولو طلب منا ان ندرس تحولاته وان نرسمه بآن واحد ، لوجب ان نعيد المحاكمات التي ذكرناها في (البند ١٣٩ - ١٤٠) بصورة عددية حسب المثال المعطى لنا .

١٥٤ — [توسع] كيفية حل المعادلة التي من الدرجة الثانية بصورة بيانية :

لنرسم بصورة دقيقة على ورق مسطر بمربعات ميليمترية المنحني ع = س٢ باعتبار الوحدة القياسية للرسم هي الميليمتر ، فهذا المنحني يفيدنا في حل المعادلة التي من الدرجة الثانية بصورة بيانية كما نوضح ذلك في المثال الآتي :

١٥٥ — مثال : المطلوب حل المعادلة :

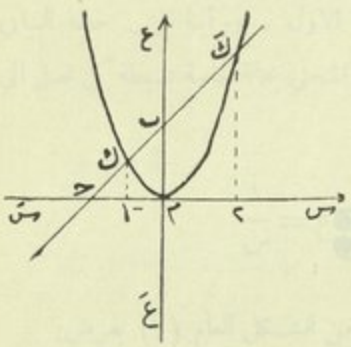
$$٣ س^{٢} - ٣ س - ٦ = ٠$$

الحل : لحلها بصورة بيانية نعزل س٢ على حدة فتصبح من الشكل :

$$س^{٢} = س + ٢$$

وبعد ان رسمنا المنحني ع = س٢ نرسم على نفس الشكل المستقيم ع = س + ٢ فهذا المستقيم (شكل ٢٣) يمر من النقطتين :

ب (س = ٠ ، ع = ٢) ، حـ (س = — ٢ ، ع = ٠)



(شكل ٢٣)

ويقطع المنحني ع = س٢ في النقطتين ك ، كَ مما يدلنا على ان للمعادلة المعطاة جذرين حقيقيين وهما سينا النقطتين ك ، كَ لان احداثيات هاتين النقطتين تحقق بآن واحد العلاقتين :

ع = س٢ ، ع = س + ٢

(لانها موجودتان على المستقيم وعلى المنحني بآن واحد) وكل علاقة تنشأ عنها ، اذن : سينات هاتين النقطتين تجعل س٢ = س + ٢ او س٢ — س — ٢ = ٠ فاذا قسنا باتقان فاصلتي هاتين النقطتين نجد ان سين الاولى ك يساوي — ١ مع ان سين الثانية كَ = ٢ ∴ جذرا المعادلة المعطاة هما :

س = ٢ ، سَ = — ١

وهو المطلوب .

١٥٦ — ملاحظة : يمكننا ان نناقش وجود جذور المعادلة التي من الدرجة الثانية $ب س^{٢} + حـ س + د = ٠$ بصورة بيانية ، وذلك بان ندرس عدد نقط تقاطع المنحني $ع = س^{٢}$ مع المستقيم :

$$ع = -\frac{حـ}{ب} س - \frac{د}{ب}$$

فعدد نقط تقاطعهما يدل على عدد الجذور .

ويجب ان نلاحظ انه اذا كان المستقيم :

$$ع = -\frac{حـ}{ب} س - \frac{د}{ب}$$

مماساً للمنحني $ع = س^{٢}$ فان سين نقطة التماس تمثل جذراً مضاعفاً للمعادلة المعطاة لان نقطة التماس تحصل من انطباق نقطتي تقاطع تقربتا من بعضهما حتى انطبقت احداهما على الثانية ، وذلك بمقتضى تعريف المماس في الهندسة .



الفصل الثاني

التابع التناظري

Fonction Homographique

١٥٧ — تعريف : نسمي تابعاً متناظراً كل تابع من الشكل :

$$ع = \frac{ب س + حـ}{ب' س + حـ'} \qquad (١)$$

حيث يجب ان نفرض دائماً ان $ب' \neq ٠$. وإلا يصبح التابع من الشكل :

$$ع = \frac{ب س + حـ}{حـ'} \qquad \text{او} \qquad ع = \frac{ب}{حـ'} س + \frac{حـ}{حـ'}$$

وهو تابع من الدرجة الاولى درسناه في الكتاب الاول . ورأينا ان خطه البياني مستقيم . وكما فعلنا سابقاً سنبدأ بدرس هذا المنحني بحالة خاصة بسيطة كي نصل الى الحالة العامة .

١٥٨ — كيفية درس التابع : $ع = \frac{١}{س}$

نلاحظ ان التابع $ع = \frac{١}{س}$ ينتج من الشكل العام (١) بفرض:

$$ب = ٠ \qquad حـ = ١$$
$$ب' = ١ \qquad حـ' = ٠$$

وان هذا التابع منقطع وغير معين عند ما تكون $س = ٠$ لاننا لا نعلم المعنى الصحيح لقسمة الواحد على الصفر [الكتاب الاول بند ١٥٠] لذلك عند درس هذا التابع نعطي الى س جميع القيم الممكنة ما عدا الصفر .

ولو كتبنا هذا التابع ع = $\frac{١}{س}$ بالشكل ع . س = ١ نستنتج ان اشارة س كاشارة ع دوماً .

فاذا كانت س موجبة ومتزايدة يكون الكسر $\frac{١}{س}$ موجباً ومتناقصاً .

واذا كانت س سالبة ومتزايدة فان قيمتها المطلقة تتناقص ، وعكس هذه القيمة يتزايد ، اي القيمة المطلقة للعدد السالب $\frac{١}{س}$ تتزايد ، اذن : الكسر $\frac{١}{س}$ يتناقص .

ومما سبق نستنتج النتيجة الهامة الاتية :

نتيجة : التابع $\frac{١}{س}$ متناقص دوماً .

* * *

درس التابع $\frac{١}{س}$

عندما تكون س قريبة من الصفر

١٥٩ — الحالة الاولى : س موجبة

نظرية : عندما تتقارب س من الصفر بالقيمة الموجبة ، فان التابع ع = $\frac{١}{س}$ يتقارب من $+\infty$

البرهان : لنعط الى س قيما موجبة وقريبة من الصفر فنجد انه :

عندما يكون : س = ٠,١ فان ع = ١٠

وعندما يكون : س = ٠,٠١ فان ع = ١٠٠

وعندما يكون : س = ٠,٠٠١ فان ع = ١٠٠٠

وهكذا . . .

مما يدلنا على انه كلما صغرت س كبرت ع ، فاذا صغرنا س بقدر ما نريد فان ع تكبر بقدر ما نريد وتصبح اكبر من اي عدد اردنا ، اي ع = + ∞ وهو المطلوب .

١٦٠ — الحالة الثانية : س سالبة

نظرية : عند ما تتقارب س من الصفر بالقيمة السالبة ، فان التابع ع = $\frac{١}{س}$ يتقارب من — ∞

البرهان : لنعط الى س قيما سالبة وصغيرة بالقيمة المطلقة ، فنجد انه :

عند ما يكون : س = — ٠,١ فان ع = — ١٠

وعند ما يكون : س = — ٠,٠١ فان ع = — ١٠٠

وعند ما يكون : س = — ٠,٠٠١ فان ع = — ١٠٠٠

وهكذا . . .

مما يدلنا على انه كلما صغرت س بالقيمة المطلقة ، فان ع تكون سالبة وقيمتها المطلقة عظيمة جداً . فاذا صغرنا س بالقيمة المطلقة بقدر ما نريد ، فان ع تصبح بالقيمة المطلقة اعظم من اي عدد اردناه سلفاً ، اي ع = — ∞ وهو المطلوب .

١٦١ — الانقطاع

رأينا في البندين السابقين ان التابع ع = $\frac{١}{س}$ يتقرب من — ∞ عند ما تتقرب س من الصفر بالقيمة السالبة ، وهو يتقرب من + ∞ عند ما تتقرب س من الصفر بالقيمة الموجبة . اذن : عند ما تكون س قريبة من الصفر ، يمكن ان يكون التابع ع = $\frac{١}{س}$ قريباً من — ∞ او من + ∞ حسبما تكون س سالبة او موجبة ، مما يدلنا على ان التابع ع = $\frac{١}{س}$ سنقطع (يقفز) من — ∞ الى + ∞ عند ما يمر المتحول س بقيمة الصفر ، ولذلك نقول ان التابع ع = $\frac{١}{س}$ منقطع وغير موجود عند ما س = ٠ .

ولتعميم معرفة الانقطاع نذكر ان جميع التوابع الكسرية تنقطع من اجل قيم المجهول س التي تجعل المخرج صفراً بدون ان تجعل الصورة صفراً .

١٦٢ — ملاحظة : بعد ان علمنا ان التابع $ع = \frac{١}{س}$ متناقص دوماً وانه منقطع عند ما $س = ٠$ لنتساءل ما هي قيمة ع عند ما تكون س قريبة من $-\infty$ او $+\infty$

فاذا تذكرنا خواص الكسور العادية نرى بكل سهولة ان التابع $ع = \frac{١}{س}$ يتقرب من الصفر بالقيمة السالبة او الموجبة حسبما تتقرب س من $-\infty$ او من $+\infty$ وحقيقة عند ما تكون $س = ١٠٠٠٠$ فان $ع = ٠,٠٠٠١$ وعند ما تكون $س = -١٠٠٠٠٠٠$ فان $ع = -٠,٠٠٠٠١$ اي كلما كبرت س في القيمة المطلقة فان القيمة المطلقة الى ع تتقرب من الصفر ، لذلك نقول (اصطلاحا) ان $ع = ٠$ عند ما $س = \pm\infty$ [واما في الحقيقة فان ع تتقرب من الصفر عند ما تتقرب س من ∞] .

١٦٣ — الخلاصة : يمكن تلخيص كل ما سبق بالمراحل الاتية ، والجدول الاتي :

١ً) التابع $ع = \frac{١}{س}$ موجود ومعين من اجل جميع قيم س ما عدا الصفر ، اي اننا ندرس هذا التابع عند ما تتحول س ما بين $(-\infty$ و $-هـ)$ ثم ما بين $(+هـ$ و $+\infty)$ باعتبار هـ عدداً موجباً صغيراً قريباً من الصفر بقدر ما نريد .

٢ً) الـ ع ، والـ س من اشارة واحدة ، لان $ع \cdot س = +١$

٣ً) هذا التابع متناقص دوماً .

وحقيقة اذا كان : $س_٢ > س_١$ (١)

[باعتبار $س_٢$ ، $س_١$ من اشارة واحدة ، اي هما منسوبان لاحدى الفاصلتين $(-\infty ، -هـ)$ ؛ $(+هـ ، +\infty)$] نستنتج بتقسيم الطرفين على

الجداء الموجب $س_١ \times س_٢$ ان :

$$\frac{١}{س_١} < \frac{١}{س_٢}$$

اي مقلوب العدد الصغير هو اكبر من مقلوب العدد الكبير ، وبصورة ثانية بفرض

$ا(س) = \frac{١}{س}$ نرى انه اذا كان $س_٢ < س_١$ يكون :

$ا(س_٢) < ا(س_١)$ اي التابع متناقص .

ويمكن تعميم هذه الخاصة بالنظرية الاتية :

نظرية: التابع $ا(س)$ ومقلوبه $\frac{١}{ا(س)}$ يتحولان باتجاهين متعاكسين ما دام التابع $ا(س)$ محافظاً على اشارة واحدة .

البرهان : اذا كان $ا(س_٢) < ا(س_١)$ فبتقسيم الطرفين على الجداء الموجب $ا(س_١) \cdot ا(س_٢)$ نجد ان :

$$\frac{١}{ا(س_٢)} < \frac{١}{ا(س_١)}$$

وهو المطلوب .

٤) اذا كان س عظيما جداً في القيمة المطلقة ، فان ع يكون صغيراً جداً بالقيمة المطلقة ، والعكس بالعكس ، اي :

عندما $س = \pm \infty$ فان $ع = ٠$

وبالعكس : يكون $ع = \pm \infty$ عندما $س = ٠$

١٦٤ — الجدول : بنفس الطريقة التي اتبعناها عند درس التابع الذي من الدرجة الثانية يمكننا ان نلخص تغيرات التابع $ع = \frac{١}{س}$ بالجدول الاتي :

س	$-\infty$		$٠ - هـ$		$٠ + هـ$		$+\infty$
ع	٠	↙	$-\infty$	↙	$+\infty$	↙	٠

في هذا الجدول الحرف هـ يدل على عدد موجب قريب من الصفر بقدر ما نريد ، واما الخط الشاقولي الواقع تحت الصفر فهو اشارة للدلالة على انقطاع التابع عند ما يمر المتحول س بقيمة الصفر .

١٦٥ — ملاحظة : اذا اعطينا الى س قيمتين متناظرين مثل ب ، — ب فان التابع ع = $\frac{١}{س}$ يأخذ قيمتين متناظرتين ايضاً وهما $\frac{١}{ب}$ ، — $\frac{١}{ب}$

مما يدلنا على ان الخط البياني للتابع ع = $\frac{١}{س}$ تناظري بالنسبة لنقطة المبدأ م

لان النقطتين ، الاولى : $\left(ب ، \frac{١}{ب}\right)$ والثانية : $\left(-ب ، -\frac{١}{ب}\right)$

متناظرتان بالنسبة الى المبدأ م وبتحول ب نحصل على جميع نقاط المنحني المتناظرة مثنى مثنى بالنسبة لنقطة المبدأ م .

١٦٦ — كيفية رسم الخط البياني للتابع : ع = $\frac{١}{س}$ لنذكر مرة ثانية ان الخط البياني للتابع ع = ق (س) هو المحل الهندسي لجميع النقط التي احداثياتها تحقق العلاقة ع = ق (س) .

ثم لنأخذ ورقة مقسمة الى مربعات متساوية طول ضلع كل مربع منها ميليمتر، ولنتخذ الميليمتر وحدة للطول ، ثم لنرسم داخل هذه الورقة محورين متعامدين مثل سَ س ، عَ ع ثم لنعين بعض نقط المنحني المطلوب فنرى انه :

عند ما يكون س = ١ فان ع = ١ ونجد النقطة ب من المنحني المطلوب

» » » س = ٢ » ع = $\frac{١}{٢}$ » » » حـ

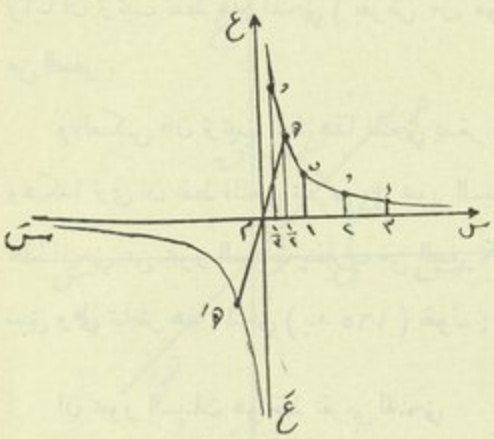
» » » س = ٣ » ع = $\frac{١}{٣}$ » » » د

» » » س = $\frac{١}{٢}$ » ع = ٢ » » » هـ

» » » س = $\frac{١}{٣}$ » ع = ٣ » » » و ... الخ

فاذا وصلنا هذه النقط بمنحن متصل نجد المنحني و هـ ب حـ د . . . . . .

(شكل ٢٤) الذي يدلنا على تحول التابع ع = $\frac{١}{س}$ عند ما تكون س موجبة .



(شكل ٢٤)

بعد ان حصلنا على فرع المنحني الممثل لتحولات التابع :

ع = $\frac{١}{س}$

عند ما تكون س موجبة ، يكفي للحصول على بقية المنحني ان نأخذ (استناداً على الملاحظة السابقة بند ١٦٥) نظير الفرع الحاصل بالنسبة لنقطة الاصل م .

وحقيقة لو فرضنا ان النقطة هـ واقعة على المنحني المطلوب ، وان احداثياتها هي :

س = $\frac{١}{٢}$ ، ع = ٢

واخذنا نظير النقطة هـ بالنسبة الى نقطة الاصل م ولتكن هَ ، لكانت احداثيات النقطة هَ هي :

$$\left.\begin{array}{l} س = -\frac{١}{٢} \\ ع = -٢ \end{array}\right\}$$

ولما كان $\frac{١}{-\frac{١}{٢}} = -٢$ نستنتج

ان النقطة هَ تحقق العلاقة ع = $\frac{١}{س}$ اي هي نقطة من نقط المنحني المطلوب .

وبصورة اعم ، لو فرضنا ان احداثيات النقطة هـ (الواقعة على المنحني المطلوب فرضاً) هي س ، ع لكانت احداثيات النقطة هَ هي — س ، — ع ولما كان فرضاً ع = $\frac{١}{س}$ اذن : بضرب الطرفين بـ — ١ يكون — ع = $\frac{١}{-س}$

اي النقطة هَ هي نقطة من نقط المنحني المطلوب ، والمنحني تناظري بالنسبة لنقطة م .

١٦٧ – الخطوط التقريبية للمنحني ع = $\frac{١}{س}$:

لو كانت الورقة التي رسمنا عليها المنحني السابق كبيرة ومساعدة على تمديد المنحني لرأينا ان ترتيب نقط هذا المنحني (بفرض س موجبة) يتزايد كلما تقارب المتحول س من الصفر .

وبالعكس فان ترتيب نقط هذا المنحني يصغر ويتقارب من الصفر كلما تزايدت س . وهكذا نرى ان نقط المنحني تتقرب من محور السينات كلما كبرت س اي ان بعد نقط هذا المنحني عن محور السينات يتقارب من الصفر كلما زادت س ، لذلك استناداً على ما سبق وعلى تناظر هذا المنحني (بند ١٦٥) نقول :

ان محور السينات هو خط تقريبي للمنحني ع = $\frac{١}{س}$.

وكذلك كلما تقارب س من الصفر فان بعد نقط المنحني عن محور العينات يتقارب ايضاً من الصفر ، لذلك نقول ايضاً :

ان محور العينات هو خط تقريبي للمنحني .

الخلاصة : ان للمنحني ع = $\frac{١}{س}$ خطين تقريبيين وهما محور السينات ومحور العينات .

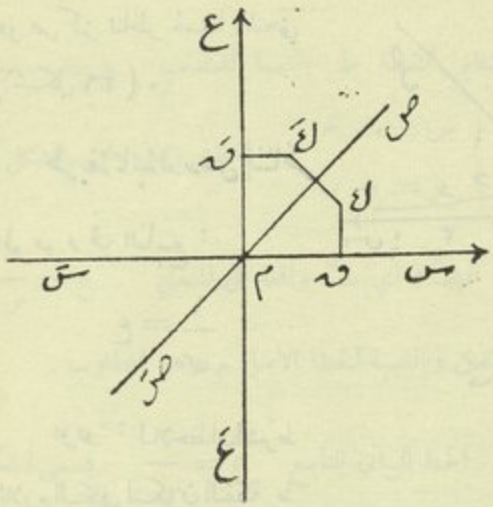
وبصورة عامة نقول : ان المستقيم ق (او م س) هو خط تقريبي لفرع المنحني و هـ ب حـ د . . . . . (الذي يمكن تمديده الى ما لانهاية) (شكل ٢٤) فيما اذا كان بعد نقطة ما مثل د (من هذا الفرع) عن المستقيم ق ينتهي الى الصفر عندما تتباعد النقطة د على هذا الفرع الى ما لا نهاية .

١٦٨ – التناظر الموجود في المنحني ع = $\frac{١}{س}$:

وجدنا فيما سبق (بند ١٦٥) ان مركز الاحداثيين م هو مركز تناظر لهذا المنحني .

ولو اعطينا الآن الى س القيمة ب نجد ان : ع = $\frac{١}{ب}$ اي نجد من المنحني النقطة ك التي احداثياتها :

م ق = ب ، ق ك = $\frac{١}{ب}$



(شكل ٢٥)

ولو اعطينا الى س القيمة $\frac{١}{ب}$ نجد ان ع = ب اي نجد من المنحني النقطة ك' التي احداثياتها :

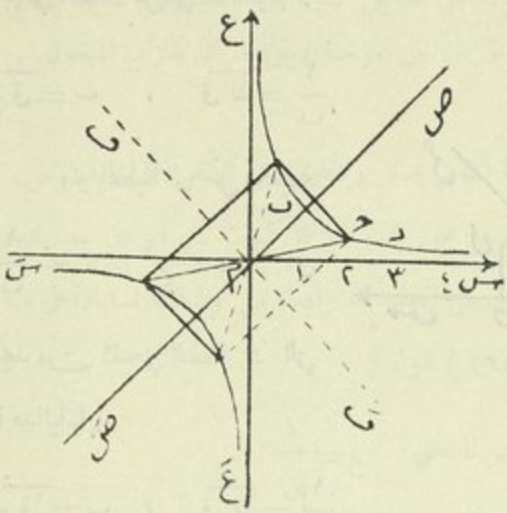
م ق' = ب ، ق' ك' = $\frac{١}{ب}$

فاذا طوينا الآن الورقة باعتبار منصف الزاوية س م ع ذي المعادلة ع = س مفصلاً للطي ، نرى ان النقطة ق تنطبق على النقطة ق' وان النقطة ك تنطبق على النقطة ك' ، مما يدلنا على ان النقطتين ك ، ك' متناظرتان بالنسبة الى هذا المنصف ، ولما كان من الممكن اعادة نفس هذه المحاكمات من اجل جميع نقط المنحني ع = $\frac{١}{س}$ نستنتج النتيجة المهمة الاتية :

نتيجة: المنصف ع = س هو محور تناظر للمنحني ع = $\frac{١}{س}$ ثم ان وجود مركز التناظر م (بند ١٦٥) ومحور التناظر ع = س يوجبان استناداً على خواص المثلثات والتناظر في الهندسة ، وجود محور تناظر آخر عمود على الاول ، اي يوجبان ان يكون المنصف ع = - س (لزاويتي الربع الثاني والرابع) محور تناظر للمنحني ع = $\frac{١}{س}$

الخلاصة : ان منصفي زوايا المحورين هما محورا تناظر للمنحني $ع = \frac{١}{س}$

وكذلك فان المركز م هو مركز تناظر لهذا المنحني (شكل ٢٦) .



(شكل ٢٦)

طريقة ثانية لدرس التناظر الموجود في التابع :

$$ع = \frac{١}{س}$$

اولاً : لنلاحظ ان الشرط اللازم الكافي لتكون النقطة ط واقعة على المنحني $ع = \frac{١}{س}$ هو ان يكون جداء احداثييها ع . س = ١

لذلك لو فرضنا ان احداثيي النقطة ط هما $\begin{cases} س = ب \\ ع = حـ \end{cases}$ لكان الشرط اللازم الكافي لوقوع النقطة ط على المنحني $ع = \frac{١}{س}$ هو كون ب × حـ = ١

ولو رمزنا الآن بالحرف طَ لنظير النقطة ط بالنسبة للمركز م لكانت احداثيات النقطة طَ هي $\begin{cases} س = - ب \\ ع = - حـ \end{cases}$ وبما ان ب × حـ = ١ فرضاً ، اذن :

— ب × — حـ = ١ ايضاً ، اي النقطة طَ واقعة على المنحني $ع = \frac{١}{س}$ ،

وهذا المنحني تناظري بالنسبة للمركز م .

ثانياً : لو رمزنا الآن بـ طً لنظير النقطة ط بالنسبة للمنصف ع = س

لكانت احداثيات النقطة ط" هي $\left\{\begin{array}{l} س = -ح \\ ع = ب \end{array}\right.$ ولكان $ب \cdot -ح = ١$

اي النقطة ط" واقعة على المنحني ، والمنحني تناظري بالنسبة للمنصف $ع = س$

ثانياً : ولو رمزنا بـ ط‴ لنظير النقطة ط بالنسبة للمنصف $ع = -س$

لكانت احداثيات النقطة ط‴ هي $\left\{\begin{array}{l} س = -ح \\ ع = -ب \end{array}\right.$ [حقق ذلك وارسم الشكل]

ولكان $-ح \times -ب = ١$ ايضاً ، اي ط‴ واقعة على المنحني $ع = \frac{١}{س}$

اي هذا المنحني تناظري بالنسبة للمنصفين وبالنسبة لنقطة الاصل م وهو المطلوب .

١٦٩ — تعريف : الخط البياني للتابع $ع = \frac{١}{س}$ يسمى قطعاً زائداً متساوي الساقين .

١٧٠ — كيفية درس تغيرات التابع $ع = \frac{ك}{س}$:

الحالة الاولى ك موجبة : لنلاحظ اولاً ان التابع $ع = \frac{ك}{س}$ يمكن ان يكتب بالشكل $ع = ك \times \frac{١}{س}$ وبما ان الكسر $\frac{١}{س}$ يحافظ على اشارة واحدة عند ما يتحول س اما بين $(-\infty$ و $-هـ)$ او بين $(+هـ$ و $+\infty)$ نستنتج ان التابع $ع = \frac{ك}{س}$ يحافظ على اشارة واحدة عند ما تتحول س ضمن احدى الفاصلتين $(-\infty ، -هـ)$ ؛ $(+هـ ، +\infty)$ لاننا كما في التابع السابق لاندرس التابع $ع = \frac{ك}{س}$ الا ضمن هاتين الفاصلتين وذلك لان هذا التابع الكسري منقطع وغير معين عند ما $س = ٠$.

بعد ان وضعنا التابع $ع = \frac{ك}{س}$ بالشكل $ع = ك \times \frac{١}{س}$ نقول

ان تحولات هذا التابع $ع = \frac{ك}{س}$ تنشأ رأساً من تحولات التابع $ع = \frac{١}{س}$

استناداً على الملاحظة التي اوردناها (بند ١٣٤) عند ما اشتققنا درس التابع $ع = ب \cdot س^{٢}$ من تحولات التابع $ع = س^{٢}$ ، وبما ان ك موجبة اذن :

تحول التابع $ع = \frac{ك}{س}$ كتحول التابع $ع = \frac{١}{س}$ اي هو متناقص

دوماً ، ونحصل على الجدول الآتي :

س	$-\infty$		$-هـ$	$\cdot$	$+هـ$		$+\infty$
$\frac{١}{س}$	$\cdot$	↙	$-\infty$	‖	$+\infty$	↙	$\cdot$
$\frac{ك}{س}$	$\cdot$	↙	$-\infty$	‖	$+\infty$	↙	$\cdot$

ك < ٠

سالب متناقص — منقطع — موجب متناقص

واما الخط البياني للتابع في هذه الحالة فهو ايضاً قطع زائد متساوي الساقين ،

خطوطه التقريبية المحوران :

س َ س ، ع َ ع

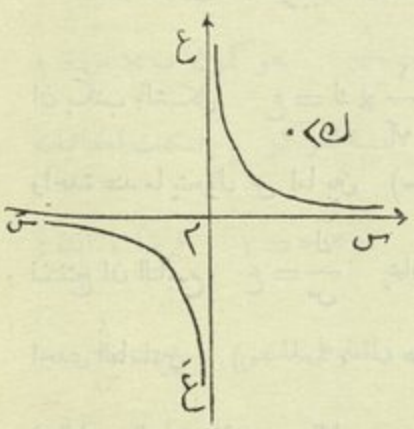
ومحاور تناظره المنصفان لزوايا المحورين،

ومركز تناظره نقطة الاصل م ٠

وهذا الخط البياني واقع في الزاويتين الاولى والثالثة س م ع ، س َ م ع َ

لانه يمكننا ان نكتب التابع $ع = \frac{ك}{س}$

بالشكل $ع \times س = ك$ وبما ان ك موجبة ، اذن : ع ، س من اشارة



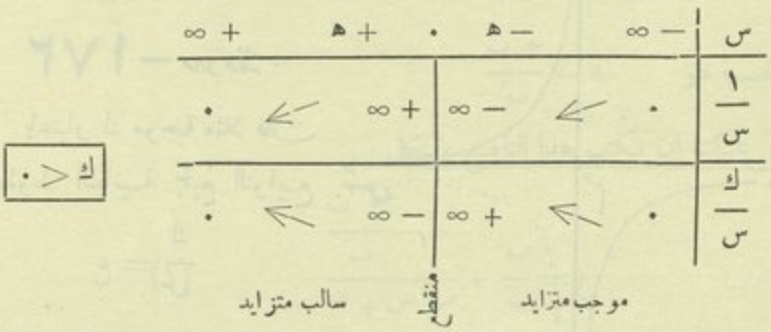
(شكل ٢٧)

واحدة ، اما موجبان واما سالبان ، اي الخط البياني واقع في الربعين الاول والثالث (شكل ٢٧) .

الحالة الثانية ك سالبة : في هذه الحالة يمكننا ان نعيد المحاكمات السابقة مع الفرق الآتي :

التابعان : $ع = \frac{١}{س}$ ، $ع = \frac{ك}{س}$ يتحولان باتجاهين متعاكسين

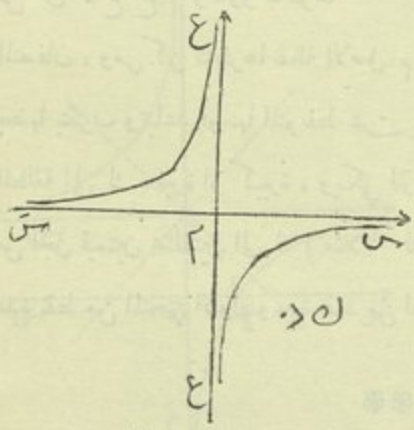
لان ك سالبة وبما ان الاول $ع = \frac{١}{س}$ متناقص دوماً ، اذن : الثاني متزايد دوماً كما في الجدول الآتي :



واما الخط البياني في هذه الحالة فهو ايضاً **قطع زائد** متساوي الساقين له نفس الخطوط التقريبية ونفس محاور التناظر كما له نفس مركز التناظر ، الا انه واقع في الربعين **الثاني والرابع** ، لانه اذا كتبنا التابع $ع = \frac{ك}{س}$ بالشكل :

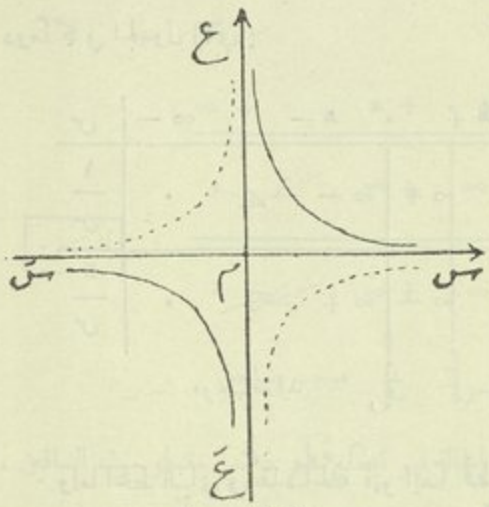
$ع \times س = ك$

وتذكرنا ان ك سالبة نستنتج ان ع ، س من اشارتين مختلفتين ، اي ان نقط المنحني واقعة في الربعين الثاني والرابع (شكل ٢٨) .



(شكل ٢٨)

١٧١ - ملاحظة : اذا رسمنا على شكل واحد الخطين البيانيين للتابع $ع = \frac{ك}{س}$ من اجل قيمتين متناظرتين الى ك : + ٣ ؛ - ٣ مثلا نجد ان هذين الخطين البيانيين متناظران بالنسبة الى محور السينات (شكل ٢٩) . وحقيقة فاننا ننتقل من احدهما الى الآخر بابدال كل ع بـ - ع ، ففي الشكل ، المنحني المنقط يدل على تغيرات التابع $ع = \frac{ك}{س}$ عندما ك < ٠ . واما الآخر فهو يدل على تغيرات هذا التابع عند ما ك > ٠ .



(شكل ٢٩)

١٧٢ - ملاحظة :

باعتبار ك موجبة مثلا فان الخطوط البيانية لجميع التوابع

$$ع = \frac{ك}{س}$$

هي قطوع زائدة متساوية الساقين خطوطها التقريبية المحوران : سَ س ، عَ ع ومحاور تناظرها المنصفان ، ومركز تناظرها نقطة الاصل م ، الا ان هذه الخطوط البيانية تختلف عن بعضها بتقرب وتباعد قوسها المتوسط عن المركز م . وذلك حسبما تكون القيمة المطلقة الى ك صغيرة او كبيرة ، ويكفي لنرى ذلك ان نرسم باتقان الخطين البيانيين من اجل قيمتين مختلفتين الى ك (مثلا ك = ٢ ؛ ك = ٥) بعد ان نعين عدة نقط من المنحني الاول وعدة نقط من المنحني الثاني .

❀❀❀

الحالة العامة

١٧٣ – كيفية درس تحول التابع :

$$ع = \frac{ب\ س + حـ}{ب_{ـ}\ س + حـ_{ـ}}$$

بفرض ان $ب_{ـ} \neq 0$.

اذا قسمنا صورة هذا التابع على مخرجه نجد ان حاصل القسمة هو $\frac{ب}{ب_{ـ}}$ وان باقي القسمة هو $حـ - \frac{حـ_{ـ} ب}{ب_{ـ}}$

اذن : يمكننا ان نكتب هذا التابع بالشكل :

$$ع = \frac{ب}{ب_{ـ}} + \frac{حـ - \frac{حـ_{ـ} ب}{ب_{ـ}}}{ب_{ـ}\ س + حـ_{ـ}} \qquad (١)$$

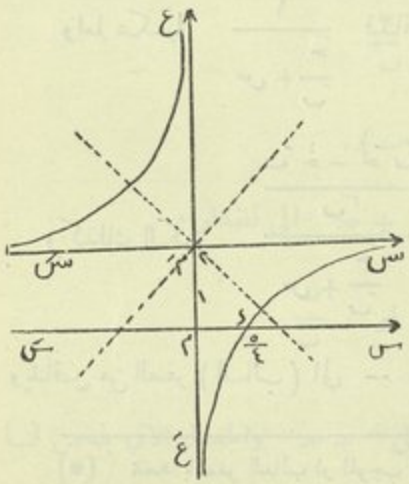
وبتقسيم صورة ومخرج الكسر الاخير على $ب_{ـ}$ التي هي غير الصفر فرضاً نجد ان :

$$ع = \frac{ب}{ب_{ـ}} + \frac{\frac{ب_{ـ} حـ - حـ_{ـ} ب}{ب_{ـ}^{٢}}}{س + \frac{حـ_{ـ}}{ب_{ـ}}} \qquad (٢)$$

فهذا الشكل يدلنا على ان ع ينحول بنحول الكسر :

$$\frac{\frac{ب_{ـ} حـ - حـ_{ـ} ب}{ب_{ـ}^{٢}}}{س + \frac{حـ_{ـ}}{ب_{ـ}}}$$

(بند ١٣٩)



(شكل ٣٠)

وهنا لدرس تحولات هذا الكسر نرى ان اشارة صورته $\frac{ب\,ح - ح\,ب}{ب^{٢}}$ تتبع اشارة المقدار $ب\,ح - ح\,ب$ لذلك نميز ثلاثة فروع :

١٧٦ - الفرع الاول : $ب\,ح - ح\,ب > ٠$.

فالكمية الموجودة في المخرج $س + \frac{ح}{ب}$ تصبح صفراً عند ما تكون $س = -\frac{ح}{ب}$ اذن : (بند ١٦١) هذا التابع **منقطع** وغير معين عند ما $س = -\frac{ح}{ب}$ لذلك ندرسه في الفاصلتين :

$$-\infty \ldots\ldots -\frac{ح}{ب} - هـ \quad ; \quad -\frac{ح}{ب} + هـ \ldots\ldots + \infty$$

فعند ما تتزايد س من $-\infty$ الى $-\frac{ح}{ب}$ ، فان الكمية $س + \frac{ح}{ب}$ تكون سالبة وتتزايد من $-\infty$ الى الصفر .

واما عكسها $\frac{١}{س + \frac{ح}{ب}}$ فيتناقص من الصفر (السالب) (*) الى $-\infty$.

وكذلك الكسر $\frac{\frac{ب\,ح - ح\,ب}{ب^{٢}}}{س + \frac{ح}{ب}}$ الذي صورته موجبة يحتول **بعين الانجاه** ويتناقص من الصفر (السالب) الى $-\infty$ وينتج من ذلك ان التابع ع يتناقص

(*) نقصد بالصفر السالب او الموجب كمية صغيرة بقدر ما نريد سالبة او موجبة مثل $\pm هـ$

ايضاً من المقدار $\left(\frac{ب}{ن^{ح}} - هـ\right)$ او $\frac{ب}{ن^{ح}}$ الى $-\infty$ عند ما تتزايد س من $-\infty$ الى $\frac{-حَ}{نِ}$ [وذلك لان ع ينشأ من اضافة المقدار $\frac{ب}{ن^{ح}}$ الى الكسر السابق] .

وبنفس الطريقة نرى انه عند ما تتزايد س من $\frac{-حَ}{نِ}$ الى $+\infty$ فان :

١ً) الكمية $س + \frac{حَ}{نِ}$ تكون موجبة وتتزايد من الصفر الى $+\infty$.

٢ً) واما عكسها $\frac{١}{س + \frac{حَ}{نِ}}$ فيتناقص من $+\infty$ الى الصفر (الموجب).

٣ً) وكذلك الكسر :

$$\frac{\frac{ب ن^{ح} - حَ ب}{ن^{٢ح}}}{س + \frac{حَ}{نِ}}$$

يتناقص ايضاً من $+\infty$ الى الصفر (الموجب) .

٤ً) اذن : ع يتناقص هو ايضاً من $+\infty$ الى المقدار :

$$\frac{ب}{ن^{ح}} + هـ \quad \text{او} \quad \frac{ب}{ن^{ح}}$$

عند ما تتزايد س من القيمة $\frac{-حَ}{نِ}$ الى $+\infty$ والجدول الآتي يلخص لنا كل ما سبق .

س	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{حَ}{ب}$	$\nearrow$	$+\infty$
$س+\frac{هَ}{ب}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{١}{س+\frac{هَ}{ب}}$	0 او $-هـ$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	0 او $+هـ$
$\frac{ب\,حـ-حَ\,ب}{ب^{٢}}$					
$س+\frac{هَ}{ب}$	0 او $-هَ$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	0 او $+هَ$
ع	$\frac{ب}{ب}-هَ$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{ب}{ب}+هـ$

حيث هـ ، هَ يدلان على كميتين موجبتين صغيرتين بقدر ما نريد يمكن اهمالها وحيث فرضاً :

$ب\,حـ-حَ\,ب>0$ اي : $\boxed{ب\,حَ-ب\,حـ<0}$

فينتج ان التابع **متناقص** دوماً في هذه الحالة .

ويمكن تلخيص الجدول السابق بسطريه الاول والاخير ، فنحصل على الجدول الاتي :

س	$-\infty$		$-\frac{حَ}{ب}$		$+\infty$
ع	$\frac{ب}{ب}$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{ب}{ب}$

ونقول عند ما $س=-\infty$ فان ع يتقرب من $\frac{ب}{ب}$ بالنقص

واما عند ما $س=+\infty$ فان ع يتقرب من $\frac{ب}{ب}$ بالزيادة (اي يبقى

اكبر من $\frac{ب}{ب_{ا}}$ بقليل) ، وعندما $س = -\frac{حـ}{ب_{ا}}$ فان التابع ينقطع من $-\infty$ الى $+\infty$ وكل ذلك بفرض $ب_{ا} حـ - ب_{ا} حـ < 0$.

١٧٥ - الفرع الثالث : $ب_{ا} حـ - حـ_{ا} ب > 0$.

في هذه الحالة ، ان تحول الكسر $\frac{١}{س + \frac{هـ}{ب_{ا}}}$ هو نفس التحول المذكور سابقاً ، ولكن عند ما نضرب هذا الكسر بالعدد السالب $ب_{ا} حـ - حـ_{ا} ب$ فان اتجاه التحول ينعكس (بند ١٣٥) ونحصل على الجدول الآتي :

س	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{حـ}{ب_{ا}}$	$\nearrow$	$+\infty$
$س + \frac{هـ}{ب_{ا}}$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$\frac{١}{س + \frac{هـ}{ب_{ا}}}$	0 او $-$	$\nearrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\nearrow$	0 او $+$
$\frac{ب_{ا} حـ - حـ_{ا} ب}{ب_{ا}^{٢}}$ $\div$ $(س + \frac{هـ}{ب_{ا}})$	0 او $+$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	0 او $-$
ع	$\frac{ب}{ب_{ا}} + هـ$	$\nearrow$	$+\infty$ $-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{ب}{ب_{ا}} - هـ$

حيث فرضاً $ب_{ا} حـ - حـ_{ا} ب > 0$ اي : $\boxed{ب_{ا} حـ - ب حـ_{ا} > 0}$

فينتج ان التابع متزايد دوماً في هذه الحالة .

ويمكن كما في الفرع السابق اختصار هذا الجدول بسطريه الاول والاخير فنحصل على الجدول الآتي :

س	$-\infty$		$-\frac{حـ}{ب}$		$+\infty$
ع	$\frac{ب}{ب}$	↖	$+\infty$	$-\infty$	↖ $\frac{ب}{ب}$

ونقول عند ما $س = -\infty$ فان ع يتقرب من $\frac{ب}{ب}$ بالزيادة ، واما عند ما $س = +\infty$ فان ع يتقرب من $\frac{ب}{ب}$ بالنقص ، واما عند ما $س = -\frac{حـ}{ب}$ فان ع ينقطع من $+\infty$ الى $-\infty$.

١٧٦ – الفرع الثالث : $ب^{2} حـ - حـ^{2} ب = ٠$.

فالمعادلة (٢) من (البند ١٧٣) تصبح عندئذ $ع = \frac{ب}{ب}$ اي التابع في هذه الحالة ثابت وخطه البياني مستقيم يوازي محور السينات ويبعد عنه بالمقدار الجبري $\frac{ب}{ب}$

الخلاصة : استناداً على الجدولين السابقين يمكننا ان نلخص كل ما مر بالنظرية الآتية :

نظرية : ١ً) التابع $ع = \frac{ب س + حـ}{ب^{2} س + حـ^{2}}$ **منقطع** وغير معين عند ما تكون $س = -\frac{حـ}{ب}$ فيتقارب من $\pm\infty$ عند ما تتقارب س من $-\frac{حـ}{ب}$

٢ً) ويكون متزايداً او متناقصاً او ثابتاً حسبما يكون المقدار $ب حـ - ب^{2} حـ$ موجباً او سالباً او صفراً .

٣ً) ويتقارب من $\frac{ب}{ب}$ عند ما تتقارب س من $\pm\infty$.

١٧٧- كيفية رسم المنحني الدال على تحولات التابع :

$$ع = \frac{ب\,س + حـ}{ب'\,س + حـ'} \qquad (١)$$

رأينا (بند ١٧٣) انه يمكن ان يكتب هذا التابع بالشكل :

$$ع = \frac{ب}{ب'} + \frac{ك}{س + \frac{حـ}{ب'}} \qquad (٢)$$

وذلك بفرض ان $ك = \frac{ب\,حـ' - حـ\,ب'}{ب'^{٢}}$

الا ان هذا التابع يمكن ان يكتب ايضاً بالشكل :

$$ع - \frac{ب}{ب'} = \frac{ك}{س + \frac{حـ}{ب'}} \qquad (٣)$$

واذا فرضنا الآن ان :

$$(٤) \quad \begin{cases} س + \frac{حـ}{ب'} = س \\ ع - \frac{ب}{ب'} = ع \end{cases} \qquad \text{او} \qquad (٥) \quad \begin{cases} س = س - \frac{حـ}{ب'} \\ ع = ع + \frac{ب}{ب'} \end{cases}$$

اي اذا انتخبنا محورين جديدين موازيين للمحورين الاصليين ومعينين بالمبدأ الجديد $م'$ $\begin{cases} س = \frac{-حـ}{ب'} \\ ع = \frac{ب}{ب'} \end{cases}$ (انظر بند ١٤٣) نرى ان المعادلة (٣) تصبح :

$$ع = \frac{ك}{س} \qquad (٦)$$

مما يدلنا على ان الخط البياني للتابع :

$$ع = \frac{ب\ س + حـ}{ب_{ـ}\ س + حـ_{ـ}} \qquad (١)$$

بالنسبة للمحورين القديمين هو عين الخط البياني للتابع :

$$ع = \frac{ك}{س} \qquad (٦)$$

بالنسبة للمحورين الجديدين ، وحقيقة نقط الخط البياني للتابع :

$$ع = \frac{ب\ س + حـ}{ب_{ـ}\ س + حـ_{ـ}} \qquad (١)$$

تحقق هذه العلاقة (١) وما ينشأ عنها ؛ كما تحقق العلاقة (٥) فرضاً ، اذن : هذه النقط تحقق كل علاقة يمكن ان تنشأ من المعادلات (١) ، (٥) . وبما ان العلاقة (٦) هي علاقة ناشئة من العلاقات (١) ، (٥) ، اذن : هذه النقط تحقق العلاقة (١) باحداثييها الصغيرين س ، ع كما تحقق العلاقة (٦) باحداثييها الكبيرين س ، ع اي هي نقط المنحني $ع = \frac{ك}{س}$ المنسوب للمحورين الجديدين المعينين بالمبدأ الجديد مَ لذلك لرسم الخط البياني للتابع :

$$\left.\begin{array}{l} س = -\frac{حـ_{ـ}}{ب_{ـ}} \\ ع = \frac{ب}{ب_{ـ}} \end{array}\right\} \text{ مَ}$$

$$ع = \frac{ب\ س + حـ}{ب_{ـ}\ س + حـ_{ـ}}$$

نرسم محورين متعامدين س مَ س ، ع مَ ع ثم نعين نقطة المبدأ الجديد مَ التي احداثياها :

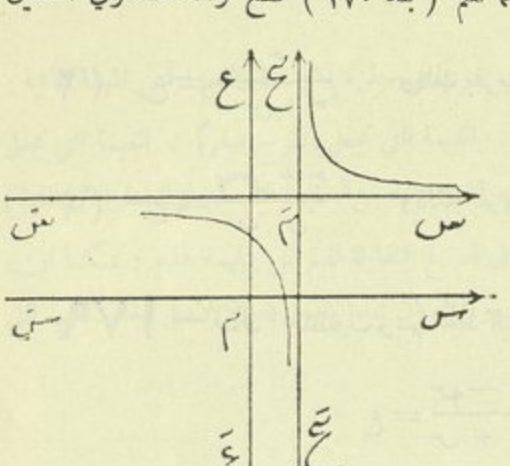
$$س = -\frac{حـ_{ـ}}{ب_{ـ}} \quad ، \quad ع = \frac{ب}{ب_{ـ}}$$

ونرسم منها المحورين س مَ س ، ع مَ ع الموازيين للمحورين الاصليين والمتحدين معهما بالاتجاه فتؤول المسألة وقتئذ الى رسم الخط البياني للتابع :

$$ع = \frac{ك}{س}$$

بالنسبة للمحورين الجديدين فهو كما نعلم (بند ١٧٠) قطع زائد متساوي الساقين خطوطه التقريبية المحاور الجديدة

الا انه من السهل ان ندرك ان معادلة المحور سَ سَ بالنسبة للمحورين القديمين هي :



(شكل ٣١)

$$ع = \frac{ب}{ب}$$

وكذلك فان معادلة المحور عَ عَ بالنسبة للمحورين القديمين هي :

$$س = \frac{-حـ}{ب} \quad \text{او} \quad ب س + حـ = ٠$$

لذلك يمكننا ان نلخص كل ما سبق بالنظرية الاتية :

نظرية : المنحني الدال على تحولات التابع :

$$ع = \frac{ب س + حـ}{ب س + حـ}$$

هو قطع زائد متساوي الساقين خطوطه التقريبية هي :

$$ب س + حـ = ٠ \quad ، \quad ع = \frac{ب}{ب}$$

١٧٨ – الحالات الخاصة التي يمكنه استنتاجها من الحالة العامة السابقة:

زيادة على الحالتين الخاصتين :

$$ع = \frac{١}{س} \quad ، \quad ع = \frac{حـ}{ب س} \quad \text{او} \quad ع = \frac{ك}{س}$$

يمكن ان نستنتج من الحالة العامة الحالات الخاصة الاتية :

١) $ع = \frac{١}{ب س + حـ}$ وذلك بفرض : $ب = ٠$ ، $حـ = ١$

٢) $ع = \frac{حـ}{ب س + حـ}$ وذلك بفرض : $ب = ٠$

٣) $ع = \frac{ب س + حـ}{ب س}$ وذلك بفرض : $حـ = ٠$

١٧٩ — مثال : المطلوب رسم الخط البياني للتابع :

$$ع = \frac{س - ١}{س + ٢}$$

الحل : لنلاحظ اولاً ان :

$ب = ١$ ، $حـ = -١$ ، $ب' = ١$ ، $حـ' = ٢$

اي ان :

$ب حـ' - ب' حـ = ١ \times ٢ - ١ \times (-١) = ٢ + ١ = ٣ > ٠$

اذن : هذا التابع متزايد دوماً .

ثم نرى ان هذا المنحني متصل معين من اجل جميع قيم س ، ما عدا القيمة التي تجعل المخرج صفراً (بدون ان تجعل الصورة صفراً) ، اي ما عدا القيمة $س = -٢$ التي تجعل هذا التابع منقطعاً .

ويكون هذا التابع صفراً عند ما تكون صورته صفراً ، اي عند ما تكون $س = ١$ ، واما عند ما تكون $س = ٠$ فان $ع = -\frac{١}{٢}$ وعند ما

$س = \pm \infty$ فان $ع = \frac{ب}{ب'}$ اي $\frac{١}{١} = ١$

والجدول الاتي يلخص ويرتب لنا ذلك :

س	$-\infty$		-٢		٠		١		$+\infty$
ع	١	←	$+\infty$	←	$-\infty$	←	$-\frac{١}{٢}$	←	٠	←	١

فبعد ان رتبنا هذا الجدول الذي يحوي في سطره الاول على القيم الخمس المهمة الاتية :

$-\infty$ ، $+\infty$ ، ٠ ، القيمة التي تجعل المخرج صفراً ، القيمة التي تجعل الصورة صفراً (حيث نلاحظ ان هذه القيم مرتبة من الصغيرة فالاكبر في السطر الاول فقط)

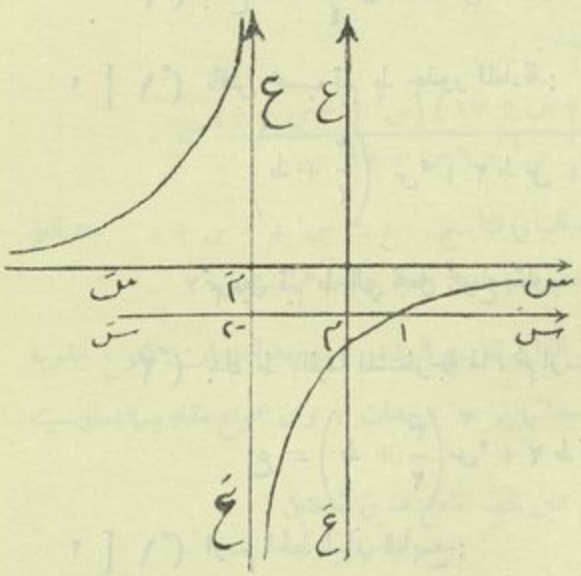
والذي يحوي في سطره الثاني على قيم ع المقابلة لقيم س المهمة هذه ؛ يمكننا ان نرسم الخط البياني المطلوب بسهولة ، وذلك بان نبدأ بتعيين نقطة الاصل الجديدة مَ التي احداثياها

$$\left.\begin{array}{l} س = \frac{-ح}{ب} = -٢ \\ ع = \frac{ب}{ب} = ١ \end{array}\right\}$$

وان نرسم منها المحورين الجديدين اللذين هما الخطان التقريبيان للمنحني المطلوب ، وان نعين النقطتين اللتين يمر بهما المنحني والواقعتين على المحورين القديمين وهما : الاولى :

$$\left(٠ ، -\frac{١}{٢}\right)$$

واقعة على محور العينات . والثانية : (١ ، ٠) واقعة على محور السينات ، فاذا تذكرنا ان الخط البياني المطلوب بالنسبة للمحورين الجديدين هو قطع زائد متساوي الساقين نتمكن من رسمه بسهولة فنحصل على الخط البياني المطلوب كما في (الشكل ٣٢) .



(شكل ٣٢)

ملاحظة: فيما سبق رسمنا الخط البياني المطلوب فقط ، ولو طلب منا ان ندرس تحولاته وان نرسمه بآن واحد فيمكننا ان نكرر جميع المحاكمات التي ذكرناها في (البند ١٧٣) وما يليه بصورة عددية مبتدئين بتقسيم الصورة على المخرج . . . وهكذا الى النهاية .

***

تمارين

١] ادرس تغيرات التوابع الآتية ، مكرراً ايضاحات (البند ١٣٩ او ١٤٠) بصورة عددية ، وارسم خطوطها البيانية :

١ً) $ع = ٢س^{٢} - ٣س + ١$

٢ً) $٣ع = -٣س^{٢} + س + ٢$

٣ً) $ع = -\frac{١}{٤}س^{٢} + س - ١$

٢] ١ً) ناقش بحسب قيم ط جذور المعادلة :

$$\left(ط + \frac{٣}{٢}\right) س^{٢} + ٢ط س + ٢ = ٠$$

ثم عين قيم ط التي تجعل مجموع مقلوب جذري هذه المعادلة مساوياً $\frac{٥}{٢}$

٢ً) بدل ط بالقيمة المستخرجة لها ، ثم ارسم الخط البياني للتابع :

$$ع = \left(ط + \frac{٣}{٢}\right) س^{٢} + ٢ط س + ٢$$

٢] ١ً) ارسم الخط البياني للتابع :

$$ع = ٢س^{٢} - ٥س + ٤$$

مكرراً ايضاحات البند ١٣٩ وما يليه .

٢ً) عين قيم ط التي يكون من اجلها المستقيم ع = ط س مماساً او قاطعاً للمنحني السابق .

٤] ١ً) ارسم الخط البياني ح للتابع :

ع = س٢ — ٤ س + ٩

مكرراً ايضاحات البند ١٣٩ وما يليه .

٢ً) اكتب معادلة المستقيم الموازي لمنصف الزاوية س م ع والقاطع لمحور العينات في نقطة عينها ط .

٣ً) ان هذا المستقيم يقطع المنحني ح في نقطتين ، والمطلوب حساب فاصلتيها ؛ المناقشة .

٥] ١ً) عين في التابع ع = س٢ + حـ س + د العددين حـ ، د بشرط ان تكون الاعداد ١ ، حـ ، د ثلاثة حدود متتالية من متوالية عددية متزايدة ، وان يكون مجموع مربعاتها مساوياً ٤٧ (انظر بند ١٨١) .

٢ً) ارسم بعدئذ الخط البياني لتغيرات هذا التابع .

٣ً) حل المتراجحة :

$$\frac{(س^2 - ٢ س + ١٧)(س^2 + حـ س + د)}{س^2 - ٦ س + ١٨} < ٠$$

٦] ١ً) ارسم الخط البياني للتابع ع = س٢ + حـ س + د بعد العلم ان مجموع جذريه يساوي ٣ ، وجداءهما يساوي ٢

٢ً) ارسم الخط البياني للتابع السابق نفسه بعد العلم ان مجموع جذريه اكبر من جدائها بـ ٥ وحدات ، وان مجموع مقلوبيها يساوي $-\frac{٢}{٣}$ ثم عين نقط تقاطع هذين المنحنين .

٧] ١ً) المطلوب حل المعادلة :

$$(س - ١)^2 + ٢ س^2 = ٩ \qquad (١)$$

٢ً) عين بصورة بيانية قيم العدد ط التي يكون من اجلها للمعادلة :

$$(س - ١)^{٢} + ٢ س^{٢} = ط \qquad (٢)$$

جذور ، وما علامات هذه الجذور حينئذ ؟

٣ً) تؤخذ النقطتان م ، ب على محور (اتجاهه الموجب م ب) على ان يكون م ب مساوياً وحدة الطول ؛ ثم لتكن ك نقطة ما على هذا المحور ، فبفرض م ك = س عين مواضع النقطة ك التي تحقق العلاقة :

$$\overline{ك ب}^{٢} + ٢ \cdot \overline{م ك}^{٢} \leqslant ٩ \overline{م ب}^{٢}$$

٤ً) ادرس تغيرات التابع :

$$ع = \overline{ك ب}^{٢} - ٢ \overline{م ك}^{٢}$$

حينما يتغير س من $-\infty$ الى $+\infty$ ، وبصورة خاصة عين موضع النقطة ك التي يكون من اجلها ع في نهايته الصغرى .

٨] ١ً) عين امثال ذات الحدود الثلاثة :

$$ا (س) = ب س^{٢} + حـ س + د$$

بعد العلم انها تكون في نهاية صغرى او عظمى تساوي ٢٥ عندما $س = \frac{١}{٢}$ وان مجموع مكعبي جذري المعادلة $ا (س) = ٠$ هو ١٩ .

٢ً) ارسم الخط البياني لهذا التابع $ع = ا (س)$ بعد ابدال الامثال بقيمها .

٩] لدينا التابع :

$$ع = س^{٢} - ٢ هـ س - (١ - هـ^{٢})$$

فمن اجل كل قيمة ثابتة الى هـ يمكن تمثيل تغيرات هذا التابع بمنحنٍ مثل ح ، والمطلوب :

١ً) ما هي اشكال هذه المنحنيات ؟

٢ً) هل هي تقطع دوماً محور السينات ، ام لا ؟

٣ً) ارسم المنحني ح الذي يقابل القيمة هـ = ٠

٤ً) لكل منحنٍ من المنحنيات السابقة نهاية صغرى . ما هي احداثيات هذه النهاية الصغرى ؟ كيف تتنقل هذه النقطة حسبما تتغير هـ ؟

١٠] النقطة ب واقعة على محيط دائرة مركزها م ونصف قطرها ر ، والنقطة ك متغيرة وواقعة على امتداد م ب ، ولتكن ل نقطة تماس المماس المرسوم من ك الى الدائرة م ولتكن ق موقع العمود النازل من ل على م ب ، والمطلوب :

١ً) قدر النسبة ع = $\frac{\text{ك ل}}{\text{ق ب}}$ بدلالة م ك = س

٢ً) ادرس تغيرات التابع ع وارسم خطه البياني عند ما تتغير س من ر الى + ∞ .

٣ً) احسب البعد س بعد العلم ان ع تساوي ط . المناقشة .

١١] ١ً) ارسم الخط البياني للتابع : ع = $\frac{٢ س + ١}{س - ١}$ مكرراً ايضاحات البند ١٧٣ وما يليه بصورة عددية .

٢ً) عين قيم ط التي يكون من اجلها المستقيم ع = ط س مماساً او قاطعاً او غير قاطع للمنحني السابق .

١٢] لتكن المعادلة $س^{٢} - ٢ ق س + ق - ١ = ٠$ والمطلوب :

١ً) برهن على انه يوجد دوماً لهذه المعادلة جذران ، ثم ادرس اشارات هذين الجذرين عند ما تتحول ق من — ∞ الى + ∞

٢ً) ادرس تغيرات التابع ع = $س^{٢} + س^{٣}$ عند ما تتحول ق من — ∞ الى + ∞ ، وارسم الخط البياني لهذه التغيرات باعتبار ق الفاصلة و ع الترتيب .

٣ً) ادرس بنفس الشروط السابقة تغيرات التابع :

$$ع = \frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}}$$

وارسم الخط البياني له .

١٢] لتكن المعادلة :

$$س^{٢} - ٢(ط + ١)س + ط - ٣ = ٠$$

والمطلوب :

١ً) برهن على انه يوجد لهذه المعادلة جذران دوماً ، وادرس اشارات هذين الجذرين .

٢ً) احسب بدلالة ط التابع :

$$ع = \frac{١}{س^{٢}} + \frac{١}{س^{٣}}$$

٣ً) ادرس تغيرات هذا التابع ، وارسم الخط البياني له ، باعتبار ط الفاصلة ، و ع الترتيب ، وذلك عندما تتحول ط من $-\infty$ الى $+\infty$

١٤] ليكن التابع $ع = \frac{ب س + ١}{س + د}$ والمطلوب :

١ً) عين قيم الحرفين ب ، د بشرط ان يصبح $ع = \pm\infty$ عندما $س = ٠$ وعلى ان يصبح $ع = ٢$ عندما $س = \pm\infty$

٢ً) ارسم الخط البياني ح لهذا التابع بعد ابدال هذين الحرفين بقيمهما مكرراً ايضاحات البند ١٧٣ وما يليه بصورة عددية .

٣ً) عين النقط التي يكون المماس فيها للمنحني ح موازياً للمستقيم :

$$ع = -٤س$$

١٥] لتكن المعادلة :

$$(ك - ١)س^{٢} - ٢(ك + ١)س + ٢ك + ٥ = ٠ \qquad (١)$$

والمطلوب :

١ً) نأخذ على المحور م س النقطتين ب ، حـ على ان يكون :

$$\overline{م ب} = س_{ب} \quad ، \quad \overline{م حـ} = س_{حـ}$$

ثم نأخذ النقطة د التي تحقق العلاقة :

$$\frac{٢}{\overline{م د}} = \frac{١}{\overline{م ب}} + \frac{١}{\overline{م حـ}}$$

ادرس تغيرات فاصلة النقطة د عندما تتحول ك من $-\infty$ الى $+\infty$ ، وارسم الخط البياني لهذه التغيرات .

٢ً) ما هو جزء المنحني الموافق لتغيرات ك عندما تتحول ك بان تأخذ القيم التي يوجد من اجلها للمعادلة (١) جذران .

المبحث السادس

الفصل الأول

المتوالية (او السلسلة) العددية

١٨٠ - تعريف : المتوالية العددية هي سلسلة اعداد او حدود متتالية ينشأ كل حد فيها باضافة مقدار ثابت على الحد الذي قبله ، وهذا المقدار الثابت يدعى **بأساس** هذه السلسلة .

مثال : الاعداد المتتالية ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ تشكل سلسلة عددية لان كل عدد منها ينشأ من سابقه ، باضافة مقدار ثابت على سابقه يساوي الواحد . اذن : هذه الاعداد تشكل سلسلة عددية ، اساسها واحد .

وكذلك الاعداد الفردية ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، ١١ ، ١٣ ، ١٥ ، . . . ، الخ تشكل سلسلة عددية ، لان كل عدد منها ينشأ باضافة مقدار ثابت على سابقه يساوي ٢ ، اذن : هذه الاعداد تشكل ايضاً سلسلة عددية ، اساسها ٢ .

وكذلك الحدود الآتية :

ب ، ب + ر ، ب + ٢ ر ، ب + ٣ ر ، . . . . . ، الخ

حيث كل حد ينشأ من سابقه باضافة مقدار ثابت عليه يساوي ر ، تشكل سلسلة عددية ، اساسها ر .

فالحد ب من هذه الحدود يسمى **بالحد الاول** من السلسلة ، والحد ب + ر يسمى بالحد الثاني ، وهكذا .

وقد تكون السلسلة العددية **محدودة** من طرفيها كالسلسلة المذكورة في المثال الاول ؛ او تكون محدودة من طرف واحد كالسلسلة المذكورة في المثال الثاني ؛ او **غير محدودة** من طرفيها .

المتوالية العددية تسمى **متزايدة** اذا كان اساسها موجباً ، وتدعى **متناقصة** اذا كان اساسها سالباً .

وندل على ان الاعداد ب حـ د هـ ط . . . . . ف ق ك ل مشكلة لسلسلة عددية ، بالرمز الاتي :

÷ ب ، حـ ، د ، هـ ، ط ، . . . . . ، ف ، ق ، ك ، ل

حيث ب يسمى بالحد الاول ، وحيث ل يسمى **بالحد الاخير** او الحد **النوني** لاننا نرمز لعدد حدود السلسلة بالحرف ن ، ولو فرضنا ان اساس هذه السلسلة هو ر لكان : حـ = ب + ر ومنها : ب = حـ - ر

اي ننتقل من حد الى الذي قبله **بطرح** الاساس منه ، مما يدلنا على **كيفية** تمديد السلسلة من الجهة اليسرى نحو اليمنى .

١٨١ - كيفية حساب الحد النوني لسلسلة عددية :

لحساب الحد النوني (الذي رقمه ن) لسلسلة عددية عرف حدها الاول ب واساسها ر ، نقول : لتكن السلسلة العددية :

الحد الاول الحد الثاني الحد الثالث الحد الرابع . . . الحد النوني

ب ب + ر ب + ٢ ر ب + ٣ ر . . . ل

التي حدها الاول ب واساسها ر ، فاذا تأملنا في حدود هذه السلسلة ملياً نجد ان كل حد فيها يساوي الى الحد الاول ب مضافاً اليه حاصل ضرب الاساس ر بعدد الحدود التي قبل هذا الحد ، فمثلا الحد الثالث الذي يوجد قبله حدان يساوي ب + ٢ ر وكذلك الحد الرابع الذي يوجد قبله ثلاثة حدود يساوي ب + ٣ ر وهكذا .

اذن : الحد النوني الذي يوجد قبله (ن - ١) حداً يساوي :

ب + (ن - ١) ر

ولما كنا نرمز للحد النوني (الاخير) من كل سلسلة عددية بالحرف ل ، اذن : يمكننا ان نكتب القانون الآتي الواجب حفظه ، وهو :

$$\boxed{ل = ب + (ن - ١) ر}$$

اي الحد الاخير من سلسلة عددية يساوي مجموع الحد الاول مع حاصل ضرب الاساس ر مضروبا بالقوس $(ن - ١)$ حيث ن تدل على عدد الحدود .

مثال : لحساب الحد النوني في سلسلة الاعداد الفردية :

$$\div ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ ، \ldots\ldots$$

نلاحظ ان : $ب = ١$ ، $ر = ٢$ اذن : العلاقة :

$$ل = ب + (ن - ١) ر$$

تصبح : $ل = ١ + (ن - ١) ٢$ ومنها :

$$\boxed{ل = ٢ن - ١}$$

فلو جعلنا $ن = ٣$ لرأينا ان $ل = ٥$ ولو جعلنا $ن = ٤$ لرأينا ان $ل = ٧$ وحقيقة الحد الثالث هو ٥ والحد الرابع هو ٧ ، وهكذا . . .

١٨٢ - نظرية : في السلسلة العددية ، كل حد وسط حسابي ، ما بين مجاوريه

البرهان : لتكن السلسلة :

$$\div ب ، ح ، د ، \ldots\ldots ، هـ ، ط ، ل$$

التي اساسها ر فرضاً ، ولنبرهن مثلاً على ان $ح = \frac{ب + د}{٢}$ فبمقتضى تعريف السلسلة نرى ان :

من جهة : $ح = ب + ر$

ومن جهة ثانية : $ح = د - ر$

فبجمع هاتين المساواتين نجد ان : $٢ح = ب + د$

وهو المطلوب .

مسألة : لتكن السلسلة العددية : ÷ ب ، حـ ، د ، . . . . . ، ل والمطلوب ادخال ط حداً ما بين الحدين ب ، حـ بشرط ان تشكل هذه الحدود الجديدة سلسلة عددية حدها الاول ب وحدها الاخير حـ فيكون عدد حدود السلسلة الجديدة هو طبعاً ط + ٢ حداً .

الحل : يكفي لتشكيل السلسلة المطلوبة التي علم منها الحد الاول ب والاخير حـ ان نعلم الاساس ولنسمه س فبمقتضى القانون :

$$ل = ب + (ن - ١)ر$$

نجد العلاقة : $$حـ = ب + (ط + ٢ - ١)س$$

ومنها : $$س = \frac{حـ - ب}{ط + ١}$$ او : $$س = \frac{ر}{ط + ١}$$

اذن : المتوالية الجديدة المطلوبة هي :

$$÷ ب ، ب + \frac{ر}{ط + ١} ، ب + \frac{٢ر}{ط + ١} ، ب + \frac{٣ر}{ط + ١} ، . . . ، حـ$$

وبما ان $حـ - ب = ر$ وكذلك $د - حـ = ر$ ايضاً ، فمن السهل ان ندرك انه يمكننا ان ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلة :

$$÷ ب ، حـ ، د ، . . . . . ، ل$$

ان ندخل ط حداً ، فنحصل على سلاسل جزئية ، اساس كل منها يساوي $\frac{ر}{ط + ١}$ وذلك بفرض ر اساس السلسلة الاصلية . ولما كان الحد الاخير لكل سلسلة جزئية هو الحد الاول للسلسلة الجزئية التي تليها ، ولما كان ايضاً اساس هذه السلاسل الجزئية كلها هو : $\frac{ر}{ط + ١}$ اذن : هذه السلاسل مشكلة سلسلة واحدة حدها الاول ب وحدها الاخير ل واساسها $\frac{ر}{ط + ١}$ باعتبار اننا ندخل ما بين كل حدين متتابعين ط حداً .

مثال : لتكن السلسلة العددية :

$$\div\ ٣ ،\ ١١ ،\ ١٩ ،\ ٢٧ ،\ \ldots\ldots$$

ولندخل ما بين حديها الاولين ثلاثة حدود تشكل معها سلسلة عددية .

الحل : ان الاساس الجديد هو :

$$س = \frac{ر}{ط + ١} \quad \text{فهنا} \quad ر = ٨ \quad \text{و} \quad ط = ٣ \quad \text{اذن :} \quad س = \frac{٨}{٤} = ٢$$

والسلسلة المطلوبة هي :

$$٣ ،\ ٥ ،\ ٧ ،\ ٩ ،\ ١١$$

ولو تممنا العمل من اجل بقية الحدود نجد :

$$٣ ،\ ٥ ،\ ٧ ،\ ٩ ،\ ١١ ،\ ١٣ ،\ ١٥ ،\ ١٧ ،\ ١٩ ،\ \ldots\ldots$$

ملاحظة : المسألة السابقة هي عين المسألة الاتية :

مسألة : ادخل ما بين كل حدين متتابعين من سلسلة عددية ط وسطاً حسابياً ؟ لاننا رأينا في السلسلة العددية ان كل حد هو وسط حسابي بين مجاوريه . وهذه المسألة تدلنا بوضوح على انه يمكن تقليل الفرق ما بين الحدود المتتابعة في سلسلة عددية بقدر ما نريد . وذلك بتصغير الاساس الجديد $\frac{ر}{ط + ١}$

١٨٣ — نظرية : في السلسلة العددية مجموع كل حدين متساويي البعد عن الحد الاول والحد الاخير ، ثابت يساوي مجموع الحد الاول مع الحد الاخير .

البرهان : لتكن المتوالية العددية التي اساسها ر وهي :

$$\div\ ب ،\ ح ،\ د ،\ هـ ،\ ط ،\ \ldots ،\ ع ،\ ص ،\ ف ،\ ق ،\ ل \qquad (١)$$

فاذا عكسنا ترتيبها نحصل على سلسلة اساسها $(-ر)$ وهي :

$$\div\ ل ،\ ق ،\ ف ،\ ص ،\ ع ،\ \ldots ،\ ط ،\ هـ ،\ د ،\ ح ،\ ب \qquad (٢)$$

فمن المتوالية (١) نجد: هـ = ب + ٣ ر

ومن المتوالية (٢) نجد: ص = ل + ٣ (- ر)

فبجمع هاتين المساواتين نجد: هـ + ص = ب + ل

وهو المطلوب .

وبصورة اعم يمكننا ان نقول : في السلسلة (١) لو كان هـ هو الحد الذي يوجد قبله م حداً لكان : هـ = ب + م ر (٣)

ولو كان ص هو الحد الذي يوجد بعده م حداً لكان : ص = ل - م ر (٤)

(وذلك لان الحد الثاني اعتباراً من الحد الاخير يساوي ل - ر والثالث يساوي ل - ٢ ر وهكذا) ، فبجمع المساواتين (٣) ، (٤) نجد ان :

هـ + ص = ب + ل وهو المطلوب .

١٨٤ - ملاحظة : اذا كان لدينا سلسلة عددية ، وكان عدد حدودها فردياً ، يكون لها حد متوسط ، ويكون مجموع كل حدين متساوي البعد عن الحد الاول والاخير ، يساوي ضعف الحد المتوسط .

والمثال الاتي يوضح لنا ذلك :

١٨٥ - مثال : في السلسلة العددية :

- ٢ ، ٢ ، ٦ ، ١٠ ، ١٤ ، ١٨ ، ٢٢

نجد ان : - ٢ + ٢٢ = ٢ + ١٨ = ٦ + ١٤ = ٢ × ١٠

١٨٦ - كيفية حساب مجموع حدود المتوالية العددية :

لنأخذ المتوالية العددية :

أ ، ب ، حـ ، د ، هـ ، . . . . ، ص ، ف ، ق ، ل

التي عدد حدودها م حداً فلحساب المجموع :

مج = ب + حـ + د + هـ + ... + ص + ف + ق + ل (١)

نكتبه بالصورة الاتية :

مج = ل + ق + ف + ص + ... + هـ + د + حـ + ب (٢)

لان عكس الترتيب لايغير المجموع ، وبجمع العلاقتين (١) ، (٢) بصورة ثاقولية نجد ان :

$$\text{مح} = (\text{ب} + \text{ل}) + (\text{حـ} + \text{ق}) + (\text{د} + \text{ف}) + (\text{هـ} + \text{ص}) + \ldots +$$
$$(\text{ص} + \text{هـ}) + \ldots\ldots + (\text{ل} + \text{ب})$$

الا انه اذا لاحظنا ان الاقواس الموجودة في الجانب الثاني هي اقواس متساوية لانها متشكلة من مجموع حدود متساوية البعد عن الحد الاول والاخير ، لرأينا انه يمكننا ان نكتب هذه المساواة بالشكل :

$$٢\,\text{مح} = (\text{ب} + \text{ل}) + (\text{ب} + \text{ل}) + \ldots + (\text{ب} + \text{ل})$$

وبما ان كل حد من حدود السلسلة الاصلية يعطينا قوساً من هذه الاقواس نستنتج ان عدد هذه الاقواس يساوي عدد حدود السلسلة ، اي هي ن قوساً ، اذن :

$$٢\,\text{مح} = (\text{ب} + \text{ل})\,\text{ن}$$

ومنها :

$$\boxed{\text{مح} = \frac{\text{ن}\,(\text{ب} + \text{ل})}{٢}}$$

فهذا القانون الواجب حفظه يسمى **بقانون المجموع** وهو يسمح لنا بحساب مجموع حدود السلسلة بعد معرفة حدها الاول وحدها الاخير وعدد حدودها .

١٨٧ - مثال : لحساب مجموع حدود السلسلة :

$$٢ + ٥ + ٨ + ١١ + ١٤$$

نلاحظ ان : $\text{ب} = ٢$ ، $\text{ل} = ١٤$ ، $\text{ن} = ٥$

اذن : $\text{مح} = \frac{\text{ن}\,(\text{ب} + \text{ل})}{٢} = \frac{٥\,(٢ + ١٤)}{٢} = \frac{٥ \times ١٦}{٢} = ٨ \times ٥ = ٤٠$

ومن السهل تحقيق ذلك في هذا المثال البسيط .

تنبيه : يمكن كتابة قانون المجموع السابق بصورة ثانية ، وذلك بتعويض ل بقيمتها $\text{ب} + (\text{ن} - ١)\,\text{ر}$ فنجد ان :

$$مج = \frac{ن(ل + ب)}{٢} = \frac{ن[ر(ن - ١) + ب + ب]}{٢} =$$

$$\frac{ن[ر(ن - ١) + ٢ب]}{٢}$$

$$\boxed{مج = \frac{ن}{٢}[ر(ن - ١) + ٢ب]}$$

فهذا القانون الواجب حفظه ايضاً ، يستعمل عند معرفة الاساس ر عوضاً عن الحد الاخير ، مع معرفة الحد الاول وعدد الحدود . والامثلة الاتية توضح لنا ذلك :

١٨٨ - مثال : ١) احسب مجموع الاعداد الفردية التي عددها ن :

$$مج = ١ + ٣ + ٥ + ٧ + \ldots$$

في هذه المتوالية ب = ١ ، ر = ٢ واما عدد الحدود فهو ن حداً ، اذن : المجموع :

$$مج = \frac{ن}{٢}[٢(ن - ١) + ٢] \quad او : \quad مج = \frac{ن}{٢}[٢ن - ٢ + ٢]$$

ومنها : $مج = ن^{٢}$

فلو جعلنا ن = ٣ لرأينا ان مج = ٩ وحقيقة ان مجموع الاعداد الفردية الثلاثة الاول ، هو : ١ + ٣ + ٥ = ٩

١٨٩ - مثال : ٢) احسب مجموع الاعداد الاولية التي عددها ن :

$$مج = ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + \ldots$$

فهنا ب = ١ ، ر = ١ واما عدد الحدود فهو ن حداً ، اذن :

$$مج = \frac{ن}{٢}[٢ + ن - ١] \quad او : \quad مج = \frac{ن(ن + ١)}{٢}$$

فلو جعلنا ن = ٤ لرأينا ان مج = ١٠ وحقيقة :

$$١ + ٢ + ٣ + ٤ = ١٠$$

ملاحظة هامة : ان الكميات الاساسية الموجودة في السلسلة العددية هي خمس :

الحد الاول	الحد الاخير	الاساس	عدد الحدود	المجموع
ب	ل	ر	ن	مج

ويوجد بين هذه الكميات الخمس الاساسية ، العلاقتان المستقلتان :

$$\left.\begin{array}{ll} ل = ب + ر(ن - ١) & (١) \\ مج = \frac{ن}{٢}[٢ب + ر(ن - ١)] & (٢) \end{array}\right\}$$

فيمكن النظر الى هاتين العلاقتين كمجموعة معادلتين تسمح لنا بحساب مجهولين من الكميات الخمس ، بعد معرفة الكميات الثلاث الباقية ، ولذلك فان المسائل الاساسية في السلسلة العددية ، هي عشر ، يكون المجهولان فيها :

اما : (ب ، ل) او : (ب ، ر) او : (ب ، ن) او : (ب ، مج)

او : (ل ، ر) او : (ل ، ن) او : (ل ، مج)

او : (ر ، ن) او : (ر ، مج)

او : (ن ، مج)

فهذان المجهولان يحسبان بواسطة العلاقتين (١) ، (٢) السابقتين ، بعد معرفة الكميات الباقية .

الفصل الثاني

المتوالية (او السلسلة) الهندسية

١٩٠ – تعريف : المتوالية الهندسية هي سلسلة اعداد او حدود ينشأ كل حد منها **بضرب** سابقه بمقدار ثابت يدعى **باساس** هذه السلسلة .

وندل على ان الاعداد ب ح د هـ ق . . . . مشكلة لسلسلة هندسية ، بالرمز الآتي :

∴ ب : ح : د : هـ : ق : . . . . .

فلو فرضنا ان اساس هذه السلسلة هو ر لرأينا بمقتضى التعريف السابق ان :

ح = ب . ر

د = ح . ر

هـ = د . ر وهكذا

قلنا ان كل حد في السلسلة الهندسية ينشأ من ضرب سابقه بمقدار ثابت يسمى الاساس ، وهو ر ، الا انه يمكننا ان نتوصل لنفس النتيجة بالتعريف الآتي :

١٩١ – تعريف : المتوالية الهندسية هي سلسلة اعداد ينشأ كل حد منها بتقسيم الحد الذي يليه على مقدار ثابت يدعى بالاساس ، ونرمز له بالحرف ر .

اي اذا كانت الحدود :

∴ ب : ح : د : هـ : ق : . . . . .

مشكلة سلسلة هندسية يكون :

$ب = \frac{ح}{ر}$ ، $ح = \frac{د}{ر}$ ، . . . . . الخ

نتيجة : ينتج من التعريفين السابقين ان :

$$\text{١ً)} \qquad \frac{\text{حـ}}{\text{ب}} = \frac{\text{د}}{\text{حـ}} = \frac{\text{هـ}}{\text{د}} = \frac{\text{ق}}{\text{هـ}} = \text{ر} \qquad (١)$$

اي ان حاصل قسمة كل حد على الحد الذي قبله ثابت يساوي الاساس ر .

٢ً) في العلاقات (١) نستنتج من المساواة الاولى ان $\text{حـ}^{٢} = \text{ب} \cdot \text{د}$ ومن الثانية $\text{د}^{٢} = \text{حـ} \cdot \text{هـ}$ ومن الثالثة $\text{هـ}^{٢} = \text{د} \cdot \text{ق} \ldots$ وهكذا ، اي :

[في السلسلة الهندسية كل حد هو وسط متناسب هندسي ما بين مجاوريه] .

١٩٢ – كيفية حساب الحد النوني في المتوالية الهندسية :

لنأخذ المتوالية الهندسية :

$$\therefore \text{ب} : \text{حـ} : \text{د} : \text{هـ} : \text{ق} : \ldots\ldots$$

التي علم حدها الاول ب واساسها ر ، ولنر كيف نحسب حدها الاخير (النوني) ل ، فبمقتضى تعريف المتوالية الهندسية نجد ان :

$\text{حـ} = \text{ب ر}$	الحد الثاني
$\text{د} = \text{حـ ر} = \text{ب ر}^{٢}$	الحد الثالث
$\text{هـ} = \text{د ر} = \text{ب ر}^{٣}$	الحد الرابع وهكذا

فاذا تأملنا جيداً العلاقات السابقة ، نرى ان كل حد من حدود السلسلة الهندسية يساوي للحد الاول مضروباً بالاساس المرفوع لقوة اسمها يساوي عدد الحدود التي قبل هذا الحد .

فالحد الثالث (الذي يوجد قبله حدان فقط) وهو $\text{د} = \text{ب ر}^{٢}$ وكذلك الحد الرابع يساوي $\text{ب ر}^{٣}$ والخامس يساوي $\text{ب ر}^{٤}$ وهكذا . . . فالحد العاشر يساوي $\text{ب ر}^{٩}$ اذن : الحد الاخير ، او الحد النوني الذي يوجد قبله $(\text{ن} - ١)$ حداً يساوي $\text{ب} \cdot \text{ر}^{\text{ن}-١}$ فالقانون :

$$ل = ب \cdot ر^{ن-١}$$

الواجب حفظه يعطينا الحد الاخير ل بعد معرفة الحد الاول ب والاساس ر وعدد الحدود ن .

١٩٣ - مثال : في السلسلة الهندسية :

٣ ، ٦ ، ١٢ ، ٢٤ ، ٤٨

حيث ب = ٣ ر = ٢ وحيث عدد الحدود ن = ٥ نجد حقيقة ان الحد الاخير :

$$ل = ب \cdot ر^{ن-١} = ٣ \times ٢^{٤} = ٣ \times ١٦ = ٤٨$$

١٩٤ - ملاحظة : تكون السلسلة الهندسية متزايدة فيما اذا كان اساسها ر > ١ وهي تكون متناقصة فيما اذا كان اساسها ر < ١ (*)

واما اذا كان اساسها ر = ١ تكون جميع حدودها متساوية ، ويكون مجموعها يساوي حاصل ضرب حدها الاول بعدد حدودها .

مسألة : لتكن السلسلة الهندسية :

∴ ب : حـ : د : هـ : ق : . . . . .

التي حدها الاول ب واساسها ر ، والمطلوب ادخال ط حداً ما بين ب ، حـ على ان تشكل هذه الحدود الجديدة سلسلة هندسية حدها الاول ب وحدها الاخير حـ .

الحل : يكفي لتشكيل السلسلة المطلوبة ان نعلم اساس السلسلة الجديدة وليكن س فاذا لاحظنا ان عدد حدود السلسلة الجديدة المطلوبة ، هو ط + ٢ حداً لرأينا بواسطة قانون الحد الاخير $ل = ب \cdot ر^{ن-١}$ ان :

$$حـ = ب \cdot س^{ط+٢-١} \quad \text{او} \quad حـ = ب \cdot س^{ط+١}$$

---

*) نعتبر في الحالة العامة ان الاساس ر موجب .

ومنها: $س = \sqrt[ط+١]{\frac{ب}{ح}}$

وبما ان $\frac{ح}{ب} = ر$ اذن: $س = \sqrt[ط+١]{\frac{١}{ر}}$ والحدود المطلوبة هي:

$$ب \ ، \ ب\sqrt[ط+١]{ر} \ ، \ ب\sqrt[ط+١]{ر^{٢}} \ ، \ \ldots \ ، \ ح$$

[وذلك بملاحظة ان $\sqrt[ن]{ر} \times \sqrt[ن]{ر} = \sqrt[ن]{ر^{٢}}$]

وكما رأينا في السلسلة العددية ، يمكن تكرير هذا العمل من اجل كل حدين متعاقبين : ب ، ح او ح ، د او د ، هـ . . . . بصورة اننا نحصل على سلاسل جزئية متتابعة مشكلة لسلسلة هندسية واحدة حدها الاول ب وحدها الاخير ل واساسها $\sqrt[ط+١]{ر}$

فهذه المسألة تدلنا دلالة صريحة (كما في السلسلة العددية) على انه يمكننا ان نجعل الفرق ما بين الحدين المتتابعين من السلسلة الهندسية صغيراً بقدر ما نريد ، وذلك بتكبير العدد ط في العلاقة $\sqrt[ط+١]{ر}$ بقدر ما نريد ، اي ، وذلك بادخال عدد كاف من الحدود ما بين كل حدين متعاقبين من السلسلة الاساسية (لان $\sqrt[ط+١]{ر}$ كما سنرى ينتهي الى الواحد عند ما تنتهي ط الى ∞) .

ولنذكر في النهاية ان المسألة السابقة هي عين المسألة الاتية :

مسألة: ادخل ما بين كل حدين متتابعين من سلسلة هندسية ط وسطاً هندسياً (وذلك لاننا رأينا في السلسلة الهندسية ان كل حد هو وسط هندسي ما بين مجاوريه) .

١٩٥ — نظرية: في السلسلة الهندسية حاصل ضرب الحدين المتساوي البعد عن الحد الاول والاخير ثابت يساوي حاصل ضرب الحد الاول في الحد الاخير .

البرهان : لتكن السلسلة الهندسية :

ب : حـ : د : هـ : ق : ... : ص : و : ع : م : ل

التي اساسها ر ، ولنفرض ان ق هو الحد الذي يوجد قبله ك حداً ، اذن :

$$ق = ب \cdot ر^{ك} \qquad (١)$$

كذلك لنفرض ان ص هو الحد الذى يوجد بعده ك حداً ، فيكون اذن :

$$ل = ص \cdot ر^{ك}$$

[وذلك لاننا لو اعتبرنا ان ص هو الحد الاول لكان ل هو الحد الذي يوجد قبله ك حداً] ، ومنها :

$$ص = \frac{ل}{ر^{ك}} \qquad (٢)$$

فاذا ضربنا المساواتين (١) ، (٢) بعضها نجد ان :

ق . ص = ب . ل وهو المطلوب .

١٩٦ — ملاحظة : النظرية السابقة تسمح لنا بحساب حاصل ضرب حدود السلسلة الهندسية ، وحقيقة لحساب حاصل الضرب :

$$ح = ب \times حـ \times د \times ... \times ع \times م \times ل \qquad (١)$$

نكتب هذه المساواة بالشكل :

$$ح = ل \times م \times ع \times ... \times د \times حـ \times ب \qquad (٢)$$

فبضرب المساواتين (١) ، (٢) نجد :

$$ح^{٢} = (ب \cdot ل)(حـ \cdot م)(د \cdot ع) ... (ع \cdot د)(م \cdot حـ)(ل \cdot ب)$$

وبما ان جميع هذه المعترضات التي عددها ن متساوية ، اذن :

$$ح^{٢} = (ب \cdot ل)^{ن} \qquad \text{ومنها :} \qquad ح = \sqrt{(ب \cdot ل)^{ن}} = (ب \cdot ل)^{\frac{ن}{٢}}$$

١٩٧ - كيفية حساب مجموع حدود السلسلة الهندسية :

لحساب مجموع السلسلة الهندسية :

$$\therefore ب : ح : د : هـ : \ldots\ldots : ع : م : ل$$

التي اساسها $ر$ ، اي لحساب المجموع :

$$مح = ب + ح + د + هـ + \ldots\ldots + ع + م + ل \qquad (١)$$

نضرب طرفي هذه المساواة بالاساس $ر$ ملاحظين تعريف السلسلة الهندسية فنجد ان :

$$ر \cdot مح = ح + د + هـ + \ldots\ldots + م + ل + ل ر \qquad (٢)$$

(اي مع ملاحظة ان $ب \cdot ر = ح$ ، $د \cdot ر = هـ$ ، $ع \cdot ر = م \ldots$ الخ)

فاذا طرحنا الآن جانبي المساواة (٢) من جانبي المساواة (١) نجد ان :

$$مح - مح ر = ب - ل ر$$

او :

$$مح (١ - ر) = ب - ل ر$$

وبفرض $ر \neq ١$ (بند ١٩٤) نجد ان ؟

$$مح = \frac{ب - ل ر}{١ - ر}$$

وبتبديل ل بمساويها $ب \cdot ر^{ن-١}$ نجد في النهاية ان :

$$مح = ب \times \frac{١ - ر^{ن}}{١ - ر}$$

او :

$$\boxed{مح = \frac{ب (١ - ر^{ن})}{١ - ر}}$$

فهذا القانون الواجب حفظه يسمح لنا بحساب المجموع بعد معرفة الحد الاول $ب$ والاساس $ر$ وعدد الحدود $ن$.

مثال : في السلسلة الهندسية :

١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦

حيث ب = ١ ، ر = ٢ ، ن = ٥ نرى حقيقة ان المجموع يساوي :

$$مج = \frac{ب(ر^{ن} - ١)}{ر - ١} = \frac{١(٢^{٥} - ١)}{١} = ٣١$$

١٩٨ — مجموع السلسلة الهندسية المتناقصة اللانهائية :

رأينا فيما سبق ان مجموع السلسلة الهندسية هو :

$$مج = \frac{ب(ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

فاذا كانت ر اعظم من الواحد فان المقدار $ر^{ن}$ يزداد بازدياد ن (بند ٢٠٣) . اي بفرض ر > ١ يكون :

$$ر < ر^{٢} < ر^{٣} < \ldots\ldots < ر^{ن}$$

اذن : مجموع السلسلة الهندسية المتزايدة يصبح ما لا نهاية فيما اذا زاد عدد الحدود ن الى ما لا نهاية .

واما اذا كانت السلسلة متناقصة اي اذا كان ر < ١ فان الكمية $ر^{ن}$ تتقارب من الصفر كلما زاد ن (بند ٢٠٤) ، اي انه يكون وقتئذ :

$$ر > ر^{٢} > ر^{٣} > ر^{٤} > \ldots < ر^{ن}$$

اي اذا زادت ن الى ما لا نهاية فان المقدار $ر^{ن}$ ينقرب من الصفر ويكون قابلا للاهمال .

مثال : $\left(\frac{١}{٤}\right)^{ن}$ يعطي بالتسلسل :

$\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{١٦}$ ، $\frac{١}{٦٤}$ ، $\frac{١}{٢٥٦}$ ، $\frac{١}{١٠٢٤}$ وهكذا . . . . . .

بصورة ان مح السلسلة الهندسية المتناقصة وغير المحدودة (اللانهاية) التي حدها الاول ب واساسها $ر < ١$ ينتهي الى :

$$مح = \frac{ب (٠ - ١)}{١ - ر} = \frac{ب}{١ - ر}$$

١٩٩ - مثال : نهاية مجموع السلسلة :

$$\frac{١}{٤} : \frac{١}{٨} : \frac{١}{١٦} : \frac{١}{٣٢} : \frac{١}{٦٤} : \ldots\ldots$$

المتناقصة اللانهاية التي اساسها $ر = \frac{١}{٢}$ وحدها الاول $ب = \frac{١}{٤}$ هي :

$$مح = \frac{ب}{١ - ر} = \frac{\frac{١}{٤}}{١ - \frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢}$$

وذلك باعتبار هذه السلسلة غير محدودة ، ويمكن تمديدها نحو الجهة اليسرى بقدر ما نريد .

تمرين : حقق في السلسلة السابقة اننا اذا وقفنا عند حد ما فان المجموع ينقص عن (نهاية المجموع) بمقدار ذلك الحد ؟

٢٠٠ - ملاحظة : كما في السلسلة العددية ، ان الكميات الاساسية في السلسلة الهندسية هي خمس : ب ، ل ، ر ، ن ، مح وهذه الكميات الخمس مرتبطة بالقانونين الاساسيين .

$$ل = ب ر^{ن-١} \quad ، \quad مح = \frac{ب (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$$

اللذين يمكننا من حساب مجهولين ، ولذا كما في السلسلة العددية ان المسائل الاساسية في السلسلة الهندسية ، عشر .

توسع

في مبحث السلسلة الهندسية

٢٠١ — تمهيد: عند ما درسنا السلسلة الهندسية (بند١٩٨) ذكرنا انه :

١°) بفرض $ر > ١$ (اي بفرض السلسلة متزايدة) فان $ر^{ن}$ يكبر كلما كبرت ن وينتهي الى ∞ عند ما تكبر ن بقدر ما نريد .

٢°) واما بفرض $ر < ١$ (اي بفرض السلسلة متناقصة) فان $ر^{ن}$ ينتهي الى الصفر عند ما تكبر ن بقدر ما نريد .

فلنبرهن الآن بصورة واضحة على صحة هاتين النظريتين ، مبتدئين بالنظرية الآتية التي نستند عليها :

٢٠٢ — نظرية : بفرض $ه > ٠$ وبفرض ن عدداً صحيحاً موجباً فان المتراجحة $(١ + ه)^{ن} > ١ + ن ه$ ..... (١) محققة دوماً .

البرهان : لنلاحظ اولاً ، ان هذه المتراجحة محققة عند ما $ن = ٢$ او $ن = ٣$ لاننا نعلم ان :

$$(١ + ه)^{٢} = ١ + ٢ ه + ه^{٢}$$

وان :

$$(١ + ه)^{٣} = ١ + ٣ ه + ٣ ه^{٢} + ه^{٣}$$

مما يدلنا على انه حقيقة :

$$(١ + ه)^{٢} > ١ + ٢ ه$$

$$(١ + ه)^{٣} > ١ + ٣ ه$$

ولو فرضنا الآن ان المتراجحة (١) محققة عند ما $ن = ك$ لتمكنا من ان نبرهن انها محققة عند ما $ن = ك + ١$ بالحقيقة لو فرضنا ان :

$$(١ + هـ)^{ك} > ١ + ك \cdot هـ$$

وضربنا طرفي هذه المتراجحة بالمقدار $(١ + هـ)$ نجد :

$$(١ + هـ)^{ك+١} > ١ + (ك + ١) هـ + ك \cdot هـ$$

فلو صغرنا الجانب الثاني بالمقدار $ك \cdot هـ^{٢}$ لكان بالاحرى :

$$(١ + هـ)^{ك+١} > ١ + (ك + ١) هـ$$

اذن : فيما سبق فرضنا ان المتراجحة (١) صحيحة من اجل $ن = ك$ وبرهنا على صحتها من اجل $ن = ك + ١$

فبما انها محققة اصلاً من اجل $ن = ٣$ اذن : هي صحيحة من اجل $ن = ٤$
وبما انها صحيحة من اجل $ن = ٤$ اذن : صحيحة من اجل $ن = ٥$ . . . . .
اذن صحيحة من اجل $ن = ٦$ وهكذا . . . وهو المطلوب .

٢٠٣ - نظرية : بفرض $ر > ١$ فان $ر^{ن}$ ينتهي الى ∞ عندما ينتهي $ن$ الى ∞ وذلك بفرض $ن$ عدداً صحيحاً موجباً .

البرهان: بما ان $ر > ١$ يمكننا ان نفرض ان : $ر = ١ + هـ$
حيث $هـ$ تدل على عدد موجب ، ويكون :

$$ر^{ن} = (١ + هـ)^{ن}$$

فلاجل ان يكون $ر^{ن}$ اكبر من عدد كبير جداً مفروض سلفاً مثل $ب$ يكفي ان يكون :

$$ر^{ن} > ب$$

وبما ان $ر^{ن} = (١ + هـ)^{ن} > ١ + ن هـ$ . . . . (بند ٢٠٢) اذن يكفي بالاحرى ان يكون :

$$١ + ن هـ > ب \quad \text{ومنها :} \quad ن > \frac{ب - ١}{هـ}$$

مما يدلنا على انه اذا اخذنا ن اكبر من $\frac{ب - ١}{هـ}$ يصبح $ر^{ن} < ب$ وهو المطلوب .

نتيجة : في السلسلة الهندسية المتزايدة اللانهائية كل من الحد النوني $ل = ب ر^{ن-١}$ والمجموع $مج = ب . \frac{ر^{ن} - ١}{ر - ١}$ ينتهي الى ∞ عندما تنتهي ن الى ∞ .

٢٠٤ — نظرية : بفرض $ر > ١$ فان $ر^{ن}$ ينتهي الى الصفر عندما ن تكبر الى ∞ ، وذلك بفرض ن عدداً صحيحاً موجباً .

البرهان : اذا كان $ر > ١$ فان مقلوبه $ر^{-١}$ يكون < ١ ، ومما ان $ر^{ن} = \frac{١}{ر^{ن}}$ فعندما ن تنتهي الى ∞ فان $ر^{ن}$ ينتهي بمقتضى النظرية السابقة الى ∞ مما يدلنا على ان $ر^{ن}$ ينتهي الى $\frac{١}{∞}$ اي الى الصفر ، وهو المطلوب .

نتيجة : في السلسلة الهندسية المتناقصة اللانهائية :

١) الحد النوني $ل = ب ر^{ن-١}$ ينتهي الى الصفر عندما ن تنتهي الى ∞

٢) المجموع $مج = \frac{ب (ر^{ن} - ١)}{ر - ١}$ ينتهي الى $مج = \frac{ب}{ر - ١}$ عندما ن تنتهي الى ∞ .

❀❀❀

تمارين

—+—

١] ما هو مجموع السلسلة العددية التي حدها الاول ٣ ، وحدها الاخير ٢٣ ، واساسها ٢ ؟

٢] سلسلة عددية حدها الاول ٥ واساسها ٧ ومجموعها ٤٤٠ فما عدد حدودها ؟

٣] مجموع ثلاثة حدود متتابعة من سلسلة عددية يساوي ١٥ ، ومجموع مربعاتها يساوي ٩٣ ، فما هي هذه الحدود الثلاثة ؟

٤] احسب الاعداد ب ح د المشكلة لسلسلة هندسية ، بعد العلم ان الاعداد ب ، ح + ٤ ، د مشكلة سلسلة عددية ، وان الاعداد ب ، ح + ٤ ، د + ٣٢ مشكلة لسلسلة هندسية ايضاً .

٥] في سلسلة عددية مجموع الحد الثالث مع العاشر يساوي ٤٣ ، ومجموع الحد السابع مع الحد الثاني عشر ٦١ . فما هي هذه الحدود الاربعة ؟

٦] حاصل ضرب ثلاثة اعداد مشكلة لسلسلة عددية ٦٩٣ ، ومجموعها ٢٧ . فما هي هذه الاعداد الثلاثة ؟

٧] مجموع ثلاثة اعداد مشكلة سلسلة عددية اساسها ر ، يساوي حاصل ضربها. فما هي هذه الاعداد الثلاثة ؟ (تطبيقات عددية : ر = ١)

٨] سلسلة عددية ، حدها الاول — ١٠ ، وحدها الاخير + ٣٠ ، اوجد من هذه السلسلة حدين متساوي البعد عن النهايتين ، على ان يكون حاصل ضربها ٦٤ .

٩] ما هي الاعداد الفردية المتتابعة التي عددها ن ومجموعها ن٢ ؟

١٠] منشور قائم ، ابعاده الثلاثة مشكلة سلسلة عددية ، وسطحه الكلي ٥٨ متراً مربعاً ، ومجموع ابعاده ٩ امتار . فما هو حجمه ؟

١١] احسب الحد النوني ، ثم احسب المجموع في المتوالية الاتية :

$$\frac{١-ن^{٢}}{ن} \ ، \ ن \ ، \ \frac{١+ن^{٢}}{ن} \ ، \ \frac{٢+ن^{٢}}{ن} \ ، \ \ldots\ldots$$

١٢] كم وسطاً عددياً يجب ان ندخل ما بين العددين ٥ ، ٧ ليكون الفرق ما بين كل حدين متتابعين يساوي ٠,٠١ ؟

١٣] ١) احسب اضلاع المثلث القائم ب حـ د بعد معرفة ان اطوال اضلاعه مشكلة سلسلة عددية .

٢) ما هو الشرط اللازم تحقيقه لتكون هذه الاطوال اعداداً صحيحة ؟

٣) ما هي اطوال هذه الاضلاع اذا كان محيط المثلث ١٨ سم ؟

١٤] استناداً على المساواة :

$$(ن+١)^{٣} = ن^{٣} + ٣ن^{٢} + ٣ن + ١ \qquad (١)$$

برهن على ان مجموع مربعات الاعداد الصحيحة من ١ الى ن يساوي :

$$\frac{ن(ن+١)(٢ن+١)}{٦}$$

[الحل : بدل في المساواة (١) العدد ن تدريجياً بالاعداد الصحيحة من ١ الى ن ، ثم اجمع المساوات التي تحصل عليها بصورة شاقولية] .

المتواليات الهندسية

١] ما هو العدد الواجب اضافته للاعداد الثلاثة ٢ ، ٧ ، ١٧ لتشكل الاعداد الجديدة سلسلة هندسية ؟

٢] ما هو الحد الاول ، وما هو المجموع لسلسلة هندسية اساسها ٢ وحدها الاخير ٩٦ وعدد حدودها ٦ ؟

٣] في المثلث ب حـ د المتساوي الساقين ، القاعدة حـ د (التي تساوي هـ) والارتفاع ب ع والضلع ب حـ مشكلة سلسلة هندسية ، والمطلوب :

١) ما هو اساس هذه السلسلة ؟

٢ً) برهن على ان الارتفاع حـ ع يشكل حداً من هذه السلسلة .

٤] برهن على ان الاعداد التي تشكل سلسلة عددية وسلسلة هندسية في آن واحد ، هي اعداد متساوية .

٥] مجموع متوالية هندسية متناقصة لا نهائية يساوي ١٠ ، والفرق بين حدها الاول والثاني يساوي ٦,٤ . فما هي هذه المتوالية .

٦] برهن على انه اذا كانت اضلاع مثلث مشكلة ثلاثة حدود متتابعة من متوالية هندسية ، وجب ان يكون ضعف اساس هذه المتوالية منحصراً ما بين العددين $\sqrt{٥}-١$ ، $\sqrt{٥}+١$

٧] احسب نهاية المجموع الاتي :

$$\frac{ب}{د}+\frac{ب+حـ}{د\,ق}+\frac{ب+٢حـ}{د\,ق^{٢}}+\frac{ب+٣حـ}{د\,ق^{٣}}+\ldots \text{ باعتبار } ق<١$$

٨] سطح المثلث ب حـ د = ح نتصف اضلاع هذا المثلث بالنقط : بَ حَ دَ فنحصل على المثلث بَ حَ دَ ثم ننصف اضلاع هذا المثلث بَ حَ دَ فنحصل على المثلث بً حً دً وهكذا الى ما لا نهاية ، والمطلوب :

١ً) حساب مجموع سطوح المثلثات العشرة الاول .

٢ً) حساب نهاية مجموع سطوح هذه المثلثات كلها .

٩] لدينا مكعب طول ضلعه هـ سم ، نرسم داخل هذا المكعب كرة ، ثم داخل هذه الكرة مكعباً ، ثم داخل هذا المكعب الاخير كرة ، وهكذا الى ما لا نهاية ، والمطلوب :

١ً) حساب مجموع حجوم هذه المكعبات .

٢ً) حساب مجموع حجوم هذه الكرات .

٣ً) ما هو مجموع سطوح هذه الكرات ، وما هو مجموع سطوح هذه المكعبات ؟

١٠] احسب نهاية مجموع الحدود :

$$\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٤} + \frac{٣}{٨} + \frac{٤}{١٦} + \ldots\ldots + \frac{ن}{ن٢}$$

١١] لدينا دائرة مركزها م ، ونصف قطرها يساوي هـ . نقسم محيط هذه الدائرة الى ثمانية اقسام متساوية ، بالنقط ب حـ د ق ط ف و ى ، ونرسم انصاف الاقطار م ب ، م حـ ، . . . . . ثم ننزل من ب العمود ب حَ على م حـ ، ثم من حَ العمود حَ دَ على م د ، وهكذا . . . . . والمطلوب :

حساب طول الخط المنكسر الحاصل ب حَ دَ . . . . . الخ بعد ان ندور دورة تامة .

الفصل الثالث

اللوغاريتم

٢٠٥- تمهيد - اولاً : لا بد لنا قبل الخوض في بحث اللوغاريتم من ذكر النظرية الآتية :

نظرية : بفرض ك عدداً موجباً فان $\sqrt[ط]{ك}$ ينتهي الى الواحد عند ما ينتهي العدد ط الى ∞ .

البرهان - الحالة الاولى : لنفرض ان ك > ١ فلبرهان النظرية يكفي ان نبرهن انه يمكننا ان نعين ط حتى تكون المتراجحة :

$$\sqrt[ط]{ك} - ١ < هـ \quad \ldots\ldots \quad (١)$$

محققة بفرض هـ عدداً موجباً صغيراً بقدر ما نريد .

فلاجل ان تكون المتراجحة (١) محققة يكفي ان يكون :

$$\sqrt[ط]{ك} < ١ + هـ \quad \text{او} \quad ك < (١ + هـ)^{ط}$$

او بالاحرى (بند ٢٠٢) :

$$ك < ١ + ط هـ \qquad \text{ومنها :} \qquad ط > \frac{ك - ١}{هـ}$$

فاذا جعلنا ط اكبر من المقدار $\frac{ك - ١}{هـ}$ تكون المتراجحة (١) محققة ،

اي $\sqrt[ط]{ك}$ ينتهي الى الواحد ، وهو المطلوب .

الحالة الثانية : اذا كان ك < ١ فيكون $\frac{١}{ك} > ١$ ونجد بالتسلسل :

$$\sqrt[ط]{ك} = \frac{١}{\sqrt[ط]{\frac{١}{ك}}}$$

فعند ما يكبر ط بقدر مانريد تكون :

$$\text{نهاية } \sqrt[ط]{ك} = \frac{١}{\text{نهاية } \sqrt[ط]{\frac{١}{ك}}} = \frac{١}{١} = ١$$

وهو المطلوب .

٢٠٦ – تمرين – ثانياً : رأينا في السنين السابقة عند ما درسنا بحث القوى ان :

١) $ب^{ن} \times ب^{ل} = ب^{ن+ل}$ اي : جداء قوتين لعدد واحد ، يساوي هذا العدد مرفوعا لاس يساوي مجموع الاسين .

٢) $\frac{ب^{ن}}{ب^{ل}} = ب^{ن-ل}$ اي : لحساب حاصل قسمة قوتين لعدد واحد يكفي طرح الاسس .

٣) $(ب^{ن})^{ل} = ب^{ن.ل}$ اي : لرفع قوة عدد الى قوة ثانية يكفي ضرب الاسس .

٤) $\sqrt[ل]{ب^{ن}} = ب^{\frac{ن}{ل}}$ اي : لاخذ جذر القوة يكفي تقسيم الاس على الدليل .

مما يدلنا على انه اذا تمكنا من كتابة الاعداد بالشكل ب مرفوعة الى قوة ما فاننا نرجع ضرب العددين الى جمع اسسها كما نرجع تقسيمها الى طرح اسسها ، و كذلك

نرجع رفع العدد الى ضرب اسه ، كما نرجع جذره الى تقسيم اسه .

٢٠٧ — تعريف : اذا كان لدينا العدد ع وتمكنا بطريقة ما (سنراها) من ايجاد العدد ب الذي اذا رفع الى قوة ما مثل ن اعطانا ع .

اي اذا كان العدد $ع = ب^{ن}$ فان العدد ن يسمى بـ **لوغاريتم العدد ع بالنسبة للاساس ب .**

مثال : بما ان $١٠٠٠ = ١٠^{٣}$ لذلك نقول : ان **لوغاريتم الالف** بالنسبة **للاساس** ١٠ هي ٣ ، وبصورة اعم نعرف اللوغاريتمة بالصورة الآتية :

لنكتب متواليتين احداهما **عددية متزايدة** احد حدودها **صفر** واساسها ر ، والثانية **هندسية متزايدة** احد حدودها **واحد** واساسها ك ، ثم لنمدد هاتين السلسلتين في الاتجاهين بقدر ما نريد ، كما في السطرين الاتيين :

÷	$-\infty$	...	$-٣ر$	$-٢ر$	$-ر$	٠	$ر$	$٢ر$	...	$+\infty$
∺	٠	...	$\frac{١}{ك^{٣}}$	...	$\frac{١}{ك^{٢}}$	$\frac{١}{ك}$	١	ك	$ك^{٢}$	...	$+\infty$

حيث الصفر من الاولى يطابق الواحد من الثانية ، وحيث نرى ان $\frac{١}{ك^{ن}}$ ينتهي الى الصفر عند ما تصبح ن عظيمة جداً (٢٠٣) لانه فرضاً $ك > ١$ والسلسلة متزايدة .

٢٠٨ — تعريف : كل حد من السلسلة العددية هو لوغاريتم الحد المقابل له من السلسلة الهندسية ، فمثلا لوغاريتم الواحد هي الصفر ، ونكتب :

لع ١ = ٠ وكذلك : لع $ك^{٢} = ٢ر$ ، لع $ك^{ن} = نر$

واما : لع $\frac{١}{ك^{٢}} = -٢ر$ ؛ لع $\frac{١}{ك^{ن}} = -نر$

واما : $\begin{cases} \text{لع الصفر} = -\infty \\ \text{لع} + \infty = +\infty \end{cases}$

فاذا تأملنا في هاتين السلسلتين جيداً ، ولاحظنا ان جميع حدود الثانية (الهندسية) موجبة نستنتج :

نتيجة : ١) لايوجد لوغاريتم الا للاعداد الموجبة ، اي : « الاعداد السالبة ليس لها لوغاريتم » .

نتيجة : ٢) لوغاريتم الواحد = الصفر .

نتيجة : ٣) لوغاريتم الاعداد التي اكبر منه الواحد هي اعداد موجبة :

$$+\infty \quad \cdots \quad س^{٣} \quad س^{٢} \quad س$$

نتيجة : ٤) لوغاريتم الاعداد الموجبة والتي اصغر من الواحد ، هي اعداد سالبة:

$$-\infty \quad \cdots \quad -س^{٣} \quad -س^{٢} \quad -س$$

نتيجة : ٥) تزداد اللوغاريتم بتزايد الاعداد ، اي ان لع $+\infty = +\infty$

نتيجة : ٦) تصغر اللوغاريتم عند ما يصغر العدد ، وعند ما يتقارب العدد من الصفر فان لوغاريتمه تتقرب من $-\infty$ اي لع الصفر $= -\infty$

٢٠٩ — تنبيه : في السلسلتين السابقتين لو جعلنا $س = ١$ مع ان $ك = ١٠$ نجد السلسلتين :

ع	$-\infty$	...	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	...	$+\infty$
::	٠	...	٠,٠٠١	٠,٠١	٠,١	١	١٠	١٠٠	١٠٠٠	...	$+\infty$

اللتين تدلاننا على ان :

$$\text{لع } ١٠^{٢} = ٢ \quad ، \quad \text{لع } ١٠ = ١$$

$$\text{لع } \frac{١}{١٠} = -١ \quad ، \quad \text{لع } \frac{١}{١٠٠} = -٢$$

وهكذا ، الا اننا لا نتمكن من ان نكتفي بالاعداد الموجودة في هذين السطرين بل لا بد من ايجاد لوغاريتم جميع الاعداد ، لذلك :

ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلة العددية ط وسطاً عددياً (بند ١٨٢) كما ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلة الهندسية ط وسطاً هندسياً (بند ١٩٤) بصورة اننا نحصل في هذين السطرين على اكثر الاعداد وذلك بجعل الفرق ما بين الحدين المتتابعين من كل من هاتين السلسلتين صغيراً بقدر ما نريد ، اي بجعل عدد الاوساط (الحسابية والهندسية) ط عظيما بقدر ما نريد (بند ٢٠٥) فنحصل على السلسلتين الجديدتين (١) الاتيتين :

ولو ادخلنا ما بين كل حدين متتابعين من السلسلتين السابقتين المذكورتين في التنبيه السابق (بند ٢٠٩) وسطاً واحداً ، عددياً في الاولى ؛ وهندسياً في الثانية ، نحصل على السلسلتين الاتيتين ، الاولى اساسها ٠,٥ الثانية اساسها :

$$\sqrt{١٠} = ٣,١٦٢$$

وهما (٢) .

اي يمكننا بصورة تدريجية ان ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلتين العددية ، الوسط العددي لهما ؛ كما ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلة الهندسية

الوسط الهندسي لهما ، وان نكرر هذا العمل بقدر ما نريد عوضاً عن ان ندخل رأساً ط وسطاً عددياً ما بين كل حدين متتابعين من الاولى ، و ط وسطاً هندسياً ما بين كل حدين متتابعين من الثانية ، فتكون النتيجة طبعاً واحدة .

وهكذا نرى انه يمكننا ان نحسب لوغاريتم جميع الاعداد ولو بصورة تقريبية ، لان الاساس الجديد في السلسلة العدديه (١) هو $ر_{ب} = \frac{ر}{ط + ١}$ وهذا يصغر بقدر ما نريد عند ما يكبر عدد الاوساط ط بقدر ما نريد .

واما الاساس الجديد في السلسلة الهندسية الجديدة (١) فهو $ك_{ب} = \sqrt[ط+١]{ك}$ وهذا ينتهي الى الواحد (بند ٢٠٥) عند ما نكبر عدد الاوساط ط بقدر ما نريد مما يدلنا على تقارب الحدود المتتابعة في السلسلة العددية وفي السلسلة الهندسية بقدر ما نريد ، وتمكننا من ايجاد لوغاريتمات جميع الاعداد ولو بصورة تقريبية ، كما نوضح ذلك فيما يلي :

٢١٠ — كيفية ايجاد لوغاريتم عدد ما مثل ب : لايجاد لوغاريتم العدد الموجب ب نميز حالتين :

الحالة الاولى : العدد ب موجود في السلسلة الهندسية من السلسلتين رقم (١) فمثلاً $ب = ك_{د}$ اذن نقرأ رأساً ان لوغاريتم ب هو $٢ ر_{د}$

الحالة الثانية : ان العدد الموجب ب غير موجود في السطر الثاني من السلسلتين رقم (١) بل هو محصور ما بين العددين :

$$ك_{د} \quad ، \quad ك_{د+١} \qquad \text{اي} \qquad ك_{د} < ب < ك_{د+١}$$

لذلك نقول ان لع ب محصور ما بين $ر_{د}$ و بين $ر_{د+١}$

لذلك اذا كان الفرق ما بين $ك_{د}$ ، $ك_{د+١}$ قليلا كما اسلفنا نعتبر ان لع ب $= ر_{د}$ **بالزيادة** ، او نعتبر ان لع ب $= ر_{د+١}$ **بالنقص** مما يدلنا على ان الفرق ما بين هاتين اللوغاريتمتين هو :

$$ر_{ن} (د + ١) - ر_{ن} د = ر_{ن}$$

فاذا كان $ر_{ن} = ٠,٠٠٠٠١$ نكون قد حصلنا على لوغاريتم ب بخطأ لا يتجاوز الواحد من مائة الف ، وكما سنرى ، يوجد جداول تعطي لوغاريتم الاعداد بصورة ان لا يتجاوز الخطأ $٠,٠٠٠٠١$ اي تحوي على خمسة ارقام عشرية .

٢١١- اللوغاريتمات التي تحوي على خمسة ارقام عشرية :

لتكون اللوغاريتمة حاوية على خمسة ارقام عشرية ، يكفي ان يكون اساس السلسلة العددية الاولى $ر_{ن} = ٠,٠٠٠٠١$ فاذا لاحظنا السلسلتين المذكورتين في التنبيه (بند ٢٠٩) وتذكرنا ان اللوغاريتمات المستعملة هي اللوغاريتمات العشرية حيث $ر = ١$ ، $ك = ١٠$ وتذكرنا ايضاً انه اذا ادخلنا ما بين كل حدين متتابعين من سلسلة عددية ط وسطاً عددية ، يكون (بند ١٨٢) الاساس الجديد هو :

$$س = \frac{ر}{ط + ١}$$

وبما ان الاساس الجديد هو : $س = ر_{ن} = ٠,٠٠٠٠١$ اذن :

$$٠,٠٠٠٠١ = \frac{ر}{ط + ١} = \frac{١}{ط + ١}$$ ومنها: $ط + ١ = ١٠٠٠٠٠$

اذن : $ط = ٩٩٩٩٩$ اي يجب ان ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلة العددية المذكورة في التنبيه (بند ٢٠٩) ٩٩٩٩٩ وسطاً عددياً ، وتكون السلسلة هي :

$$\div -\infty \ldots -٠,٠٠٠٠١ ، ٠ ، ٠,٠٠٠٠١ ، ٠,٠٠٠٠٢ \ldots +\infty$$

وبما انه يجب ان يكون عدد الاوساط العددية في السلسلة الاولى العددية مساوياً لعدد الاوساط الهندسية في السلسلة الثانية لذلك وجب في المساواة $س = \sqrt[ط+١]{ر}$ التي وجدناها (بند ١٩٤) ان نجعل $ر = ١٠$ ، $ط = ٩٩٩٩٩$ فيكون الاساس الجديد للسلسلة الهندسية هو :

$$س = \sqrt[١٠٠٠٠٠]{١٠}$$

فهذه الطريقة «النظرية» تدلنا بوضوح على امكان حساب لوغاريتمات الاعداد بصورة ان لا يتجاوز الخطأ ٠,٠٠٠٠١ كما تدلنا (بند ٢٠٥) على ان الفرق مابين كل حدين متتابعين من السلسلة الهندسية صغير جداً، لان $\sqrt[١٠٠٠٠٠]{١٠}$ قريب جداً جداً من الواحد.

وقد سمينا هذه الطريقة بالطريقة النظرية لانها تتطلب حسابات طويلة جداً، الا ان هنالك طريقة ثانية لحساب هذه اللوغاريتمات اسهل من السابقة نوعاً، وليس من برنامجنا هنا ايضاحها.

❀❀❀

خواص اللوغاريتمات

٢١٢- الخاصة الاولى: لوغاريتم حاصل ضرب تساوي مجموع لوغاريتمات المضاريب، اي:

$$\text{لع}(ب \cdot حـ \cdot د) = \text{لع}\, ب + \text{لع}\, حـ + \text{لع}\, د$$

البرهان: لنبرهن هذه الخاصة من اجل مضروبين اولاً، اي لنبرهن على ان $\text{لع}\, ب \cdot حـ = \text{لع}\, ب + \text{لع}\, حـ$ ثم لنعمم.

لذلك لنفرض ان ب، حـ موجودان في السلسلة الهندسية من السلسلتين رقم (١) [صحيفة ٢١٦] وان $ب = ك^{د}$ اي يقابل الحد $د_{ر}$ من السلسلة العددية، مع ان $حـ = ك^{هـ}$ اي يقابل الحد $هـ_{ر}$ من السلسلة العددية.

اذن: بحسب تعريف اللوغاريتم $\text{لع}\, ب = د_{ر}$ ؛ $\text{لع}\, حـ = هـ_{ر}$

وبما ان $ب \cdot حـ = ك^{د} \cdot ك^{هـ} = ك^{د+هـ}$ نفهم ان الجداء ب . حـ الموجود في السلسلة الهندسية يقابل الحد $(د + هـ)_{ر}$ من السلسلة العددية المقابلة

اي ان : $\text{لع}\,(ب \cdot حـ) = (د + هـ)\,س$

ومنها : $\text{لع}\,(ب \cdot حـ) = د\,س + هـ\,س$

او : $\text{لع}\,(ب \cdot حـ) = \text{لع}\,ب + \text{لع}\,حـ$ وهو المطلوب .

وهذه الخاصة صحيحة سواء أكان العددان د ، هـ موجبين او سالبين او احدهما موجب والآخر سالب ، اي سواء أكان العددان الموجبان ب ، حـ اكبر من الواحد او اصغر من الواحد او احدهما اكبر من الواحد مع ان الآخر اصغر من الواحد ، وذلك لان المساواة $ك^{د} \cdot ك^{هـ} = ك^{د+هـ}$ صحيحة دوماً سواء أكان د ، هـ موجبين او سالبين او احدهما موجب والآخر سالب ، فمثلاً :

$$ك^{٥} \cdot ك^{-٣} = ك^{٥} \times \frac{١}{ك^{٣}} = \frac{ك^{٥}}{ك^{٣}} = ك^{٥-٣} = ك^{٢} = ك^{٥+(-٣)}$$

٢١٣- التعميم : لنبرهن الآن على ان :

$$\text{لع}\,(ب \cdot حـ \cdot د \cdot هـ) = \text{لع}\,ب + \text{لع}\,حـ + \text{لع}\,د + \text{لع}\,هـ$$

لذلك يمكننا ان ننظر الى حاصل الضرب $ب \cdot حـ \cdot د \cdot هـ$ كمشكل من جداء مضروبين الاول $ب \cdot حـ \cdot د$ والثاني هـ فنكتب بالتسلسل المساوات الاتية :

$$\text{لع}\,(ب \cdot حـ \cdot د \times هـ) = \text{لع}\,(ب \cdot حـ \cdot د) + \text{لع}\,هـ$$

وبنفس الطريقة : $\text{لع}\,(ب \cdot حـ \times د) = \text{لع}\,(ب \cdot حـ) + \text{لع}\,د$

وكذلك : $\text{لع}\,(ب \times حـ) = \text{لع}\,ب + \text{لع}\,حـ$

فبجمع هذه المساوات والاصلاح نجد في النهاية ان :

$$\boxed{\text{لع}\,(ب \cdot حـ \cdot د \cdot هـ) = \text{لع}\,ب + \text{لع}\,حـ + \text{لع}\,د + \text{لع}\,هـ}$$

وهو المطلوب .

٢١٤- الخاصة الثانية : $\text{لع}\,ب^{ن} = ن\,\text{لع}\,ب$ اي لوغاريتم قوة عدد تساوي لحاصل ضرب أس هذه القوة في لع هذا العدد .

البرهان : ان برهان هذه الخاصة ينتج من برهان الخاصة السابقة ، وحقيقة ان :

$$\underbrace{ب = ب \cdot ب \cdot ب \cdot \ldots \ldots \cdot ب}_{ن \text{ مضروباً}}$$

اذن : $\underbrace{لع\ ب^{ن} = لع\ ب + لع\ ب + لع\ ب + \ldots\ldots + لع\ ب}_{ن \text{ حداً}}$

ومنها : $\boxed{لع\ ب^{ن} = ن\ لع\ ب}$ وهو المطلوب .

٢١٥- الخاصة الثالثة : $لع \frac{ب}{حـ} = لع\ ب - لع\ حـ$ اي لع

خارج قسمة تساوي لع المقسوم **مطروحاً** منها لوغاريتم المقسوم عليه .

البرهان : لنفرض ان خارج قسمة ب على حـ هو د اي $د = \frac{ب}{حـ}$

اذن : $د \cdot حـ = ب$ وبأخذ لع الطرفين نجد بالتسلسل :

$$لع\ (د \cdot حـ) = لع\ ب$$
$$لع\ د + لع\ حـ = لع\ ب$$
$$لع\ د = لع\ ب - لع\ حـ$$

$\boxed{لع \frac{ب}{حـ} = لع\ ب - لع\ حـ}$ وهو المطلوب .

٢١٦- الخاصة الرابعة : $لع \sqrt[ن]{ب} = \frac{1}{ن} لع\ ب$ اي :

لع الجذر لعدد ما يساوي لحاصل **قسمة** لع هذا العدد على أس هذا الجذر .

البرهان : لنفرض ان $د = \sqrt[ن]{ب}$ ولنبرهن على ان $لع\ د = \frac{1}{ن} لع\ ب$

فمن الفرض $د = \sqrt[ن]{ب}$ نستنتج ان $د^{ن} = ب$ وبأخذ لع الطرفين نجد :

$$\text{ج}\,\text{لع}\,\text{د} = \text{لع}\,\text{ب} \quad \text{ومنها:} \quad \text{لع}\,\text{د} = \frac{1}{\text{ج}}\,\text{لع}\,\text{ب}$$

اي:
$$\boxed{\text{لع}\sqrt[\text{ج}]{\text{ب}} = \frac{1}{\text{ج}}\,\text{لع}\,\text{ب}}$$
وهو المطلوب:

* * *

اللوغاريتمات العشرية

٢١٧- تمهيد: ان اللوغاريتمات المستعملة غالباً هي اللوغاريتمات **العشرية** التي نحصل عليها بجعل $\text{ر} = ١$ في السلسلة العددية، وجعل $\text{ك} = ١٠$ فتصبح السلسلتان الاصليتان هما:

$$\div\ -\infty \ \ldots\ -٢\ -١\ \boxed{٠}\ ١\ ٢\ \ldots\ +\infty$$
$$\div\div\ ٠\ \ldots\ \frac{١}{١٠٠}\ \frac{١}{١٠}\ \boxed{١}\ ١٠\ ١٠٠\ \ldots\ +\infty$$

فاللوغاريتمات المعرفة بهذين الاساسين:

$$\boxed{\text{ر} = ١ \quad ، \quad \text{ك} = ١٠}$$

تسمى اللوغاريتمات العشرية، وقد رأينا انه لحساب لوغاريتمات جميع الاعداد يجب ان ندخل ما بين كل حدين متتابعين من السلسلة الاولى والثانية اوساطاً حسابية وهندسية بالترتيب عددها يساوي ٩٩٩٩٩ وسطاً، وذلك ليكون الخطأ في حساب اللوغاريتم اقل من ٠,٠٠٠٠١ فاللوغاريتمات المعينة ايضاً بهاتين السلسلتين بعد ادخال الاوساط هي ايضاً لوغاريتمات عشرية لان الاساس الاصلي لها هو:

$$\text{ر} = ١ \quad ، \quad \text{ك} = ١٠$$

فما سبق يدلنا على انه في الحالة العامة اللوغاريتمة العشرية لعدد ما هي **عدد عشري**

يتركب من قسم صحيح وقسم عشري يحوي على عدة ارقام عشرية (يكون عددها خمسة اذا كان الخطأ اقل من ٠,٠٠٠٠١) ، وكما رأينا سابقاً تكون اللوغاريتمة لعدد ما موجبة فيما اذا كان هذا العدد اكبر من الواحد ، وتكون سالبة فيما اذا كان هذا العدد اصغر من الواحد ، الا اننا قد اعتدنا ان نجعل القسم العشري للوغاريتمة موجباً دوماً وان نضع اشارة الناقص فوق العدد الصحيح من اللوغاريتمة ، فمثلا اذا كتبنا ان :

$$\text{لع ب} = \bar{3},82145$$

نفهم ان : $\text{لع ب} = -3 + 0,82145$

اي في الاصل : $\text{لع ب} = -2,17855$

مما يدلنا على ان $ب < 1$ وبالعكس لو كان لدينا العدد ب وكان :

$$\text{لع ب} = -2,17855$$

فاننا نكتب هذه اللوغاريتمة بالشكل $\text{لع ب} = \bar{3},82145$

وذلك بان نطرح من العدد الصحيح واحداً ، وان نضيف الى القسم العشري واحداً ، كما نوضح ذلك فيما يلي :

$$\text{لع ب} = -2,17855 = -2 - 0,17855$$
$$= -1 - 2 - 0,17855 + 1$$
$$= -3 + 0,82145$$
$$= \bar{3},82145$$

نتيجة هامة : القسم العشري لاي لوغاريتمة كانت هو قسم موجب .

٢١٨- كيفية كتابة لوغاريتمة عدد ما : رأينا ان اللوغاريتمة لعدد ما تتركب من عدد صحيح موجب او سالب ؛ ومن قسم كسري عشري موجب دوماً ، فالعدد الصحيح من لوغاريتمة العدد ب يسمى بالمميز والقسم الكسري يسمى بالقسم العشري .

فالقسم العشري يعطى بواسطة جداول خاصة تسمى بالجداول اللوغاريتمية ، ذكرنا شيئاً عن صعوبة تشكيلها ، وسندرس بوضوح كيفية استعمالها واستخراج القسم العشري للوغاريتمة منها .

واما العدد الصحيح للوغاريتمة فيكتب بسهولة استناداً على النظريتين الآتيتين :

٢١٩- نظرية ١) العدد الصحيح للوغاريتمة عدد اكبر من الواحد مثل ب هو عدد يقل عن عدد ارقام القسم الصحيح من ب واحدا ، فمثلا القسم الصحيح للوغاريتمة العدد ب = ٨٥٤,٣١٧ هو ٢ لان عدد ارقام القسم الصحيح ٨٥٤ هو ٣ .

البرهان : ليكن العدد المركب من ثلاثة ارقام صحيحة وهو ٧٥٢,١٤ فهذا العدد محصور ما بين ١٠٠ و ١٠٠٠

اي : ١٠٠ < ٧٥٢,١٤ < ١٠٠٠

ومنها : لع ١٠٠ < لع ٧٥٢,١٤ < لع ١٠٠٠

اي : ٢ < لع ٧٥٢,١٤ < ٣

اي : لع ٧٥٢,١٤ = ٢ عدداً صحيحاً وقسماً كسرياً ، وهو المطلوب .

امثلة :

١) القسم الصحيح الى لع العدد ١٤,٦٢٥ هو ١

٢) « « « « « ٧,٨٣٢ « ٠

٣) « « « « « ٥٦٧٨٩٣,١٢٣ « ٥ وهكذا...

٢٢٠- نظرية ٢) القسم الصحيح للوغاريتمة عدد اصغر من الواحد مثل ب هو عدد سالب قيمته المطلقة تساوي عدد الاصفار الموجودة على يسار اول رقم من ارقام هذا العدد (مع عد صفر الفاصلة) .

مثال : العدد الصحيح الى لع ٠,٠٠٧٦ هو -٣ اي : $\bar{3}$

البرهان: ليكن العدد ب = ٠٫٠٠٧ فهذا العدد محصور ما بين ١ من مائة، وما بين ١ من عشرة، اي:

$$\frac{١}{١٠} > ٠٫٠٠٧ > \frac{١}{١٠٠}$$

اذن: $\text{لع}\,١٠^{-٢} > \text{لع}\,٠٫٠٠٧ > \text{لع}\,١٠^{-١}$

او: $-٢ > \text{لع}\,٠٫٠٠٧ > -١$

مما يدلنا على ان لع ٠٫٠٠٧ محصور ما بين −٢ و −١، وبما ان القسم العشري موجب دوماً. اذن:

لع ٠٫٠٠٧ = $\bar{٢}$ عدداً صحيحاً + قسماً كسرياً موجباً. وهو المطلوب.

٢٢١— ملاحظة: بنفس الطريقة نجد ان:

٠٫٠٠١ > ٠٫٠٠٠٧٥ > ٠٫٠١

ومنها: $-٣ > \text{لع}\,٠٫٠٠٠٧٥ > -٢$

اذن: لع ٠٫٠٠٠٧٥ = $\bar{٣}$ عدداً صحيحاً + قسماً كسرياً موجباً.

امثلة:

١) القسم الصحيح الى لع العدد ٠٫٣٤٥ هو $\bar{١}$

٢) » » » » » ٠٫٠٣٠٠٥ » $\bar{٢}$

٣) » » » » » ٠٫٠٠٠٤٥٠٢٣ » $\bar{٤}$ وهكذا...

❀❀❀

الخاصة الاساسية

للقسم العشري في اللوغاريتمة

٢٢٢ – نظرية: لا يتغير القسم العشري من لع العدد ب سواء أضربنا او قسمنا هذا العدد ب على ١٠ او قوى العشرة (باعتبار أسس هذه القوى اعداداً صحيحة) .

البرهان : لنفرض ان لع ب = ٣،٤٥٦٢٧ اي ان القسم العشري من لع ب هو ٠،٤٥٦٢٧ ولنحسب مثلاً لع حاصل الضرب ب × ١٠^{د} باعتبار د عدداً صحيحاً ، فنجد ان :

$$\text{لع} (ب \times ١٠^{د}) = \text{لع} ب + \text{لع} ١٠^{د} \quad \text{الا ان لع} \quad ١٠^{د} = د$$

$$\text{اذن :} \quad \text{لع} (ب \times ١٠^{د}) = ٣،٤٥٦٢٧ + د$$

وبما ان د عدد صحيح نجد ان :

$$\text{لع} (ب \times ١٠^{د}) = ٠،٤٥٦٢٧ + (٣ + د)$$

مما يدلنا على ان القسم العشري لم يتغير ، فمثلاً لو فرضنا ان د = ٥ لكان :

$$\text{لع} ب \times ١٠^{٥} = ٨،٤٥٦٢٧$$

بنفس الطريقة نجد ان :

$$\text{لع} \frac{ب}{١٠^{د}} = \text{لع} ب - \text{لع} ١٠^{د} = ٣،٤٥٦٢٧ - د$$

وبما ان د عدد صحيح يساوي ٥ مثلا نجد :

$$\text{لع} \frac{ب}{١٠^{د}} = ٣،٤٥٦٢٧ - ٥ = \bar{٢}،٤٥٦٢٧$$

مما يدلنا على ان القسم العشري لم يتغير ، وهو المطلوب .

نتيجة : لا يتغير القسم العشري من لع عدد ما مثل ب = ٤٥٣،٢٥٦ فيما اذا نقلنا الفاصلة يميناً او يساراً ، وبحالة خاصة فيما اذا اهملنا هذه الفاصلة تماماً لان نقل الفاصلة او حذفها في العدد ب يعادل ضرب هذا العدد او تقسيمه على القوى الصحيحة للعدد ١٠ .

اذن القسم العشري من لع ٤٥٣،٢٥٦ = القسم العشري من لع ٤٥٣٢٥٦،٠ = القسم العشري من لع ٤٥٣٢،٥٦ = القسم العشري من لع ٠،٠٠٠٤٥٣٢٥٦

٢٢٣ - تمام لوغاريتم عدد ما : تعريف تمام لوغاريتم عدد ما مثل ب هو لع مقلوبه $\frac{١}{ب}$ اي :

$$\text{تما لع ب} = \text{لع } \frac{١}{ب}$$

وبالعكس : $\text{لع } \frac{١}{ب} = \text{تما لع ب}$

وبما ان $\text{لع } \frac{١}{ب} = \text{لع ١} - \text{لع ب} = ٠ - \text{لع ب} = - \text{لع ب}$ نستنتج ان :

$$- \text{لع ب} = \text{تما لع ب}$$ اي :

٢٢٤ - تعريف : تما لع العدد ب هو نظير لع العدد ب اي هو لع العدد ب مسبوقة باشارة ناقص .

مثال : لنفرض ان لع ب = ٤،٣٢٥٦٧ فيكون :

$$\text{تما لع ب} = - ٤،٣٢٥٦٧$$

وبما انه يجب ان يكون القسم العشري موجباً دوماً (بند ٢١٧) فاننا نكتب :

$$\text{تما لع ب} = ١ - ٠،٣٢٥٦٧ - ٤ - ١$$

او : $\text{تما لع ب} = ١ - ٠،٣٢٥٦٧ - (٤ + ١) = \bar{٥}،٦٧٤٣٣$

فهذه المساواة الاخيرة تدلنا على :

قاعدة : للانتقال من لع ب الى ما لع ب يجب ان نضيف على العدد الصحيح واحداً ، وان نغير اشارة الحاصل ، [بحيث يكون مجموع القسمين الصحيحين في اللوغاريتمة وتمامها —١] .

واما القسم العشري من ما لع ب فهو ينشأ من طرح القسم العشري الى لع ب من العدد واحد ، والامثلة الآتية توضح لنا ذلك :

اذا كان : لع ب = ٣،٤٥٦٢١ فتكون ما لع ب = $\bar{٤}$،٥٤٣٧٩

» » لع ب = $\bar{٢}$،٣١٤٥٩ » ما لع ب = ١،٦٨٥٤١

» » لع ب = ٠،١١١١١ » ما لع ب = $\bar{١}$،٨٨٨٨٩

ولطرح القسم العشري بسهولة من ١ فاننا نطرح الرقم الاول اعتباراً من اليمين من ١٠ ، واما الارقام الباقية فنطرحها من ٩ .

٢٢٥ — استعمال تمام اللوغاريتمات : رأينا فيما سبق ان القسم العشري من كل لع يكون موجباً على عكس العدد الصحيح الذي يمكن ان يكون موجباً او سالباً ، لذلك طرح اللوغاريتمات من بعضها يتطلب دقة زائدة وعناية تامة ، الا انه مع كل هذه الدقة فان احتمال وقوع الخطأ في الطرح له نصيب وافر ، فلذا عوضاً عن طرح لع حـ من لع العدد ب ، اي عوضاً عن كتابة لع ب — لع حـ نضيف ما لع حـ الى لع ب ونكتب لع ب — لع حـ = لع ب + ما لع حـ فيكون احتمال وقوع الخطأ اقل .

٢٢٦ — مثال : لحساب لع العدد $س = \frac{ب \cdot ط \cdot ك}{حـ \cdot د}$ نرى

ان : لع س = لع (ب . ط . ك) — لع (حـ . د)

او : لع س = لع ب + لع ط + لع ك — (لع حـ + لع د) =

لع ب + لع ط + لع ك — لع حـ — لع د

فعوضاً عن — لع حـ ، — لع د نكتب + ما لع حـ ، ما لع د ونجد :

لع س = لع ب + لع ط + لع ك + ما لع حـ + ما لع د

ولم يبق لدينا لحساب لع س غير عملية جمع واحدة (وذلك بفرض اننا نعلم لوغاريتمات الاعداد ب ، ط ، ك ، حـ ، د) .

الاعمال الثلاثة الاساسية

في اللوغاريتم

الجمع والضرب والتقسيم

٢٢٧ – الجمع : نجمع اللوغاريتمات كما نجمع الاعداد العشرية بان نضع الفواصل تحت بعضها ، الا انه يجب ان نتنبه عند جمع الاعداد الصحيحة من هذه اللوغاريتمات ، وذلك عند ما يكون قسم من هذه الاعداد الصحيحة سالباً والمثال الآتي يوضح لنا ذلك :

مثال في الجمع :

$$\begin{array}{r} \bar{5},423120 \\ 1,563210 \\ \bar{4},712120 \\ 3,600110 \\ \hline \bar{3},298560 \end{array}$$

بعد ان نجمع الاقسام العشرية يكون حاصل الجمع ٠,٢٩٨٥٦ ويبقى في اليد ٢ فنقول ٢ مع $\bar{5}$ يعطي $\bar{3}$ ، ثم $\bar{3}$ مع ١ يعطي -2 ، ثم -2 مع $\bar{4}$ يعطي -6 ، ثم -6 مع ٣ يعطي -3 ، ويكون حاصل الجمع هو $\bar{3},298560$ وبالطبع نجري هذه الحسابات ذهناً باسرع ما يمكن .

٢٢٨ – الضرب : لا يوجد صعوبة في ضرب اللوغاريتمة عند ما يكون العدد الصحيح منها موجباً ، واما عند ما يكون العدد الصحيح من اللوغاريتم سالباً فيجب الانتباه الى ان ما يبقى في اليد من ضرب القسم العشري هو موجب .

مثال في الضرب: $\bar{٥}٫٩٤٥٦٨ \times ٣ = \bar{١٣}٫٨٣٧٠٤$

بعد ان نضرب القسم العشري في ٣ يكون حاصل الضرب هو ٠٫٨٣٧٠٤ ويبقى في اليد ٢ ، لذلك نقول :

$٣ \times \bar{٥} = \bar{١٥}$ ، ثم -١٥ مع $+٢$ (الباقي في اليد) هو -١٣ وحاصل الضرب الاخير هو $\bar{١٣}٫٨٣٧٠٤$

٢٢٩ — القسيم : لايوجد صعوبة في تقسيم اللوغاريتم على عدد عندما يكون عددها الصحيح موجباً ؛ او سالباً يقبل القسمة على المقسوم عليه ، كما في المثالين الاتيين :

مثال : ١) $\frac{١٥٫٣٤٢٤٦}{٢} = ٧٫٦٧١٢٣$

مثال : ٢)

$$\frac{\bar{٦}٫٣٤٥٩١}{٣} = \frac{٦ - ٠٫٣٤٥٩١}{٣} = ٠٫١١٥٣٠ - ٢ = \bar{٢}٫١١٥٣٠$$

واما عندما يكون العدد الصحيح سالباً ولا يقبل القسمة على المقسوم عليه ، فاننا نأتي بآن واحد نزيد الى القسم الصحيح والقسم العشري وحدات كافية بقدر اللزوم ليصبح العدد الصحيح قابل القسمة رأساً على المقسوم عليه [فنكون طرحنا واضفنا الى اللوغاريتمة عدداً واحداً من الوحدات] كما في المثال الاتي :

$$\frac{\bar{٣}٫٤٥٦٧٥}{٥} = \frac{٣ - ٠٫٤٥٦٧٥}{٥} = \frac{٥ - ٢٫٤٥٦٧٥}{٥} = ١ - ٠٫٤٩١٣٥$$

فهنا في الكسر الثاني اضفنا الى القسم العشري ٢ ، واضفنا (طرحنا) للعدد الصحيح السالب ٢ ، فهذا العمل لا يغير قيمة هذا الكسر .

مثال آخر:

$$= \frac{٤ - ٣٫٨٤٥٢٨}{٤} = \frac{١ - ٠٫٨٤٥٢٨}{٤} = \frac{\bar{١}٫٨٤٥٢٨}{٤}$$

$$\bar{١}٫٩٦١٣٢ = ١ - ٠٫٩٦١٣٢$$

ويجب ان يكون هذا العمل ذهنا وباسرع ما يمكن .

كيفية

استعمال الجداول اللوغاريتمية

الجداول اللوغاريتمية ذات الارقام العشرية الخمسة ، هي جداول تعطي لوغاريتم الاعداد من ١ الى ١٠٠٠٠ مع خمسة ارقام عشرية ، اي بصورة ان لا يتجاوز الخطأ ٠,٠٠٠٠١

في ابتداء كل جدول من هذه الجداول نجد المعلومات اللازمة لكيفية استعمال هذا الجدول ، فلذا لا نرى حاجة للاطناب في كيفية استعمال هذه الجداول بل نكتفي بالاشارة البسيطة الاتية :

ء	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٣٠	٣٩٤ ١١	٤٢٨	٤٦١	٤٩٤						
١	٧٢٧	٧٦٠	٧٩٣	٨٢٦						
٢	٠٥٧ ١٢	٠٩٠	١٢٣	١٥٦						
٣	٣٨٥	٤١٨	٤٥٠	٤٨٣						
٤	٧١٠	٧٤٣	٧٧٥	٨٠٨						

(شكل ٣٥)

كما في (الشكل ٣٥) تتكون صحيفة الجدول من ١١ عموداً كتب في رأس العمود الاول منها العدد ع او ء فقط ، كما كتب في رأس الاعمدة الباقية بالترتيب ٠ ، ١ ، ٢ ، . . . . . ، ٩ ولنوضح الآن كيفية استعمال الجدول بواسطة هذا الشكل السابق .

٢٣٠ – الحالة الاولى : المطلوب ايجاد لوغاريتم عدد اصغر من ١٠٠٠٠ اي مركب من اربعة ارقام او اقل [وذلك بغض النظر عن الفاصلة ، لان الفاصلة كما رأينا (بند ٢٢٢) لا تؤثر في القسم العشري من اللوغاريتمة] .

مثال : لايجاد لع العدد ١٣٠١٢ نغض النظر عن الفاصلة فيبقى العدد ١٣١٢

نفتش في العمود الاول عن العدد ١٣١ وذلك بان نفتش عن العدد ١٣٠ اولاً ثم ننزل الى السطر الذي يليه الواقع امام العدد ١ الذي تحت ١٣٠ ، فنجد في العمود الذي كتب في رأسه صفر ان الرقمين الاولين من اللوغاريتمة المطلوبة هما ١١(*) واما لايجاد الارقام الثلاثة الباقية فاننا نأخذ في العمود الرابع الذي كتب في رأسه ٢ (لان آحاد العدد المعطى لنا ١٣٠١٢ هو ٢) الارقام المحاذية للعدد ١٣١ فنجد ان هذه الارقام الثلاثة هي ٧٩٣ (وهذه الارقام الثلاثة نسميها بالقسم الخاص) ، اذن : القسم العشري هو ٧٩٣ ١١ وبما ان العدد المعطى لنا يحوي على رقمين صحيحين ، اذن : العدد الصحيح الى لوغاريتمته هو ١ (بند ٢١٩) واللوغاريتمة المطلوبة هي ١٠١١٧٩٣ اي

لع ١٣٠١٢ = ١٠١١٧٩٣ وذلك بصورة ان لا يتجاوز الخطأ ٠٠٠٠٠١.

الحالة الثانية : العدد مركب من اكثر من اربعة ارقام .

مثال : المطلوب ايجاد لوغاريتم العدد ب = ١٣١٠٢٦

الحل : نغض النظر عن الفاصلة فيصبح هذا العدد هو ١٣١٢٦ ثم نأخذ الارقام الاربعة الاول اعتباراً من اليسار فنجد العدد ١٣١٢ واستناداً على الحالة الاولى نعلم ان :

القسم العشري الى لع العدد ١٣١٢ هو ١١٧٩٣

مع ان » » » » ١٣١٣ » ١١٨٢٦

اذن يمكننا ان نكتب (بند ٢٢٢) ان :

القسم العشري الى لع العدد	١٣١٣٠	هو	١١٨٢٦
» » » »	١٣١٢٠	»	١١٧٩٣
اذن : عند ما زاد العدد	١٠	زادت اللوغاريتمة	٣٣

اي عند ما زاد العدد ١٠ وحدات من المرتبة الاخيرة زادت اللوغاريتمة ٣٣ وحدة من المرتبة الاخيرة ايضاً ، وبما انه يقبل (مع خطأ قليل) ان تزايد العدد متناسب مع تزايد لوغاريتمته عند ما يكون هذا التزايد قليلا فاننا نجري التناسب الاتي :

(*) نسمي هذين الرقمين بالقسم المشترك لانهما موجودان (يشتركان) في لوغاريتمات جميع الاعداد التي ارقامها الثلاثة الاول اعتباراً من اليسار ١٣٠ او ١٣١

عدد	لوغاريتمة	
١٠	٣٣	س = $\frac{٦ \times ٣٣}{١٠}$ = ١٩٫٨
٦	س	
طر		

اذن : القسم العشري للوغاريتمة العدد ١٣١٢٦ هي ١١٧٩٣ + ١٩٫٨

وترتب عادة الحسابات بالصورة الاتية :

من اجل ١٣١٢٠ القسم العشري هو : ١١٧٩٣

الفرق = ٣٣

من اجل ٦ الزيادة هي : ١٩٫٨

وبالجمع من اجل ١٣١٢٦ القسم العشري هو : ١١٨١٢ ٨

وبجبر الرقم الاخير ٨ يصبح القسم العشري هو ١١٨١٣ وبما ان العدد ب يحوي على ثلاثة ارقام صحيحة اذن (بند ٢١٩) القسم الصحيح من لوغاريتمته هو ٢ وعليه في النهاية لع ١٣١٫٢٦ = ٢٫١١٨١٣

بنفس الطريقة نجد لع العدد ١٣١٢٫٦٥ فتكون الحسابات هي :

القسم العشري الى لع العدد ١٣١٢٠٠ هو : ١١٧٩٣

الفرق بينها وما بين ما يليها ٣٣

اي القسم العشري الى لع العدد ١٣١٣٠٠ هو : ١١٨٢٦

اذن :

عدد	لع	
١٠٠	٣٣	س = $\frac{٦٥ \times ٣٣}{١٠٠}$ = ٢١ تقريباً
٦٥	س	
طر		

اذن :

من اجل	١٣١٢٠٠	اللع هو	١١٧٩٣
من اجل	٦٥	يزداد	٢١ الفرق ٣٣
وبالجمع من اجل	١٣١٢٦٥	اللع هو	١١٨١٤

وبما ان العدد المعطى يحوي اربعة ارقام صحيحة ، اذن القسم الصحيح من لوغاريتمته هو ٣ ، ونجد في النهاية لع ١٣١٢,٦٥ = ٣,١١٨١٤

٢٣٢— ملاحظة : اكثر الجداول تعطي الاقسام العشرية للفروق ما بين اللوغاريتمة وبين التي تليها ، فمثلاً على هامش الصفحة التي اخذنا منها الامثلة السابقة نجد الجدول الاتي :

٣٣

العشر	١	٣,٣
العشران	٢	٦,٦
الثلاثة اعشار	٣	٩,٩
الخ	٤	١٣,٢
.	٥	١٦,٥
.	٦	١٩,٨
.	٧	٢٣,١
.	٨	٢٦,٤
.	٩	٢٩,٧

الذي يعطينا اعشار الـ ٣٣ من عشر واحد الى تسعة اعشار ، (وبتقسيم هذه الاعشار على ١٠ نحصل على الاجزاء من مئة ، وهكذا . . . . .)

فتسهل الحسابات وتجعل بصورة ذهنية سريعة بدون تشكيل تناسب .

فبواسطة هذا الجدول نرتب حسابات المسألة السابقة مثلاً بالصورة الاتية :

من اجل	١٣١٢	اللع	١١٧٩٣	
من اجل	٦	نزيد	١٩,٨	الفرق ٣٣
من اجل	٥	نزيد	١,٦٥	
وبالجمع من اجل	١٣١٢٦٥	اللع	١١٨١٤,٤٥	

اذن : في النهاية لع ١٣١٢,٦٥ = ٣,١١٨١٤ وذلك بحذف الـ ٠,٤٥ التي اصغر من ٠,٥ وحدة من الرتبة الاخيرة .

٢٣٣— ملاحظة هامة : النجمة فوق الارقام الثلاثة الاخيرة (القسم الخاص) من اللوغاريتم تدل على وجوب اخذ الرقمين الاولين المشتركين التاليين .

فمثلاً في مثالنا السابق لو وجد فوق العدد ٧٩٣ نجمة لكنا اخذنا عوضاً عن الرقمين الاولين المشتركين ١١ اللذين اخذناهما من العمود الثاني ، لكنا اخذنا الرقمين المشتركين التاليين ١٢ الموجودين في نفس العمود الثاني .

كيفية

ايجاد عدد بعد معرفة لوغاريتمه

في هذه المسألة التي هي **عكس** المسألة السابقة ، وحيث يطلب منا ايجاد العدد ب بعد معرفة لع ب نميز ايضاً حالتين .

٢٣٤ – الحالة الاولى : لع ب المعلومة موجودة في الجدول كما نوضح ذلك في المثال الآتي :

مثال : المطلوب ايجاد العدد ب بعد معرفة ان لع ب = ٢٫١٢٤٥٠

فالعدد الصحيح ٢ يدلنا على ان القسم الصحيح من العدد ب يتركب من ثلاثة ارقام ، ثم نأخذ الرقمين **الاولين** من القسم العشري (اعتباراً من اليسار) وهما ١٢ فنجد ان هذين الرقمين يقابلان الاعداد من ١٣٢ الى ١٣٤ . كما نجد ان هذين الرقمين هما الرقمان **المشتركان** لعدة لوغاريتمات مكتوبة في الجدول في ثلاثة اسطر ، لذلك نفتش في هذه الاسطر الثلاثة عن العدد ٤٥٠ (وهو القسم الباقي من القسم العشري) فنجده في السطر الثاني وفي العمود الذي كتب في رأسه ٢ اذن : آحاد العدد المطلوب هو ٢ (رأس العمود) وبما ان الـ ٤٥٠ تقابل افقياً العدد ١٣٣ اذن : العدد المطلوب هو ١٣٣٢ وذلك بغض الطرف عن الفاصلة ، وبما ان هذا العدد يحوي في قسمه الصحيح على ثلاثة ارقام ، اذن : ب = ١٣٣٫٢ وهو المطلوب .

٢٣٥ – الحالة الثانية : اللوغاريتمة المعطاة غير موجودة في الجدول .

مثال : المطلوب ايجاد العدد ب بعد معرفة ان : لع ب = $\bar{٣}$٫١٢٧٩١

كما في المثال السابق نجد ان الرقمين المشتركين ١٢ يقابلان الاعداد من ١٣٢ الى ١٣٤ الا انه اذا فتشنا بين اللوغاريتمات الموجودة في الاسطر الثلاثة التي تشترك في الرقمين

الاولين ١٢ لا نجد القسم الباقي من اللوغاريتم المعطاة وهو ٧٩١ بل نجد ان العدد الذي يأتي قبله رأساً هو ٧٧٥ والذي يأتي بعده رأساً هو ٨٠٨ ، مما يدلنا على ان العدد المطلوب محصور ما بين العددين ١٣٤٢ ، ١٣٤٣ [وذلك بغض النظر عن الفاصلة ووفقاً للحالة الاولى] ، وترتب الحسابات السابقة بالصورة الاتية :

	اللع	العدد		
	١٢٨٠٨	١٣٤٣	او	١٣٤٣٠
	١٢٧٧٥	١٣٤٢	او	١٣٤٢٠
الفرق	٣٣		الفرق	١٠

اذن : عند ما تزداد اللع ٣٣ وحدة من المرتبة الاخيرة فان العدد يزداد ١٠ وحدات من المرتبة الاخيرة ، وبما ان ٧٩١ - ٧٧٥ = ١٦ فاننا نشكل التناسب الاتي :

لع	عدد
٣٣	١٠
١٦	س
طر	

$$س = \frac{١٠ \times ١٦}{٣٣} = ٥ \quad \text{تقريباً}$$

وتنتهي الحسابات السابقة بالصورة الاتية :

	من اجل	١٢٧٧٥	العدد هو	١٣٤٢٠
	من اجل	١٦	يزيد العدد	٥
وبالجمع	من اجل	١٢٧٩١	العدد هو	١٣٤٢٥
اذن :	من اجل	$\bar{٣},١٢٧٩١$	العدد هو	٠,٠٠١٣٤٢٥

وهو المطلوب .

٢٣٦ - ملاحظة : يمكن اجراء الحسابات السابقة بالصورة الثانية الاتية :

اللع	١٢٨٠٨	العدد	١٣٤٣	وهذه تجري عادة بصورة ذهنية
اللع	١٢٧٧٥	العدد	١٣٤٢	
الفرق	٣٣	الفرق	١	

وبما ان ١٢٧٩١ − ١٢٧٧٥ = ١٦ نقول :

اللع	العدد
٣٣	١
١٦	س
طر	

$$س = \frac{١ \times ١٦}{٣٣} = ٠,٥ \quad \text{تقريباً}$$

اذن :	من اجل ١٢٧٧٥	العدد هو	١٣٤٢
	من اجل ١٦	يزيد العدد	٠,٥
وبالجمع :	١٢٧٩١	العدد هو	١٣٤٢ ٥

وبالنهاية : من اجل $\bar{٣},١٢٧٩١$ العدد هو ٠,٠٠١٣٤٢ ٥ = ب

وهو المطلوب .

٢٣٧ — ملاحظة : لنذكر مرة ثانية اننا قبلنا في المسائل السابقة تناسب تزايد اللع والعدد ، وهذا مما لا يخلو من خطأ يمكن اهماله عند ما يكون هذا التزايد قليلا ليس بكبير .

توسع
في بحث اللوغاريتم

٢٣٨ — رأينا في (البند ٢١٠) انه لايجاد لوغاريتم عدد مثل ب غير موجود في السلسلة الهندسية ، نحصره ما بين حدين متتابعين منها مثل $ك^{د}$ ، $ك^{د+١}$ ونعتبر ان لع ب = د $ر$ بالنقص ، او لع ب = (د + ١) $ر$ بالزيادة .

ولنوضح الآن انه يمكن ان نجعل الفرق ب − $ك^{د}$ اصغر من اي عدد صغير اردنا مثل هـ وذلك بجعل عدد الاوساط الحسابية والهندسية ط عظيما بقدر ما نريد .

اي يمكن ان نجعل المتراجحة $ب - ك_{د} < هـ$ ..... (١) محققة مهما صغرت هـ .

فلاجل ان تكون المتراجحة (١) محققة يكفي بالاحرى ان تكون المتراجحة :

$$ك_{د+١} - ك_{د} < هـ \quad ..... \quad (٢)$$

محققة ، الا اننا نعلم بالتسلسل ان :

$$ك_{د+١} - ك_{د} = ك_{د} (ك - ١) < ب (ك - ١)$$

اذن : $ك_{د+١} - ك_{د} < ب (ك - ١)$

الا اننا نعلم من جهة ثانية ان $ك = \sqrt[ط+١]{ك}$ اذن :

$$ك_{د+١} - ك_{د} < ب \left(\sqrt[ط+١]{ك} - ١ \right) \quad ..... \quad (٣)$$

فيمكننا الآن (بند ٢٠٥) ان نكبر ط بقدر ما نريد حتى تصبح المعترضة $\left(\sqrt[ط+١]{ك} - ١ \right)$ اصغر من العدد الصغير $\frac{هـ}{ب}$ [وذلك بفرض $ب > ١$]

فتصبح المتراجحة (٣) من الشكل :

$$ك_{د+١} - ك_{د} < هـ$$ وهو المطلوب .

٢٣٩ — ملاحظة : بنفس الطريقة عيناً نبرهن ان $ك_{د+١} - ب < هـ$ مهما صغرت هـ [لانه لتكون هذه المتراجحة محققه يكفي ان تكون المتراجحة (٢) من البند السابق محققة] .

٢٤٠ — فيما سبق فرضنا ان $ب > ١$ ولو كان العدد ب موجباً واصغر من الواحد ، وفرضنا ان ب محصور ما بين $ك_{-(د+١)}$ ، $ك_{-د}$ لكان مقلوبه $\frac{١}{ب}$ اكبر من الواحد ومحصوراً ما بين $ك_{د}$ ، $ك_{د+١}$ فنجد

بمقتضى الحالة الاولى ان $ك_{د+١} - \frac{١}{ب} < هـ$ وبضرب الطرفين في $ب$ ثم

تقسيم الطرفين على $ك_{د+١}$ نجد ان :

$$ب - ك_{(د+١)-} < هـ \times \frac{ب}{ك_{د+١}}$$

وبما ان $ب > ١$ وبنفس الوقت $ك_{د+١} > ١$ اذن بالاحرى :

$$ب - ك_{(د+١)-} < هـ$$

مهما صغرت $هـ$ ، وهو المطلوب .

البحث السابع

الفائدة المركبة

٢٤١- تعريف : نقول ان المبلغ ب موضوع بفائدة مركبة ، فيما اذا كنا نضيف في نهاية كل سنة فائدته عليه ، لكي تعطى هذه بدورها فائدة في السنين التالية .

٢٤٢- مثال : اذا وضعنا ١٠٠ قرش بفائدة مركبة وبسعر ٥٪ يكون رأس مال السنة الثانية هو ١٠٠ + ٥ = ١٠٥ وتكون فائدة السنة الثانية هي ١٠٥ × ٠,٠٥ = ٥,٢٥ اذن رأس مال السنة الثالثة هو :

١٠٥ + ٥,٢٥ = ١١٠,٢٥ وهكذا

٢٤٣- قانون الفائدة المركبة : لنرمز بـ ح للفائدة الجزئية اي لفائدة القرش الواحد في السنة الواحدة ، وبـ ن لعدد السنين ، وبـ ر لرأس المال ، وبـ ا للمبلغ الحاصل من وضع ر قرشاً لمدة ن سنة بفائدة مركبة سعرها ح (من اجل القرش الواحد) ، ولنجد القانون الذي يعطي هذا البالغ ا ، فنقول :

لو وضعنا قرشاً واحداً في المصرف لاصبح هذا القرش الواحد في نهاية السنة الاولى ١ + ح قرشاً .

اذن : لو وضعنا في المصرف ر قرشاً لاصبح هـذا المبلغ في نهاية السنة الاولى ر (١ + ح) قرشاً ، فاذا سمينا هذا المجموع الحاصل في نهاية السنة الاولى $ا_1$ لكان :

$ا_1 = ر (١ + ح)$

اي في نهاية كل سنة يصبح رأس مال هذه السنة مضروبا بـ $(١ + حـ)$.

وبنفس المحاكمات السابقة نرى ان المبلغ $ا_١$ (الذي هو رأسمال السنة الثانية) يصبح

في نهاية السنة الثانية : $ا_٢ = ا_١ (١ + حـ)$

وبتعويض $ا_١$ بقيمتها نجد : $ا_٢ = ر (١ + حـ)^٢$

وبنفس الطريقة نجد ان : $ا_٣ = ر (١ + حـ)^٣$ وهكذا . . . .

مما يدلنا على ان المبلغ الحاصل في [نهاية] السنة التي رقمها ن هو :

$$\boxed{ا = ر (١ + حـ)^ن} \qquad (١)$$

فهذا القانون المسمى بقانون الفائدة المركبة والواجب حفظه يسمح لنا بحساب احدى الكميات الاربع ا ، ر ، حـ ، ن بعد معرفة الكميات الثلاث الباقية وذلك بواسطة استعمال الحسابات اللوغاريتمية غالباً .

وبالحقيقة في العلاقة (١) لو اخذنا لوغاريتم الطرفين نجد :

١ً) $لع ا = لع ر + ن لع (١ + حـ)$

٢ً) $لع ر = لع ا - ن لع (١ + حـ) = لع ا + ن مما لع (١ + حـ)$

او بصورة ثانية : $ر = \frac{ا}{(١ + حـ)^ن}$

٣ً) $ن = \frac{لع ا - لع ر}{لع (١ + حـ)} = \frac{لع ا + مما لع ر}{لع (١ + حـ)}$

٤ً) $لع (١ + حـ) = \frac{لع ا - لع ر}{ن} = \frac{لع ا + مما لع ر}{ن}$

فنجد اولاً $(١ + حـ)$ ومن ثم حـ

فهذه المساواة تدلنا على كيفية حل المسائل الاربع الآتية :

مسألة : ١) ما بالغ ر قرشاً بمدة ن سنة وبفائدة مركبة سعرها حـ قرشاً ؟

مسألة : ٢) ما هو رأس المال اللازم ر ، للحصول على ا قرشاً في مدة ن سنة وبفائدة مركبة سعرها ح قرشاً ؟

مسألة : ٣) ما هو عدد السنين اللازمة للحصول على ا قرشاً بوضع رأس مال قدره ر قرشاً بفائدة مركبة سعرها ح قرشاً ؟

مسألة : ٤) بأي سعر لفائدة مركبة وضع ر قرشاً لمدة ن سنة فاصبح ا قرشاً ؟

٢٦٤— ملاحظة : ١°) رأينا ان $ا = ر(١ + ح)^{ن}$ في المصارف يحسب هذا البالغ ا بواسطة جداول تعطي قيمة القوس $(١ + ح)^{ن}$ من اجل القيم المستعملة غالباً الى ح ومن اجل قيم ن من ١ الى ١٠٠ ، فبواسطة هذه الجداول لا يحتاج في حساب البالغ الا لعملية ضرب واحدة ، وهي ضرب رأس المال ر في قيمة القوس $(١ + ح)^{ن}$ المستخرجة من الجدول (*)

٢°) العلاقة $ا = ر(١ + ح)^{ن}$ التي وجدناها باعتبار ن عدداً صحيحاً من السنين تستعمل ايضاً عملياً عندما يكون ن عدداً كسرياً ، اوانه تتبع الطريقة الاتية : لحساب بالغ ر قرشاً لمدة سنتين و ٤ اشهر مثلاً ، نحسب اولاً بالغ هذا المبلغ لمدة سنتين ثم نضيف على هذا البالغ فائدته البسيطة لمدة ٤ اشهر .

***

امثلة

٢٦٥— مثال : ١) ما هو بالغ المبلغ ٣٩٥٠ فرنكا ، اذا وضع بفائدة مركبة سعرها ٤ ٪ لمدة ١٥ سنة ؟

الحل : لنبدل في المساواة $ا = ر(١ + ح)^{ن}$ المعاليم بقيمها فنجد :

(*) انظر الجدول في نهاية الكتاب .

$$\text{ا} = ٣٩٥٠ (١ + ٠,٠٤)^{١٥}$$

او : $\text{ا} = ٣٩٥٠ \times ١,٠٤^{١٥}$

اذن : لع ا = لع ٣٩٥٠ + ١٥ لع ١,٠٤

فبما ان لع ٣٩٥٠ = ٣,٥٩٦٦٠ ، لع ١,٠٤ = ٠,٠١٧٠٣

١٥ لع ١,٠٤ = ٠,٢٥٥٤٥

اذن : لع ا = ٣,٨٥٢٠٥

ومنها بواسطة جدول اللوغاريتم : ا = ٧١١٣ قرشاً .

٢٤٦ – مثال : ٢) ما هو بالغ المقدار ٢٤٨٠٠ قرش اذا وضع بفائدة مركبة سعرها ٥ ٪ لمدة ٣ سنوات و ٨ اشهر .

الحل : ان المدة هنا تساوي :

$$\text{٣ سنوات} + \text{٨ اشهر} = \frac{٣ \times ١٢ + ٨}{١٢} = \frac{١١}{٣} \text{ سنة}$$

والمساواة $\text{ا} = \text{ر} (١ + \text{ح})^{\text{ن}}$ تصبح :

$$\text{ا} = ٢٤٨٠٠ (١ + ٠,٠٥)^{\frac{١١}{٣}}$$

ومنها : لع ا = لع ٢٤٨٠٠ + $\frac{١١}{٣}$ لع ١,٠٥

فبما ان لع ٢٤٨٠٠ = ٤,٣٩٤٤٥ ، لع ١,٠٥ = ٠,٠٢١١٩ اذن :

$$\frac{١١}{٣} \text{ لع } ١,٠٥ = ٠,٠٧٧٦٩$$

٤,٣٩٤٤٥

٠,٠٧٧٦٩

اذن : لع ا = ٤,٤٧٢١٤

ومنها : $ا = ٢٩٦٥٨$ قرشاً .

تمرين: احسب بالغ المقدار السابق ٢٤٨٠٠ قرش لمدة ٣ سنوات ، ثم اضف على هذا البالغ فائدته البسيطة من اجل ٨ اشهر ، وقارن بين نتيجتي الطريقتين .

٢٦٧ - مثال : ٣) اي مبلغ وضع بفائدة مركبة سعرها ٥ ٪ لمدة ٣ سنين و ٨ اشهر فاصبح ٢٩٦٥٨ ؟

الحل : المدة هنا هي ايضاً : $\frac{٣ \times ١٢ + ٨}{١٢} = \frac{١١}{٣}$ سنة .

والمساواة $ا = ر (١ + ح)^{ن}$ تصبح :

$$٢٩٦٥٨ = ر (١ + ٠٫٠٥)^{\frac{١١}{٣}}$$

ومنها : $\text{لع } ٢٩٦٥٨ = \text{لع } ر + \frac{١١}{٣} \text{ لع } ١٫٠٥$

اذن : $\text{لع } ر = \text{لع } ٢٩٦٥٨ + \frac{١١}{٣} \text{ عا لع } ١٫٠٥$

فبما ان $\text{لع } ٢٩٦٥٨ = ٤٫٤٧٢١٤$ ؛ $\text{عا لع } ١٫٠٥ = \bar{١}٫٩٧٨٨١$

$$\frac{١١}{٣} \text{ عا لع } ١٫٠٥ = \bar{١}٫٩٢٢٣٠$$

اذن : $\text{لع } ر = ٤٫٣٩٤٤٤$

ومنها : $ر = ٢٤٨٠٠$ وهو المطلوب .

٢٦٨ - مثال : ٤) ما هي المدة اللازمة لمبلغ ٢٤٨٠٠ قرش ليصبح ٢٩٦٥٨ قرشاً فيما اذا وضع بفائدة مركبة سعرها ٥ ٪

الحل : المساواة $ا = ر (١ + ح)^{ن}$ تصبح :

$$٢٩٦٥٨ = ٢٤٨٠٠ (١ + ٠٫٠٥)^{ن}$$

فهنا وان كان يمكن اختصار الطرفين على ٢ فاننا لا نختصر لنستفيد من حساباتنا السابقة ، فنجد بأخذ لع الطرفين ان :

$$\text{لع } ٢٩٦٥٨ = \text{لع } ٢٤٨٠٠ + ن \text{ لع } ١,٠٥$$

$$\text{ومنها : } \quad ن = \frac{\text{لع } ٢٩٦٥٨ + \text{عا لع } ٢٤٨٠٠}{\text{لع } ١,٠٥} = \frac{٤,٤٧٢١٤ + \bar{٥},٦٠٥٥٥}{٠,٠٢١١٩} =$$

$$\frac{٠,٠٧٧٦٩}{٠,٠٢١١٩} = \frac{٧٧٦٩}{٢١١٩} = ٣,٦٦ \text{ سنة ، اي ٣ سنوات و ٨ اشهر تقريباً}$$

٢٤٩- مثال : ٥) باي سعر لفائدة مركبة وضع المبلغ ٢٤٨٠٠ قرش فاصبح ٢٩٦٥٨ قرشاً بعد مضي ٣ سنوات و ٨ اشهر ؟

الحل : القانون $ا = س (١ + ر)^{ن}$ يعطي كما في السابق :

$$(١ + ر)^{\frac{١١}{٣}} ٢٤٨٠٠ = ٢٩٦٥٨$$

$$\text{ومنها : } \quad \text{لع } ٢٩٦٥٨ = \text{لع } ٢٤٨٠٠ + \frac{١١}{٣} \text{ لع } (١ + ر)$$

$$\text{اذن : } \quad \text{لع } (١ + ر) = \frac{٣ (\text{لع } ٢٩٦٥٨ + \text{عا لع } ٢٤٨٠٠)}{١١} =$$

$$\frac{٣ (٠,٠٧٧٦٩)}{١١} = ٠,٠٢١١٩$$

ومنها : $١ + ر = ١,٠٥$ اذن : $ر = ٠,٠٥$ وهو المطلوب .

تمارين (*)

١] احسب بواسطة استعمال الجداول اللوغاريتمية المقدارين الآتيين :

١ً) $س = \frac{٢٤٨,٩٧٦٢ \times ٢,٧٢٨٤٥}{١٨٣٠,٤٢٧}$

٢ً) $س = \frac{\sqrt[٧]{(٢٦٩٢٦,٥)^{٣}} \times \sqrt[٥]{٢٦٢٩}}{\sqrt[٣]{(٦٢٥٨,٩٦)^{٢}}}$

٢] ١ً) احسب سطح دائرة نصف قطرها $ر = ٠,٥٩٧٥٥$ متراً .

٢ً) احسب حجم اسطوانة قاعدتها هذه الدائرة وارتفاعها :

$ع = ٠,٤٥٨٧٦$ متراً

٣] المطلوب حل المعادلة $\frac{(س-٤)(س-٥)}{١٠} = ١٠٠$

٤] المطلوب حل المعادلة $لع س = ٣ لع ٢٠ - ٥ لع ١٢$

٥] المطلوب حل المعادلة $\frac{س^{٢} - ٥س + ٦}{س} = ١$

٦] المطلوب حل مجموعة المعادلتين :

$٣ لع س - ٣ لع ع = ٢$

$٣ لع س + ٣ لع ع = ٤$

٧] المطلوب حل المعادلات الآتية :

١ً) $\frac{س^{٢} + ٣س - ٢}{٦} = ٣٦$

(*) يجد الطالب حل اكثر هذه التمارين والتمارين السابقة والتمارين الآتية في كتاب المسائل الرياضية للاستاذين هاشمي وبركات .

٢") $٢ \times ٥^{س} - \frac{٤٢٨}{٥^{س}} = ٥$

٣") $٨١ \times ٢^{س+٤} = ٦٤ \times ٩^{س-٥}$

٨] المطلوب حل المعادلات الاتية :

١") $٣^{س-١} - \frac{١٥}{٣^{س+١}} + ٣^{س} - \frac{٤٢}{٣^{س+١}} = ٠$

٢") $٤ \times ٥^{س} = ٦ \times ٤^{س-١}$

٩] احسب س بدلالة ب ، حـ بعد معرفة ان :

$$لع س = ٢ لع ب + ٣ لع حـ - ١ + لع \frac{١}{حـ}$$

١٠] حل المجموعة : $لع س + لع ع = لع ٦$ ؛ $٣ س - ع = ٧$

١١] ما هو الربح الجزئي للقرش الواحد لمبلغ وضع بالربح المركب لمدة ١٨ سنة ، فاصبح بالغه ثلاثة امثال هذا المبلغ ؟

١٢] ما هو الزمن اللازم لمبلغ وضع بالربح المركب بفائدة سعرها ٧ ٪ ليصبح بالغه مساوياً ١٢ مرة المبلغ الاصلي ؟

١٢] ما بالغ المقدار ٤٥٠٠٠ قرش اذا وضع لمدة ١٠ سنوات و ٩ اشهر بالربح المركب وبفائدة سعرها ٥ ٪ ؟

١٤] اراد رجل ان يؤمن لولده ايراداً سنوياً قدره ٢٥٠٠ قرش (يأخذه في نهاية كل سنة) لمدة ٦ سنوات . فاي مبلغ يجب ان يضع هذا الرجل مرة واحدة وبربح مركب لتأمين هذا الايراد وذلك بفرض السعر ٤٫٥ ٪ ؟

١٥] بلدة عدد سكانها ١٥٠٠٠٠ شخص ، وقد ازدادت نفوسها في مدة سنة ١٠٠٠٠ شخص ، فاذا فرضنا ان عدد نفوس هذه البلدة يزداد بالنسبة السابقة دوماً ، متى يبلغ عدد نفوسها ٢٥٠٠٠٠ شخص ؟

١٦] ما هو المبلغ اللازم وضعه بفائدة مركبة سعرها ٤,٥ ٪ لنحصل بعد مضي ٣٠ سنة على ٢٥٠٠٠ قرش؟

١٧] اي مبلغ يجب ان نضع بفائدة بسيطة سعرها ٥,٥ ٪ لمدة ١٢ سنة لنحصل على نفس الفائدة الحاصلة من المبلغ ٨٠٠٠ قرش اذا وضع لنفس المدة بربح مركب سعره ٥ ٪ ؟

١٨] وضعنا مبلغ ٤٠٠٠٠٠ قرش بالربح المركب لمدة معينة وبسعر معين، الا انه لو زادت هذه المدة سنة واحدة لزاد بالغه ٢٣١٥٢,٥ قرشاً، وبالعكس لو نقصت هذه المدة سنة واحدة لنقص بالغه ٢٢٠٥٠ قرشاً، فما هي هذه المدة المعينة ؟ وما هو هذا السعر ؟

١٩] اذا وضعنا قرشاً واحداً بفائدة مركبة سعرها ٥ ٪ ، فبعد كم سنة يصبح بالغه مليوناً من القروش ؟

٢٠] يقال ان مخترع الشطرنج طلب من الملك مكافأة له ان يوضع له في المربع الاول من مربعات رقعة الشطرنج التي عددها ٦٤ مربعاً ، قمحة واحدة ، وفي الثاني قمحتان ، وهكذا ١ ٢ ٤ ٨ ١٦ ٣٢ .... والمطلوب :

١ً) معرفة عدد هذه القمحات .

٢ً) وزن كمية القمح هذه بعد معرفة ان كل الف قمحة تزن ٤٨ غراماً

٣ً) اذا اردنا ان نحمل كمية القمح هذه في بواخر حمولة كل باخرة منها ١٠ آلاف طن ، فكم باخرة يلزمنا ؟

[ج = ٨٨٦٤٤٠٠٠ باخرة] .



مسائل عامة(*)

اعطيت في البكالوريا السورية وغيرها

١] لدينا المعادلة :

$س^٢ + (م - ٢) س - (م + ٣) = ٠$ والمطلوب :

١°) بين ان لهذه المعادلة جذرين واحسب مجموعهما وحاصل ضربهما .

٢°) ما هو مجموع مربعي هذين الجذرين ؟

٣°) عين قيمة م ليكون مجموع مربعي هذين الجذرين مساوياً لعدد معلوم مثل ك ، وما هي القيمة الصغرى التي يمكن اعطاؤها الى ك ؟

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٢٩)

٢] لدينا المعادلة :

$م س^٢ - (٢ م + ١) س + ٣ م - ١ = ٠$ والمطلوب :

١°) باي شروط يكون جذرا هذه المعادلة حقيقيين ؟

٢°) ادرس علامات هذين الجذرين بالنسبة للقيم المختلفة الى م .

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٢٩)

٣] باعتبار $س_ا$ ، $س_ب$ جذري المعادلة :

$س^٢ - (١ + هـ) س + هـ^٢ = ٠$ (١) المطلوب :

١°) تشكيل معادلة من الدرجة الثانية جذراها :

$$ص_ا = \frac{س_ا}{س_ب} \quad ، \quad ص_ب = \frac{س_ب}{س_ا}$$

٢°) ما هي قيم هـ التي تجعل $ص_ا$ ، $ص_ب$ (جذري المعادلة المشكلة في المطلوب الاول) حقيقيين ؟

(*) يجد الطالب حل اكثر هذه المسائل في كتاب المسائل الرياضية .

٣) ما هي قيم هـ التي تجعل احد الجذرين صَ ، صً مساوياً الى $\frac{١}{٤}$ ، وما هي حينئذ قيم س التي توافق قيم صَ ، صً ؟

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٢٩)

٤] لدينا نصف دائرة قطرها ب حـ = ٢ ر نأخذ على هذا القطر ب حـ نقطة مثل ل وباعتبار ب ل ، ل حـ قطرين ، نرسم نصفي دائرة داخل نصف الدائرة الاولى ، والمطلوب تعيين نقطة ل ليكون السطح المحصور بين هذه المنحنيات الثلاثة معادلاً سطح دائرة نصف قطرها هـ .

(البكالوريا السورية تشرين ٩٢٩)

٥] لدينا نصف دائرة قطرها ب حـ = ٢ ر والمطلوب تعيين نقطة مثل د على محيط نصف هذه الدائرة بصورة ان يكون ضعف سطح المثلث د ب حـ مضافاً اليه سطح المربع المنشأ على ب د بنسبة معلومة مثل ك مع سطح المربع المنشأ على ب حـ .

المناقشة : (يؤخذ ب ق = س باعتبار ق مرتسم د على ب حـ) .

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٢٩)

٦] لدينا ذات الحدود الثلاثة :

$$ا(س) = (٣ط - ٢)س^{٢} + ٢ط س + ٣ط$$

والمطلوب تعيين قيم ط حتى يكون :

١ً) للمعادلة ا(س) = ٠ جذر وحيد ينحصر بين -١ وبين (٠)

٢ً) للمعادلة السابقة جذران خارجان عن العددين (-١) ، (٠)

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٢٩)

٧] لدينا نصف الدائرة م التي قطرها ب حـ = ٢ ر ورسمنا المماس من نقطة حـ لنصف هذه الدائرة ، والمطلوب تعيين نقطة مثل ق على نصف هذا المحيط على ان يكون ب ق + ٢ ق د = ل باعتبار ق د العمود النازل من ق على المماس في حـ وباعتبار ل طولاً معلوماً .

ناقش ، (يؤخذ ق د = س)

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٣٠)

٨] حل وناقش المعادلة الاتية :

$$(م - ١)\,س^{٢} - ٢(م - ٢)\,س + ٣(م + ٣) = ٠$$

ما هي علامات الجذرين بحسب قيم م .

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٣٠)

٩] المثلث ب حـ د قائم الزاوية في ب وسطحه يساوي عدداً معلوماً ح اذا جعلنا هذا المثلث يدور حول المحور سَ س المار من الرأس ب والموازي الى حـ د ، نجد ان نسبة مجموع السطحين الحاصلين من دوران الضلعين ب د ، ب حـ الى السطح الحاصل من دوران الوتر حـ د تساوي عدداً معلوماً وهو ك ، والمطلوب حساب اطوال اضلاع المثلث ب حـ د وهي بَ ، حَ ، دَ بدلالة ح ، ك .

ناقش شروط امكان الحل .

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣١)

١٠] ليكن التابع ع للمتحول س وهو :

$$ع = س + ٢ + \frac{١}{س}$$ والمطلوب :

١ً) ضع المعادلة التي تحصل عليها عند ما نفرض ع = ك بالشكل

$$ب\,س^{٢} + حـ\,س + د = ٠$$

ثم فتش عن قيم ك التي يوجد من اجلها جذران ، وبعد ان تعين قيم ك التي يوجد من اجلها جذران ، ادرس علامات هذين الجذرين من اجل القيم المختلفة التي تأخذها ك .

٢ً) ادرس تغير التابع ع وقارن بين النتائج التي تحصل عليها وبين التي حصلت في اولاً .

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣١)

١١] ليكن التابع للمتحول س وهو :

$$ع = \frac{ق\,س - ٢}{س - ٢\,ق}$$ حيث ق تدل على عدد ما ، والمطلوب :

١ً) بين متى يكون هذا التابع متزايداً او متناقصاً بالنسبة للقيم المختلفة التي يمكن اعطاؤها الى ق .

٢ً) هل يمكن اعطاء قيمة الى ق بصورة ان يصبح ع ثابتاً مهما كانت قيمة س .

٣ً) ارسم الخط البياني لهذا التابع عند ما تكون ق $= \frac{١}{٢}$

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣١)

١٢] ليكن المخروط الحاصل من دوران المثلث المتساوي الاضلاع ب حـ د حول ارتفاعه ب م ولنفرض ان قطر القاعدة هو : حـ د $= ٢$ ر من النقطة ق الواقعة على حـ د (باعتبار حـ ق $=$ س) نمرر مستوياً عمودياً على المستوي ب حـ د وموازياً للضلع ب د فيقطع القاعدة بالوتر هـ ط ويقطع الضلع ب حـ في النقطة ج والمطلوب :

١ً) تعيين الطول حـ ق $=$ س لاجل ان تكون الزاوية هـ ج ط $= ١٢٠$ درجة .

٢ً) تعيين الطول حـ ق $=$ س لاجل ان يكون مجموع مربعات اضلاع المثلث هـ ج ط $=$ ل^٢ باعتبار ل^٢ كمية معلومة . ناقش

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣٢)

١٣] احسب اضلاع شبه المنحرف ب حـ د ق المتساوي الساقين والمرسوم على دائرة نصف قطرها ر بعد العلم ان محيطه يساوي ٢ ك ؟

١٤] ارسم مخروطاً دائراً مثل ل ب حـ على كرة مركزها م ونصف قطرها ر على ان يكون سطحه الجانبي مساوياً $\frac{٢}{٣}$ ر هـ .

ناقش ذلك بفرض المجهول س هو بعد رأس المخروط ل عن مركز الكرة ، واعتبار هـ وسيطاً .

١٥] لدينا المستطيل ب حـ د ق ضلعه ب حـ $=$ ط وضلعه ب ق $=$ هـ اوجد على ب حـ نقطة مثل ك اذا مد منها العمود ك ل على ب حـ كان : $\frac{\text{ب ل}}{\text{حـ ك}} = \frac{١}{٣}$ (باعتبار ل على د ق)

١١] لدينا مربع ومثلث متساوي الاضلاع ، مجموع ضلع المربع مع ضلع المثلث

المتساوي الاضلاع يساوي هـ ، ومجموع سطحيهما يساوي ط٢ ، فما هو طول ضلع كل منهما ؟

١٧] لتكن الدائرة م التي قطرها ب حـ = ٢ ر ولنأخذ على هذا القطر اعتباراً من م الطول م بَ = م حَ = س باعتبار س < ر ثم لنرسم الدوائر التي اقطارها ب بَ ، بَ حَ ، حَ حـ احسب س على ان يكون الفرق ما بين سطح الدائرة التي قطرها ب حـ وبين مجموع سطوح الدوائر الثلاث الاخيرة مساوياً ≠ ك٢ .

١٨] لتكن الدائرة (م ، ر) والدائرة (مَ ، $\frac{ر}{٢}$) عين على خط المركزين م مَ الذي طوله = $\frac{٥ ر}{٢}$ نقطة مثل ب واقعة بين م ، مَ اذا رسمنا منها المماس ب حـ والمماس ب حَ لهاتين الدائرتين كان : $\overline{ب حـ}^{٢} + \overline{ب حَ}^{٢} = ل^{٢}$

١٩] اذا كان المثلث ب حـ د متساوي الاضلاع ، طول ضلعه ب حـ = ل واخذنا على اضلاعه وباتجاه واحد الطول :

ب دَ = حـ بَ = د حَ = س يكون :

١ً) المثلث بَ حَ دَ متساوي الاضلاع .

٢ً) عين قيمة س لاجل ان تكون نسبة سطح المثلث بَ حَ د الى سطح المثلث ب حـ د تساوي ك

٢٠] لدينا نصف دائرة مركزها م وقطرها ب حـ = ٢ ر وفيها م د نصف قطر عمود على ب حـ والمطلوب :

١ً) تعيين الموازي بَ حَ الى ب حـ بصورة ان يكون :

$\overline{بَ حَ}^{٢} - \overline{ق ن}^{٢} = ل^{٢}$

وذلك باعتبار ق ، ن نقطتي تقاطع بَ حَ مع ب د ، حـ د وباعتبار ل عدداً معلوماً .

٢") ناقش وعين هذا الموازي ب َ حَ عند مايكون ل٢ مساوياً لنهايته العظمى .

٢١] المثلث ب ح د قائم الزاوية في ب ومتساوي الساقين ، طول وتره ح د = هـ سم عين على الوتر ح د نقطة مثل ن اذا نزلنا منها العمود ن ق على ب د كان :

$$\overline{ن ق}^{٢} + \overline{ن ب}^{٢} = ل^{٢}$$

٢٢] ارسم داخل الدائرة (ر ، م) مثلثاً متساوي الساقين ، على ان يكون مجموع ارتفاعه مع قاعدته يساوي ل .

٢٣] لتكن نصف الدائرة م التي قطرها ب ح = ٢ ر ولنرسم المماس ب د الذي طوله يساوي س ، ثم لنرسم من د المماس د ق لنصف هذه الدائرة م ، فالمطلوب :

١") حساب بعدي نقطة ق عن القطر ب ح وعن المماس ب د بدلالة س ، ر

٢") تعيين قيمة س ليكون مجموع هذين البعدين مساوياً ل .

٢٤] في المثلث ب ح د الضلع حَ = ٣ دَ وكل من سطحه ح وضلعه الثالث ب َ معلوم ، والمطلوب حساب الضلعين الآخرين حَ ، دَ بدلالة ح ، ب َ

٢٥] في الشبه المنحرف ب ح د ق القاعدة العليا ب ح = ل والسفلى د ق = ٢ ل والارتفاع ب م = هـ والمطلوب تعيين الموازي ب َ حَ الى القاعدتين والمحصور بينهما على ان يكون :

٣ × سطح ب ح حَ ب َ + ٢ × سطح ب َ حَ د ق = ك٢

٢٦] لتكن الدائرتان المتباعدتان (م ، ب َ) ؛ (مَ ، حَ) وليكن ب ح مماساً مشتركاً خارجياً لهما ، فبفرض ان م مَ = دَ المطلوب :

١") ايجاد المحل الهندسي لجميع النقط التي ترى منهما القطعة ب ح تحت زاوية قائمة ، ثم البرهنة على ان المستقيم م مَ يشترك بنقطتين مثل د ، ق مع هذا المحل .

٢) برهن على صحة العلاقتين :

م ق . م د = ب'^٢ ، م' ق . م' د = ح'^٢

٣') شكل وناقش المعادلة التي جذراها :

س' = م ق ، س'' = م د

٢٧] في الهرم الثلاثي (م ، ب ح د) الاحرف م ب ، م ح ، م د متعامدة ، واطوال اضلاع القاعدة ب ح د هي : ب' ، ح' ، د' والمطلوب :

١') حساب اطوال الاحرف م ب ، م ح ، م د وحجم هذا الهرم بدلالة ب' ، ح' ، د'

٢') برهن على ان مرتسم الرأس م على مستوى القاعدة ب ح د وهو م' ينطبق مع ملتقى ارتفاعات المثلث ب ح د

٣') برهن على ان سطح المثلث م ب ح هو وسط متناسب هندسي بين سطحي المثلثين م' ب ح ، د ب ح

٤') احسب نصف قطر الكرة المارة برؤوس هذا الهرم .

(البكالوريا السورية — حزيران ١٩٣٥)

٢٨] نأخذ على الضلع القائم م ع من الزاويه القائمة س م ع الطول م ب = ط ثم الطول ب ح = ك باتجاه واحد والمطلوب :

عين على م س نقطة مثل د لتكون الزاوية ح د ب مساوية للزاوية ب د م

٢٩] لدينا هرم رباعي رأسه هـ وقاعدته المربع ب ح د ق نرسم داخل هذه القاعدة الوتر ط ي موازياً للقطر ق ح وواقعاً مابينه وبين الرأس ب ثم نمرر من ط ي مستوياً يوازي الحرف هـ ب الذي هو فرضاً عمود على سطح القاعدة ب ح د ق

فبفرض ان : ق ح = ٢ ل ، هـ ب = ٣ ل ، ب و = س

باعتبار و موقع العمود النازل من ب على ي ط المطلوب :

١') عين ب و = س ليكون سطح المقطع الحاصل بواسطة المستوي السابق (المار من ي ط والموازي الى ب هـ) مساوياً عدداً معلوماً مثل ك' . ناقش .

٢ً) المستوي المار من ق ح والموازي الى هـ ب ؛ ثم المستوي الموازي الى ب هـ والمار من ط ن والموافق للوضع الذي يكون فيه سطح المقطع في النهاية العظمى ؛ هذان المستويان يقسمان جسم الهرم الى ثلاثة جوم . احسب جسم كل من هذه الاجزاء الثلاثة .

٢٠] لدينا محوران متعامدان م س ، م ع والنقطة هـ التي احداثياها موجبان وهما ط ، ن ، نمرر من النقطة هـ مستقيما متحولاً يقطع م س في ب ويقطع م ع في ح . فبفرض ان م ب = س المطلوب :

١ً) احسب بدلالة ط ، ن ، س سطح المثلث م ب ح

٢ً) شكل المعادلة التي تعطي س فيما اذا اردنا ان يكون سطح هذا المثلث مساوياً لكمية معلومة ل٢

٣ً) ادرس الحالة الخاصة الاتية عند ما :

ل = ٢ ، ط = ٣ ، ن = ٢

٢١] لدينا مثلث قائم متساوي الساقين ب ح د فيه ب ح = ب د = ١ ندور هذا المثلث حول ضلعه ب ح فيولد مخروطاً ، ثم نقطع هذا المخروط بمستو يوازي قاعدته ويقطع محوره ب ح في نقطة ق ، ثم نفرض ان ب ق = س والمطلوب تعيين س لتكون نسبة سطح المقطع الحاصل بهذا المستوي الى سطح الكرة التي قطرها ب ق تساوي عدداً معلوماً مثل ك .

٢٢] احسب اضلاع المثلث القائم بعد معرفة مجموع ضلعيه القائمين م ، ومعرفة نصف قطر الدائرة المرسومة داخله ر .

تطبيقات عددية : م = ١٥٣ متراً ، ر = ١٨ متراً

٢٣] لدينا شبه منحرف متساوي الساقين ب ح د ق علم ارتفاعه هـ وعلم ان قطره د ب عمود على ضلعه المائل ب ق ، كما علم ان الدائرتين اللتين قطراهما الضلعان المائلان ب ق ، ح د هما متماستان خارجا ، فالمطلوب حساب قاعدتي هذا الشبه المنحرف .

٢٤] لدينا دائرة مركزها م ونصف قطرها ر ، نرسم لهذه الدائرة الوتر ب ح ثم المماسين ح د ، ب د اللذين يلتقيان في د . فبفرض ان بعد الوتر ب ح على المركز م يساوي ل ، المطلوب :

١ً) احسب بدلالة ر ، ل انصاف اقطار الدوائر الخمس التي تتعلق بالمثلث ب ح د : المرسومة داخله ، المارة برؤوسه ، والثلاث التي تمس احد اضلاعه وامتداد الآخرين .

٢ً) من اجل اي قيمة الى ل يكون مجموع انصاف اقطار هذه الدوائر الخمس مساوياً كمية معلومة مثل ح .

٢٥] نأخذ على نصف دائرة قطرها ب ح نقطة مثل د ونرسم منها الوتر د ق موازياً الى ب ح ثم ننزل منها العمود د ط على ب ح . والمطلوب تعيين هذه النقطة د ليكون $\overline{ق ب}^2 + \overline{ق ط}^2 = ك^2$ باعتبار $ك^2$ كمية معلومة .

٢٦] المثلث م ب ح قائم الزاوية ومتساوي الساقين ، فيه $م ب = م ح = ل$ نرسم من م نصف المستقيم م ص الموازي الى ب ح والمتحد معه بالاتجاه ، ثم نرسم القاطع ب هـ ط الذي يقطع م ح في هـ ويقطع م ص في ط ، فبفرض ان $م ط = س$ المطلوب :

١ً) احسب بدلالة ل ، س ارتفاعي المثلثين هـ ب ح ، هـ م ط المتعلقين بالرأس هـ .

٢ً) احسب س ليكون مجموع سطحي هذين المثلثين يساوي كمية معلومة مثل $\frac{ك . ل^2}{2}$

٣ً) ناقش ، باعتبار ل ثابتة مع ان ك متحولة .

٢٧] لدينا نصف دائرة قطرها ب ح ، والمطلوب تعيين نقطة مثل ق على نصف هذه الدائرة لتكون نسبة $\frac{ق هـ}{ق ب} = ك$ باعتبار هـ موقع العمود النازل من ق على النصف القطر م د العمودي على ب ح وباعتبار ك كمية معلومة .

٣٨] احسب الضلعين القائمين ب حـ ، ب د من المثلث القائم ب حـ د بعد معرفة ان وتره حـ د = هـ وانه اذا دورنا هذا المثلث حول محور مار من الرأس ب ومواز للوتر حـ د تكون نسبة السطح الحاصل من دوران الضلعين القائمين ب حـ ، ب د الى السطح الحاصل من دوران الوتر حـ د تساوي ك . ما بين اي قيمتين يجب ان تتحول ك لتكون المسألة قابلة للحل ، اي ليكون هنالك حقيقة مثلث يوافق هذه المسألة ؟

تطبيقات عددية : ك = $\frac{١}{٢}$

٣٩] ١°) لدينا مخروط دوراني نصف قطر قاعدته ر وارتفاعه هـ . نقطع هذا المخروط بمستو يوازي القاعدة ويبعد عن رأس المخروط بمقدار س ، والمطلوب تعيين س ليكون السطح الجانبي للاسطوانة المحدودة بهذا المقطع وبقاعدة المخروط مساوياً لسطح قاعدة المخروط . ناقش .

٢° باعتبار س يوافق ما اتى في اولاً ، احسب الحجم المحصور ما بين السطح الكلي للمخروط والسطح الكلي للاسطوانة . وذلك بفرض ان ر = ١ ، هـ = ٣

٤٠] ١°) عين داخل الدائرة م الوتر ب حـ على ان يكون الفرق مابين طول هذا الوتر ب حـ ومابين بعده م د عن المركز م مساوياً كمية موجبة معلومة مثل ل . (نعتبر م د = س)

٢°) ناقش باعتبار ل موجباً ، ثم باعتبار ل سالباً .

٣°) ما هو الحل الهندسي لهذه المسألة .

٤١] نرسم في المثلث ب حـ د الذي قاعدته حـ د = ط وارتفاعه ب ق = هـ الموازي حَ دَ للقاعدة حـ د بحيث تكون حَ على ب حـ ، دَ على ب د ثم نصل حَ دَ ، د حَ فيتقاطعان في نقطة م والمطلوب :

١°) برهن على ان المثلثين م د دَ ، م حـ حَ متكافئان .

٢ً) احسب ح سطح المثلث د م حـ بدلالة بعد دَ حَ عن د حـ وليكن س .

٣ً) ما هي تغيرات ح عند ما تتحول س من الصفر الى هـ ؟

٤٢] لتكن المعادلة : ٢ س٢ - ١٠ هـ س + ٧ هـ - ١ = ٠ والمطلوب:

١ً) برهن على انه يوجد لهذه المعادلة جذران مهما كانت هـ .

٢ً) عين قيم هـ ليكون سَ٢ + سً٢ = ١ (نجد قيمتين الى هـ مثل هَ ، هً)

٣ً) احسب جذور هذه المعادلة عندما نبدل هـ بالقيمتين هَ ، هً .

٤٣] لدينا سطح منشوري مقطعه القائم مثلث متساوي الاضلاع مثل ب حـ د طول ضلعه ب حـ = ل نأخذ على الحرفين المارين من حـ ، د وباتجاه واحد ، الطول حـ حَ = س ، د دَ = ع والمطلوب:

١ً) ما هي العلاقة التي تربط س ، ع ليكون المثلث ب حَ دَ قائم الزاوية في حَ

٢ً) مع مراعاة اولاً احسب حجم المنشور الناقص ب حـ د دَ حَ عند ما ع = ل √٢

٤٤] نأخذ على الاحرف م س ، م ع ، م ص من الزاوية المجسمة الثلاثية م س ع ص المنتظمة والتي كل وجه من وجوهها يساوي ٦٠° ، الاطوال م بَ = ب ، م حَ = حـ ، م دَ = د بالترتيب . والمطلوب:

١ً) كيف يكون الهرم م بَ حَ دَ عند ما ب = حـ = د احسب في هذه الحالة ارتفاعه المتعلق بالرأس بَ .

٢ً) مع الرجوع للحالة العامة احسب اطوال اضلاع القاعدة بَ حَ دَ بدلالة ب ، حـ ، د وبين ان الشرط اللازم الكافي لتكون الزاويه حَ بَ دَ قائمة هو ان يكون :

حـ د - ب (حـ + د) + ٢ ب٢ = ٠

٣ً) بفرض ان الزاوية حَ بَ دَ قائمة وبمعرفة ب ، حـ + د = ك احسب بدلالة ب ، ك حجم الهرم م بَ حَ دَ (يلاحظ

ان الارتفاع المتعلق بالرأس ب' لم يتغير) ، ثم احسب حـ ، د وناقش وبين ان : د < ب < ٢ ب < حـ .

٤٥] لدينا كرة مركزها م ونصف قطرها ر ، نرسم لهذه الكرة القطر ب ب' ثم نرسم لها المقطع العمودي على ب ب' وليكن حـ حـ' الذي يبعد عن ب بمقدار س ، والمطلوب تعيين س ليكون مجموع سطح القبة الكروية حـ ب حـ' مع السطح الجانبي للمخروط م حـ حـ' مساوياً لكمية معلومة ء ل٢ . ناقش .

٤٦] لدينا ربع الدائرة ب م حـ . نمدد نصف القطر م حـ ونأخذ على امتداده النقطة ق على ان يكون م ق = ل ثم نصل ق الى نقطة ما مثل د من ربع هذه الدائرة ، ثم ننزل من د عموداً على م ق فيقطعه في هـ ، والمطلوب درس تغيرات الحجم الحاصل من دوران الشكل م ق د ب (باعتبار د ب قوساً) حول م ق وذلك عند ما تتنقل النقطة د (نعتبر م هـ = س) .

٤٧] لدينا هرم ثلاثي منتظم جميع احرفه متساوية ، والمطلوب حساب طول احد هذه الاحرف س بعد معرفة الفرق ح ما بين حجم الكرة المارة برؤوس هذا الهرم وبين حجم المخروط الذي ذروته احد رؤوس هذا الهرم ، وقاعدته الدائرة المارة بالرؤوس الثلاثة الباقية .

تطبيقات عددية : ح = ٣٥٠ سانتيمتراً مكعباً .

٤٨] ١°) لدينا مخروط دوراني رأسه د وارتفاعه د م = هـ ونصف قطر قاعدته يساوي ر . والمطلوب :

عين في مستوي القاعدة الوتر ب حـ بحيث يكون سطح المثلث ب حـ د مساوياً لعدد معلوم مثل ح٢ (يؤخذ بعد هذا الوتر عن م وليكن م ق = س) .

٢°) مع معرفة ان الارتفاع د م = هـ وان الزاوية م د ب تساوي ٦٠° احسب اضلاع المثلث ب حـ د عندما تكون ح٢ في النهاية العظمى لها .

٤٩] متى يكون للمعادلة :

$$س^{٢} - (ط + ٢) س + ٢ ط + ١ = ٠$$

جذور ؟ ادرس اشارات هذه الجذور ، واحسب احد هـذه الجذور بدلالة الآخر ؛ احسب قيم ط التي تجعل نسبة هذين الجذرين تساوي $\frac{٨}{٥}$ ثم احسب الجذرين في هذه الحالة . بأي شرط يكون لهـذه المعادلة جذران محصوران ما بين — ٢ و + ٢ ؟

٥٠] ١ً) اوجد المعادلة التي جذراها $س_{ا}$ ، $س_{ب}$ بعد معرفة ان :

$$\frac{١}{س_{ا}^{٢}} + \frac{١}{س_{ب}^{٢}} = هـ$$

وان : $س_{ا} \cdot س_{ب} = ط$

تطبيقات عددية : $هـ = \frac{٨٢}{٩}$ ، $ط = ١$

٢ً) بين على ان المعادلة التي نحصل عليها فيما سبق هي عين المعادلة التي تنتج من حساب الضلعين القائمين لمثلث قائم علم سطحه ح وارتفاعه المتعلق بالوتر ق .

تطبيقات عددية : ح = ٥٠٧٠ مترا مربعا ، ق = ٦٠ مترا

٥١] ١ً) ادرس تغيرات التابع : $ع = \frac{س + ٢}{٢ س - ٢}$ وارسم الخط البياني له .

٢ً) عين النقطتين ب ، حـ من هذا الخط باعتبار فاصلتيهما هما : س = ٢ ، س = ٢ + هـ ما هو الامثال الزاوي للمستقيم ب حـ ، وما هي معادلته ؟

٣ً) عند ما تتقرب هـ من الصفر فان القاطع ب حـ يتقرب من المماس المنحني في نقطة ب . برهن على ان نقطة ب هي منتصف المماس المنحني في ب والمحصور ما بين الخطين التقريبيين لهذا المنحني .

٥٢] لدينا دائرة مارة برؤوس المثلث ب ح د المتساوي الساقين والذي قاعدته ح د = ٢ ل وارتفاعه ب ق = هـ فعلى اي بعد س من الرأس ب يجب ان نرسم وترًا موازيًا الى القاعدة ح د ليكون هذا الوتر مقسومًا لثلاثة اقسام متساوية بالضلعين ب ح ، ب د
ناقش ، ثم اذكر الحل الهندسي .

٥٣] لدينا كرتان مركزهما واحد م ، ونصف قطر الاولى س مع ان نصف قطر الثانية س + ١ والمطلوب :

١ً) احسب الحجم ح المحصور ما بين هاتين الكرتين بدلالة س .

٢ً) عين س ليكون هذا الحجم ح مساويًا كمية معلومة ٤ ط ك باعتبار ك كمية موجبة ، ثم ناقش بحسب قيم ك .

٣ً) ارسم منحني تغيرات التابع ح = ن (س) واستنتج حلا ومناقشة بيانيين لما اتى في ثانيًا .

٥٤] لدينا كرة قطرها ب ح تقطع هذه الكرة بمستو عمود على ب ح ويبعد عن ب بمقدار س ، والمطلوب :

١ً) احسب ح حجم قطعة الكرة الحاصلة التي ارتفاعها س وقاعدتها المقطع ، ثم احسب حَ حجم الاسطوانة التي لها نفس القاعدة (المقطع) ونفس الارتفاع س .

٢ً) ادرس تغيرات التابع ع = $\frac{ح}{حَ}$ وارسم الخط البياني له .

٣ً) من اجل اي قيمة الى س تكون قيمة النسبة $\frac{ح}{حَ}$ مساوية لعدد معلوم مثل ك ؟ ناقش اولاً بصورة حسابية ، ثانيًا بصورة بيانية .

٥٥] احسب نصفي قطري مخروط ناقص دوراني مرسوم خارج كرة نصف قطرها ر بعد معرفة ان سطحه الجانبي يساوي سطح هذه الكرة .

٥٦] احسب نصفي قطري مخروط ناقص دوراني مرسوم خارج كرة نصف قطرها ر بعد معرفة ان حجمه يساوي ضعف حجم هذه الكرة .

٥٧] احسب نصف قطر وارتفاع اسطوانة مرسومة داخل كرة نصف قطرها ر بعد معرفة ان سطحها الجانبي يساوي نصف سطح هذه الكرة .

٥٨] لدينا كرة مركزها م ونصف قطرها ر ، والمطلوب معرفة باي بعد س عن المركز م يجب ان نمرر المستوي القاطع ب ح لهذه الكرة لتكون نسبة السطح الجانبي للمخروط المرسوم خارج هذه الكرة ، والذي قاعدته ب ح الى سطح القبة التي قاعدتها ب ح ايضاً تساوي ك . ناقش .

٥٩] لتكن المعادلة $هـ س^٢ - ٢ س - ٤ هـ - ١ = ٠$ والمطلوب :

١ً) برهن على انه يوجد لهذه المعادلة جذور مهما كانت هـ .

٢ً) عين قيم هـ ليكون لهذه المعادلة جذر اقل من الواحد وجذر آخر اكبر من الواحد .

٣ً) عين قيمة هـ ليكون مجموع مربعات هذين الجذرين مع مجموع هذين الجذرين يساوي ١١ .

٤ً) لنلاحظ التابع $ع = هـ س^٢ - ٢ س - ٤ هـ - ١$ عين قيم هـ ليكون هذا التابع موجباً عندما $س = ٠$ ولتكون نهايته العظمى تساوي ٤ ، ثم ادرس تحولاته وارسم خطه البياني .

٦٠] ١ً) ادرس تغيرات التابع $ع = \frac{٢ س + ١}{س - ١}$ وارسم خطه البياني ح

٢ً) ليكن المستقيم $ع = ح س$ فمن اجل اي قيمة الى ح يقطع هذا المستقيم المنحني ح في نقطتين ، او يكون مماساً له ، او يكون غير قاطع له .

٦١] ١ً) ادرس تغيرات التابع :

$$ع = \frac{١}{س^٢ - ٦ س + ٨}$$

وارسم خطه البياني .

٢ً) المطلوب حل ومناقشة المعادلة :

$$ط س^٢ - ٦ ط س + ٨ ط - ١ = ٠$$

٣) استخدم الخط البياني السابق لايجاد نتائج المناقشة التي توصلت اليها في ثانياً .

٦٢] النقطة ك تتحرك على المستقيم غير المحدود الواصل بين النقطتين ب ، حـ .

ادرس تغيرات النسبة $\frac{\overline{ك\,ب}}{\overline{ك\,حـ}}$ بدلالة $\overline{ب\,ك} = س$ وذلك بفرض

$ب\,حـ = ط$

استنتج من ذلك انه ، في الحالة العامة يوجد نقطة وحيدة تجعل النسبة

$\frac{\overline{ك\,ب}}{\overline{ك\,حـ}}$ مساوية هـ .

٦٢] ناقش جذور المعادلة :

$$س^{٢} - ٢\,\frac{٣ط - ٤}{ط - ٣}\,س + \frac{٧ط - ٦}{ط - ٣} = ٠ \qquad (١)$$

بحسب قيم الوسيط ط .

ثم بين ان الخط البياني للتابع :

$$ع = س^{٢} - ٢\,\frac{٣ط - ٤}{ط - ٣}\,س + \frac{٧ط - ٦}{ط - ٣} \qquad (٢)$$

يمر من نقطة ثابتة مهما كانت قيمة ط (وذلك باستثناء القيمة $ط = ٣$ طبعاً) احسب احداثيات هذه النقطة الثابتة . بفرض ب ، حـ نقطتي تقاطع هذا المنحني مع محور السينات ، بين ان النقطتين ب ، حـ متوافقتان متوافقتان بالنسبة لنقطتين ثابتتين مثل د ، ق مهما تغير الوسيط ط واحسب احداثيات هاتين النقطتين د ، ق .

٦٤] $ب\,ب'$ ، $حـ\,حـ'$ مستقيمان متوازيان ، و $ب\,حـ = ٢هـ$ هو العمود المشترك بينهما ، ولتكن م منتصف القطعة $ب\,حـ$ رأساً لزاوية قائمة ضلعاها يقطعان $ب\,ب'$ ، $حـ\,حـ'$ في ك ، ل على الترتيب . نفرض ان $ب\,ك = س$ ، $حـ\,ل = ع$ ، $ك\,ل = ص$ فالمطلوب :

١ً) اثبات صحة العلاقتين س ع = هـ٢ ، س + ع = ص

٢ً) احسب ح حجم المخروط الناقص الحادث من دوران الشبه المنحرف ك ب حـ ل حول ب حـ واحسب سطحه الجانبي ط وسطحه الكلي طَ واحسب ايضاً الحجم حَ الحادث من دوران المثلث م ك ل حول ب حـ . ما هي العلاقة الكائنة بين ح و طَ وبين ط ، حَ ؟

٣ً) عين قيمة ص بشرط ان يكون $\frac{ح}{ح_{\circ}}$ = ق ما هي الحدود التي يتغير ضمنها ق لاجل ان تتحقق العلاقة الاخيرة ؟ وما هي قيم س ، ع ، ص التي تقابل اصغر قيمة تأخذها ق .

٤ً) بين ان حجم المخروط الناقص الحادث من دوران ك ب حـ ل حول ب حـ يكون مرسوماً داخل الكرة التي قطرها ب حـ .

٦٥] احسب القاعدة السفلى ب حـ = ٢ س والقاعدة العليا د ق = ٢ ع واحد الساقين المتساويين ب ق = حـ د = ص لشبه منحرف متساوي الساقين مرسوم على دائرة نصف قطرها ر ، بعد العلم ان سطحه يساوي ل٢

٦٦] احسب قاعدتي شبه منحرف متساوي الساقين مرسوم على دائرة نصف قطرها ر ، وذلك بعد معرفة ان قطره = ل .

٦٧] لدينا محيط نصف دائرة قطرها ب حـ = ٢ ر والنقطة د واقعة على هذا المحيط والنقطة ل مرتسم د على ب حـ . فبفرض ب ل = س المطلوب :

١ً) حساب الاطوال د ب ، د حـ ، د ل بدلالة س ، ر

٢ً) عين س بشرط ان يكون الفرق بين الحجم الحادث من دوران نصف هذه الدائرة حول ب حـ وبين الحجم الحادث من دوران المثلث ب حـ د حول ب حـ ايضاً ، مساوياً لحجم مخروط قائم دائر ارتفاعه ٢ ر ونصف قطر قاعدته هـ . ما هي شروط امكان الحل .

٣ً) بفرض $ر = ١$ احسب التابع :

$$ع = -\frac{٢\overline{ب د}^{٢} + \overline{ح د}^{٢}}{ل ح}$$ بدلالة س

ادرس تغيرات هذا التابع وارسم خطه البياني وذلك عند ما تتغير د على نصف محيط الدائرة .

٦٨] ادرس تغيرات التابعين الآتيين ، وارسم الخطوط البيانية لهما :

١ً) $ع = \frac{س^{٢}}{س - ١}$ ٢ً) $ع = \frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} - ٤}$

٦٩] ادرس تغيرات التابع الآتي ، وارسم الخط البياني له :

$$ع = \frac{س}{س^{٢} - ٣ س + ٢}$$

٧٠] ان نقطة ك واقعة على القطر $ب ح = ٢ ر$ من الدائرة م والوتر د ك دَ عمود على هذا القطر في ك ، فبفرض $س = \frac{ب ك}{ك ح}$ احسب :

١ً) الاطوال $ب ك$ ، $ك ح$ ، $ك د$ ، $ب د$ ، $ح د$ بدلالة س ، ر

٢ً) حجم كلا الهرمين الحادثين من دوران المثلثين $ب ك د$ ، $ح ك د$ حول $ب ح$ ثم عين س بشرط ان يكون مجموع الحجمين السابقين يساوي المقدار $\frac{٢ \pi ط ر^{٣}}{٣}$ المفروض . ما هو الشرط الذي يجب ان تحققه ط لاجل ان تكون المسألة قابلة الحل ؟

٧١] كيفية حل مجموعة المعادلتين :

$$س = ع + \sqrt{\frac{س - ع}{س + ع}} \qquad \frac{٢٠}{س + ع} = (١)$$

$$س^{٢} + ع^{٢} = ٣٤ \qquad (٢)$$

٧٢] احسب نصف قطر الكرة التي تمس الحروف الستة المتساوية لهرم ثلاثي منتظم حرفه يساوي هـ .

٧٣] لدينا هرم ثلاثي رأسه م وقاعدته المثلث ب حـ د الذي اضلاعه :

ب حـ = ٦ م ، حـ د = ١٠ م ، د ب = ٨ م

وحروفه م ب = م حـ = م د = ١٣ م والمطلوب :

١ً) بين ان المثلث ب حـ د قائم الزاوية .

٢ً) احسب ارتفاع هذا الهرم وحجمه .

٣ً) على اي بعد من الرأس م يجب قطع هذا الهرم بمستو يوازي قاعدته بشرط ان ينقسم الى حجمين متكافئين ؟

٧٤] ١ً) احسب العددين س ، ع الموجبين بعد معرفة جدائها ح٢ ومجموعها م . لنفرض ح٢ مقداراً ثابتاً ، فما يمكنك ان تقول عن العددين س ، ع عندما يكون مجموعها م في النهاية الصغرى ؟

٢ً) لنلاحظ المعادلة :

ما (س) = (هـ٢ - هـ - ٢) س٢ + (٢ هـ٢ - ٢ هـ + ٥) س + (هـ٢ - هـ - ٢) = ٠ .

برهن على ان لها جذرين حقيقيين مهما كانت هـ . وان كلاً من هذين الجذرين هو تابع تناظري بالنسبة الى هـ . وما هما الجذران ؟

٣ً) كيف يجب ان تنتخب هـ لاجل ان يكون مجموع هذين الجذرين موجباً ؟ وفي هذه الحالة . ما القيمة التي نعطيها الى هـ لاجل ان يكون مجموع الجذرين في النهاية الصغرى ؟ وما هما الجذران عندئذ ؟

٤ً) اذا حللت هذه المعادلة بالنسبة الى هـ تجد لها جذوراً منطقة (اي قيما لا تحوي على علامة الجذر التربيعي) بين صحة ذلك . وهل يمكنك الوصول لهذه النتيجة استناداً على المطلب الثاني ؟

٥ً) بين على ان التابع ما (س) يمكن تفريقه الى مضروبين كل منهما من الدرجة الاولى بالنسبة الى كل من الحرفين هـ ، س ؟

٧٥] لدينا نصف كرة مركزها م وقطر قاعدتها حـ حَ = ٢ ر = ٢ ،

وسطح اسطواني قائم مرسوم على نصف هذه الكرة ، ولتكن ل نقطة تقاطع نصف الكرة مع نصف قطرها العمودي على قاعدتها حـ حَ ، ولنقطع نصف الكرة والاسطوانة بمستو يوازي القاعدة حـ حَ ، وليكن س بعد هذا المستوي عن ل . فهذا المستوي يقطع الكرة بدائرة ب بَ والاسطوانة بدائرة د دَ ، ولنلاحظ المخروط الذي قاعدته الدائرة ب بَ ورأسه م والمخروط الذي رأسه ل وقاعدته الدائرة د دَ . والمطلوب :

١ً) حساب حجم المخروط الاول وحجم المخروط الثاني بدلالة س وتشكيل النسبة ع التي تساوي نسبة الحجم الاول الى الثاني .

٢ً) انتخب س بشرط ان تكون النسبة السابقة تساوي هـ (هـ موجب او صفر) . المناقشة . ارسم الخط البياني للتابع ع باعتبار س تتغير من - ∞ الى + ∞ ، ثم وضح القسم الموافق منه لهذه المسألة .

٧٦] ١ً) عين قيم ط التي من اجلها يكون للمعادلة :

ا (س) = (ط - ١) س٢ - ٢ (ط - ٢) س + ط - ٤ = ٠ (١)

جذران ايجابيان .

٢ً) بفرض ان للمعادلة (١) جذرين ايجابيين هما سَ ، سً وبملاحظة المستطيل ب حـ د ق الذي فيه ب حـ = د ق = سَ ، حـ د = ب ق = سً وبفرض اننا ادرنا هذا المستطيل حول ضلعه ب حـ اولاً ثم حول ضلعه حـ د ثانياً فانه يطلب حساب ح مجموع الحجمين الحادثين من الدورانين بدلالة ط .

٧٧] لدينا ربع الدائرة ب م حـ التي مركزها م ونصف قطرها م ب = م حـ = ر نأخذ على نصف قطرها م ب النقطة ك بفرض م ك = س والمطلوب :

١ً) قدر الحجم ح الحادث من دوران السطح ب حـ ك ب (المحدد بالقوس ب حـ والقطعتين حـ ك ، ك ب) حول م ب والحجم حَ الحادث من دورانه حول م حـ ، ثم بين صحة المتراجحتين :

$ح \leqslant ح_{ن}$ ، $ح < ٢ ح_{ن}$

من اجل جميع اوضاع النقطة ك .

١ً) عين س لاجل ان يكون $\frac{ح}{ح_{ن}} = ط$ وذلك بفرض ط عدداً موجباً . المناقشة .

عند ما تكون المسألة قابلة الحل فانها تقبل جوابين مثل : $م ك' = س'$ ، $م ك'' = س''$. احسب المقدار .

$$ع = \frac{\overline{ك' ح'}^{٢} + \overline{ك'' ح''}^{٢}}{\overline{ر}^{٢}}$$

بدلالة ط ، وبين تغيرات هذا التابع عند ما تتغير ط وتكون المسألة قابلة الحل .

٧٨] لدينا جذع مخروط دوراني نصف قطري قاعدتيه ر ، س ، ولدينا اسطوانة لها نفس الارتفاع ونصف قطر قاعدتها هو ر ، والمطلوب :

١ً) احسب قيمة س بدلالة ر ، ب مع العلم ان نسبة الحجم الاول الى الثاني تساوي ب .

٢ً) احسب قيمة س اذا كانت $ب = \frac{٣١}{٧٥}$ ، $ر = ٥$ سم

٣ً) ما هي الحدود التي يمكن ان تتبدل بينها ب حتى تكون س موجبة واحسب قيم س المقابلة لهذه الحدود .

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣٣)

٧٩] محيط المثلث ب ح د القائم الزاوية في ب يساوي ٢ ك ونصف قطر الدائرة المرسومة داخله يساوي ر ، والمطلوب :

١ً) احسب سطح هذا المثلث بدلالة ك ، ر

٢ً احسب بدلالة ك ، ر مجموع الضلعين القائمين م وحاصل ضربهما ح

٣ً) عين بصورة هندسية م ، ح

٤ً) احسب الضلعين القائمين . ناقش .

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٣٤)

٨٠] لدينا الهرم م ب ح د ق الذي قاعدته نصف مسدس منتظم قطره ب ق اي: ب ح = ح د = د ق = ل ، والوجه م ب ق من هذا الهرم هو مثلث متساوي الاضلاع مستويه عمود على مستوي القاعدة ب ح د ق .

نمرر من الحرف ح د مستوياً يقطع م ب في بَ كما يقطع م ق في قَ ، ونفرض ان ب بَ = س فالمطلوب :

١ً) احسب بدلالة ل ، س سطح المقطع القائم للموشور الثلاثي الناقص ب بَ ح د ق قَ .

٢ً) احسب الحجم حم لهذا الموشور الناقص .

٣ً) ادرس تحولات هذا الحجم حم وارسم الخط البياني لهذه التغيرات باعتبار ل = ٢

(البكالوريا السورية — تشرين ١٩٣٤)

٨١] العددان س ، ع موجبان وسطها الحسابي ح = $\frac{س + ع}{٢}$ ووسطها الهندسي ى = $\sqrt{س \cdot ع}$ ووسطها التوافقي ق معطى بالمساواة :

$$\frac{١}{ق} = \frac{١}{٢}\left(\frac{١}{س} + \frac{١}{ع}\right)$$ والمطلوب :

١ً) برهن على ان . ح > ى > ق

ح — ى > ى — ق

٢ً) احسب س ، ع بعد معرفة الفرقين ن = ح — ى ، ط = ى — ق

تطبيقات عددية : ن = ٥ ؛ ط = ٤٫٨

٣ً) احسب س ، ع بعد معرفة الوسط الحسابي ح ومعرفة ان س ، ق ، ح تشكل سلسلة هندسية .

تطبيقات عددية : ح = ٤

٤°) حقق ان ع هو احد حدود هذه السلسلة .

ملاحظة : لحل المطلوب الثالث يمكن استعمال المجهول المساعد :

$$ص = \frac{ع - س}{٢}$$

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣٥)

٨٢] لتكن ذات الحدود الثلاثة :

$$(هـ + ١) س^{٢} - هـ س + (هـ - ١)$$ والمطلوب :

١°) من اجل اي قيم الى هـ يكون لذات الحدود هذه جذران محصوران ما بين العددين (- ٢) ، (+ ١) ؟

٢°) بفرض هـ = ١ ارسم منحني تحولات تابع ذات الحدود هذه عند ما $-٥ < س < +٣$. النهاية الصغرى .

٣°) من اجل اي قيمة الى ط يكون المستقيم ع = ط س - ٢ مماساً للمنحني السابق .

٤°) في الحالة السابقة وباعتبار المستقيم المماس محدوداً بنقطة تماسه حـ مع المنحني ونقطة تقاطعه د مع محور السينات ، احسب الحجم الحادث من دوران المثلث م حـ د بدورانه حول محور السينات .

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٣٦)

٨٢] ب حـ د هـ هرم ثلاثي منتظم ، حروفه كلها متساوية وتساوي الى هـ ، وليكن حَ دَ هَ مقطع هذا الهرم بمستو يوازي المستوي حـ د هـ وبفرض ب حَ = س المطلوب :

١°) احسب السطح الكلي وحجم الهرم ب حـ د هـ

٢°) برهن ان قيمة السطح الكلي لجذع الهرم حـ د هـ حَ دَ هَ تساوي $\frac{١}{٢} \sqrt{٣} (٢ هـ^{٢} - س^{٢})$

٣°) ما هو تحول هذا السطح عندما ترسم حَ القطعة المستقيمة ب حـ ؟ وما هو الخط البياني ؟

٤°) يراد ان يكون حجم جذع الهرم ح د هـ حَ دَ هَ يساوي م مرة حجم هرم ثلاثي منتظم حرفه ح حَ ، برهن ان موقع حَ يعين بالمعادلة :

س٢ + هـ س + هـ٢ = م (هـ — س)٢ . ناقش

(البكالوريا السورية — تشرين ٩٣٦)

٨٤] م ب ح د هـ هرم منتظم قاعدته مربع ، وحروفه كلها متساوية وكل منها يساوي ل ، والمطلوب :

١°) احسب عامده ، سطحه الكلي ، ارتفاعه ، حجمه . واحسب سطح المثلث م ك ق باعتبار ك ، ق منتصفي الحرفين ب ح ، د هـ

٢°) تمرر من الحرف ب ح مستوياً يلاقي الحرف م د في ص والحرف م هـ في ص (ص ، ص واقعتان على الحرفين وليس على امتدادهما) فينقسم الهرم الى قسمين .

هل يمكن ان يعتبر كل من هذين القسمين جذع موشور ثلاثي ؟

٣°) بفرض ان النقطة ص واقعة في منتصف م د ، عين نسبة سطحي المثلثين م ك ق ، ك ق ف

(ف هي نقطة تلاقي المستقيم ص ص مع م ق) عين نسبة حجمي الجسمين ب ح د هـ ص ص ، م ب ح ص ص

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٣٧)

٨٥] لتكن المعادلة :

(٢ هـ — ١) س٢ — ٢ (هـ + ٤) س + (٥ هـ + ٢) = ٠

فيها هـ وسيط موجب او سالب ، والمطلوب :

١°) تعيين هـ حتى يكون للمعادلة جذران .

٢°) تعيين هـ حتى يكون للمعادلة جذران محصوران بين — ١ و + ١

٣°) في حالة وجود جذرين للمعادلة ، احسب مجموع وجداء هذين الجذرين

بدلالة هـ وارسم الخط البياني الدال على تحول هاتين الكميتين عند ما يتحول الوسيط هـ

٤) برهن ان بين مجموع الجذرين وجدائها علاقة غير تابعة للوسيط هـ ، واستخدم هذه العلاقة لتعيين الاعداد التي يمكن ان تكون للمعادلة جذوراً مضاعفة عندما تأخذ هـ بعض القيم ، وقارن هذه النتائج مع النتائج المستخرجة من المطلوب الاول .

(البكالوريا السورية — حزيران ٩٣٨)

تم الكتاب

بعون الله فله المنة

١

جدول الفائدة المركبة

بالغ القرش الواحد في نهاية كل سنة

السنة	٣٫٥ ٪	٤ ٪	٤٫٥ ٪	٥ ٪	٥٫٥ ٪	٦ ٪
١	١٫٠٣٥ ٠٠٠	١٫٠٤٠ ٠٠٠	١٫٠٤٥ ٠٠٠	١٫٠٥٠ ٠٠٠	١٫٠٥٥ ٠٠٠	١٫٠٦٠ ٠٠٠
٢	١٫٠٧١ ٢٢٥	١٫٠٨١ ٦٠٠	١٫٠٩٢ ٠٢٥	١٫١٠٢ ٥٠٠	١٫١١٣ ٠٢٥	١٫١٢٣ ٦٠٠
٣	١٫١٠٨ ٧١٨	١٫١٢٤ ٨٦٤	١٫١٤١ ١٦٦	١٫١٥٧ ٦٢٥	١٫١٧٤ ٢٤١	١٫١٩١ ٠١٦
٤	١٫١٤٧ ٥٢٣	١٫١٦٩ ٨٥٩	١٫١٩٢ ٥١٩	١٫٢١٥ ٥٠٦	١٫٢٣٨ ٨٢٥	١٫٢٦٢ ٤٧٧
٥	١٫١٨٧ ٦٨٦	١٫٢١٦ ٦٥٣	١٫٢٤٦ ١٨٢	١٫٢٧٦ ٢٨٢	١٫٣٠٦ ٩٦٠	١٫٣٣٨ ٢٢٦
٦	١٫٢٢٩ ٢٥٥	١٫٢٦٥ ٣١٩	١٫٣٠٢ ٢٦٠	١٫٣٤٠ ٠٩٦	١٫٣٧٨ ٨٤٣	١٫٤١٨ ٥١٩
٧	١٫٢٧٢ ٢٧٩	١٫٣١٥ ٩٣٢	١٫٣٦٠ ٨٦٢	١٫٤٠٧ ١٠٠	١٫٤٥٤ ٦٧٩	١٫٥٠٣ ٦٣٠
٨	١٫٣١٦ ٨٠٩	١٫٣٦٨ ٥٦٩	١٫٤٢٢ ١٠١	١٫٤٧٧ ٤٥٥	١٫٥٣٤ ٦٨٧	١٫٥٩٣ ٨٤٨
٩	١٫٣٦٢ ٨٩٧	١٫٤٢٣ ٣١٢	١٫٤٨٦ ٠٩٥	١٫٥٥١ ٣٢٨	١٫٦١٩ ٠٩٤	١٫٦٨٩ ٤٧٩
١٠	١٫٤١٠ ٥٩٩	١٫٤٨٠ ٢٤٤	١٫٥٥٢ ٩٦٩	١٫٦٢٨ ٨٩٥	١٫٧٠٨ ١٤٤	١٫٧٩٠ ٨٤٨
١١	١٫٤٥٩ ٩٧٠	١٫٥٣٩ ٤٥٤	١٫٦٢٢ ٨٥٣	١٫٧١٠ ٣٣٩	١٫٨٠٢ ٠٩٢	١٫٨٩٨ ٢٩٩
١٢	١٫٥١١ ٠٦٩	١٫٦٠١ ٠٣٢	١٫٦٩٥ ٨٨١	١٫٧٩٥ ٨٥٦	١٫٩٠١ ٢٠٧	٢٫٠١٢ ١٩٦
١٣	١٫٥٦٣ ٩٥٦	١٫٦٦٥ ٠٧٤	١٫٧٧٢ ١٩٦	١٫٨٨٥ ٦٤٩	٢٫٠٠٥ ٧٧٤	٢٫١٣٢ ٩٢٨
١٤	١٫٦١٨ ٦٩٥	١٫٧٣١ ٦٧٦	١٫٨٥١ ٩٤٥	١٫٩٧٩ ٩٣٢	٢٫١١٦ ٠٩١	٢٫٢٦٠ ٩٠٤
١٥	١٫٦٧٥ ٣٤٩	١٫٨٠٠ ٩٤٤	١٫٩٣٥ ٢٨٢	٢٫٠٧٨ ٩٢٨	٢٫٢٣٢ ٤٧٦	٢٫٣٩٦ ٥٥٨
١٦	١٫٧٣٣ ٩٨٦	١٫٨٧٢ ٩٨١	٢٫٠٢٢ ٣٧٠	٢٫١٨٢ ٨٧٥	٢٫٣٥٥ ٢٦٣	٢٫٥٤٠ ٣٥٢
١٧	١٫٧٩٤ ٦٧٦	١٫٩٤٧ ٩٠٠	٢٫١١٣ ٣٧٧	٢٫٢٩٢ ٠١٨	٢٫٤٨٤ ٨٠٢	٢٫٦٩٢ ٧٧٣
١٨	١٫٨٥٧ ٤٨٩	٢٫٠٢٥ ٨١٧	٢٫٢٠٨ ٤٧٩	٢٫٤٠٦ ٦١٩	٢٫٦٢١ ٤٦٦	٢٫٨٥٤ ٣٣٩
١٩	١٫٩٢٢ ٥٠١	٢٫١٠٦ ٨٤٩	٢٫٣٠٧ ٨٦٠	٢٫٥٢٦ ٩٥٠	٢٫٧٦٥ ٦٤٧	٣٫٠٢٥ ٦٠٠
٢٠	١٫٩٨٩ ٧٨٩	٢٫١٩١ ١٢٣	٢٫٤١١ ٧١٤	٢٫٦٥٣ ٢٩٨	٢٫٩١٧ ٧٥٧	٣٫٢٠٧ ١٣٥
٢١	٢٫٠٥٩ ٤٣١	٢٫٢٧٨ ٧٦٨	٢٫٥٢٠ ٢٤١	٢٫٧٨٥ ٩٦٣	٣٫٠٧٨ ٢٣٤	٣٫٣٩٩ ٥٦٤
٢٢	٢٫١٣١ ٥١٢	٢٫٣٦٩ ٩١٩	٢٫٦٣٣ ٦٥٢	٢٫٩٢٥ ٢٦١	٣٫٢٤٧ ٥٣٧	٣٫٦٠٣ ٥٣٧
٢٣	٢٫٢٠٦ ١١٤	٢٫٤٦٤ ٧١٦	٢٫٧٥٢ ١٦٦	٣٫٠٧١ ٥٢٤	٣٫٤٢٦ ١٥٢	٣٫٨١٩ ٧٥٠
٢٤	٢٫٢٨٣ ٣٢٨	٢٫٥٦٣ ٣٠٤	٢٫٨٧٦ ٠١٤	٣٫٢٢٥ ١٠٠	٣٫٦١٤ ٥٩٠	٤٫٠٤٨ ٩٣٥
٢٥	٢٫٣٦٣ ٢٤٥	٢٫٦٦٥ ٨٣٦	٣٫٠٠٥ ٤٣٤	٣٫٣٨٦ ٣٥٥	٣٫٨١٣ ٣٩٢	٤٫٢٩١ ٨٧١

٢

جدول الفائدة المركبة

بالغ القرش الواحد في نهاية كل سنة

السنة	٣٫٥ ٪	٤ ٪	٤٫٥ ٪	٥ ٪	٥٫٥ ٪	٦ ٪
٢٦	٢٫٤٤٥٩٥٩	٢٫٧٧٢٤٧٠	٣٫١٤٠٦٧٩	٣٫٥٥٥٦٧٣	٤٫٠٢٣١٢٩	٤٫٥٤٩٣٨٣
٢٧	٢٫٥٣١٥٦٧	٢٫٨٨٣٣٦٩	٣٫٢٨٢٠١٠	٣٫٧٣٣٤٥٦	٤٫٢٤٤٤٠١	٤٫٨٢٢٣٤٦
٢٨	٢٫٦٢٠١٧٢	٢٫٩٩٨٧٠٣	٣٫٤٢٩٧٠٠	٣٫٩٢٠١٢٩	٤٫٤٧٧٨٤٣	٥٫١١١٦٨٧
٢٩	٢٫٧١١٨٧٨	٣٫١١٨٦٥١	٣٫٥٨٤٠٣٦	٤٫١١٦١٣٦	٤٫٧٢٤١٢٤	٥٫٤١٨٣٨٨
٣٠	٢٫٨٠٦٧٩٤	٣٫٢٤٣٣٩٨	٣٫٧٤٥٣١٨	٤٫٣٢١٩٤٢	٤٫٩٨٣٩٥١	٥٫٧٤٣٤٩١
٣١	٢٫٩٠٥٠٣١	٣٫٣٧٣١٣٣	٣٫٩١٣٨٥٧	٤٫٥٣٨٠٣٩	٥٫٢٥٨٠٦٩	٦٫٠٨٨١٠١
٣٢	٣٫٠٠٦٧٠٨	٣٫٥٠٨٠٥٩	٤٫٠٨٩٩٨١	٤٫٧٦٤٩٤١	٥٫٥٤٧٢٦٢	٦٫٤٥٣٣٨٧
٣٣	٣٫١١١٩٤٢	٣٫٦٤٨٣٨١	٤٫٢٧٤٠٣٠	٥٫٠٠٣١٨٩	٥٫٨٥٢٣٦٢	٦٫٨٤٠٥٩٠
٣٤	٣٫٢٢٠٨٦٠	٣٫٧٩٤٣١٦	٤٫٤٦٦٣٦٢	٥٫٢٥٣٣٤٨	٦٫١٧٤٢٤٢	٧٫٢٥١٠٢٥
٣٥	٣٫٣٣٣٥٩٠	٣٫٩٤٦٠٨٩	٤٫٦٦٧٣٤٨	٥٫٥١٦٠١٥	٦٫٥١٣٨٢٥	٧٫٦٨٦٠٨٧
٣٦	٣٫٤٥٠٢٦٦	٤٫١٠٣٩٣٣	٤٫٨٧٧٣٧٨	٥٫٧٩١٨١٦	٦٫٨٧٢٠٨٥	٨٫١٤٧٢٥٢
٣٧	٣٫٥٧١٠٢٥	٤٫٢٦٨٠٩٠	٥٫٠٩٦٨٦٠	٦٫٠٨١٤٠٧	٧٫٢٥٠٠٥٠	٨٫٦٣٦٠٨٧
٣٨	٣٫٦٩٦٠١١	٤٫٤٣٨٨١٣	٥٫٣٢٦٢١٩	٦٫٣٨٥٤٧٧	٧٫٦٤٨٨٠٣	٩٫١٥٤٢٥٢
٣٩	٣٫٨٢٥٣٧٢	٤٫٦١٦٣٦٦	٥٫٥٦٥٨٩٩	٦٫٧٠٤٧٥١	٨٫٠٦٩٤٨٧	٩٫٧٠٣٥٠٧
٤٠	٣٫٩٥٩٢٦٠	٤٫٨٠١٠٢١	٥٫٨١٦٣٦٥	٧٫٠٣٩٩٨٩	٨٫٥١٣٣٠٩	١٠٫٢٨٥٧١٨
٤١	٤٫٠٩٧٨٣٤	٤٫٩٩٣٠٦١	٦٫٠٧٨١٠١	٧٫٣٩١٩٨٨	٨٫٩٨١٥٤١	١٠٫٩٠٢٨٦١
٤٢	٤٫٢٤١٢٥٨	٥٫١٩٢٧٨٤	٦٫٣٥١٦١٥	٧٫٧٦١٥٨٨	٩٫٤٧٥٥٢٦	١١٫٥٥٧٠٣٣
٤٣	٤٫٣٨٩٧٠٢	٥٫٤٠٠٤٩٥	٦٫٦٣٧٤٣٨	٨٫١٤٩٦٦٧	٩٫٩٩٦٦٧٩	١٢٫٢٥٠٤٥٥
٤٤	٤٫٥٤٣٣٤٢	٥٫٦١٦٥١٥	٦٫٩٣٦١٢٣	٨٫٥٥٧١٥٠	١٠٫٥٤٦٤٩٧	١٢٫٩٨٥٤٨٢
٤٥	٤٫٧٠٢٣٥٩	٥٫٨٤١١٧٦	٧٫٢٤٨٢٤٨	٨٫٩٨٥٠٠٨	١١٫١٢٦٠٥٤	١٣٫٧٦٤٦١١
٤٦	٤٫٨٦٦٩٤١	٦٫٠٧٤٨٢٣	٧٫٥٧٤٤٢٠	٩٫٤٣٤٢٥٨	١١٫٧٣٨٥١٥	١٤٫٥٩٠٤٨٧
٤٧	٥٫٠٣٧٢٨٤	٦٫٣١٧٨١٦	٧٫٩١٥٢٦٨	٩٫٩٠٥٩٧١	١٢٫٣٨٤١٣٣	١٥٫٤٦٥٩١٧
٤٧	٥٫٢١٣٥٨٩	٦٫٥٧٠٥٢٨	٨٫٢٧١٤٥٦	١٠٫٤٠١٢٧٠	١٣٫٠٦٥٢٦٠	١٦٫٣٩٣٨٧٢
٤٩	٥٫٣٩٦٠٦٥	٦٫٨٣٣٣٤٩	٨٫٦٤٣٦٧١	١٠٫٩٢١٣٣٣	١٣٫٧٨٣٨٤٩	١٧٫٣٧٧٥٠٤
٥٠	٥٫٥٨٤٩٢٧	٧٫١٠٦٦٨٣	٩٫٠٣٢٦٣٦	١١٫٤٦٧٤٠٠	١٤٫٥٤١٩٦١	١٨٫٤٢٠١٥٤

الفهرس

الباب الثالث

معادلات الدرجة الثانية

صحيفة

البحث الاول

٣ المعادلات التي من الدرجة الثانية وذات المجهول الواحد .
١٧ تمارين ومسائل .
٢١ علاقات الجذور مع الامثال .
٣٦ المعادلات الصماء .
٤٠ تمارين .

البحث الثاني

٤٦ اشارة ذات الحدود الثلاثة التي من الدرجة الثانية .
٥٣ حل متراجحات الدرجة الثانية وذات المجهول الواحد .
٥٨ مقارنة عدد بجذري معادلة الدرجة الثانية .
٧٧ تمارين .

البحث الثالث

٨٥ المعادلات المضاعفة التربيع .
٩٦ معادلات الدرجة الثانية ذات المجاهيل المتعددة .
١٠٣ تمارين .

البحث الرابع

صحيفة

١٠٨ مسائل الدرجة الثانية .

١٢٧ تمارين .

البحث الخامس

١٣٣ توابع الدرجة الثانية .

١٥٧ التابع التناظري $ع = \frac{ب س + حـ}{ب' س + حـ'}$

١٨٢ تمارين .

البحث السادس

١٨٨ السلسلة العددية .

١٩٧ السلسلة الهندسية .

٢٠٨ تمارين .

٢١٢ اللوغاريتم .

البحث السابع

٢٤٠ الفائدة المركبة .

٢٤٦ تمارين .

٢٤٩ مسائل عامة اعطيت في البكالوريا السورية وغيرها .

٢٧٤ جدول الفائدة المركبة .

❀❀❀

DATE DUE



512:H34jA:c.1
هاشمي
الجبر الابتدائي
AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES
01025161

American University of Beirut

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT
UT VITAM HABEANT ABUNDANTIUS HABEANT
1866

512
H34jA
ev.1

General Library