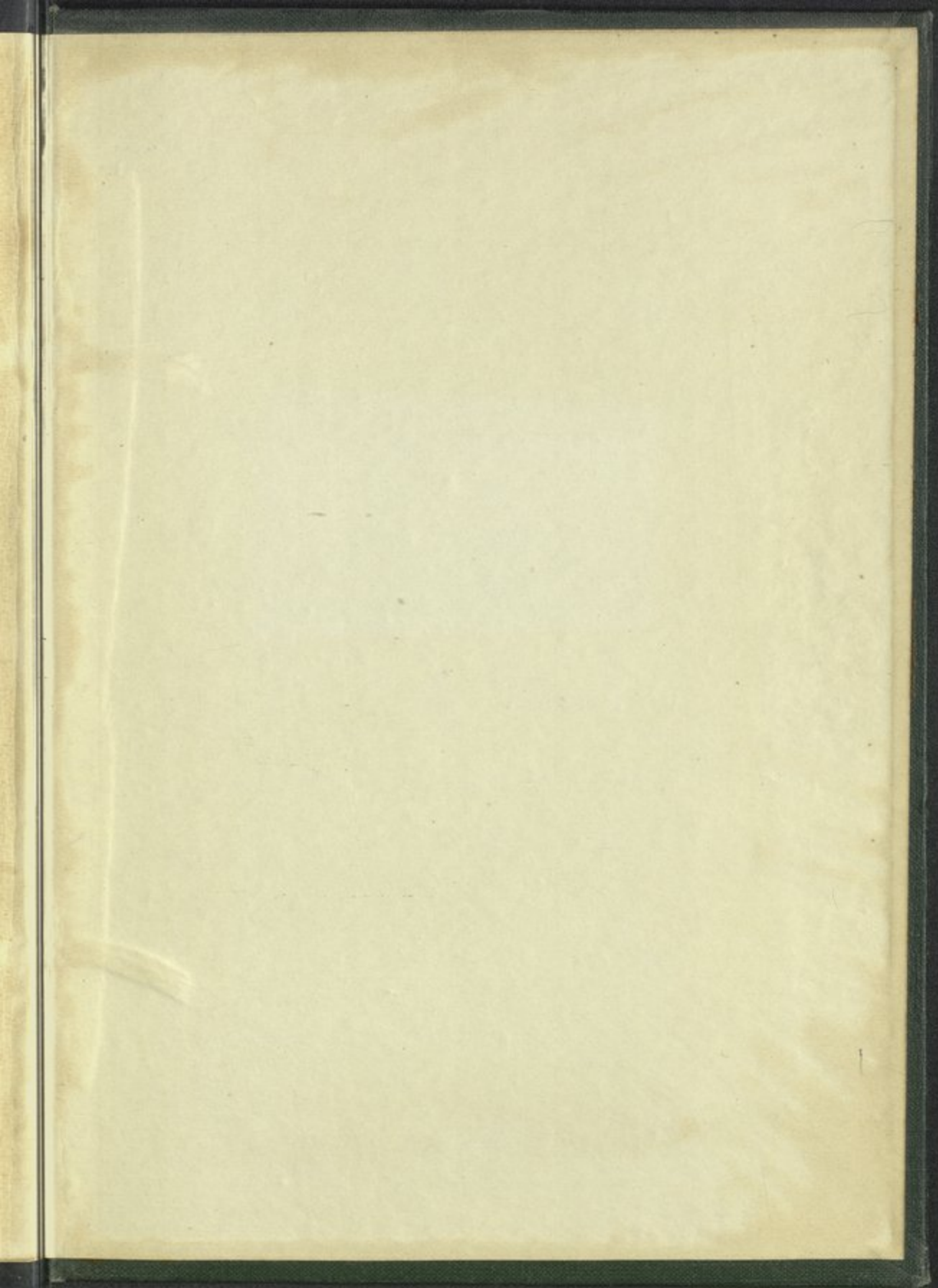


311.2 : A51m4.c1



311.2:A51mA

أمين ، أمين يس .

الفنحى الاحصائي 28.12.72

X-4387

311.2
A51mA

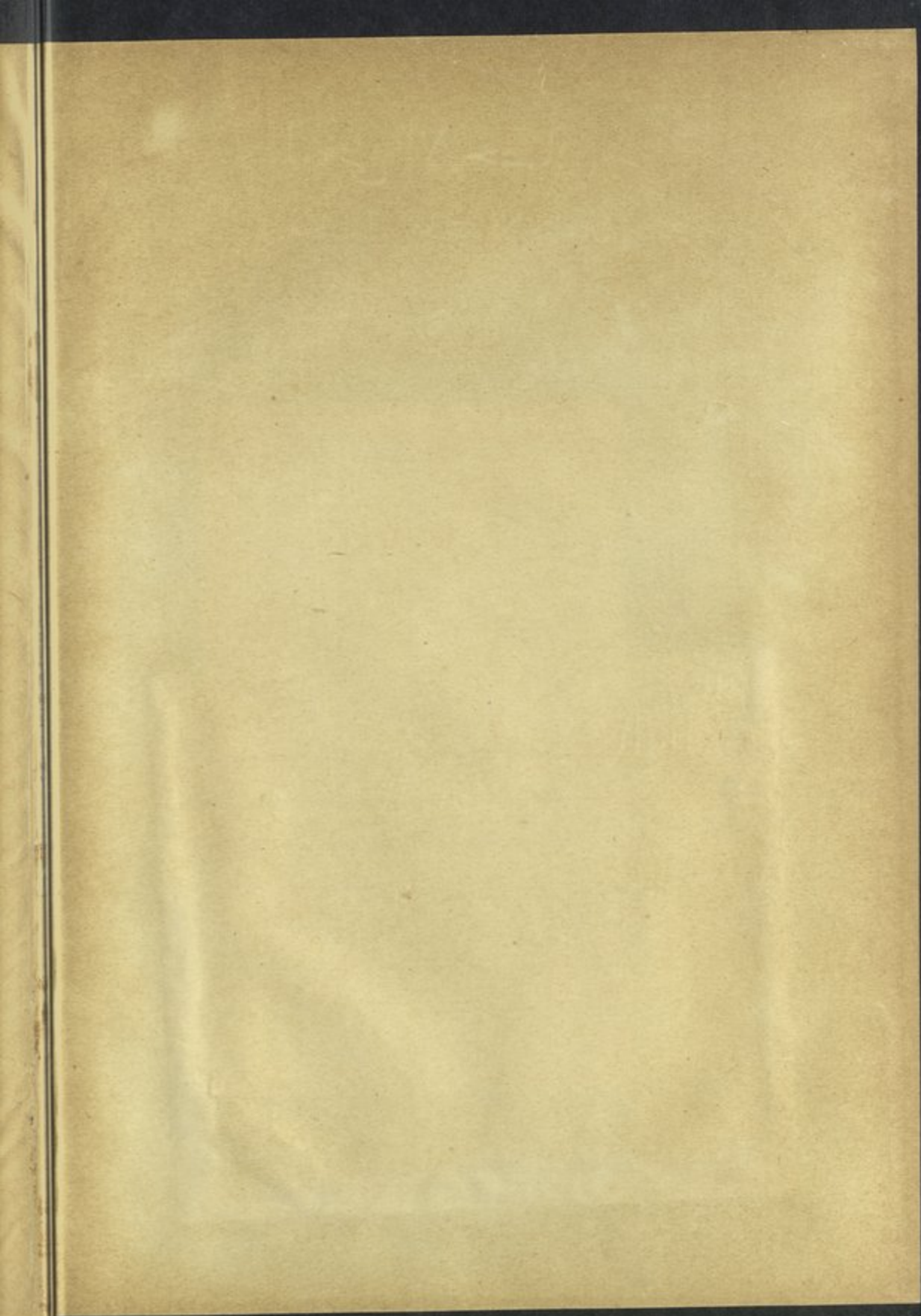
~~11 JAN 1973~~

JAFET LIB.

~~AP 10 '56~~

~~29 AUG 1988~~

مجلد
صالح النقر
بيروت - المزرعة



311.2
A51m A
C.1

المنحى الإحصائى

فى مبحث المعرفة عند الاجتماعيين

أمين يس أمين

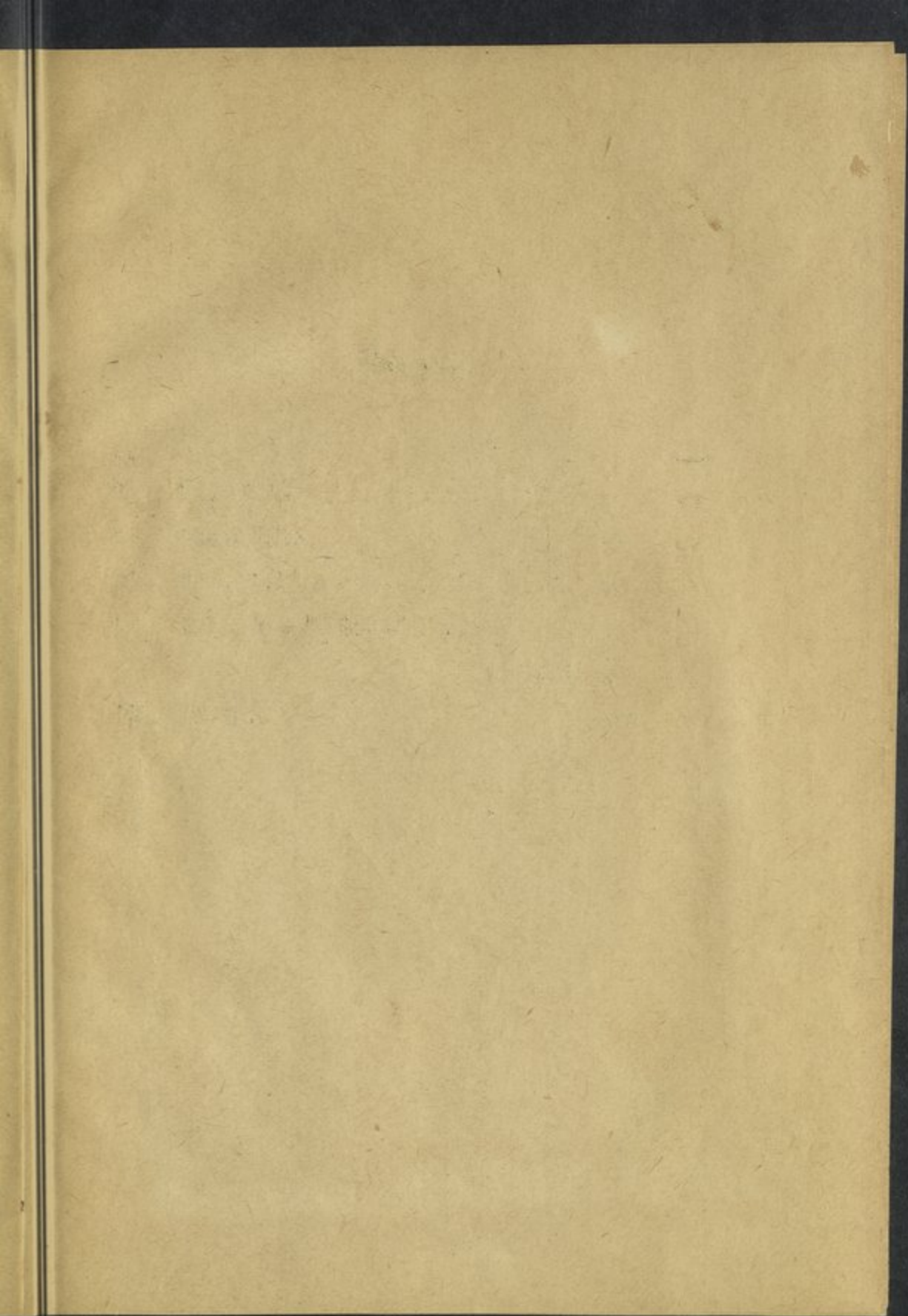
الناشر

مكتبة الأنجلو المصرية

١٦٥ ش محمد فريد — ت ٥٠٣٢٧

مطبعة الاعتماد

القاهرة



الباب الأول

الرسوم البيانية

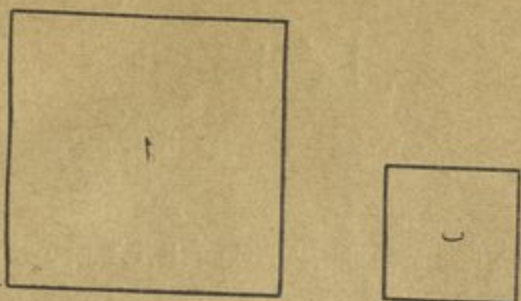
١ . تمتاز بعض العقول باستعداد منقطع النظير لتتبع الأعداد وعلاقاتها بينما البعض الآخر لا يفهمها إلا بشق الأنفس وهذا البعض يجد ضالته المنشودة في الرسوم البيانية . على أنه في بعض الحالات المعقدة تصبح الحاجة إلى شكل بياني ماسة عند الجميع يرون فيه عرضا للموضوع يعجز عن وصفه أى كلام وأى أرقام .

غير أن استخدام الصور والأشكال ليس ضروريا في كل حالة . بل وفي بعض الحالات تعطى هذه الأشياء فكرة غير صحيحة عن الموضوع فيلتبس الأمر وفي هذه الحالة تكون سيئات الشكل أكثر من حسناته . فمثلا إذا كنا نعلم أن عدد سكان مدينة ١ يساوى ضعف عدد سكان مدينة ب ففي إمكاننا إن شئنا أن نمثل عدد السكان في الحالتين بخطين مستقيمين طول أحدهما يساوى ضعف طول الآخر هكذا —

١ —————

ب —————

لكن الرسم البياني ليس ضروريا في هذه الحالة لأن العلاقة بين عدد السكان في المدينتين واضحة كل الوضوح ولا فائدة من رسم الشكل . ويتبدل الحال إذا نحن أخطأنا تحت تأثير فكرة أن المدينة إن هي إلا مساحة فمثلنا عدد السكان في المدينة بشكل دى بعدين وليكن مربعا . ذلك أنه إذا جعلنا طول ضلع أحد المربعين ضعف طول ضلع الآخر فإن النسبة بين الشككين الحادثين لا تكون ١ : ٢ بل ١ : ٤ ويعطى الشكل الحادث فكرة خاطئة عن الموضوع .



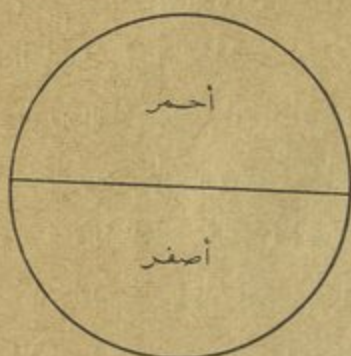
وإذا رسمنا الشكلين كما ينبغي بأن جعلنا نسبة طول الضلع في أحد المربعين إلى طوله في الآخر تساوي $2 : 1$ يبدو الشكل الحادث وكأن به خطأ إذ يفشل في الإيحاء إلى العقل في الحال بأن أحد الشكلين يساوي ضعف الآخر . فالشكل الحالي إذن لا يساعد العقل على فهم العلاقة المطلوب تمثيلها ولكنه يعوقه عن هذا الفهم كما نرى من الشكل السابق الذي فيه أحد المربعين يساوي تماما ضعف مساحة الآخر .

وإذا مثلنا عدد السكان في المدينتين بصورة رجلين طول أحدهما يساوي ضعف طول الآخر فلا شك أن الشكل الحادث يكون واقعيًا أكثر من سلفيه . لكنه في الواقع أسوأ حالا منهما لأنه يبالغ في تصوير الفرق أكثر من الشكل الثاني وهذا يرجع إلى أن الرجل له ثلاثة أبعاد . وهكذا نرى أن تمثيل الإحصائيات ذات البعد الواحد بأشكال لها أكثر من بعد واحد لا يساعدنا كثيرا على تتبع الأعداد وعلاقاتها وربما كان سببا في إعطائنا فكرة غير صحيحة عن الموضوع وبالأخص إذا تركت هذه الأشكال قارئها حائرا لا يدري أيقارن الأبعاد الطولية أم السطحية أم المكعبة . هذه الأشكال إذن مضللة وينبغي البعد عنها في أكثر الحالات .

٢ . الدائرة .

هناك شكل يسانی أقل عرضة للنقد من غيره من الأشكال ومعروف للجمهور بدرجة تكفي لفهمه بسرعة . هذا الشكل هو الدائرة البيانية ويتركب

من دائرة مقسمة إلى قطاعات تمثل أجزاء من مجموع كلى . وهو يستخدم إذا تركبت البيانات من أجزاء يتكون من اتحادها بمجموع واحد عام أو (بلغة أخرى) إذا كانت البيانات مصنفة حسب النوع .



هـب أن لدينا ١٠٠ بلحة مكونة من ٥٠ بلحة حمراء ومثلها صفراء وأتينا نزيد تمثيل هذه البيانات باستخدام طريقة الدائرة . لذلك نرسم دائرة ذات قطر مناسب ونقسمها إلى نصفين متساويين برسم أى قطر فيها ثم نلون النصفين باللونين الأحمر والأصفر .

وإذا تكونت المئة بلحة من ٥٠ بلحة حمراء و ٢٥ بلحة صفراء ومثلها



خضراء نقسم الدائرة إلى ثلاثة أجزاء بالكيفية الآتية . هناك ٥٠ بلحة حمراء وهذا يمثل نصف العدد الكلى وهو ١٠٠ . إذن يجب تمثيل البلح الأحمر بنصف مساحة الدائرة . ويقسم النصف الآخر إلى نصفين متساويين برسم نصف القطر العمودى على القطر

المنصف فيتم بذلك تمثيل البلح كله بألوانه الثلاثة الأحمر والأصفر والأخضر .

إذا رسمنا دائرة وقسمنا المحيط إلى ٣٦٠ قسماً متساوياً نسمى هذه الأقسام درجات وكل قسم يقيس زاوية قدرها درجة واحدة عند مركز الدائرة .

إذن أى جزء من مئة من المحيط يناظر قوسا قدره ٣٦ درجة ويقيس زاوية مركزية قدرها ٣٦ درجة . ولتمثيل أى بيانات إحصائية مركبة من أجزاء يتكون من اتحادها بمجموع كلى بطريقة الدائرة ننظر إلى المجموع كأنه

يمثل ١٠٠ للبهة ونعبر عن تكرار كل جزء كنسبة مئوية من المجموع . فإذا حولنا هذه النسب إلى درجات باستخدام العلاقة البسيطة آنفة الذكر أعنى

(١) ١ للبهة يساوى ٣,٦ درجة

تقسم مساحة الدائرة إلى قطاعات يمثل كل قطاع منها جزءا معينا من أجزاء البيانات . وعلى هذا النحو يتم تمثيل البيانات على الدائرة . ولا مانع الآن من تلوين الدائرة بالألوان الزاهية بشرط ألا نستخدم نفس اللون مع قطاعين متجاورين . فإن كان عدد القطاعات زوجيا يكفي لوانان وفي هذه الحالة يلون نصف القطاعات باللون الأسود مثلا ويترك النصف الآخر أبيض . إما إذا كان العدد فرديا فإن أصغر عدد يكفي من الألوان يكون ثلاثة . هذه العملية الأخيرة تستلقت النظر وتساعد الرسم على إظهار الحقائق .

وللمقارنة بين أى اثنين من القطاعات نرجع إلى النظريتين الآتيتين المعروفتين في الهندسة :

(١) إذا علم نصف القطر يتناسب القوس مع الزاوية المركزية ،
 (ب) إذا علم نصف القطر تتناسب مساحة القطاع مع الزاوية المركزية .
 فإذا استخدمنا (١) نرى أنه عند تمثيل البيانات بطريقة الدائرة يتناسب تكرار كل جزء مع القوس المناظر له . وإذا استخدمنا (ب) يتناسب التكرار مع مساحة القطاع المناظر .

مثال ١ . ارسم شكلا يمثل البيانات الآتية :-

تقسيم المحاصيل : القمح ٥٠ ٪ ، القطن ١٥ ٪ ، الشعير ١٢ ٪ ،
 الأذرة ٥ ٪ ، الأرز ١٨ ٪ .

هنا يحسن جدا رسم دائرة بيانية لأن البيانات كاملة بدليل أن مجموع النسب المئوية يساوى ١٠٠ ٪ ولا يحتمل أن تكون جزءا من جدول أكبر . ولا إنجاز هذا الشكل نذكر العلاقة (١) فنحسب عدد درجات كل قوس وننظم الأقواس بنسبة البيانات المعطاة .

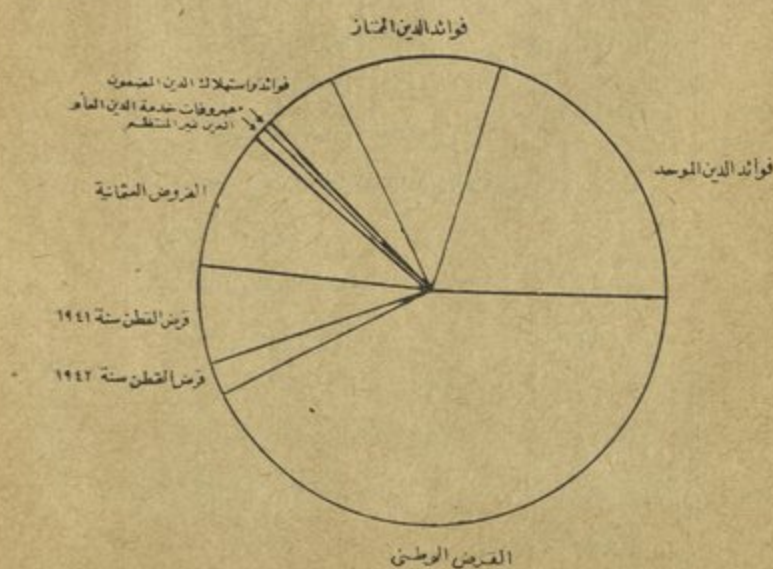


مثال ٢. نرى في الجدول الآتي تفاصيل مصروفات الدين العام للسنة المالية ١٩٤٣ - ١٩٤٤ ويراد تمثيل هذه البيانات على طريقة الدائرة .

جنيهاً مصرية	
	الدين المنتظم :
١٢١١٢٣٦	الدين الموحد
٦٩٦٥٧٠	الدين الممتاز
٣٠٧١٢٥	الدين المضمون
٢٦٤٤٤٤	استهلاك الدين المضمون
	مصروفات خدمة الدين العام
	ديون أخرى :
٤٦٢٨١	الدين غير المنتظم
٥٩٤٦٢٦	القروض العثمانية
٣٩٨٣٤٩	قرض القطن سنة ١٩٤١
١٢٤٩١٧	قرض القطن سنة ١٩٤٢
٢٤٨٣٦٨٢	القرض الوطني
٥٨٨٩٢٣٠	

لذلك نحول المبالغ في العمود الثاني من الجدول الآتي إلى نسب مجموعها ١٠٠ فنقسم كل مبلغ على المجموع. وفي العمود الثالث نحول النسب إلى درجات مجموعها يساوي ٣٦٠ أى عدد الدرجات في الدائرة فنضرب كل نسبة في ٣,٦.

المبلغ	%	الدرجات
١٢١١٢٣٦	٢٠,٦	٧٤
٦٩٦٥٧٠	١١,٨	٤٢
٣٠٧١٢٥	٥,٢	١٩
٢٦٤٤٤٤	٠,٤	٢
٤٦٢٨١	٠,٨	٣
٥٩٤٦٢٦	١٠,١	٣٦
٣٩٨٣٤٩	٦,٨	٢٤
١٢٤٩١٧	٢,١	٨
٢٤٨٣٦٨٢	٤٢,٢	١٥٢
٥٨٨٩٢٣٠	١٠٠,٠	٣٦٠



ولتمثيل البيانات بالكيفية المطلوبة نقسم دائرة إلى قطاعات زواياها ٧٤° و ٤٢° و ١٩° إلخ. والشكل الحادث لا لبس فيه لأن مساحة القطاع في الدائرة تتناسب مع الزاوية المقابلة عند المركز ومع القوس المقابل.

تمرينات .

١ . فندت تكاليف بذلة فوجد أن ٤٤ للثة تدفع للكرام و ٣٤ للثة للتكاليف الإضافية و ١١ للثة للمواد الخام و ١١ للثة للأرباح . ارسم دائرة تمثل البنود الأربعة . مثل أيضا مقدار كل بند بفرض أن البذلة تكلف ٣٢ جنيها مصريا .

٢ . لأسرة مصرية دخل سنوى قدره ١٠٠٠ جنيه وقد تبين من بحث قام به رب الأسرة أن هذا الدخل ينفق عادة على أبواب المصروفات المختلفة كما يلي :

٥١٩	الغذاء
١١٧	المسكن
١٤	الاجور
٥٨	السجائر والمصروفات النثرية
١٦٧	الملبس
٦١	المصروفات المدرسية
٦٤	المصروفات الأخرى
<u>١٠٠٠</u>	

ارسم شكلا تصور فيه هذه البيانات واذكر الأسباب التي حملتك على اختيار الشكل الذى ترسمه .

٣ . بين الجدول الآتى توزيع سكان مصر على الديانات المختلفة فى

تعداد ١٩٤٧ :-

١٧٣٩٧٦٠١	مسلمون
١٣٤٤٢٢١	أقباط
١٥٧٣٦٣	مسيحيون آخرون
٦٥٦٤١	إسرائيليون
١٩٤١	عقائد أخرى وحالات غير مبينة
١٨٩٦٦٧٦٧	

مثل هذه البيانات باستخدام الدائرة . خذ قطر الدائرة يساوى ٧ سم .

٣ . رسوم أخرى مبينة على الدائرة .

تصدر الحكومات والهيئات إحصائيات سنوية عامة وتحلى بعضها برسوم بيانية فيظهر الرسم أحيانا على شكل نصف دائرة أو ربع دائرة . هذه الأشكال تشبه الدائرة البيانية من حيث الفكرة ولا بأس من إعطاء نظريتها هنا .
هـب على سبيل المثال أننا نريد تمثيل بيانات المحاصيل كما جاءت في أول المثالين الأخيرين لا بدائرة كاملة وإنما بنصف دائرة . لعمل ذلك نلاحظ أن مجموع الزوايا عند مركز نصف الدائرة يساوى زاويتين قائمتين أو ١٨٠ درجة . إذن نحن نريد الآن تمثيل ١٠٠ للثة بهذا القدر من الزوايا ومعنى ذلك هو أننا نريد تمثيل ١ للثة بزاوية تساوى ١,٨ درجة . أى أن

$$(٢) \quad ١ \text{ للثة يساوى } ١,٨ \text{ درجة}$$

ولتحويل النسب المئوية إلى درجات نضرب الآن كل نسبة في ١,٨ .



ولتمثيل البيانات عينها على ربع دائرة نلاحظ أن الزاوية عند المركز تساوى في هذه الحالة ٩٠ درجة وأتينا نريد جعل هذه الزاوية تمثل ١٠٠ للبيئة . إذن في هذه الحالة

(٣) ١ للبيئة يساوى ٩٠ من الدرجة

والآن تحول النسب المئوية إلى درجات بالضرب في ٩٠ . هذا يعطى الشكل الآتى .



وقس على ذلك مع أى جزء من الدائرة .

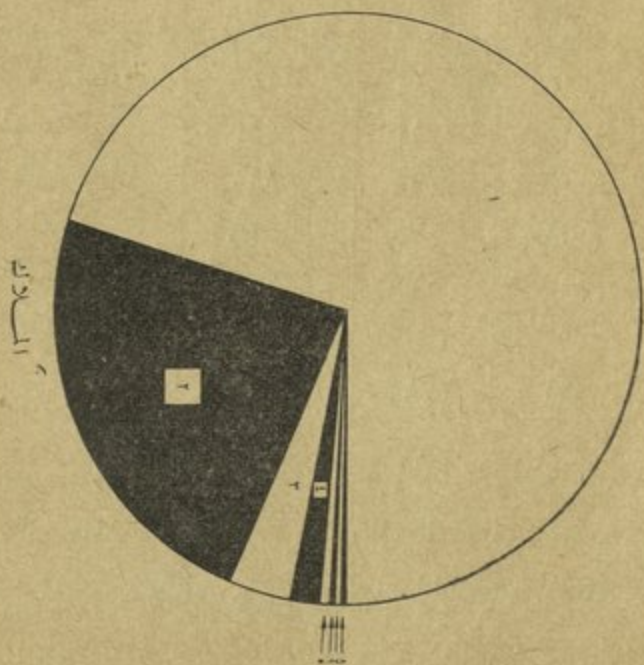
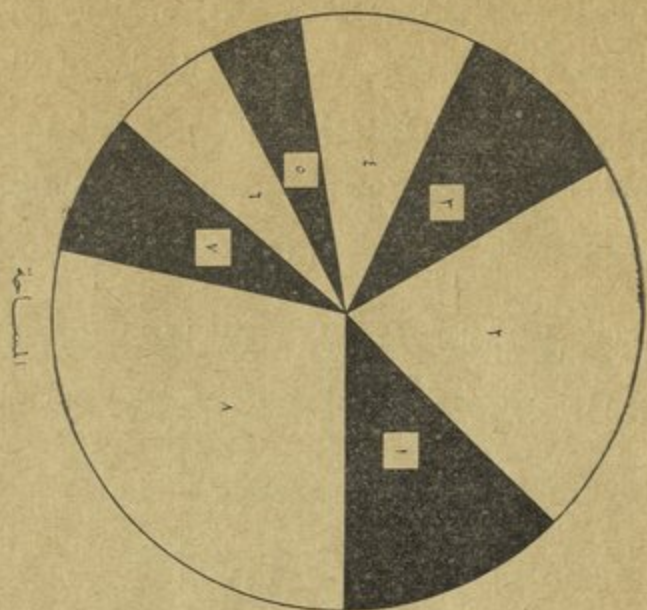
ومن الرسوم المبينة على الدائرة ما يتركب من دائرتين أو أكثر . فمثلا هب أن بيانات المثال ١ (صفحة ٤) تمثل تقسيم المحاصيل في ١٩٤٠ وأن لدينا خلاف هذه البيانات بيانات أخرى تمثل تقسيم المحاصيل في ١٩٥٠ وهب أننا نريد رسما بيانيا يمثل التوزيعين ويمكننا في الوقت نفسه من المقارنة بين التقسيمين . واضح أن أحد الرسوم الممكنة يتركب من دائرتين متساويتين ومتجاورتين تمثل إحداهما تقسيم ١٩٤٠ وتمثل الأخرى تقسيم ١٩٥٠ . ويمكننا أيضا في هذه الحالة تمثيل كل من التوزيعين بنصف دائرة (أو ربع دائرة إلخ) ووضع النصفين أحدهما فوق الآخر حتى يتركب منهما معا شكل دائرة واحدة كاملة .

مثال . يعطى الجدول الآتى بيانات عن توزيع الاراضى الزراعية فى مصر عام ١٩٤٣ . قارن عدد الملاك فى كل فئة من الفئات الثمان بالمساحة التى تملكها كل فئة وذلك برسم دائرة تبين التوزيع فى الحاليتين .

المساحة (آلاف الأفدنة)	الملاك (آلاف)	الملكية
٧٣٤	١٧٧٧	فدان أو أقل
١٢١٠	٥٩٩	١ — ٥
٥٧٠	٨٥	٥ — ١٠
٥٦١	٤١	١٠ — ٢٠
٢٨٦	١٢	٢٠ — ٣٠
٣٥٧	٩	٣٠ — ٥٠
٤٥٩	٧	٥٠ — ١٠٠
١٦٨٣	٥	أكثر من ١٠٠ فدان
٥٨٦٠	٢٥٣٥	

نحول الأرقام المعطاة إلى نسب مئوية فدرجات : —

الدرجات		٪		الملكية
المساحة	الملاك	المساحة	الملاك	
٤٥	٢٥٢	١٢,٥	٧٠,١	فدان أو أقل
٧٤	٨٥	٢٠,٧	٢٣,٦	١ — ٥
٣٥	١٢	٩,٧	٣,٣	٥ — ١٠
٣٥	٦	٩,٦	١,٦	١٠ — ٢٠
١٨	٢	٤,٩	٠,٥	٢٠ — ٣٠
٢٢	١	٦,١	٠,٤	٣٠ — ٥٠
٢٨	١	٧,٨	٠,٣	٥٠ — ١٠٠
١٠٣	١	٢٨,٧	٠,٢	أكثر من ١٠٠ فدان
٣٦٠	٣٦٠	١٠٠,٠	١٠٠,٠	



يمثل الشكل المرسوم الدائرتين البيانيتين النينى لتوزيع الملاك واليسرى لتوزيع الاراضى على الفئات الثمان وهذه ممثلة فى الشكل بالأرقام ١ إلى ٨ على الولا . هكذا كان توزيع الثروة العقارية فى مصر عام ١٩٤٣ بين الملاك مصريين وأجانب وأصحاب وقف لكن التوزيع الحالى للثروة يختلف كل الاختلاف عن توزيعها سنة ١٩٤٣ .

تمرين . يعطى الجدول الآتى توزيع الطلبة والطالبات على الكليات المختلفة فى جامعات القاهرة والإسكندرية وإبراهيم فى العام الدراسى ١٩٥١-١٩٥٢ .

الكلية	الطلبة	الطالبات	الطلبة والطالبات
الحقوق	٥٣٦٩	١٧٩	٥٥٤٨
الآداب	٣١٨٨	٩٤٣	٤١٣١
العلوم	٢١١٢	٢٣٣	٢٣٤٥
الطب	٥١٧٧	٥٦٢	٥٧٣٩
الصيدلة	٤٨٤	٦٥	٥٤٩
طب الأسنان	١٨٨	٢١	٢٠٩
الهندسة	٥٤١٣	١٢	٥٤٢٥
التجارة	٧٨٤٠	٢٦٦	٨١٠٦
الزراعة	١٩٣٩	٧٨	٢٠١٧
الطب البيطرى	٣٩٣	٢٢	٤١٥
دار العلوم	٦٨٩	٠	٦٨٩
	٣٢٧٩٢	٢٣٨١	٣٥١٧٣

- (١) ارسم دائرة للطلبة تبين توزيعهم على الكليات المختلفة . مهد لذلك باحتساب النسبة المئوية لكل كلية ثم حول هذه النسبة إلى درجات .
- (ب) ارسم دائرة للطالبات تبين توزيعهن على الكليات المختلفة .
- (ح) ارسم دائرة للطلبة والطالبات معا تبين توزيعهم على الكليات المختلفة .

٤ . دوائر ومربعات .

في بيانات المحاصيل (انظر صفحة ٤) إذا رسمنا خمس دوائر تتناسب مساحاتها مع النسب المعطاة (أو مع تكرارات الأجزاء المختلفة للبيانات) ووضعنا هذه الدوائر جنباً إلى جنب نحصل على رسم يمثل تلك البيانات . وإذا استعضنا عن الدوائر بمربعات نصل إلى نفس النتيجة .

لرسم هذه الدوائر أو المربعات نطبق النظريتين الآتيتين المعروفتين في الهندسة :

(ح) مساحة الدائرة تتناسب مع مربع نصف قطرها ،

(و) مساحة المربع تتناسب مع مربع ضلعه .

إذن لكي تمثل بيانات المحاصيل بدوائر أو مربعات علينا أولاً أن نحسب الجذور التربيعية للنسب المئوية المعطاة ^١ . هذه الجذور يمكن قراءتها بسهولة من جدول للجذور التربيعية وهي في هذه الحالة : —

القمح ٧,١ ، القطن ٣,٩ ، الشعير ٣,٥ ، الأذرة ٢,٢ ، الأرز ٤,٢ .

هذه الأرقام تعطى أنصاف أقطار الدوائر المطلوبة وأيضاً أضلاع المربعات . والشكل الآتي يرينا هذه المربعات .



واضح أيضاً أننا نستطيع تسخير الكرات و المكعبات بدل الدوائر

١ أو تكرارات الأجزاء نفسها إذا أعطيت البيانات في هذه الصيغة . لكن استخدام النسب المئوية أسهل في هذه الحالة من استخدام التكرارات نفسها .

والمربعات ويشترط في هذه الحالة أن تتناسب الأحجام مع النسب المئوية أو مع التكرارات رأساً . ولرسم الكرات أو المكعبات البيانية محققة لهذا الشرط نرجع إلى النظريتين الآتيتين المعروفتين في الهندسة :

(هـ) حجم الكرة يتناسب مع مكعب نصف قطرها ،

(٦) حجم المكعب يتناسب مع مكعب ضلعه .

من هذا نرى أنه لكي نمثل بيانات إحصائية بمجموعة من الكرات أو المكعبات يلزمنا قبل كل شيء أن نحسب الجذور التكعيبية للنسب المئوية أو للتكرارات أو لأي أعداد متناسبة مع هذه التكرارات .

٥ . المستطيل .

لا شك أننا نستطيع الاستعاضة عن الدائرة بمربع نقسمه بخطوط مستقيمة توازي أحد الأضلاع إلى مستطيلات يمثل كل واحد منها جزءاً معيناً من البيانات . وهذه هي في الواقع طريقة المربع البياني .

وقد نستعاض عن الدائرة بمستطيل فيسمى الشكل الحادث المستطيل البياني . وللمستطيل في الواقع تطبيقات كثيرة في الإحصاء أهم بكثير من تطبيقات غيره من الأشكال الهندسية البسيطة كالدائرة والمربع .

يؤدي المستطيل البياني نفس الغرض العام كالدائرة البيانية لكنه يستخدم حتى في الحالات التي فيها لا تكون البيانات مقسمة إلى أجزاء يتركب منها مجموع واحد عام . ويتركب الشكل في هذه الحالة من مستطيل واحد نحيف ويوضع في العادة وضعاً أفقياً . فالمستطيل إذن أعم نفعا من الدائرة وقد يكون أحسن منها . ذلك لأن العين غير المدربة تلتقي صعوبة في مقارنة زاوية بزاوية أو قطاع بقطاع أو في مقارنة عدة أقواس تتجه اتجاهات مختلفة .

لتمثيل مصروفات الدين العام في ١٩٤٣ — ١٩٤٤ كما أعطيت على الصفحة ٥ نبدأ برسم (خط مستقيم أو) مستطيل ذي طول وعرض مناسبين ونقسمه بالنسب المضبوطة . هذا خير ولا شك من الدائرة البيانية .

مصرفات الدين العام في ١٩٤٣ - ١٩٤٤					
٢٠٨	١٦٨	٤٠٢	١٠٨	٦٨	٢١
قروض الدين الموحد	قروض الدين الخزانة	قروض واستهلاك الدين	القروض الخارجية	قروض القطن سنة ١٩٤٣	قروض القطن سنة ١٩٤٢

وهكذا نرى للمرة الثانية أن الأشكال ذات البعد الواحد خير من غيرها .
ولكن حتى هذه لا تكون ضرورية إذا كان الغرض من الرسم هو المقارنة
بين حالات قليلة .

تمريعات .

- ١ . حل التمرين ١ صفحة ٧ مستخدماً المستطيل عوضاً عن الدائرة .
- ٢ . حل التمرين ٢ صفحة ٧ مستخدماً المستطيل عوضاً عن الدائرة .
- ٣ . يعطى الجدول الآتى المساحات التى خصصت لزراعة أهم أنواع القطن
في مصر عام ١٩٤٣ . ارسم مستطيلاً يبين الأنواع العشرة .

النوع	المساحة	النوع	المساحة
سكلاريدس	٩٩٥	ملكى (جيزة ٢٦)	٢٢٩٤٨
أشمونى وزاجوره	١٢٥٢٤٠	معرض	٧٢٩٤
منوفى (جيزة ٣٦)¹	١٢٠٩٦	كرنك (جيزة ٢٩)	٣٧٥٢٧٢
جيزة ٧	١٦٢٢٩٤	وفير (جيزة ١٢)	١٣٥٣
سخا ٤	٤٨٤٩	أنواع أخرى	٤٦٩
			٧١٢٨١٠

٦ . المستطيلات الأفقية .

إذا فصلنا بالقص المستطيلات الجزئية التى يتألف منها أى مستطيل بياني
نحصل على مستطيلات مستقلة والمستطيل الأسمى هو الشكل الحادث من وضع

١ كان القطن المنوفى يعرف باسم قطن جيزة ٣٦ . وقس على ذلك فى الحالات الأخرى .

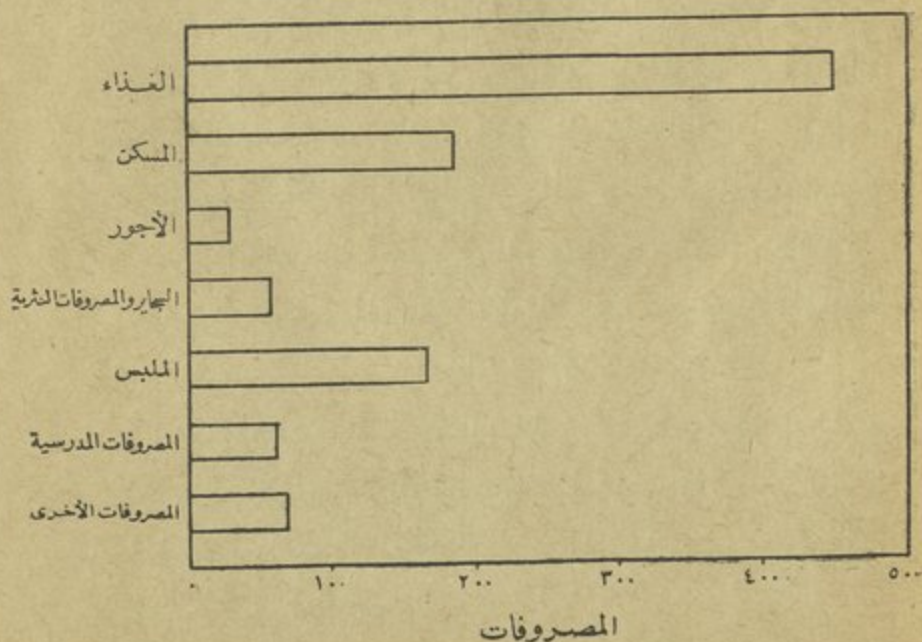
هذه المستطيلات الجزئية متجاورة ومتلاصقة في ترتيب معين بحيث يبدأ الواحد منها حيث ينتهى سلفه وبحيث يتألف منها جميعا مستطيل واحد . وقد توضع المستطيلات الجزئية أفقية فتكون متجاورة ولكن غير متلاصقة وترتب فيما بينها من أعلى إلى أسفل كما كانت مرتبة من قبل فيتكون منها شكل يمثل البيانات الأصلية . وهذه الطريقة الجديدة لتمثيل البيانات تكون أقوى بكثير من طريقة المستطيل البياني إذا كان الغرض من الرسم هو مجرد تمثيل توزيع واحد . لكننا سنرى في البند التالى أن المستطيل البياني يمكن استخدامه للمقارنة بين توزيعين مستقلين أو أكثر وفي هذا المضمار يحتل المستطيل مركزا أهم بكثير مما نتصور .

تستخدم المستطيلات الأفقية بصفة خاصة لتمثيل البيانات المصنفة حسب النوع . وتتركب الطريقة من تمثيل كل جزء من البيانات بمستطيل مستقل تناسب مساحته مع تكرار ذلك الجزء . فإذا جعلنا عروض المستطيلات متساوية — وهذا هو الشرط الرئيسى للطريقة — يكون طول كل مستطيل متناسبا مع تكرار الجزء الذى يمثله . وتقاس هذه الأطوال جميعا ابتداء من خط أساسى واحد يوضع عادة عند الحافة اليسرى للرسم وتترك مسافات صغيرة متساوية بين كل مستطيل وجاره . وقد جرت العادة على جعل المسافة المتروكة بين مستطيلين متجاورين مساوية لعرض المستطيل . وفى كل حالة تختار وحدة مناسبة للقياس ويوضع خط أفقى مدرج تحت الرسم ويحسن رسم خطوط رأسية خلف المستطيلات تمر ببعض نقاط التدرج حتى يمكن بها قراءة طول كل مستطيل على وجه التقريب من الرسم . وأخيرا يكتب البيان المناظر لكل مستطيل أمامه بجوار الخط الأساسى للرسم . ولا يكتب البيان داخل المستطيل لأن هذا يشوه الفكرة التى ينقلها الرسم إلى عقل الناظر ولا أمامه عند الطرف البعيد عن الخط الأساسى لأن هذا قد يجعل المستطيل يبدو أطول من الحقيقة .

مثال . لأسرة مصرية دخل سنوى قدره ١٠٠٠ جنيه وقد اتضح من بحث قام به رب الأسرة أن هذا الدخل ينفق عادة على الأبواب الرئيسية للعيش على النحو الآتى :

٤٥٠	الغذاء
١٦٠	المسكن
٣٠	الاجور
٥٨	السجائر والمصروفات النثرية
١٦٧	الملبس
٦٥	المصروفات المدرسية
٧٠	المصروفات الأخرى
١٠٠٠	

ويراد رسم شكل يصور هذه البيانات .
الشكل الآتى يؤدي إلى الغاية المطلوبة .



هذه المستطيلات الأفقية يمكن الحصول عليها بسهولة على الآلة الكاتبة إذا نحن حولنا مصروفات كل قسم إلى نسبة مئوية من الدخل الكلي للأسرة وقربنا النسب إلى أعداد صحيحة مجموعها ١٠٠ . بعد ذلك نمثل كل نسبة بعدد من الإشارات يساويها كما في الجدول المواجه حيث تمثل الأبواب بالأرقام ١ إلى ٧ .

هذه الإشارات تعطي شكل المستطيل ومن هذه المستطيلات يتركب الرسم البياني المطلوب . وهكذا يتم لنا ما نريد من تمثيل البيانات بمستطيلات أفقية دون أن نستخدم أداة واحدة من أدوات الرسم .

٧ . المستطيل كالدائرة يمكن استخدامه للمقارنة بين توزيعين مستقلين أو أكثر . لكن الدائرة خير من المستطيل في هذا المضمار . وتركب العملية من رسم مستطيل مستقل لكل توزيع ثم وضع هذه المستطيلات متوازية ومرتبطة من أعلى إلى أسفل مثلاً . وراعى جعل هذه المستطيلات تبدأ جميعاً عند خط رأسى واحد وطول الواحد منها متناسبا مع التكرار الكلي لتوزيعه . أما العروض فكلها متساوية وكذلك المسافات الفاصلة بين المستطيلات . يمثل هذا الشكل أجزاء كل توزيع ولكنه يجعل المقارنة بين تكرارات الأجزاء المختلفة صعبة بعض الشيء . وحتى إذا حولت التكرارات إلى نسب مئوية قبل رسم الشكل فقد لا تكون المقارنة بين التوزيعات ميسورة وبالأخص إذا كانت النسب المئوية في هذه التوزيعات مختلفة اختلافاً بينا . هذه إحدى الوسائل الممكنة لإجراء المقارنة باستخدام فكرة المستطيل الأفقى . وهناك غيرها وسيلتان أخريان على الأقل . فإما أن نرسم

(١) مستطيلات مستقلة عددها يساوى عدد الأجزاء في كل توزيع وذلك للتوزيع الأول وحده ثم ترتيب هذه المستطيلات فيما بينها على نحو ما جاء فيما تقدم . وتحت هذه عدد مساو من المستطيلات للتوزيع التالى . وهلم جرا حتى التوزيع الأخير ،

أو (ب) مستطيلات عددها يساوى عدد التوزيعات تمثل الأجزاء الأولى فيها . وتحت هذه عدد مساو من المستطيلات للأجزاء الثانية . وهلم جرا حتى الجزء الأخير .

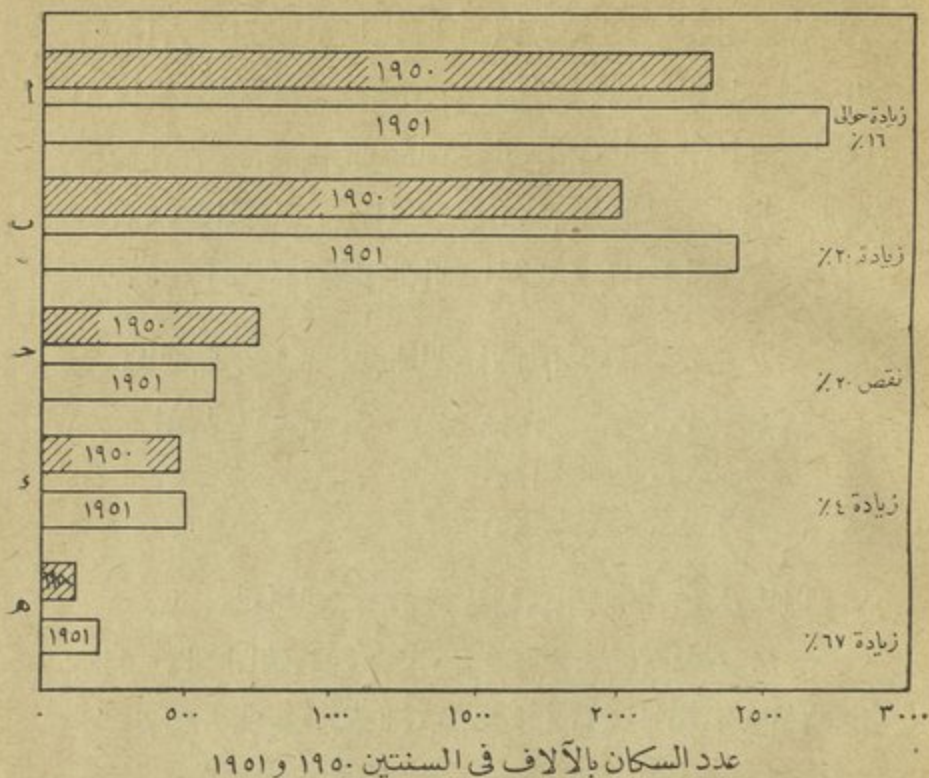
وتستخدم الطريقة (١) إذا كان الغرض الرئيسى من الرسم المقارنة بين تكرارات الأجزاء المختلفة لكل توزيع على حدة . وواضح أنها ستكون متعبة إذا كان يوجد أكثر من توزيعين اثنين لأن كثرة المستطيلات فى هذه الحالة تجعل الرسم لا يعين العين على رؤية المستطيلات المطلوبة بسهولة . أما الطريقة (ب) فتستخدم إذا كان الغرض الرئيسى المقارنة بين تكرارات الأجزاء المتناظرة فى التوزيعات المختلفة . لكن هذه الطريقة تخفى معالم الصور الأصلية للتوزيعات إخفاء يكاد يكون تاما .

مثال . ارسم شكلا مناسباً لمقارنة التغيرات فى الأحجام النسبية للأقسام فى سنتين من البيانات الآتية (الأرقام خيالية) .

عدد السكان فى أقسام المدينة م فى		
١٩٥١	١٩٥٠	
٢٧٠٠٠٠٠	٢٣٠٠٠٠٠	أ
٢٤٠٠٠٠٠	٢٠٠٠٠٠٠	ب
٦٠٠٠٠٠	٧٥٠٠٠٠	ج
٥٠٠٠٠٠	٤٨٠٠٠٠	د
٢٠٠٠٠٠	١٢٠٠٠٠	هـ

مطلوب منا فى هذا السؤال رسم شكل لمقارنة الأحجام النسبية . وفى أى بحث من هذا النوع يحتمل إجراء المقارنة لا بين الأقسام فحسب ولكن بين كل سنة فى كل قسم . إذن الشكل الذى يرسم يجب أن يسمح بالمقارنة بطريقتين . أما احتساب الزيادة أو النقص للفترة فى عدد السكان فى كل قسم فليس ضروريا جدا رغم أن هذا هو الخطوة التالية المنطقية فى البحث .

الشكل الآتى يمثل البيانات ويمثل أيضا النسب المثوبة للزيادة أو النقص .



٨ . المستطيلات الرأسية .

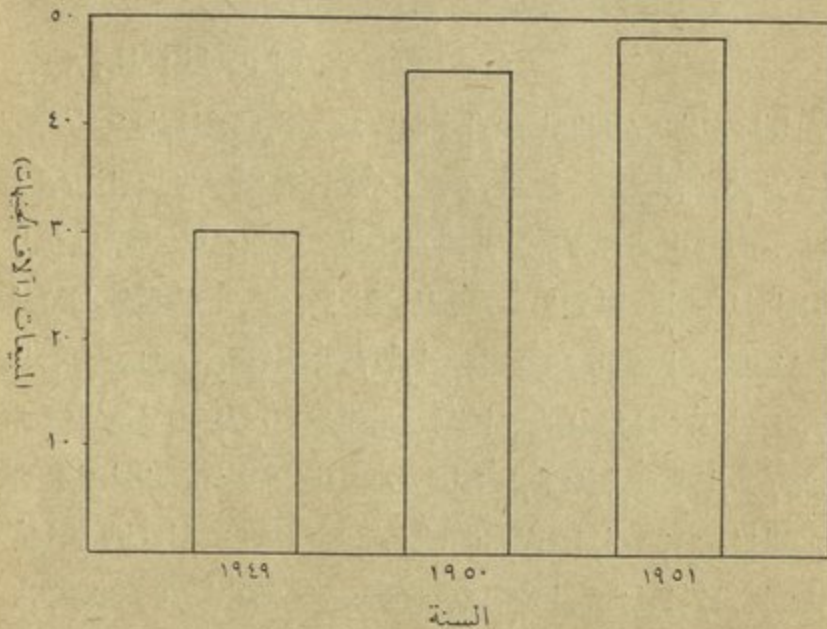
لاستخدام المستطيل كوحدة بيانية في الإحصاء نظامان مختلفان : فإما أن تكون المستطيلات أفقية وإما أن تكون رأسية . ومع أن النظام الأفقي للمستطيلات له محاسن يمتاز بها على النظام الرأسى إلا أن العادة جرت على استخدام النظام الرأسى لتمثيل البيانات المصنفة تصنيفا كيفيا . ولعل هذا راجع إلى أن التصنيف الكيفى هو أكثر أنواع التصنيف قربا وشبها من التصنيف الكمي الذى لا يمثل إلا بمستطيلات رأسية فتقاس الصفة المتغيرة أفقيا ويقاس التكرار المتغير رأسيا . كذلك جرت العادة على استخدام النظام الرأسى عند تمثيل البيانات المصنفة حسب النوع إذا أريد بيان التغيرات التى يحدثها الزمن فى التصنيف لأن العادة جرت عند تمثيل هذه التغيرات بيانيا على قياس الزمن أفقيا . لكن العادة لا تمنع حتى فى هذه الحالة من رسم المستطيلات أفقية .

أما رسم المستطيلات البيانية الرأسية فيخضع لنفس القواعد العامة كـ رسم المستطيلات الأفقية مع تعديلات بسيطة واضحة . فالخط الأساسي للرسم مثلا يوضع الآن تحت الشكل عند القاعدة وليس على يساره . أيضا يلاحظ الآن ضرورة ترك المسافات بين المستطيلات حتى يمكن التفريق بين الرسم الناتج وبين رسوم أخرى آتية تمثل البيانات المصنفة تصنيفا كليا .

مثال . ارسم شكلا يمثل البيانات الآتية : —

المبيعات السنوية	١٩٤٩	٣٠٠٠٠ جنيه
	١٩٥٠	٤٥٠٠٠
	١٩٥١	٤٨٧٥٠

يمكننا في هذه الحالة رسم أنواع كثيرة من الأشكال . لكن بما أنه يحتمل جدا استمرار البيانات إذن يحسن رسم شكل يسمح بالإضافات . ولنرسم شكلا دقيقا مكونا من مستطيلات رأسية (أو أفقية) ^١ .



١ افظر أيضا البند ١ من الباب الثاني .

تمرين . يعطى الجدول الآتى منسوبات عدد السفن الراحلة من الموانئ المصرية فى السنين المبينة على أساس ١٩١٣ :

السنة	المنسوب	السنة	المنسوب
١٩١٤	٨٨,١٧	١٩٣٥	١١٩,٦٦
١٩١٧	٢٤,٩٢	١٩٣٨	١١٤,٩٥
١٩٢٠	٦٩,٠٤	١٩٤٠	١٢٠,٠٦
١٩٢٣	٨٢,٦٦	١٩٤١	١١٩,١٠
١٩٢٦	٩٢,٩٤	١٩٤٢	١٠٣,٣٧
١٩٢٩	١١٠,٥٣	١٩٤٣	١٤٠,٣٤
١٩٣٢	٩١,٢١		

مثل هذه البيانات باستخدام طريقة المستطيلات الرأسية . ضع المستطيل المناظر للسنة ١٩١٣ فى الجانب الأيسر من الورقة والمستطيلات الأخرى إلى يمينه مرتبة حسب تواريخها . ضع التاريخ تحت كل مستطيل واكتب عنوانا مناسباً فوق الشكل الذى ترسمه .

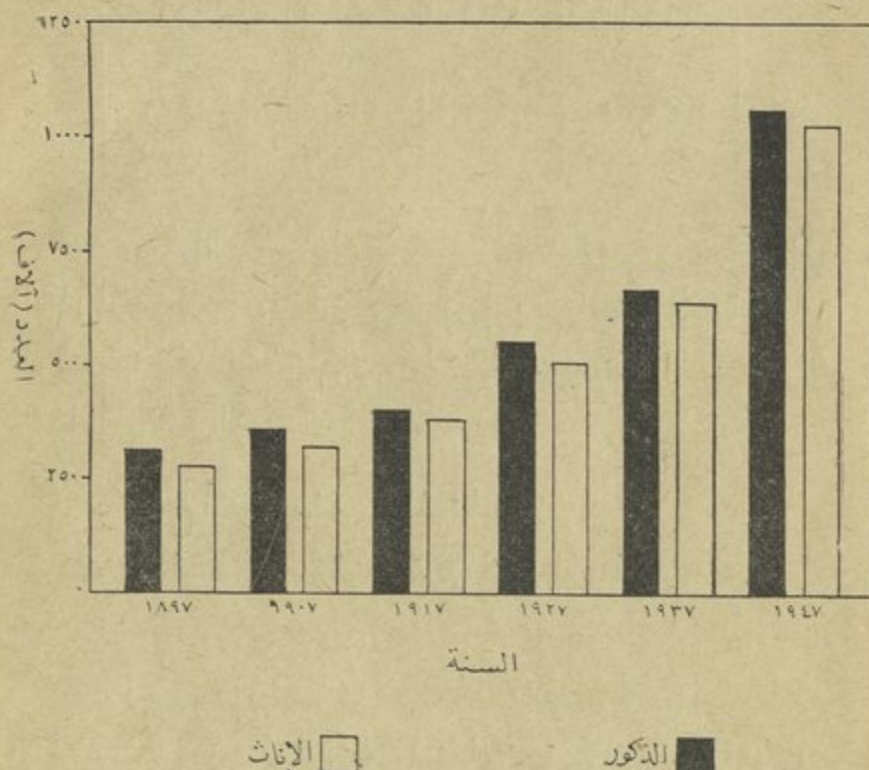
٩ . رسوم أخرى مبينة على المستطيل .

يستخدم المستطيل وحدة لبناء شكل يمثل البيانات المكونة من أجزاء . يتركب كل منها من عناصر جزئية .

يعطى الجدول الظاهر على الصفحة الآتية عدد سكان مدينة القاهرة الذكور منهم والإناث فى التعدادات الستة الأخيرة (١٨٩٧ - ١٩٤٧) :

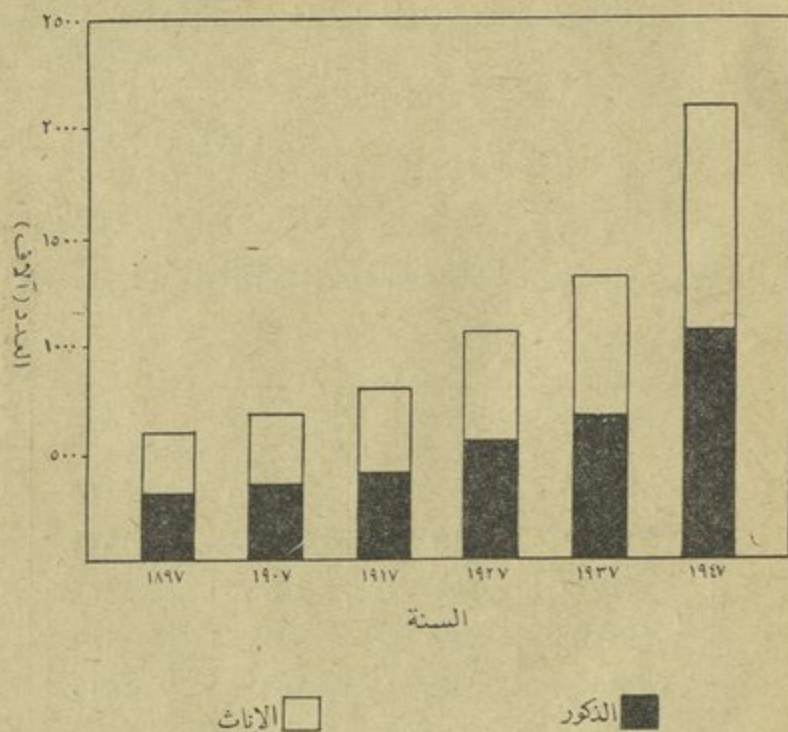
لتمثيل هذه البيانات برسم مكون من مستطيلات نضع الزمن أفقياً للسبب المذكور فى البند السابق فتكون المستطيلات رأسية . ثم نرسم لكل سنة مستطيلين أحدهما يمثل الذكور والآخر يمثل الإناث ونضع المستطيلين جنباً إلى جنب كما فى الشكل المرسوم تحت الجدول .

السنة	الذكور	الإناث	الذكور والإناث
١٨٩٧	٣١٢٠١٧	٢٧٧٥٥٦	٥٨٩٥٧٣
١٩٠٧	٣٥٨٩٥٢	٣١٩٤٨١	٦٧٨٤٣٣
١٩١٧	٤٠٥٨٤٨	٣٨٥٠٩١	٧٩٠٩٣٩
١٩٢٧	٥٥٨٧٤٢	٥٠٥٨٢٥	١٠٦٤٥٦٧
١٩٣٧	٦٧٢٥٣٩	٦٣٩٥٥٧	١٣١٢٠٩٦
١٩٤٧	١٠٦٣٣٥٣	١٠٢٧٣٠١	٢٠٩٠٦٥٤



يمكننا هذا الشكل من مقارنة عدد الذكور في أى سنة بعددهم في أى سنة أخرى وبعدد الإناث أيضا . لكنه لا يمكننا من مقارنة عدد سكان القاهرة من ذكور وإناث لأن هذا العدد غير ممثل في الشكل بمستطيل واحد بل هو ممثل بمستطيلين منفصلين — مستطيل للذكور وآخر للإناث .

لرسم شكل يؤدي هذا الغرض وفي الوقت نفسه يمكننا من قراءة عدد الذكور وعدد الإناث وأيضا عدد الذكور والإناث معا نسلك طريقا آخر فترسم لكل سنة مستطيلا واحدا ونقسمه كما في البند ٥ إلى جزئين الأسفل (مثلا) يمثل عدد الذكور في تلك السنة والأعلى يمثل عدد الإناث . بالاستنتاج نرى أن المستطيل كله يجزيه الأسفل والأعلى يمثل عدد سكان القاهرة في نفس السنة . ثم نضع هذه المستطيلات جنا إلى جنب تاركين مسافات صغيرة متساوية بينها .



يمكننا هذا الشكل من مقارنة عدد الذكور وعدد الذكور والإناث معا بسهولة تامة لأن مستطيلات الذكور ومستطيلات الذكور والإناث معا كلها تبدأ عند قاعدة الشكل ولإجراء المقارنة المطلوبة يكفي أن نقارن ارتفاع مستطيل بارتفاع مستطيل آخر . لكن الشكل لا يمكننا بنفس هذه السهولة من

مقارنة عدد الإناث لأن المستطيلات البيضاء فيه موضوعه فوق مستطيلات الذكور . وإذن لا تبدأ عند خط أفقي واحد ولا تنتهي عند خط أفقي واحد أيضا . وللتغلب على هذه الصعوبة لنا أن نرسم الشكل المبين على صفحة ٢٤ أو (ح) نرسم ستة مستطيلات متجاورة للذكور كالمستطيلات السوداء المرسومة في الشكل الأخير يلي هذه ستة مثلها للإناث .

هذه الطريقة الأخيرة (ح) تستخدم إذا كان الغرض الرئيسى من الرسم المقارنة بين عدد الذكور أو الإناث فى السنين المختلفة . لكن كثرة المستطيلات المتجاورة فى هذه الحالة يجعل المقارنة المطلوبة صعبة بعض الشيء . وواضح أن الشكل فى هذه الحالة كالشكل المرسوم على صفحة ٢٤ لا يمكننا من مقارنة عدد السكان ذكورا وإناثا معا .

تمرينان .

١ . يعطى الجدول الآتى بيانات عامة عن التعليم فى مصر من ١٩٢٨ إلى

١٩٤٣ .

السنة	عدد الطلبة	عدد الطالبات	المجموع
١٩٢٨	٦٥٤٧٨٢	١٨٦٩٢٩	٨٤١٧١١
١٩٣١	٦٧٣٥١٧	٢١٨١٦٥	٨٩١٦٨٢
١٩٣٤	٦٨٧٠٣٩	٢٥٤٧٢١	٩٤١٧٦٠
١٩٣٧	٨٥١٧٠٦	٤٥٧٣٢٩	١٣٠٩٠٣٥
١٩٤٠	٩٥٤٢٥٦	٦٠٩٣٣٤	١٥٦٣٥٩٠
١٩٤٣	٩٠٣١٢٦	٥٧٦٥٢٣	١٤٧٩٦٤٩

ارسم مستطيلات رأسية تبين عدد الطلبة وعدد الطالبات فى مصر أثناء الفترة ١٩٢٨ - ١٩٤٣ . ابدأ عند الجانب الأيسر للورقة وارسم مستطيلات يمثل عدد الطلبة سنة ١٩٢٨ ثم ارسم المستطيل الذى يمثل عدد الطالبات سنة ١٩٢٨ . وضعه بجوار المستطيل الآخر جهة اليمين . اترك فراغا صغيرا وارسم

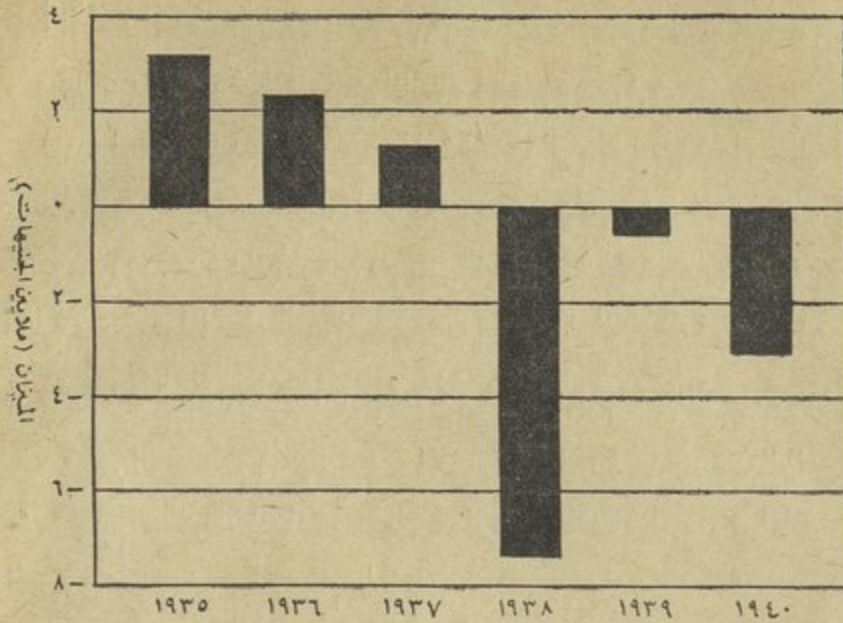
جنباً إلى جنب مستطيلين للسنة ١٩٣١ وهلم جرا . ضع التاريخ تحت كل مستطيلين متجاورين ثم اكتب عنواناً مناسباً للشكل الذى ترسمه .

٢ . استخدم العدد المناسب من المستطيلات الرأسية لرسم شكل يمثل بيانات التمرين السابق . ابدأ عند الجانب الأيسر للورقة ورتب المستطيلات حسب التاريخ . ضع المستطيلات التى تمثل الطالبات فوق المستطيلات التى تمثل الطلبة واترك فراغاً صغيراً بين المستطيلات . ضع التاريخ تحت كل مستطيل و اكتب عنواناً مناسباً للشكل الذى ترسمه .

١٠ . للمستطيلات أفقيها ورأسيها على حد سواء تطبيق مهم عند ما يراد تمثيل القيم الصافية أو الزيادة والنقص كالواردات والصادرات أو إيرادات الدولة ومصرفاتها أو الأرباح والخسائر . يعطى الجدول الآتى واردات مصر وصادراتها (وطنية وأجنبية) بآلاف الجنيهات من ١٩٣٥ إلى ١٩٤٠ . يعطى كذلك الميزان التجارى (الصادرات — الواردات) .

السنة	الواردات	الصادرات	الميزان
١٩٣٥	٣٢٢١٣	٣٥٤١٠	٣١٩٧
١٩٣٦	٣١٥٠٤	٣٣٨٦٧	٢٣٦٣
١٩٣٧	٢٧٩٧١	٣٩٢٨٣	١٣١٢
١٩٣٨	٣٦٧٠٥	٢٩٣٦٤	٧٣٤١ —
١٩٣٩	٣٣٧٥٨	٣٣١٩٢	٥٦٦ —
١٩٤٠	٣١٣٣٧	٢٨٣١٩	٣٠١٨ —

لرسم شكل للميزان التجارى تمثل كل قيمة له بمستطيل رأسى . فإن كان الميزان موجبا يرسم المستطيل فوق الخط الأساسى وإن كان الميزان سالبا يرسم المستطيل تحت الخط الأساسى . ونضع هذه المستطيلات جنباً إلى جنب بترتيب السنين تاركين المسافات العادية بينها .



تمرين . يعطى الجدول الآتى

(١) إيرادات الحكومة المصرية ومصروفاتها ،

(ب) مقدار الوفرة أو العجز فى الميزانية العادية للدولة

بآلاف الجنيهات فى كل حالة ابتداء من السنة المالية ١٩٣٨ - ١٩٣٩ إلى

١٩٤٣ - ١٩٤٤ .

السنة	الإيرادات	المصروفات	الوفرة	العجز
١٩٣٨ - ١٩٣٩	٣٧٦٢١	٤٠٣٩٣		٢٧٧٢
١٩٣٩ - ١٩٤٠	٣٩٤٠٨	٤١١٧٤		١٧٦٦
١٩٤٠ - ١٩٤١	٤٣٦٧٧	٤٢٥٥٩	١١١٨	
١٩٤١ - ١٩٤٢	٥٦٣٣٦	٤٦٠٦٢	١٠٢٧٤	
١٩٤٢ - ١٩٤٣	٦٧١٤١	٥٥١٥٩	١١٩٨٢	
١٩٤٣ - ١٩٤٤	٧٧٧٧٤	٧١٩٣٨	٥٨٣٦	

ارسم شكلا يبين مقدار الوفرة أو العجز فى الميزانية أثناء الفترة المذكورة .

١١ . الميزانية العامة .

رأينا في البند ٧ كيف نسخر المستطيل الأفقي للمقارنة بين توزيعين مختلفين والآن نطبق فكرة المستطيل الرأسى لتصوير مايسمى فى المحاسبة الميزانية العامة . لعمل ذلك نرسم مستطيلا رأسيا يمثل الأصول وآخر يمثل الخصوم ورأس المال . ونجعل المستطيلين يقفان متلاصقين بحيث تقع قاعدة أحدهما على امتداد قاعدة الآخر فتكمل بذلك الصورة المطلوبة .

فى المحاسبة مبدأ رئيسى معروف يمكن التعبير عنه بالمعادلة
محتويات المحل = المبلغ المطلوب منه للغير + المبلغ الخاص بأصحابه
أو بلغة المحاسبين

الأصول = الخصوم + رأس المال .

إذن عند رسم مستطيل الأصول ومستطيل الخصوم ورأس المال ووضعهما متلاصقين بالكيفية المذكورة لابد أن ينطبق أحد الضلعين الطويلين فى أحدهما على ضلع طويل فى الآخر ومعنى هذا هو أن المستطيلين لابد أن يتساويا فى الطول . وهذا هو ما نقصد بتصوير الميزانية العامة .

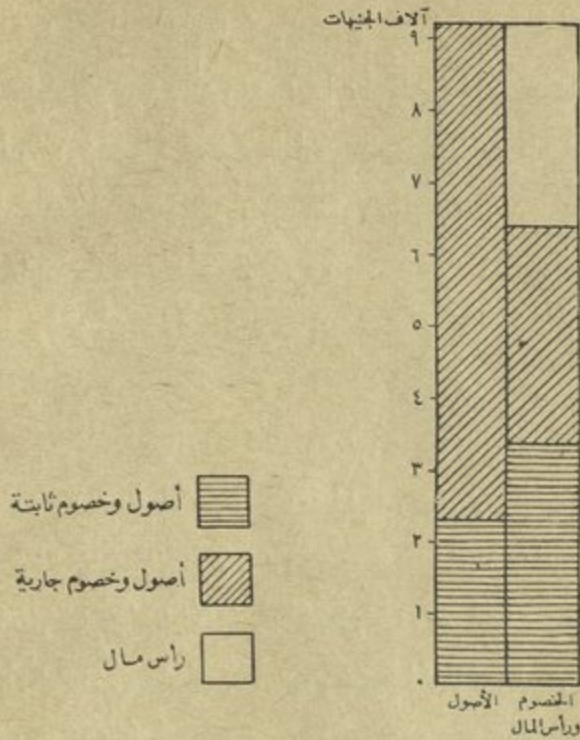
لنأخذ ميزانية عامة بسيطة نوضح بها ما نقوله . هب أن الميزانية العامة لمحل تجارى تتركب من

٢٣٠٠ جنيه مصرى	(أ) أصول ثابتة
٦٩٠٠	— جارية
٩٢٠٠ جنيه مصرى	

ثم

٣٤٠٠ جنيه مصرى	(ب) خصوم ثابتة
٣٠٠٠	— جارية
٢٨٠٠	رأس مال
٩٢٠٠ جنيه مصرى	

فلمقارنة الأصول بالخصوم ورأس المال نرسم مستطيل الأصول ومستطيل الخصوم ورأس المال ونضعهما كما في الشكل الآتي .



هذا هو الشكل الذي يمكننا من مقارنة الأصول بالخصوم ورأس المال ويصور الميزانية العامة .

تمرين . يتركب أحد المحال التجارية من

جنيه مصري

٦٠٠ أصول ثابتة

١٤٠٠ أصول جارية

٣٠٠ خصوم ثابتة

١٠٠٠ خصوم جارية

٧٠٠ رأس مال

ارسم مستطيلين رأسيين أحدهما للأصول والآخر للخصوم ورأس المال .
ضع المستطيلين جنباً إلى جنب واستخدم الشكل الحادث لاستنباط العلاقة
بين المبالغ المختلفة وتصوير الميزانية العامة للمحل .

١٢ . أمثلة .

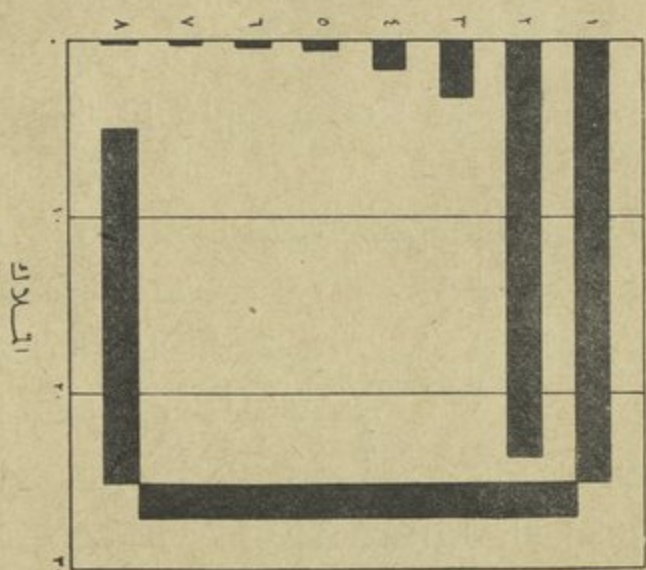
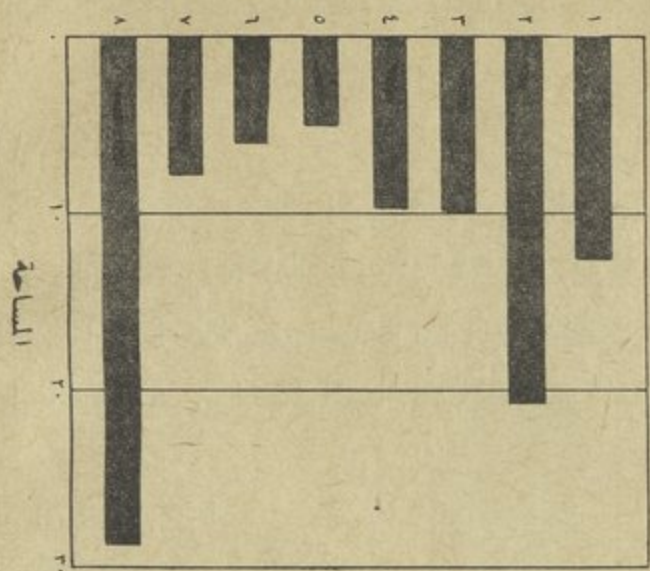
(١) تكلم عن وسائل مختلفة لتمثيل البيانات بأشكال . وضح بالرسم
واذكر نوع البيانات التي ترى أن الوسائل التي تتكلم عنها ملائمة لها .
هنا يجب أن يتكلم الطالب عن الجداول والبيانات المختلفة التي يعرفها في
ضوء ما جاء بالكتاب . والنقطتان المهمتان اللتان لا يجوز إغفال ذكرهما
هما

- ١ . أن الغرض من العمل يجب أن يحدد بكل وضوح ،
- ٢ . أن صورة الشكل أو الأشكال التي تختار يجب أن تكون بحيث تظهر
الخصائص المهمة دون أن يلزم ذلك أدنى غموض .
- (٢) اكتب مذكرة عن الدوائر البيانية .

النقط المهمة هي :

- ١ . الدوائر البيانية طريقة سهلة لاستعراض النظر وبالأخص عند استخدام
الألوان الزاهية .
- ٢ . ليست الدوائر البيانية صعبة التحضير في العادة وهي معروفة للجمهور
بدرجة تكفي لفهمها بسرعة .
- ٣ . الدوائر البيانية صالحة بنوع خاص لعرض البيانات عرضاً مبدئياً
لكنها غير صالحة إلى هذا الحد للمقارنة .

(٣) قارن باستخدام مستطيلات أفقية النسبة المئوية لعدد الملاك في كل
فئة بالنسبة المئوية للمساحة التي تملكها الفئة في بيانات الملكية كما وردت على
الصفحة ١٠ .



لم تسمح الورقة برسم مستطيل ملاك الفئة الأولى لأن نسبة هؤلاء أكبر من ٣٠ للثة . لذلك كسرنا المستطيل عند ٢٥ للثة وسرنا به رأسيا إلى أسفل رغم أن المستطيلات المستخدمة أفقية . لكن الورقة لم تسمح برسم الجزء الباقي من المستطيل رأسيا فكسرناه للمرة الثانية عند ٥٠ للثة وسرنا به أفقيا وإلى الوراء حتى ٧٠,١ للثة . وراعى عند كسر المستطيلات الأفقية على هذا النحو أن طول المستطيل يقرأ دائما على الخط الأفقى المدرج .

(٤) عدد الماشية ودواب الحمل في مصر بالآلاف في السنين المبينة : —

النوع	١٩٣٦	١٩٣٧	١٩٣٩	١٩٤١	١٩٤٣	١٩٤٥
أبقار	٣٠٩	٢٥١	٣٢٩	٢٦٦	٣٤٣	٣٥٩
إناث	٦٨٦	٧٢٢	٩٠١	٧٢٥	٨٥٩	٩٠٦
جاموس	٤٥	٢٦	٧٨	٣٧	٣٢	٣٧
إناث	٨٨٧	٩٣١	٨٨٨	٨٧٥	٩٦٩	١٠٢٧
جمال	٨٩	٨٣	١٠٣	٨٨	١١٣	١٠٣
إناث	٦٧	٧٢	٧٣	٥٨	٦١	٥٩
خيل	١٨	١٦	٢٤	١٦	١٦	٢٠
إناث	١٦	١٦	٢٣	١٥	١٥	١٤
بغال	١٠	١٠	١٥	٧	٧	١٥
إناث	٨	١٢	١٤	٥	٥	
حمير	٣٣٦	٤١٤	٤٣١	٣١٣	٣٣٨	٣٥٨
إناث	٤٥٨	٧٢٨	٦٣٩	٤٦٥	٤٨٩	٤٩٣
أغنام	٢٩٢	٣٧٩	٤٠٨	٢٣٥	٢٧٧	٢٧٧
إناث	١٢٠٤	١٥٤٠	١٤٨٩	١٠٠٧	١١٤٧	١١٠٨
ماعز	٢٠٧	٣٠٤	٢٧٩	١٧٣	١٩٦	١٩٥
إناث	٥٤٨	١٠٠٧	٨٠٩	٤٩٩	٥٦٤	٥٣٦
خنزير	٥	١٠	٩	٨	١١	١٥
إناث	٨	٢٦	١٤	١٣	٢٠	٢٦

يمثل الشكل المرسوم عدد الذكور وعدد الإناث بمستطيلات رأسية في رسمين منفصلين . وواضح أن هذه إحدى الحالات التي فيها يساعد التمثيل البياني كثيرا على فهم الأمور على حقيقتها .

أسئلة

١ . يعطى الجدول الآتى الملكية المتوسطة بالأفدنة في مصر بين المصريين والأجانب وأصحاب الوقف في كل سنة من ١٩٣٩ إلى ١٩٤٣ :

السنة	الملكية المتوسطة		
	مصريون	أجانب	أصحاب وقف
١٩٣٩	١,٩٤	٨٠,٥٤	٣٩,٤٣
١٩٤٠	١,٩٣	٧٧,٥٣	٣٦,٥٣
١٩٤١	١,٩٢	٧٦,٩٠	٣٥,٧٩
١٩٤٢	١,٩١	٧٥,٢٧	٣٥,٧٨
١٩٤٣	١,٩١	٧٥,٠١	٣٤,٥٦

مثل هذه البيانات بمستطيلات رأسية . ارسم ثلاثة مستطيلات لكل سنة مستطيل المصريين يليه من جهة اليمين مستطيل الأجانب فمستطيل أصحاب الوقف . ضع مستطيلات ١٩٣٩ إلى اليسار يليها من جهة اليمين مستطيلات السنوات الأخرى بالترتيب .

٢ . فيما يلي بيان عن وفيات الأطفال الرضعية وأهم أسباب الوفاة في الجهات التي يوجد بها مكاتب للصحة في مصر من ١٩٣٩ إلى ١٩٤٣ . ارسم شكلا مناسباً مكوناً من خمسة مستطيلات تعرض فيه هذه البيانات . ابدأ عند الجانب الأيسر للشكل ورتب المستطيلات حسب التاريخ . راع ترك فراغ صغير بين كل مستطيل وجاره وكتابة التاريخ تحت كل مستطيل . اكتب عنواناً مناسباً للشكل الذي ترسمه .

سبب الوفاة	١٩٣٩	١٩٤٠	١٩٤١	١٩٤٢	١٩٤٣
إسهال ونزلات معوية	٢٣٩٧٩	٢٥٢٧٩	٢٥٢٦٢	٣١٠٩٩	٣٣٢٣٠
ضعف خلقى	١٣٥١٧	١٣١٠٠	١٢٩٨٧	١٤٧٧٣	١٦٨٩٥
أسباب أخرى	٩٣٢٠	٨٧١١	٧١٩٢	٨٠٤١	٨١٣٤
	٤٦٨١٦	٤٧٠٩٠	٤٥٤٤١	٥٣٩١٣	٥٨٢٥٩

٣. يعطى الجدول الآتى منسوبات أسعار بعض المحاصيل الزراعية فى مصر فى ١٩٤٠ على أساس ١٩١٣ :

المحصول	المنسوب	المحصول	المنسوب
الشعير	٧٩,٦	الأذرة الشامية	١١٤,٦
الفول	٨٥,٩	الأذرة الرفيعة	٩٦,٦
القطن	٨٥,٣	البصل	١٣٩,٠
بذرة القطن	٧١,٥	الأرز	٩٦,١
الحلبة	١٧٥,٠	القصب	١٣٧,٥
العدس	١٢٤,٤	القمح	٩٧,٠

ارسم مستطيلات تبين مقدار الارتفاع أو الانخفاض للمئة فى المنسوب واكتب أمام كل مستطيل مقدار هذا الارتفاع أو الانخفاض .

٤ . يبين الجدول الآتى الحالة المدنية لسكان مصر (مصريين وأجانب) بالآلاف مصنفين حسب الجنس والسن فى تعدادى ١٩١٧ و ١٩٢٧ .

استخدم فكرة المستطيل الأفقى لرسم شكل واحد يمثل هذه البيانات . ضع مستطيلات ١٩١٧ تحت مستطيلات ١٩٢٧ ومستطيلات الذكور فى النصف الأيسر من الورقة ومستطيلات الإناث فى النصف الأيمن مرتبة حسب السن من أسفل إلى أعلى . ضع التاريخ والسن أمام كل مستطيل واكتب عنوانا فوق الشكل الذى ترسمه .

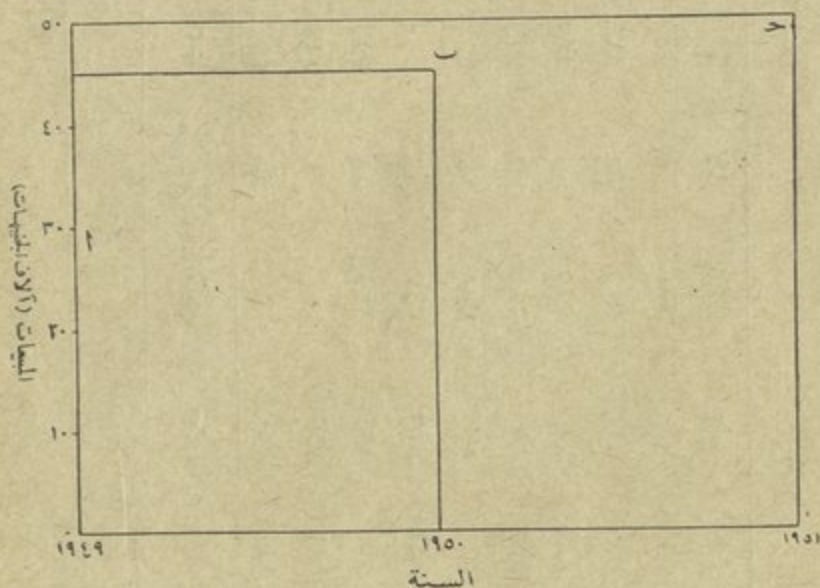
إناث				ذكور			
الجموع	مطابق لأرملة وغير مبنية	متروجة	عزباء	الجموع	مطلق وأرملة وغير مبنية	متزوج	أعزب
٢٩٧١	٧٠	٢١٣	٢٦٨٨	٢١٦٦	٥٣	٢١	٣٠٨٢
٢٢٩٣	١٧	٢٢٥	٣٠٥١	٢٤٧٢	٤	٢٦	٣٤٤٢
١٠٤٠	٦١	٨٨٩	٩٠	٩٣٩	٢٢	٤٦٤	٤٥٣
١٢٢٩	٧١	١٠٥٤	١٠٤	١٠٩٦	٢٢	٥٤٥	٥١٩
٨٧٤	٩٧	٧٥٤	٢٣	٨٤٩	٢٨	٧٣٦	٨٥
١٠١٣	١٢٠	٨٧٤	١٩	٩٨٨	٢٧	٨٧٤	٧٧
٥٦٩	١٤١	٤١٤	١٤	٥٧٢	٢١	٥٢٥	٢٦
٦٥٤	١٨٧	٤٥٨	٩	٦٦٢	٢٧	٦١٧	١٨
٨٩٤	٥٢٧	٢٢١	٣٦	٨٤٤	٨٤	٧٢٢	٢٨
٩٣٠	٦٠٥	٣٠٧	١٨	٨٢٩	٨٦	٧٣١	٢٢

الباب الثانى

الخطوط البيانية

١ - للرسوم البيانية المستخدمة فى الباب الأول فوائد جمة لا يجوز إنكارها ومع ذلك لا يوجد بين هذه الرسوم جميعا رسم واحد ينافس من حيث الأهمية الخط البيانى العادى .

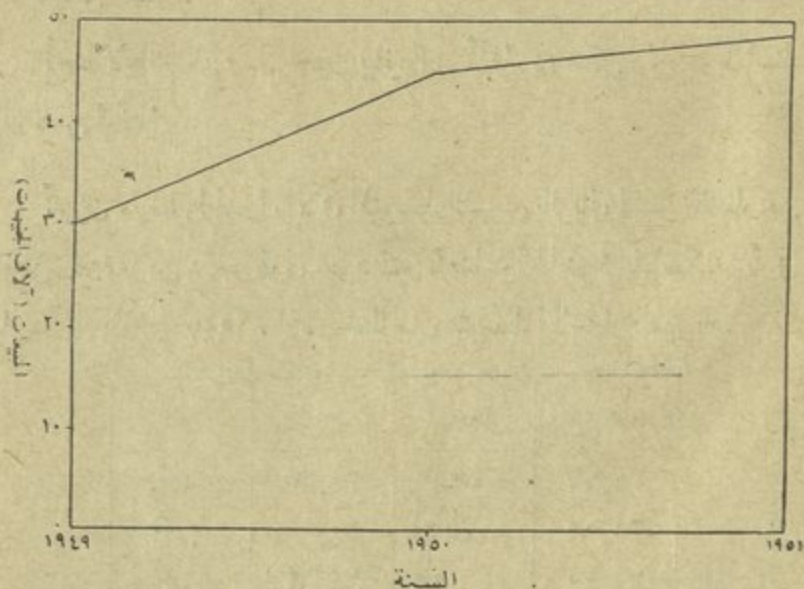
والخط البيانى هو شكل يصور العلاقة بين متغيرين - بسيط كل البساطة فى فكرته لكنه أيضا مفيد للغاية وله تطبيقات كثيرة لاحد لها .



لنرسم خطا بيانيا يمثّل البيانات المعطاة على الصفحة ٢٢ (المبيعات السنوية) . نبدأ برسم خطين مستقيمين متعامدين أحدهما أفقى والآخر رأسى وتتخذ منهما خطين للإسناد . بعد ذلك نختار وحدتى القياس الميئتين على الخطين ونقيس الزمن على الخط الأفقى والمبيعات على الخط الرأسى . فى ١٩٤٩

كان رقم المبيعات ٣٠٠٠٠ ولتمثل هذا على الشكل بالنقطة ١ . وفي ١٩٥٠ كان هذا الرقم ٤٥٠٠٠ ولتمثل هذا بالنقطة ب . وفي ١٩٥١ بلغت المبيعات ٤٨٧٥٠ ولتمثل هذا بالنقطة ح . بهذه الكيفية نحصل على ثلاث نقط تمثل المبيعات في السنين الثلاث المعطاة .

للحصول على الخط البياني المطلوب نصل كل نقطتين متواليتين في الشكل بخط مستقيم أو بأى خط آخر غير مستقيم . فإذا استخدمنا الخط المستقيم نحصل على الخط المكسور المرسوم في الشكل الآتي والذي يبين تغير المبيعات



مع الزمن بفرض أن التغير منتظم بين سنة وأخرى . وإذا كانت النقط الثلاث وحدها كافية لبيان التغير المذكور فإن إيصاها بخطوط لما يساعد العين على رؤيته وهذا هو أحد أسباب رسم هذه الخطوط . فالخطوط في ذاتها عديمة المعنى في هذه الحالة وبيانات المسألة كلها ممثلة تمثيلاً تاماً في النقط الثلاث . نلاحظ من المثال السابق أن وحدتي القياس على خطي الإسناد لا يتحتم أن تكونا متساويتين في كل حالة بل يجب اختيارهما بحيث يتناسب طول الشكل مع عرضه . فوحدة القياس على الخط الأفقي تجعل الشكل طويلاً إذا

كانت كبيرة أو قصيرا إذا كانت صغيرة . كما أن وحدة القياس على الخط الرأسى تجعل الشكل مرتفعا إذا كانت كبيرة أو منخفضا إذا كانت صغيرة . لذلك وضعت قاعدة عامة بسيطة تختار بمقتضاها الوحدتان بحيث يكون عرض الشكل ٧٥ للثة من طوله . ولهذه النسبة أن تتغير بين ٦٠ و ٨٠ للثة دون أن يؤثر ذلك فى تناسب أجزاء الشكل أو فى رونقه . لكن إذا هبطت النسبة تحت ٥٠ للثة يحتل توازن الشكل فى الغالب . والشكل الأخير يوضح 'قاعدة ٧٥ للثة' .

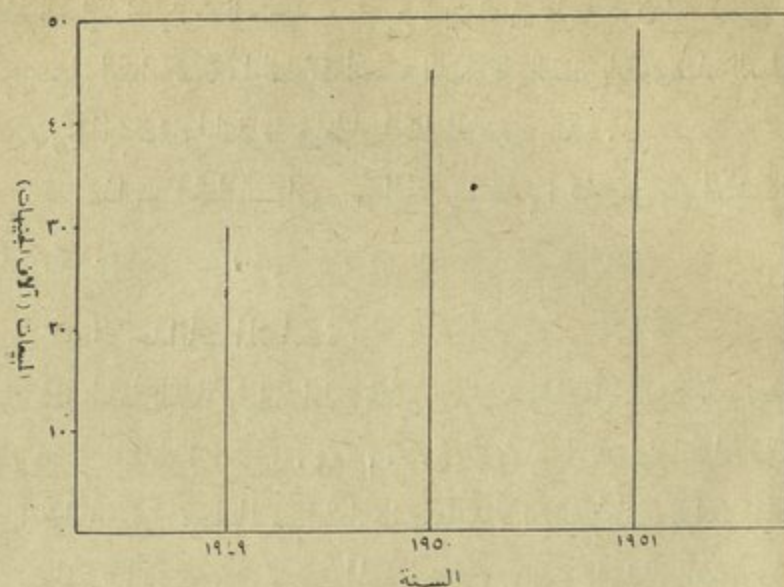
أيضا لامانع من رسم خطين بيانين أو أكثر فى شكل واحد وبالإسناد إلى نفس الخطين .

تمرين . يعطى الجدول الآتى المتوسط الشهرى بالريال لسعر القنطار من القطن جيزة ٧ من درجة فولى جود فير للبضاعة الحاضرة بالإسكندرية فى الموسم ١٩٤٢ — ١٩٤٣ . ارسم خطا يبين متوسط الأسعار الشهرية .

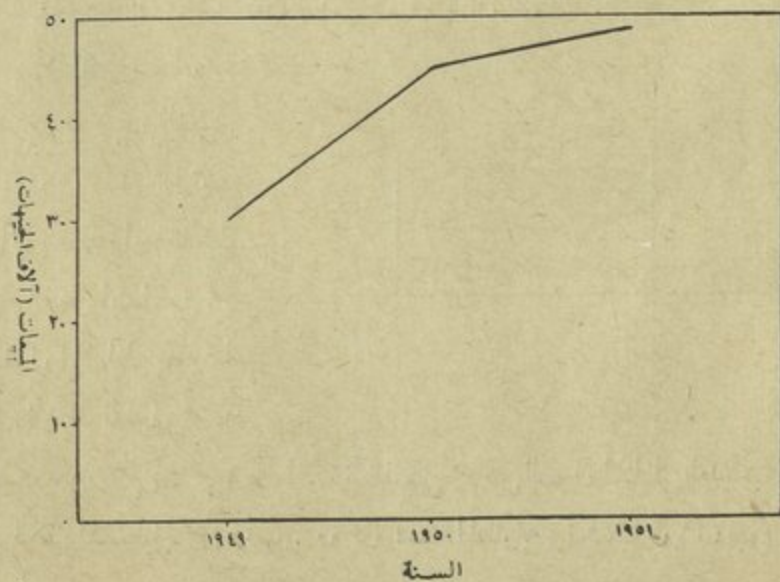
الشهر	السعر	الشهر	السعر
سبتمبر	٢٠,٦٥	مارس	٣٠,٧٧
أكتوبر	٢٠,٠٠	أبريل	٣١,٠٠
نوفمبر	٢٤,٦٣	مايو	٣١,٠٠
ديسمبر		يونيو	
يناير	٢٨,٠٠	يوليو	٢٩,٠٠
فبراير	٢٧,٧٠	أغسطس	٢٨,٤٢

٢ . الانتقال من الرسوم إلى الخطوط البيانية .

ليحاول القارئ . فهم معنى أرقام المبيعات السنوية ولينظر بعد ذلك إلى الشكل (صفحة ٢٢) ثم لينظر بعد هذا وذاك إلى الشكل الآتى الذى يبين الحقائق بدلالة أطوال الخطوط —



هذا تحسين على الأرقام . بيد أنه من الممكن تبسيط الموضوع أكثر من ذلك . فنحن عند ما نقيم أعمدة على قاعدة معطاة نلاحظ أن قمم الخطوط هي وحدها صاحبة الشأن لأنها تدل على مقدار ما بلغت المبيعات في أى سنة . وبما يساعد العين على تتبع هذه القمم بسرعة أن نصل قمم الخطوط المتجاورة .

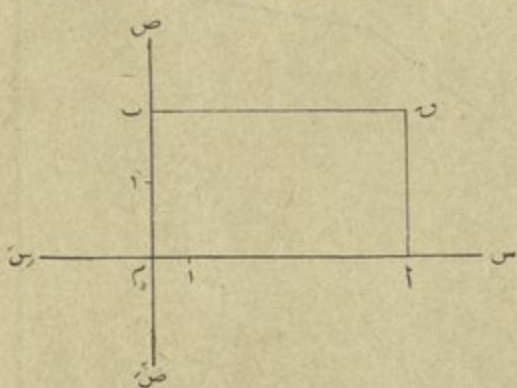


هذه العملية تعطينا خطا متصلا تستطيع العين السير عليه دون أية صعوبة .
ثم يجعل الخط سميكا والخطوط أنحف تتلافى كل الصعوبات وهذه العملية
يمكن إكمالها بحذف الخطوط وإظهار الخط الأخير وحده .
هذا هو الخط البياني وهو الذي يستخدم أكثر من كل الأشكال
الأخرى .

٣ . الإحداثيات المتعامدة .

يمثل الخط البياني قيا متناظرة لمتغيرين كالسنة والمبيعات السنوية وتعطى
كل قيمتين متناظرتين مثل (١٩٥٠ ، ٤٥٠٠٠) نقطة واحدة على الخط . ومع
أن الخطوات التي اتبعناها لرسم الخط كانت عامة إلا أن القيم كانت كلها موجبة .
لذلك نشعر الآن في عرض الموضوع من جديد وعلى نطاق أوسع حتى
نصل إلى تعميم الطريقة وجعلها شاملة تسرى على القيم الموجبة والسالبة على
السواء .

ليكن S ، M ، V خطين متعامدين ولتكن M نقطة التقاطع .
خذ وحدة M لقياس القيم على S ووحدة لقياس القيم على M .
هاتان الوحدتان اختياريتان وليس ضروريا أن تتساويا .



إذا كان a ، b
عديدين موجبين فلتمثل
 a ، b في هذا الترتيب
بناينا بنقطة واحدة تأخذ
على M S ابتداء من M
الطول المناظر للعدد a
أى نأخذ الطول a

بحيث يكون $M : a = 1$. ونأخذ على M V الطول المناظر للعدد b .
ثم نكمل المستطيل M ، B ، V . V هي النقطة المطلوبة وتكتب (a, b) .

نفرض الآن أن a ، b عددان موجبان أو سالبان . للحصول على النقطة m في هذه الحالة نستخدم الاصطلاح الآتي المسمى اصطلاح الإشارة :
 تقاس قيم s الموجبة ابتداء من m في الاتجاه $m \rightarrow s$ وتقاس قيم s السالبة ابتداء من m في الاتجاه $m \leftarrow s$. كذلك تقاس قيم s الموجبة من m في الاتجاه $m \rightarrow s$ والقيم السالبة في الاتجاه $m \leftarrow s$. على هذا النحو ترسم النقطة التي تمثل أى قيمتين a ، b .

يسمى الخطان المتعامدان $m \rightarrow s$ ، $m \leftarrow s$ محوري الإحداثيات أو محوري الإسناد أو المحورين ويسمى أولهما محور s وثانيهما محور s . أما نقطة التقاطع m فتسمى نقطة الأصل وهي تمثل العددين 0 ، 0 . ويسمى العددان a ، b إحداثي m ويسمى إحداث m السيني و b إحداثها الصادي . ونظرا إلى تعامد المحورين تعرف الإحداثيات في هذه الحالة بالإحداثيات المتعامدة أو الإحداثيات الكرتيزية المتعامدة تمجيذا لذكرى ديكارت (١٥٩٦ - ١٦٥٠) الذي كان أول من استخدمها بطريقة علمية حقا .

هـ الآن أن s ، s متغيران وأتينا أعطينا قيا متناظرة لهما . إذا استخدمنا الطريقة المذكورة نحصل من كل زوج من هذه القيم على نقطة واحدة . فإذا وصلنا هذه النقط بخطوط على النحو الذي ألفناه نحصل على الخط البياني الذي يصور العلاقة بين s ، s . تلك هي الطريقة العامة لرسم الخطوط البيانية .

تمرين . باختيار وحدتين مناسبتين للقياس ارصد النقط

(٠،٠) و (٢٠٠،٠) و (١٩٥٠،٥) و (١٠،٠) و (٥٠٠،٠) .

٤ . الخط المستقيم .

نفرض أن s ، s متغيران بينهما العلاقة

$$s = 8 - 4s$$

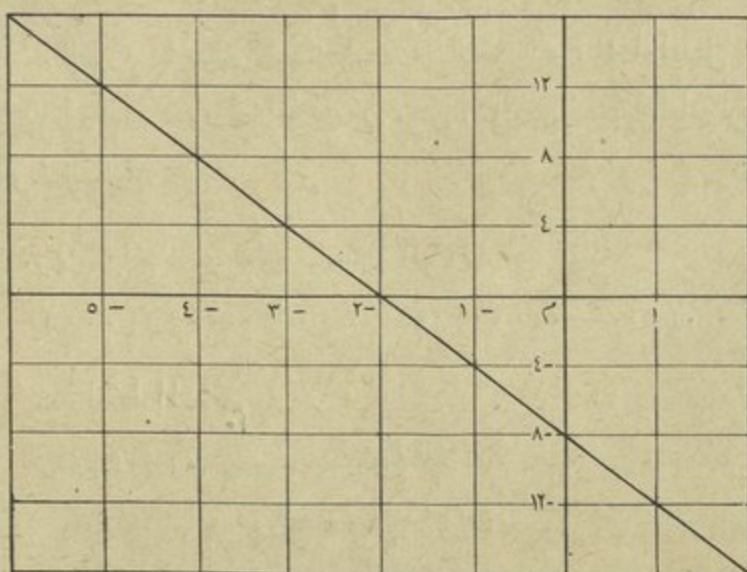
لرسم الخط البياني الذي يصور هذه العلاقة نحاول الحصول من المعادلة المعطاة على قيم متناظرة للتغيرين ثم نطبق الطريقة العامة (البند ٣) لرسم الخط البياني المطلوب . وللحصول على القيم المذكورة نعطي س قيما نختارها نحن ونحسب قيم ص المناظرة من المعادلة . فمثلا إذا أعطينا س القيمة ٢ نحصل عند تعويض هذه القيمة في المعادلة على

$$ص = ٨ - ٤(٢) = ٨ - ٨ = ٠$$

بهذه الكيفية نحصل على القيم الآتية :

س	٥-	٤-	٣-	٢-	١-	٠	١
ص	١٢	٨	٤	٠	٤-	٨-	١٢-

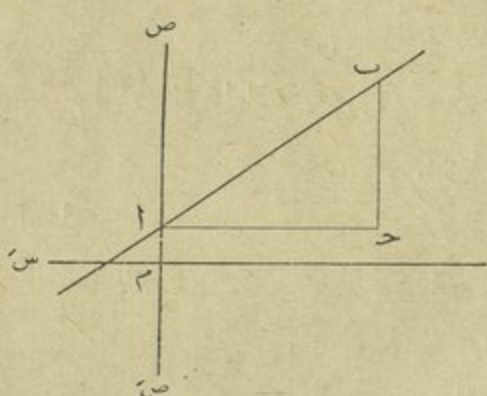
والآن نمثل كل قيمتين متناظرتين بنقطة فنجد أن هذه النقاط جميعا تقع على خط مستقيم وأن أى نقطة أخرى يحصل عليها من المعادلة بنفس الكيفية تقع على الخط عينه . هذا الخط المستقيم يصور إذن العلاقة الأصلية بين س ، ص وهو الخط البياني المطلوب . وتسمى المعادلة المعطاة معادلة الخط المستقيم الذي تمثله .



تمثل المعادلة السابقة حالة خاصة للمعادلة العامة

$$(١) \quad ص = ا + ب س$$

حيث ا ، ب ثابتان مستقلان عن س ، ص . وهذه المعادلة العامة تمثل خطا مستقيما لجميع قيم الثابتين ا ، ب .^١ وهذا الخط المستقيم يقطع محور ص عند نقطة تبعد عن نقطة الأصل مسافة تساوى ا في الاتجاه م ص أى المسافة م ا



في الشكل . هذه المسافة

تسمى في العادة المقطع

الصادى وهذا يعطى المعنى

الهندسى للثابت ا في المعادلة

العامة للخط المستقيم . أما

الثابت الآخر ب فيساوى

$\pm$ النسبة ب / ح

في الشكل أو أى نسبة أخرى تشبهها ويسمى هذا الثابت الميل . فمثلا ميل

الخط السابق هو - ٤ ومقطعه الصادى - ٨ .

بما أن المعادلة (١) تمثل خطا مستقيما مهما كانت قيمتا ا ، ب وبما أن

الخط المستقيم يتعين تماما بأى اثنتين من نقطه إذن لرسم الخط البياني لأى

معادلة من هذا القليل يكفي أخذ قيمتين للمتغير س والقيمتين المناظرتين

للتغير ص فإذا رصدت النقطتان المناظرتان كان الخط الواصل بينهما الخط

البياني المطلوب . وبالعكس لكتابة المعادلة من الخط البياني يكفي قياس

المقطع الصادى والميل فإن كان المقطع ا والميل ب تكون المعادلة المطلوبة

$ص = ا + ب س$.^٢ فمثلا إذا كان المقطع - ٨ والميل - ٤ تكون معادلة

الخط $ص = - ٨ - ٤ س$.

١ عكس هذا صحيح أيضا إلا إذا كان الخط بوازى محور س .

٢ إذا كان الخط بوازى محور س يكفي قياس المقطع السيني فإن كان ا تكون معادلة الخط

$ص = ا$.

ولإيجاد معادلة الخط المستقيم الذي يمر بنقطتين معلومتين (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢) نفرض أن (١) هي المعادلة المطلوبة. فبما أن الخط يمر بالنقطة الأولى إذن إحداثا هذه النقطة يحققان معادلة الخط. أى

$$ص_1 = 1 + ب س_1$$

بالمثل

$$ص_2 = 1 + ب س_2$$

بطرح أولى هاتين المعادلتين من (١) نحصل على

$$ص - ص_1 = ب (س - س_1)$$

$$ص_2 - ص_1 = ب (س_2 - س_1) \quad \text{أيضا}$$

بالقسمة ينتج أن

$$\frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص_1} = \frac{س - س_1}{س_2 - س_1}$$

وهذه هي المعادلة المطلوبة. ^١ ويمكننا أيضا كتابة المعادلة في الصيغة

$$ص - ص_1 = م (س - س_1)$$

$$\text{حيث } م = (ص_2 - ص_1) / (س_2 - س_1) \text{ هو الميل.}$$

مثال. ماذا تمثل المعادلة ٢ ص = س - ٤ ؟

اقسم المعادلة على ٢. هذا يعطى

$$ص = \frac{1}{2} س - ٢$$

بمقارنة هذا مع الصيغة العامة (١) نرى أن المعادلة المعطاة تمثل خطا مستقيما

$$\text{يقطع على محور ص المقطع } ١ = -٢ \text{ وميله } ب = \frac{1}{2}.$$

تمرين. ارسم الخطوط المستقيمة ذات المعادلات

$$س = ٤, \quad ٢ ص = ١١, \quad ٤ س - ٣ ص = ١٠, \quad ٠ =$$

١ يشترط لصحة هذا الوضع ألا يكون س_١ = س_٢ أو ص_١ = ص_٢ وإلا تكون المعادلة المطلوبة س = س_١ أو ص = ص_١ على التوالي.

٥. القطع المكافئ.

سنرسم الآن الخط البياني للمعادلة

$$ص = س - س^2 = س(س - ١) \quad .$$

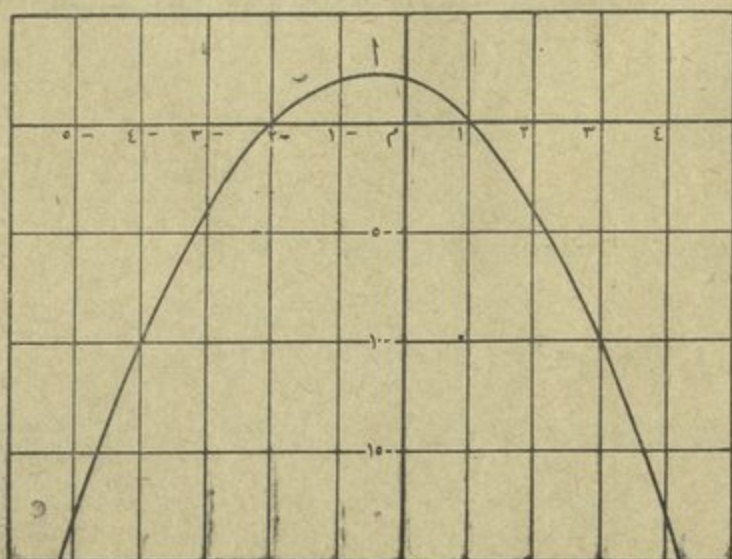
لرسم هذا الخط نحاول الحصول من المعادلة المعطاة على قيم متناظرة للمتغيرين س ، ص . لذلك نعطي س قيا اختيارية ونحسب قيم ص المناظرة من المعادلة . فمثلا إذا أعطينا س القيمة ٥ نجد عند التعويض في المعادلة أن

$$ص = س - س^2 = ٥ - ٥^2 = ٥ - ٢٥ = -١٨ .$$

بهذه الكيفية نحصل على القيم الآتية :

س	٥	٤	٣	٢	١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	-١٨	-١٠	-٤	٠	٢	٢	٠	-٤	-١٠	-١٨	

والآن نمثل هذه القيم بنقط فنحصل على الخط البياني المرسوم في الشكل ويلاحظ قبل كل شيء أن الخط الحالى مقوس وليس مستقيما .



تمثل المعادلة السابقة حالة خاصة للمعادلة العامة

$$(٢) \quad ص = ١ + ب س + ج س^٢$$

حيث ا، ب، ج ثوابت مستقلة عن س، ص. وهذه المعادلة تمثل منحنيًا كالمرسوم في الشكل الأخير وهذا يسمى قطعًا مكافئًا. والقطع المكافئ إما محذب إلى أعلى كما في الشكل أو مقعر إلى أعلى. فإن كان محذبًا إلى أعلى تكون له نقطة عليا وفي هذه الحالة يكون ج سالبا كما في المثال الأخير وإن كان مقعرا إلى أعلى تكون له نقطة دنيا وفي هذه الحالة يكون ج موجبا. وسواء كان ج سالبا أو موجبا فالنقطة التي يصل المنحنى عندها إلى الذروة أو الحضيض هي النقطة المعطاة بالمعادلة $ص = - ب / ٢ ج$ والقيمة الكبرى أو الصغرى عند هذه النقطة هي $ص = (٤ ا ج - ب^٢) / ٤ ج$. هذه النقطة المهمة تسمى رأس القطع المكافئ والخط المستقيم

$$س = - \frac{ب}{٢ ج}$$

يمر بالرأس ويوازي محور ص. هذا الخط يقسم القطع إلى نصفين متساويين تماما ولذا يسمى محور القطع. والخط المستقيم

$$ص = \frac{٤ ا ج - ب^٢}{٤ ج}$$

هو المماس للقطع عند الرأس.

في الشكل المرسوم ا = ٢، ب = ج = ١. إذن الرأس هو النقطة

$$س = - \frac{١}{٢} = - \frac{١}{٢}$$

$$ص = \frac{٢(١) - (١)^٢ \times ٤}{(١)^٢} = \frac{٢ - ٤}{١} = -٢$$

هذا يضع الرأس عند النقطة ا (١، -٢) والمحور هو $س = - \frac{١}{٢}$ والمماس عند الرأس هو $ص = -٢$.

لإثبات هذه النتائج نكتب المعادلة (٢) في الصيغة

$$ص = \frac{٤ ا ج - ب^2}{ج^٤} + ج \left(\frac{ب}{ج^2} + س \right) \quad (ج \neq ٠)$$

الحد (٠...) موجب دائما إلا إذا كان س + ب/ج = ٠ فإنه يكون صفرا.
 إذن لو كان ج سالبا يكون ص أصغر من (٤ ا ج - ب^٢)/ج^٤ إلا إذا كان
 س = - ب/ج وعندئذ يبلغ ص قيمته الكبرى وهي (٤ ا ج - ب^٢)/ج^٤.
 وإذا كان ج موجبا يكون ص أكبر من (٤ ا ج - ب^٢)/ج^٤ إلا إذا كان
 س = - ب/ج وعندئذ يبلغ ص قيمته الصغرى (٤ ا ج - ب^٢)/ج^٤.
 والقطع المكافئ إما قاطع مرتين لمحور س كما في الشكل أو قاطع له مرة
 واحدة فهو ماس إياه أو غير قاطع له فهو يقع بتمامه فوق أو تحت محور س.
 لبحث هذه الحالات الثلاث نضع ص = ٠ في معادلة القطع فنحصل على
 $٠ = ١ + ب + س + ج س^2$

لهذه المعادلة جذران يعطيها القانون المعروف

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ ا ج}}{٢ ج}$$

ومن هذا القانون يتضح أنه

١. إذا كان ب^٢ - ٤ ا ج < ٠ يقطع القطع محور س مرتين لأن قيمتي س في هذه الحالة حقيقتان ومختلفتان ،
٢. إذا كان ب^٢ - ٤ ا ج = ٠ يقطع القطع محور س مرة واحدة أى بمسه لأن قيمتي س في هذه الحالة حقيقتان ومتساويتان ،
٣. إذا كان ب^٢ - ٤ ا ج > ٠ لا يقطع القطع محور س لأن قيمتي س في هذه الحالة تخيليتان .

مثلا في الشكل المرسوم لدينا ب^٢ - ٤ ا ج = ١ + ٨ = ٩ وهذا يعطى س = (١ ± ٣)/(٢ -) أى س = - ٢ أو ١. هذا واضح أيضا بوضع ص = ٠ في ص = (٢ + س)(١ - س) .

مثال . إذا أعطيت النقط الثلاث (١، ٠) و (٠، ٢) و (٢، ٥) فأوجد معادلة القطع المكافئ. $ص = ١ + ب س + ج س^٢$ الذى يمر بها .
إذا مر القطع المكافئ بالنقطة الأولى يحقق إحداثاها معادلته . أى
 $١ = ١$

ومن النقطتين الباقيتين نحصل بالمثل على المعادلتين

$$٠ = ١ + ٢ ب + ٤ ج ،$$

$$٢ = ١ + ٥ ب + ٢٥ ج$$

لدينا إذن ثلاث معادلات لإيجاد ١ ، $ب$ ، $ج$ منها . بالحل نجد أن $١ = ١$ ،
 $ب = -\frac{٢}{٣}$ ، $ج = \frac{٧}{٣}$. وبتعويض هذه القيم فى (٢) ينتج أن القطع
المطلوب هو

$$ص = ١ - \frac{٢}{٣} س + \frac{٧}{٣} س^٢$$

أو

$$٣٠ = ص = ٣٠ - ٢٩ س + ٧ س^٢ = (٢ - س)(١٥ - ٧ س)$$

تمرين . أوجد معادلة القطع المكافئ. $ص = ١ + ب س + ج س^٢$
الذى يمر بالنقط الثلاث (١، ٠) و (١، ١) و (٢، ٢) .
ارسم شكلا يمثل هذا القطع واكتب معادلة محوره وإحداثيات نقطتي
تقاطعه مع محور $س$.

٦ . المنحنى التكعيبى وما فوقه .

لنرسم الخط البياني للمعادلة

$$ص = -٢ - ٣ س + ٣ س^٢ = (٢ + س)(١ + س)$$

هذه المعادلة لا يمكن أن تمثل خطا مستقيما لأنها ليست من الدرجة الأولى
كالمعادلة العامة للخط المستقيم كما أنها لا يمكن أن تمثل قطعاً مكافئاً لأنها ليست
من الدرجة الثانية .

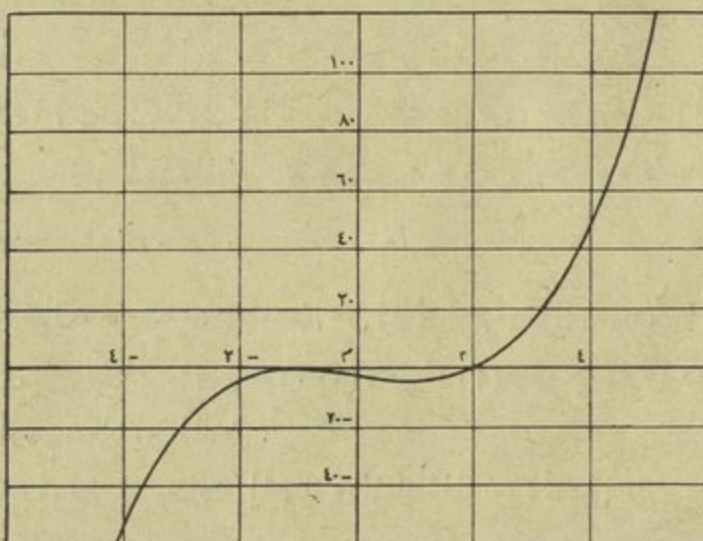
لرسم الخط المطلوب نستخدم المعادلة المعطاة للحصول على قيم متناظرة للمتغيرين س، ص. فمثلا بإعطاء س القيمة -٤ نجد أن

$$ص = -2 - 3(-4) + (-4)^3 = -2 + 12 - 64 = -54.$$

وهكذا نحصل على القيم الآتية .

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢	٣	٤	٥
ص	-٥٤	-٢٠	-٤	٢	٤	٠	-٢	-١٦	-٥٠	-١٠٨

وإذا مثلنا هذه القيم بيانيا نحصل على المنحنى المرسوم في الشكل .



تمثل هذه المعادلة حالة خاصة للمعادلة

$$ص = ١ + ب س + ج س^٢ + د س^٣ \quad (٣)$$

حيث ا، ب، ج، د ثوابت غير محتوية على س أو ص. وتمثل هذه المعادلة العامة منحنيا تكعيبيا لأنها معادلة تكعيبية في س، ص ويمثل الشكل صورة ممكنة للمنحنى التكعيبى. لكن هذا المنحنى له صور كثيرة مختلفة الأشكال وهذا خلاف رئيسى بين الخط المستقيم والقطع المكافئ. من ناحية وبين المنحنى

التكعبي وما فوق التكعبي من ناحية أخرى . فالخطوط المستقيمة متشابهة أشكالها وكذلك القطاعات المكافئة لكن هذا غير صحيح مع المنحنيات التكعبية وما فوقها .

واضح أن المعادلة التي تلي (٣) في الدرجة هي

$$(٤) \quad \text{ص} = ١ + \text{ب س} + \text{ج س}^٢ + \text{د س}^٣ + \text{ه س}^٤$$

حيث ا ، ب ، ... ، ه ثوابت مستقلة عن س ، ص . وهذه المعادلة الجديدة تمثل منحنيًا رباعيًا لأنها معادلة رباعية في س ، ص . على هذا النحو يمكننا كتابة المعادلة العامة الآتية : —

$$(٥) \quad \text{ص} = ١ + \text{ب س} + \text{ج س}^٢ + \dots + \text{ك س}^٢$$

حيث ا ، ب ، ... ، ك كلها ثوابت مستقلة عن س ، ص وحيث م أى عدد صحيح موجب . هذه المعادلة العامة تمثل منحنيًا من الدرجة م لأنها من الدرجة م في س ، ص .

مثال . أوجد معادلة المنحنى $\text{ص} = ١ + \text{ب س} + \text{ج س}^٢ + \text{د س}^٣$ الذي يمر بالنقط الأربع $(-٢، ١٠)$ و $(١، -١)$ و $(٠، ٠)$ و $(١، -٥)$. ثم ارسم شكلًا يبين المنحنى .

بتعويض الإحداثيات المعطاة في المعادلة المذكورة نحصل على

$$١٠ = ١ - ٢\text{ب} + ٤\text{ج} - ٨\text{د} ،$$

$$١ = ١ - \text{ب} + \text{ج} - \text{د} ،$$

$$٠ = ١ ،$$

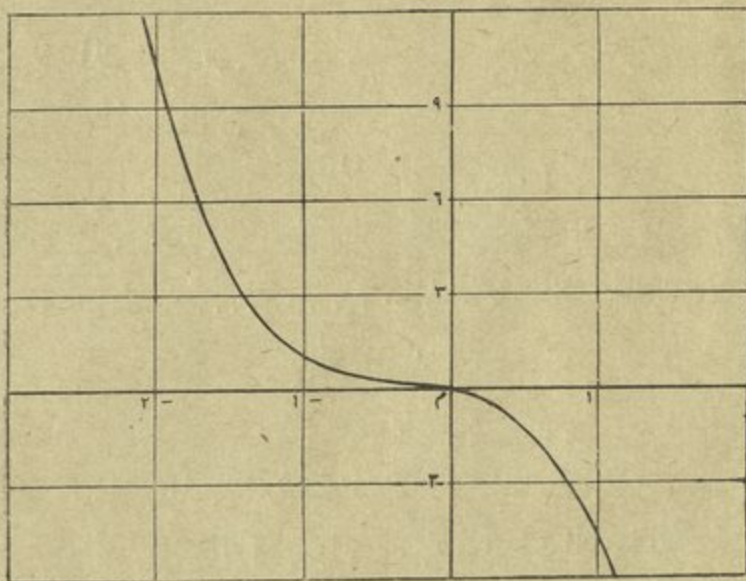
$$-٥ = ١ + \text{ب} + \text{ج} + \text{د} .$$

وبحل هذه المعادلات نجد أن $٠ = \text{ب}$ ، $١ = \text{ج}$ ، $٢ = \text{د}$. إذن بتعويض هذه القيم نحصل على المنحنى المطلوب في الصيغة

$$\text{ص} = -- \text{س} - ٢\text{س}^٢ - ٢\text{س}^٣ .$$

يظهر هذا المنحنى على الصفحة التالية ويلاحظ الاختلاف في الشكل بينه

وبين المنحنى المرسوم في الشكل السابق . فهذا الأخير له في الواقع قيمة كبرى عند $s = 1$ وقيمة صغرى عند $s = 1$. أما المنحنى الحالى فليس له قيم كبرى أو صغرى . ولكلا المنحنيين نقطة انقلاب واحدة عند $s = 0$. للمنحنى السابق وعند $s = -\frac{1}{3}$ للمنحنى الحالى .



بوضح هذا المثال كيف أنه إذا أعطينا أى أربع نقط يصير ممكنا بوجه الإجمال إيجاد منحن تكعبي واحد يمر بها جميعا . كذلك المنحنى (٥) ذو الدرجة ٣ م تحتوى معادلته على $s + 1$ ثابتا اختياريا ، ب ، ... ، ك . إذن أى عدد قدره $s + 1$ من النقط يقع بوجه الإجمال على منحن واحد فقط من هذا النوع . ولإثبات ذلك يكفي أن نلاحظ أنه إذا عوضنا إحداثيات النقط المعطاة في المعادلة المذكورة نحصل على مجموعة عددها $s + 1$ من المعادلات الخطية في s ، ب ، ... ، ك . ومثل هذه المجموعة حل واحد لا غير بوجه الإجمال .

تمرين . أوجد معادلة المنحنى $ص = 1 + ب س + ج س^2 + د س^3$

الذى يمر بالنقط (- ١ ، ٠) و (٠ ، ١) و (٠ ، ٢) و (١ ، ٠) وارسم شكلا يمثل المنحنى .

هل يمكن إيجاد منحن مثل $س = ١ + ب ص + ج ص^٢ + د ص^٣$ يمر بالنقط الأربع عينها ؟

٧ . المنحنى الأسى .

معادلة المنحنى الأسى هي

$$(٦) \quad ص = ا ج ب س \quad (ج < ٠)$$

حيث ا ، ج ، ب ثوابت . وهناك حالتان مهمتان بنوع خاص أغنى ج $١٠ = ج ، ٠ = ٢,٧١٨٢٨ \dots$ والمعادلة في هاتين الحالتين هي

$$(٧) \quad ص = ١.٠١ ب س ،$$

$$(٨) \quad ص = ١.٠٥ ب س .$$

على الولا . لكن المعادلة الأصلية ليست أعم من المعادلتين الأخيرتين في شيء . رغم احتوائها على ثلاثة ثوابت ا ، ج ، ب في الوقت الذى فيه لا تحتوى كلتا الأخيرين إلا على ثابتين اثنين فقط . ذلك لأن المعادلة الأصلية يمكن أن تكتب

$$ص = ١.٠١ ب' س$$

$$\text{حيث } ب' = ب \text{ لغ } ا ج \text{ أو}$$

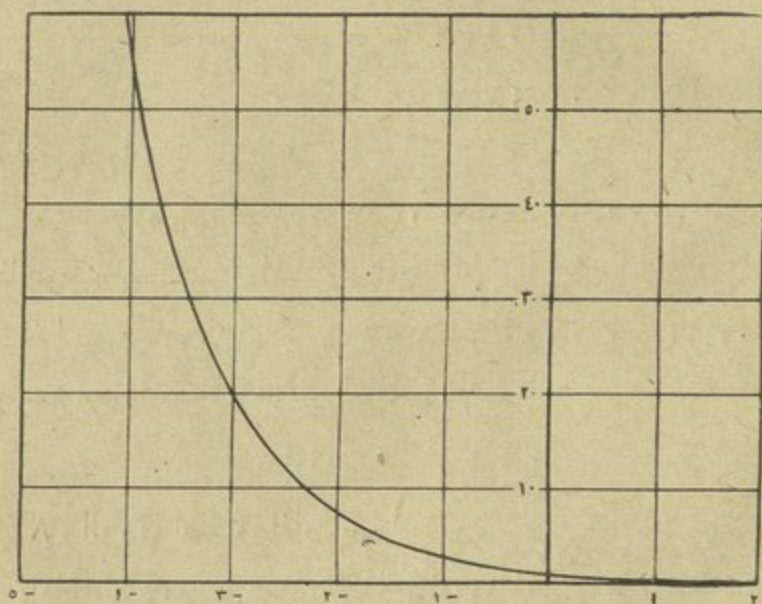
$$ص = ١.٠٥ ب'' س$$

حيث ب'' = ب لغ ج . لدينا إذن ثلاث صيغ مختلفة للمعادلة العامة للمنحنى الأسى .

باستخدام الصيغة (٨) مع جدول للدالة الأسية نستطيع رسم المنحنى الأسى بسهولة . ولنرسم على سبيل المثال المنحنى $ص = ١.٠٥ - س$. من الجداول نحصل على قيم ص الآتية وإذا مثلنا هذه القيم على ورقة المربعات العادية

نحصل على الشكل المرسوم .

س	٤ -	٣ -	٢ -	١ -	٠	١
ص	٥٤,٥٩٨١	٢٠,٠٨٥٥	٧,٣٨٩١	٢,٧١٨٣	١,٠٠٠٠	٠,٣٦٧٩



باعتبار (٨) نرى أن المعادلة العامة للمنحنى الآسى تحتوى على ثابتين مستقلين . إذن لو أعطينا نقطتين أيا كانتا فإننا مستطيعون بوجه الإجمال إيجاد منحن آسى يمر بهما . فمثلا هب أن النقطتين هما $(٧, ٢-)$ ، $(١, ٤)$ ونريد إيجاد المنحنى الآسى . بأخذ لغارتمى الجانبين فى (٨) يمكننا كتابة المعادلة فى الصيغة ١

$$(٨) \quad \text{لغ ص} = \text{لغ ا} + \text{ب س لغ ه} \quad (٠ < ١)$$

١ لن نكتب أساس اللغارتم بعد الآن إذا كان الأساس ١٠ .

٢ إذا كان $١ > ٠$ تكون الصيغة اللغارتمية المناظرة

$$\text{لغ (ص - س)} = \text{لغ (١ - ا)} + \text{ب س لغ ه} \quad (٠ > ١)$$

هذا واضح من كتابة المعادلة الأصلية

$$\text{ص} - \text{ا} = \text{ب س} \cdot \text{ه}$$

والآن نعوض إحداثيات النقطتين في هذه المعادلة فنحصل على

$$\text{لغ } ٧ = \text{لغ } ١ - ٢ \text{ ب لغ } ٥ ،$$

$$\text{لغ } ١ = \text{لغ } ١ + ٤ \text{ ب لغ } ٥ .$$

$$\text{بوضع لغ } ٥ = ٠,٤٣٤٣ ، \text{لغ } ٧ = ٠,٨٤٥١ ، \text{لغ } ١ = ٠ . \text{ نجد أن}$$

$$٠,٨٤٥١ = \text{لغ } ١ - ٠,٨٦٨٦ \text{ ب ،}$$

$$٠ = \text{لغ } ١ + ١,٧٣٧٢ \text{ ب .}$$

بالطرح ينتج أن

$$٠,٨٤٥١ - ٠,٦٠٥٨ = \text{ب} ، \text{ب} = ٠,٣٢٤ -$$

فإذا عوضنا هذه القيمة في المعادلة الثانية نجد أن

$$\text{لغ } ١ = ١ - ١,٧٣٧٢ - (٠,٣٢٤) = ٠,٥٦٣ ، \text{لغ } ١ = ٠,٣٦٦$$

وبوضع قيمتي ١ ، ب في (٨) ينتج أن المنحنى المطلوب هو

$$\text{ص} = ٠,٣٦٦ - ٠,٣٢٤ \text{ س .}$$

٨ . الورقة نصف اللغارتمية .

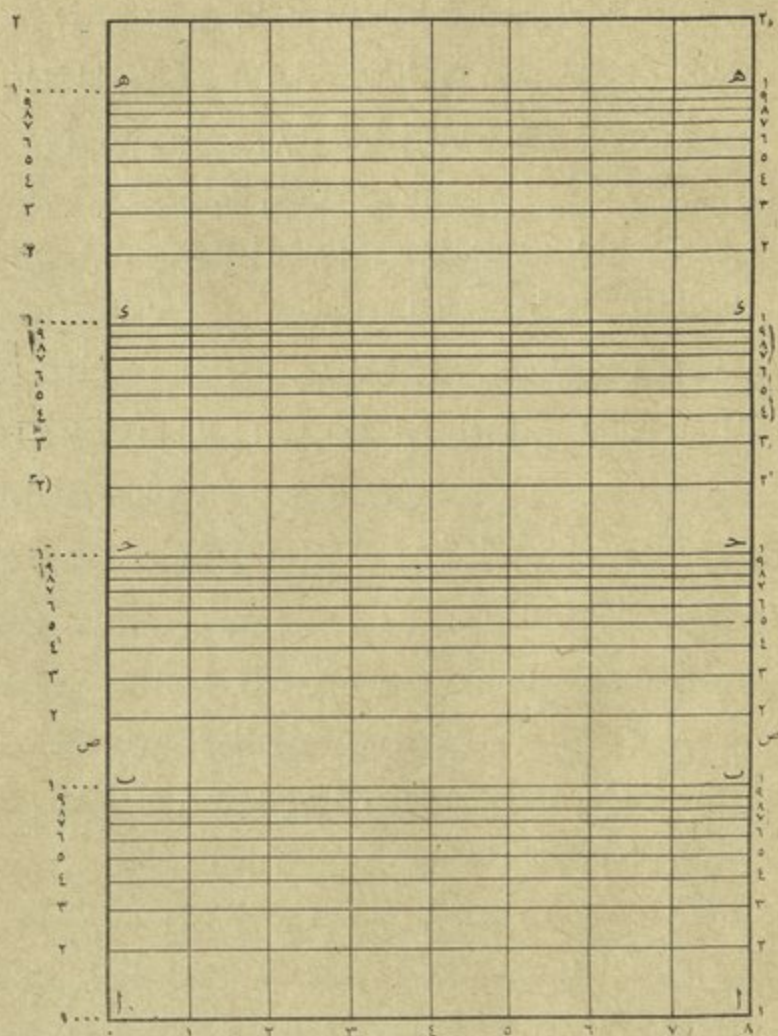
إذا أخذنا صحيفة من الورق طولها حوالى ١١" ورسمنا عليها خطا مستقيما طولها ١٠" وأخذنا وحدة القياس تساوى ٢" وأخذنا على الخط النقط المناظرة للقيم ١٠٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠ ثم أخذنا عليه النقط المناظرة للقيم لغ ١ ، لغ ٢ ، ... ، لغ ١٠ ، لغ ٢٠ ، ... ، لغ ١٠٠ ، لغ ٢٠٠ ، ... ، لغ ١٠٠٠ ، لغ ٢٠٠٠ ، ... ، لغ ١٠٠٠٠ نحصل على تدريج مؤلف من نقط تناظر اللغارتيمات العادية للأعداد . يسمى هذا التدريج تدريجا لغارتميا وتسمى المسافة بين النقط المناظرة للقيم لغ ١ ، لغ ١٠ ، أو لغ ١٠٠ ، لغ ١٠٠٠ أو لغ ١٠٠٠٠ إلخ دورة التدريج . والدورة طولها ثابت بالطبع ويساوى وحدة القياس لأن

$$\text{لغ } ١٠ - \text{لغ } ١ = ١ ، \text{لغ } ١٠٠ - \text{لغ } ١٠ = ١٠ ، \text{لغ } ١٠٠٠ - \text{لغ } ١٠٠ = ١٠٠ ، \text{لغ } ١٠٠٠٠ - \text{لغ } ١٠٠٠ = ١٠٠٠ ، \dots$$

فتلا في المثال الحالى طول الدورة يساوى ٢" .

يبين الشكل الآتى ورقة ذات تدريج عادى على المحور الأفقى وتدرج لغارتمى

على المحور الرأسى . ومثل هذه الورقة تسمى ورقة نصف لغاتمية لأن التدرج اللغاتمى لا يظهر فيها على المحورين وإنما يظهر على محور واحد فقط .^١



نلاحظ أن المحور الرأسى مقسم إلى أربع دورات كاملة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ وجزء صغير من الدورة الخامسة . أيضا ١ = ١، ٢ = ٢، ٣ = ٣، ٤ = ٤، ٥ = ٥، ٦ = ٦، ٧ = ٧، ٨ = ٨

١ واضح أنه يمكننا استخدام أى نظام للغاتميات غير النظام العادى . لكننا نكتفى هنا بدراسة الورقة نصف اللغاتمية العادية ذات الأساس ١٠ .

١ = ٣، ١ هـ = ٤ لأن الدورة تساوى وحدة القياس . وفى التدرج
الظاهر على الجانب الأيمن للشكل تحتوى كل دورة على النقط ١، ٢، ٣، ٤،
٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠ . لكن هذه النقط لا تناظر الأعداد ١، ٢، ٣، ٤، ٥
وإنما تناظر لغارتمات الأعداد من ١ إلى ١٠ . فالمسافات بين النقط ١، ٢
أو ٢، ٣ أو ٣، ٤ أو ٤، ٥ أو ٥، ٦ أو ٦، ٧ أو ٧، ٨ أو ٨، ٩ أو ٩، ١٠ كلها متساوية والمسافتان بين ١، ٢
أو ٣، ٤ أو ٥، ٦ أو ٧، ٨ أو ٩، ١٠ متساويتان أيضا . أيضا أى عدد على التدرج ولكن ص (ص < ٠)
يوضع عليه حيث يشغل المكان الذى يناظر لغ ص . أما هذه اللغارتمات
فيحصل عليها بالطبع من جدول للغارتمات . ويمكننا أيضا الحصول على
التدرج اللغارتمى بالتقريب باستخدام التقسيمات المبنية على المسطرة الحاسبة
بكيفية تشبه كيفية الحصول على التدرج العادى باستخدام التقسيمات المبنية
على المسطرة العادية .

فى التدرج الظاهر على الجانب الأيسر للشكل وهو التدرج الوحيد الذى
سيظهر بعد الآن فى تطبيقات الورقة نصف اللغارتمية تمثل النقطة الموجودة
أمام العدد ٢ فى أية دورة لغارتم (٢ مضروباً فى إحدى قوى ١٠ الصحيحة) .
هذه النقطة إذن قد تمثل لغ ٢ أو لغ ٢٠ أو لغ ٢٠٠ أو لغ ٢٠٠٠ أو لغ ٢٠٠٠٠ إلخ
ولا نستطيع قول أكثر من ذلك إلا إذا أعطينا قيمة معينة لإحدى نقط
التدرج . وقد جرت العادة على إعطاء قيمة معينة للنقطة ١ مثل ١ أو ١٠ أو
١٠٠ أو ١٠٠٠ أو ١٠٠٠٠ أو أى عدد آخر على الصورة ١٠ ن حيث ن أى عدد
صحيح موجب أو سالب . هذه القيمة تحدد لها طبيعة المسألة ومدى قيم ص
فيها لكنها لا بد أن تكون على الصورة المذكورة . فمثلا فى الورقة المبنية

١ إذا استخدمنا اللغارتمات الطبيعية ذات الأساس ١٠ تدرج المحور الرأسى فإن الدورة
لن تساوى وحدة القياس ولكنها تظل ثابتة الطول وتساوى الفرق بين لغ ١ ، لغ ١٠ أو بين
لغ ١٠ ، لغ ١٠٠ إلخ . أى أنها تساوى لغ ١٠ أو ٢٠، ٣٠، ٤٠ وحدة من وحدات القياس
تقريباً . وسواء كانت اللغارتمات المستخدمة عادية أو طبيعية ففى الإمكان استخدام عين التدرج
اللغارتمى فى الحالتين .

في الشكل أعطينا ١ القيمة ١٠٠٠ وعلى ذلك تمثل النقطة الموجودة أمام العدد ٢ في الدورة الأولى لغ ٢٠٠٠ وفي الدورة الثانية لغ ٢٠٠٠٠ وفي الدورة الثالثة لغ ٢٠٠٠٠٠ وفي الدورة الرابعة لغ ٢٠٠٠٠٠٠ بضرب العدد في ١٠ كل مرة للانتقال من دورة إلى الدورة التالية . وقس على ذلك مع بقية النقاط .

يتضح مما تقدم أن استخدام الورقة نصف اللغارية يمكننا من تمثيل البيانات المحتوية على قيم بينها تفاوت شاسع تمثيلا غاية في الدقة والإحكام . فمثلا باستخدام ورقة كالمدينة في الشكل السابق ذات محور رأسي مقسم إلى أربع دورات كاملة يمكننا الحصول على خط بياني واضح يمثل بيانات محتوية على قيم صغيرة مثل ١٥٠٠ أو ٢٠٠٠ وقيم كبيرة مثل ٨٥٠٠٠٠ أو ٩٥٠٠٠٠٠ . وواضح أن هذا لن يكون سهلا إذا استخدمنا ورقة المربعات العادية لأنه إذا اخترنا وحدة القياس التي تمكنتنا من التمييز بين ٨٥٠٠٠٠ و ٩٥٠٠٠٠ فأى فرق صغير كذلك الذي بين ١٥٠٠ و ٢٠٠٠ لا يمكن إظهاره في الشكل بسهولة . هذا يجعل الورقة نصف اللغارية لا غنى عنها في مثل الحالة المذكورة ١ .

تمرين . ارسم على ورقة مربعات عادية الخط البياني المناظر لبيانات الجدول الآتي .

س	س	س	س
١	لغ ٦	٨	لغ ١٠٨٠
٢	لغ ٩	١٠	لغ ٧٥٦٠
٤	لغ ٣٦	١٢	لغ ٦٠٤٨٠
٦	لغ ١٨٠		

١ تباع هذه الأوراق (مع الأوراق اللغارية الآتي ذكرها) كأوراق المربعات العادية في المكتبات الكبيرة في أحجام مختلفة ومقسمة بكيفيات مختلفة .

ارسم الخط البياني المناظر لنفس البيانات على ورقة نصف لغارتمية .

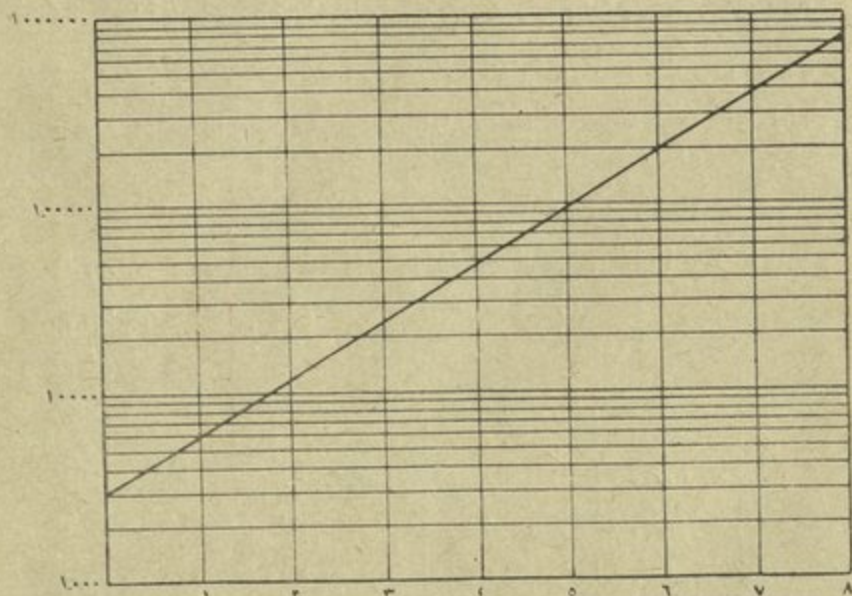
٩ . الخط المستقيم على الورقة نصف اللغارتمية .

هـ أننا أعطينا البيانات الآتية ويراد استخدام الورقة نصف اللغارتمية .

لرسم الخط البياني للعلاقة بين س ، ص :

٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	٠	س
٧٦٨	٣٨٤	١٩٢	٩٦	٤٨	٢٤	١٢	٦	٣	ص (آلاف)

في أية مسألة من هذا القبيل ينبغي قبل الشروع في الرسم فحص المدى الصادي فحسا دقيقا حتى تتسع الورقة لتمثيل القيم جميعا . فنلاحظ عدد الدورات اللازمة ثم نعطي قيمة مناسبة لإحدى النقاط الموجودة أمام العدد ١ على التدرج ومن هذه القيمة نستنبط القيم التي تعطي النقاط الباقية عليه .



أصغر القيم في المسألة الحالية هي ٣٠٠٠ وأكبرها هي ٧٦٨٠٠٠ وهاتان القيمتان تقعان بين ٣١٠ و ٦١٠ . إذن لا بد من استخدام ثلاث دورات

أ، ب، ح، د، ويمكننا إعطاء النقطة ١ على التدرج القيمة ١٠٠٠ والنقط
ب، ح، د، والقيم ١٠٠٠٠ و ١٠٠٠٠٠ و ١٠٠٠٠٠٠ على التوالي. بعد ذلك
نمثل القيم المعطاة أى (٣٠٠٠، ٠) و (٦٠٠٠، ١) و (٧٦٨٠٠٠، ٨) بنقط
فنحصل على الخط البياني المرسوم فى الشكل .

نلاحظ أن قيم ص فى هذا المثال تكون متوالية هندسية نسبتها المشتركة ٢
بمعنى أن

$$ص = ٣٠٠٠ \times ٢$$

وأن الخط البياني الذى يصور العلاقة بين س، ص على الورقة نصف
الغارتية هو خط مستقيم . هذه الملاحظة توضح مبدأ عاما ينص على أن
أى منحن أسى مثل (٦) يمثل على الورقة نصف اللغارتية بخط مستقيم مقطعه
الصادى لغ | | وميله ب لغ ج وهذا صحيح فى أى نظام لغارتى .

لإثبات هذا يكفى أن نكتب (٦) فى الصيغة اللغارتية لها أى
(٦) ' لغ ص = لغ أ + ب س لغ ج (أ، ج < ٠) .
والآن نعوض

$$س = س' ، لغ ص = ص' (ص < ٠)$$

فتحول النقطة (س، ص) على ورقة المربعات العادية إلى النقطة (س'، ص')
على الورقة نصف اللغارتية وتتحول المعادلة (٦) إلى
ص' = لغ أ + ب س' لغ ج .

لكن هذه المعادلة الأخيرة تمثل على الورقة نصف اللغارتية خطا مستقيما
مقطعه الصادى لغ أ وميله ب لغ ج .

هذا يجعل الورقة نصف اللغارتية مفيدة للغاية فى رسم المنحنيات الأسية
لأن الخط المستقيم يتعين تماما بأى اثنتين من نقطه . وبما يزيد من فائدة هذه
الورقة أن عكس النظرية السابقة صحيح أيضا بمعنى أن أى خط مستقيم على
الورقة نصف اللغارتية يمثل على ورقة المربعات العادية بمنحن أسى . ذلك

لأنه إذا أجرينا التعويض آنف الذكر على المعادلة $ص = 'ا' + 'ب' س$ تتحول هذه إلى

$$لغ ص = 'ا' + 'ب' س$$

وهذه معادلة على الصورة (٦) .

١٠ . المنحنى $ص = اس ب$. (منحنى پاريتو .)

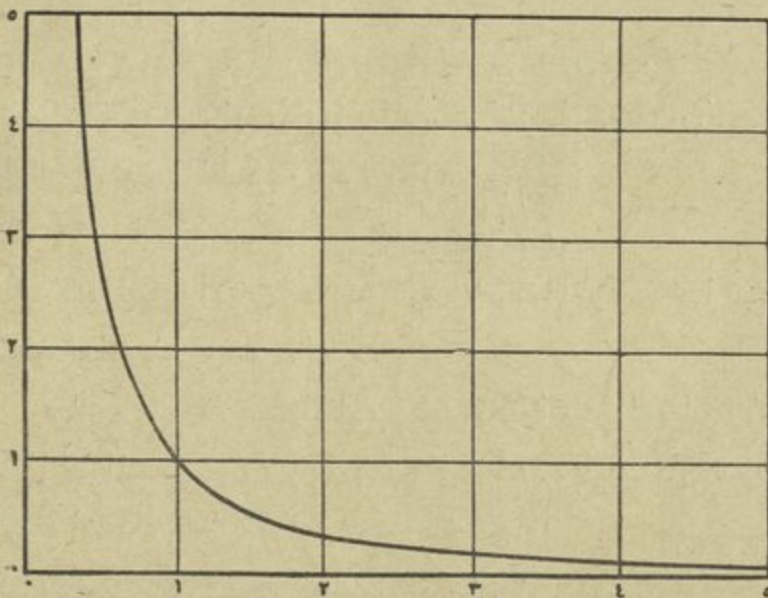
ندرس الآن منحنيات على الصورة

$$(٩) \quad ص = اس ب \quad (٠ < ١)$$

حيث $ا، ب$ ثابتان لأن هذه المنحنيات لها فوائد اقتصادية كبيرة في دراسة توزيع الدخل الأهل بين سكان الدولة . في هذه المعادلة لا يأخذ $س$ إلا قيما موجبة ويعرف $س ب$ لجميع $س > ٠$ بأنه $١٠ ب لغ س$. فإذا كان $ب < ٠$ يكون $ص$ صفرا عند $س = ٠$ ومن هذا ينتج أن $ص \leq ٠$ دائما .

ولنرسم الآن المنحنى

$$ص = س - ١,٥$$



باستخدام جدول الجذور التربيعية نحصل بسهولة على قيم ص الآتية وبتمثيل هذه القيم على ورقة المربعات العادية نحصل على الشكل .

س	٠,٣٧٥	٠,٥	١	٢	٣	٤	٥
ص	٤,٣٥٥	٢,٨٢٨	١,٠٠٠	٠,٣٥٤	٠,١٩٢	٠,١٢٥	٠,٠٨٩

تحتوى المعادلة (٩) على ثابتين مستقلين . إذن لو أعطينا نقطتين وكانت الإحداثيات الأربعة موجبة فإننا مستطيعون بوجه الإجمال رسم منح من هذا النوع يمر بالنقطتين . فمثلا هب أننا أعطينا النقطتين (٤, ٢,٦) و (٨, ٧,٩) ويراد إيجاد المنحنى . بأخذ لغارتمى الجانين فى (٩) يمكننا كتابتها فى الصيغة

$$(٩) \quad \text{لغ ص} = \text{لغ ا} + \text{ب لغ س} \quad (٠ < ١)$$

بتعويض إحداثيات النقطتين فى هذه المعادلة نحصل على

$$\text{لغ } ٢,٦ = \text{لغ ا} + \text{ب لغ } ٤,$$

$$\text{لغ } ٧,٩ = \text{لغ ا} + \text{ب لغ } ٨.$$

بالطرح يكون لدينا

$$\text{لغ } ٧,٩ - \text{لغ } ٢,٦ = \text{ب لغ } ٢,$$

$$٠,٣٠١٠ = \text{ب} = ٠,٨٩٧٦ - ٠,٤١٥٠ = ٠,٤٨٢٦$$

$$\text{ب} = \frac{٠,٤٨٢٦}{٠,٣٠١٠} = ١,٦٠٣$$

أيضا بضرب المعادلة الأولى فى ٣ والثانية فى - ٢ وجمع النتيجةين نجد

$$٣ \text{ لغ } ٢,٦ - ٢ \text{ لغ } ٧,٩ = \text{لغ ا},$$

$$\text{لغ ا} = ١,٢٤٥٠ - ١,٧٩٥٢ = -١,٤٤٩٨, \quad ١ = ٢,٨١٧$$

بوضع قيمتى ا، ب فى (٩) ينتج أن المنحنى

$$\text{ص} = ٠,٢٨١٧ \text{ س} + ١,٦٠٣$$

يمر بالنقطتين المعطيتين .

يمكن الآن استخدام هذه المعادلة لإيجاد قيمة ص من س . فمثلا هب
 أننا نريد قيمة ص عند ما يكون س = ٦ . بوضع س = ٦ في القانون
 نجد أن

$$\text{ص} = ٠,٢٨١٧ \times ١,٦٠٣٦$$

هذا يعطى

$$\begin{aligned} \text{لغ ص} &= \text{لغ } ٠,٢٨١٧ + ١,٦٠٣ \text{ لغ } ٦ \\ &= ١,٤٤٩٨ + ٠,٧٧٨٢ \times ١,٦٠٣ + ١,٢٤٧٥ \\ &= ٠,٠٦٩٧٣ \end{aligned}$$

إذن ص = ٤,٩٨٠ أو ٤,٩٨ تقريبا .

١١ . الورقة اللغارتية .

هذا نوع ثالث من الأوراق المستخدمة لرسم الخطوط البيانية وتأتى في
 الترتيب بعد ورقة المربعات العادية ذات التدرج العادى على المحورين والورقة
 نصف اللغارتية ذات التدرج العادى على أحد المحورين واللغارتية على المحور
 الآخر . أما فى الورقة اللغارتية فالتدرج لغارتى على المحورين وسنكتفى
 هنا بدراسة الورقة اللغارتية العادية أى الورقة ذات الأساس ١٠ التى فيها
 تكون اللغارتمات عادية . على أن هذا يجب ألا يحول بيننا وبين تصور
 أوراق لغارتية مبنية على نظام آخر للغارتمات غير نظامها العادى .

لتمثيل أى قيمتين موجبتين بنقطة على الورقة اللغارتية نلاحظ أن مانثله
 فعلا هو لغارتما القيمتين وليس القيمتين بالذات بمعنى أن النقطة (س ، ص)
 على الورقة اللغارتية تمثل النقطة (لغ س ، لغ ص) على ورقة المربعات
 العادية (س < ٠ ، ص < ٠) . ولجعل هذه الفكرة واضحة كل الوضوح
 سنأخذ بعض الأمثلة البسيطة .

يبين الشكل المواجه ورقة لغارتية محورهما الأفقى مقسم إلى أكثر من
 دورتين كاملتين وأقل من ثلاث دورات ومحورها الرأسى مقسم إلى دورتين

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000	1001	1002	1003	1004	1005	1006	1007	1008	1009	1010	1011	1012	1013	1014	1015	1016	1017	1018	1019	1020	1021	1022	1023	1024	1025	1026	1027	1028	1029	1030	1031	1032	1033	1034	1035	1036	1037	1038	1039	1040	1041	1042	1043	1044	1045	1046	1047	1048	1049	1050	1051	1052	1053	1054	1055	1056	1057	1058	1059	1060	1061	1062	1063	1064	1065	1066	1067	1068	1069	1070	1071	1072	1073	1074	1075	1076	1077	1078	1079	1080	1081	1082	1083	1084	1085	1086	1087	1088	1089	1090	1091	1092	1093	1094	1095	1096	1097	1098	1099	1100	1101	1102	1103	1104	1105	1106	1107	1108	1109	1110	1111	1112	1113	1114	1115	1116	1117	1118	1119	1120	1121	1122	1123	1124	1125	1126	1127	1128	1129	1130	1131	1132	1133	1134	1135	1136	1137	1138	1139	1140	1141	1142	1143	1144	1145	1146	1147	1148	1149	1150	1151	1152	1153	1154	1155	1156	1157	1158	1159	1160	1161	1162	1163	1164	1165	1166	1167	1168	1169	1170	1171	1172	1173	1174	1175	1176	1177	1178	1179	1180	1181	1182	1183	1184	1185	1186	1187	1188	1189	1190	1191	1192	1193	1194	1195	1196	1197	1198	1199	1200	1201	1202	1203	1204	1205	1206	1207	1208	1209	1210	1211	1212	1213	1214	1215	1216	1217	1218	1219	1220	1221	1222	1223	1224	1225	1226	1227	1228	1229	1230	1231	1232	1233	1234	1235	1236	1237	1238	1239	1240	1241	1242	1243	1244	1245	1246	1247	1248	1249	1250	1251	1252	1253	1254	1255	1256	1257	1258	1259	1260	1261	1262	1263	1264	1265	1266	1267	1268	1269	1270	1271	1272	1273	1274	1275	1276	1277	1278	1279	1280	1281	1282	1283	1284	1285	1286	1287	1288	1289	1290	1291	1292	1293	1294	1295	1296	1297	1298	1299	1300	1301	1302	1303	1304	1305	1306	1307	1308	1309	1310	1311	1312	1313	1314	1315	1316	1317	1318	1319	1320	1321	1322	1323	1324	1325	1326	1327	1328	1329	1330	1331	1332	1333	1334	1335	1336	1337	1338	1339	1340	1341	1342	1343	1344	1345	1346	1347	1348	1349	1350	1351	1352	1353	1354	1355	1356	1357	1358	1359	1360	1361	1362	1363	1364	1365	1366	1367	1368	1369	1370	1371	1372	1373	1374	1375	1376	1377	1378	1379	1380	1381	1382	1383	1384	1385	1386	1387	1388	1389	1390	1391	1392	1393	1394	1395	1396	1397	1398	1399	1400	1401	1402	1403	1404	1405	1406	1407	1408	1409	1410	1411	1412	1413	1414	1415	1416	1417	1418	1419	1420	1421	1422	1423	1424	1425	1426	1427	1428	1429	1430	1431	1432	1433	1434	1435	1436	1437	1438	1439	1440	1441	1442	1443	1444	1445	1446	1447	1448	1449	1450	1451	1452	1453	1454	1455	1456	1457	1458	1459	1460	1461	1462	1463	1464	1465	1466	1467	1468	1469	1470	1471	1472	1473	1474	1475	1476	1477	1478	1479	1480	1481	1482	1483	1484	1485	1486	1487	1488	1489	1490	1491	1492</
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	--------

كاملتين .^١ ولنفرض أن لدينا العددين ٣ ، ٢٠ ونريد تمثيل لغارتميهما بنقطة .
لعمل ذلك طريقتان . فإما أن نستخدم ورقة المربعات العادية فنبحث عن
اللغارتيم من الجداول ثم نرصد النقطة (لغ ٣ ، لغ ٢٠) أو نستخدم الورقة
اللغارتيمية فنرصد النقطة (٢٠ ، ٣) عليها . هذه هي النقطة ١ في الشكل . بالمثل
النقطة ب (٦٠ ، ١٤٠) على الورقة اللغارتيمية تمثل النقطة (لغ ٦٠ ، لغ ١٤٠)
على ورقة المربعات العادية والنقطة ح (٢٣٠ ، ٦٤٠) على الورقة اللغارتيمية
تمثل النقطة (لغ ٢٣٠ ، لغ ٦٤٠) على ورقة المربعات العادية .

تمرين . ارصد على ورقة مربعات عادية ثم على ورقة لغارتيمية النقط المبينة
في الجدول الآتي . راع اختيار التدرج بطريقة تسمح بتمثيل جميع القيم
الموجودة في الجدول على الورقة وصل النقط بمنحن في الحالتين .

س	س	س	س
١٠٠٠	١٠٥	٥٠٠٠٠	١٣٣٠
٢٠٠٠	١٦٨	١٣٠٠٠٠	٢٤٥٠
٤٥٠٠	٢٨٠	٢٠٠٠٠٠	٣٢٢٠
٨٠٠٠	٤٠٦	٣٠٠٠٠٠	٤٢٠٠
١٨٠٠٠	٦٩٣		

١٢ . الخط المستقيم على الورقة اللغارتيمية .

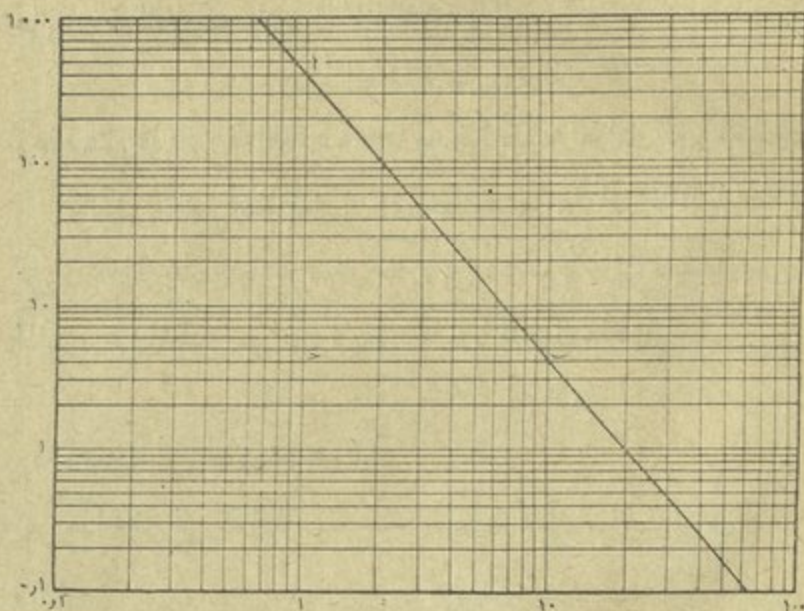
اعتبر البيانات الآتية : —

س	٠,٨	٥	١٠	٢٠	٢٥	٥٠
ص	٦٢٥	١٦	٤	١	٠,٦٤	٠,١٦

لرسم الخط البياني للعلاقة بين س ، ص على الورقة اللغارتيمية نلاحظ أن

١ لتدرج المحورين لغارتميا انظر البند ٨ .

أصغر قيم س تساوى ٠,٨ وأكبرها ٠,٥٠ أيضا أصغر قيم ص ٠,١٦ وأكبرها ٠,٦٢٥. إذن يمكننا استخدام ورقة كالمبينة في الشكل الآتى وتمثيل القيم المعطاة بنقط نحصل على الخط البياني المرسوم .



تحقق قيم ص في هذا المثال العلاقة

$$ص = ٤٠٠ - س$$

والخط البياني الذى يصور هذه العلاقة على الورقة اللوغارتمية هو خط مستقيم يقطع الخط الرأسى المرسوم عند النقطة التى تمثل لغ ١ على التدرج الأفقى قبالة النقطة التى تمثل لغ ٤٠٠ على التدرج الرأسى وميله - ١.٢ هذه الملاحظة الصغيرة توضح مبدأ عاما ينص على أن أى منحن مثل (٩) يمثل على الورقة اللوغارتمية بخط مستقيم يقطع من الخط الرأسى عند النقطة التى تمثل لغ ١ على التدرج الأفقى مقطعا يساوى لغ ١ وميله ب وهذا صحيح لكل الأنظمة اللوغارتمية .

لإثبات هذا نكتب (٩) في صيغتها اللغارية (٩) ونعوض
 $\text{لغ س} = \text{س}'$ ، $\text{لغ ص} = \text{ص}'$ (س ، ص < ٠)
 فتحول النقطة (س ، ص) على ورقة المربعات العادية إلى النقطة (س' ، ص')
 على الورقة اللغارية وتتحول المعادلة (٩) إلى
 $\text{ص}' = \text{لغ ا} + \text{ب س}'$

وهذه تمثل على الورقة اللغارية خطا مستقيما مقطعه الصادي لغ ا وميله ب .
 والعكس صحيح أيضا بمعنى أن أى خط مستقيم على الورقة اللغارية يمثل
 على ورقة المربعات العادية بمنحن مثل (٩) . ذلك لأنه إذا طبقنا التعويض
 المذكور على المعادلة $\text{ص}' = \text{ا}' + \text{ب س}'$ تتحول هذه إلى
 $\text{لغ ص} = \text{ا}' + \text{ب لغ س}'$
 وهذه معادلة على الصورة (٩) .

هذا يجعل الورقة اللغارية مفيدة عند تمثيل البيانات بمنحن كالمنحنى
 (٩) .

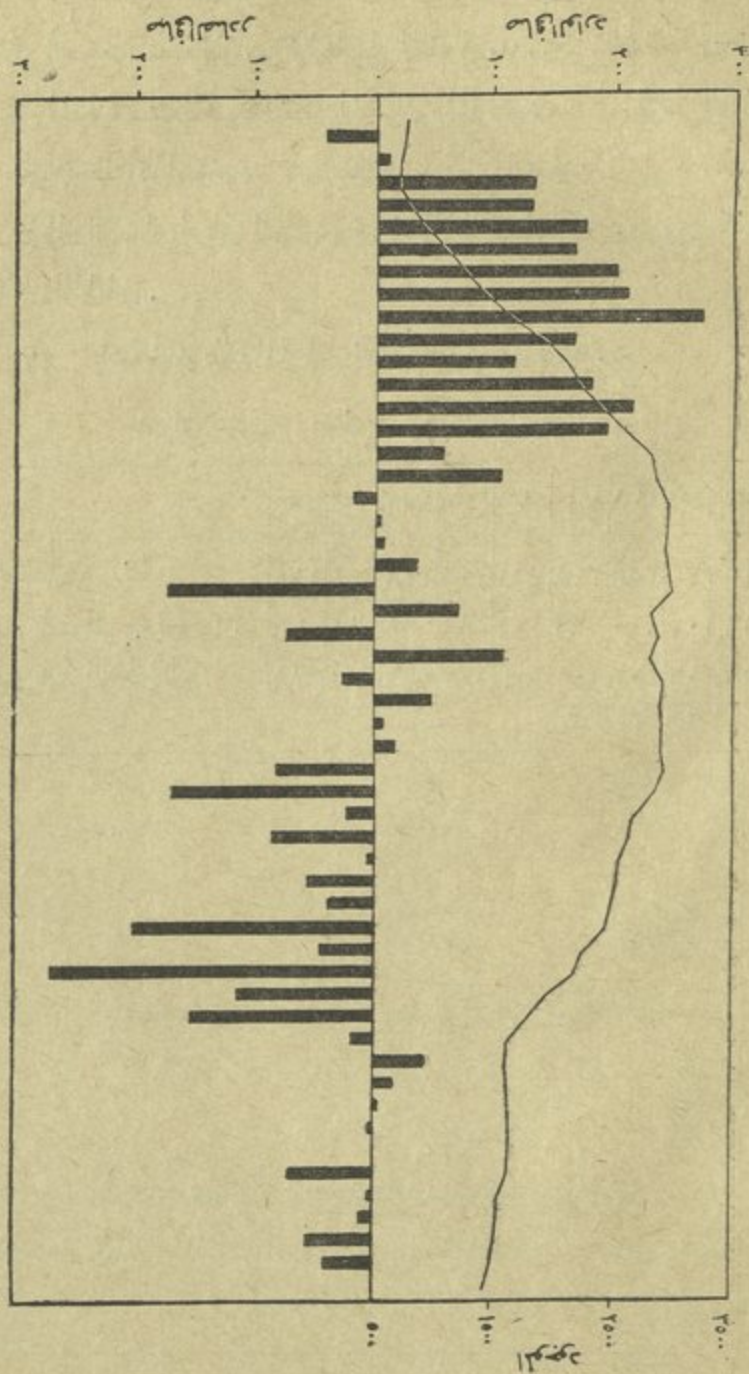
تمرين . ارصد باستخدام تدريج لغارتمى على محورين متعامدين النقطتين
 (١٠٠ ، ٣٠٠٠) و (٣٥٠٠ ، ٦٠٠٠) . صل النقطتين بخط مستقيم وأوجد
 بيانيا ثم حسابيا المعادلة $\text{ص} = \text{ا س ب}$ المناظرة للخط المستقيم .

١٣ . أمثلة .

(١) بين الجدول الآتى كميات القطن المصرى الموجودة فى ميناء
 الإسكندرية والكميات الواردة إليها والصادرة منها بآلاف القناطير فى كل
 أسبوع من أسابيع موسم القطن ١٩٣٩ - ١٩٤٠ . استخدم طريقة
 المستطيلات البيانية لرسم شكل يبين صافى الوارد من القطن إلى الإسكندرية
 وصافى الصادر منها فى كل أسبوع من أسابيع الموسم المذكور وأضف إلى
 نفس الشكل خطا بيانيا يمثل الكمية الموجودة من القطن كل أسبوع .

الصادر	الوارد	الموجود	الأسبوع	الصادر	الوارد	الموجود	الأسبوع
١٣٢	١٣٩	٢٩١٠	٢٨	١٨	١٨	٧٤٣	١
١١٥	١٣٠	٢٩١٢	٢٩	٧٥	٣٤	٧٤١	٢
١٩٣	١١٢	٢٩٢٣	٣٠	١٤٢	١٥٢	٦٩٥	٣
٢٩١	١٢٣	٢٨٣٨	٣١	١٦١	٢٩٦	٧٠١	٤
١٢٦	١٠٢	٢٦٦٧	٣٢	٢١٤	٣٤٥	٨٣٢	٥
١٨٥	٩٩	٢٦٣٩	٣٣	١٩٥	٣٧١	٩٥٩	٦
١٤٤	١٣٧	٢٥٤٨	٣٤	٢٤١	٤٠٨	١١٣٢	٧
١٦٢	١٠٦	٢٥٣٧	٣٥	٢٣١	٤٣٢	١٢٩٥	٨
١٠٧	٦٨	٢٤٧٧	٣٦	٢٤٤	٤٥٣	١٤٩٢	٩
٢٨٧	٨٦	٢٤٣٤	٣٧	١١٩	٣٩٣	١٦٩٦	١٠
٧٨	٣٢	٢٢٣٠	٣٨	١٢٩	٢٩٤	١٩٦٦	١١
٢٩٤	٢٣	٢١٧٩	٣٩	٣٣٣	٤٤٩	٢١٢٩	١٢
١٢٧	١٣	١٩٠٤	٤٠	١٩٣	٣٧٢	٢٢٤١	١٣
١٦٠	٧	١٧٨٥	٤١	٢٠٦	٤٢٠	٢٤١٦	١٤
٢٤	٥	١٦٢٨	٤٢	١٨٩	٣٨١	٢٦٢٥	١٥
٠	٤١	١٦١٣	٤٣	٣١٢	٣٦٩	٢٨١٤	١٦
١	١٧	١٦٢٣	٤٤	١٦٦	٣٧٢	٢٨٦٧	١٧
٠	١	١٦٣٦	٤٥	٢٥٩	٢٣٩	٢٩٧٣	١٨
١	٠	١٦٣٤	٤٦	٢٢٥	٢٢٨	٢٩٤٩	١٩
٢	٢	١٦٣٠	٤٧	١٧٦	١٨٣	٢٩٤٤	٢٠
٧٤	٤	١٦٢٧	٤٨	١٠١	١٣٦	٢٩٤٦	٢١
٢	١	١٥٥٤	٤٩	٢٨٥	١١٣	٢٩٨٠	٢٢
١١	٠	١٥٤٨	٥٠	١٠٣	١٧٥	٢٨٠٨	٢٣
٥٩	٣	١٥٣٣	٥١	١٩١	١١٩	٢٨٧٠	٢٤
٤٤	٢	١٤٧٣	٥٢	٩٣	٢٠٢	٢٧٩٤	٢٥
		١٤٢٥	٥٣	١٩١	١٦٥	٢٨٩٩	٢٦
				١١٣	١٥٩	٢٨٦٩	٢٧

الأسبوع	الموجود	صافي الوارد	صافي الصادر	الأسبوع	الموجود	صافي الوارد	صافي الصادر
١	٧٤٣	٠	٢٨	٢٩١٠	٧		
٢	٧٤١	٤١	٢٩	٢٩١٢	١٥		
٣	٦٩٥	١٠	٣٠	٢٩٢٣		٨١	
٤	٧٠١	١٣٥	٣١	٢٨٣٨		١٦٨	
٥	٨٣٢	١٣١	٣٢	٢٦٦٧		٢٤	
٦	٩٥٩	١٧٦	٣٣	٢٦٣٩		٨٦	
٧	١١٣٢	١٦٧	٣٤	٢٥٤٨		٧	
٨	١٢٩٥	٢٠١	٣٥	٢٥٣٧		٥٦	
٩	١٤٩٢	٢٠٩	٣٦	٢٤٧٧		٣٩	
١٠	١٦٩٦	٢٧٤	٣٧	٢٤٣٤		٢٠١	
١١	١٩٦٦	١٦٥	٣٨	٢٢٣٠		٤٦	
١٢	٢١٢٩	١١٦	٣٩	٢١٧٩		٢٧١	
١٣	٢٢٤١	١٧٩	٤٠	١٩٠٤		١١٤	
١٤	٢٤١٦	٢١٤	٤١	١٧٨٥		١٥٣	
١٥	٢٦٢٥	١٩٢	٤٢	١٦٢٨		١٩	
١٦	٢٨١٤	٥٧	٤٣	١٦١٣	٤١		
١٧	٢٨٦٧	١٠٦	٤٤	١٦٢٣	١٦		
١٨	٢٩٧٣	٢٠	٤٥	١٦٣٦	١		
١٩	٢٩٤٩	٣	٤٦	١٦٣٤		١	
٢٠	٢٩٤٤	٧	٤٧	١٦٣٠		٠	
٢١	٢٩٤٦	٣٥	٤٨	١٦٢٧		٧٠	
٢٢	٢٩٨٠	١٧٢	٤٩	١٥٥٤		١	
٢٣	٢٨٠٨	٧٢	٥٠	١٥٤٨		١١	
٢٤	٢٨٧٠	٧٢	٥١	١٥٣٣		٥٦	
٢٥	٢٧٩٤	١٠٩	٥٢	١٤٧٣		٤٢	
٢٦	٢٨٩٩	٢٦	٥٣	١٤٢٥			
٢٧	٢٨٦٩	٤٦					

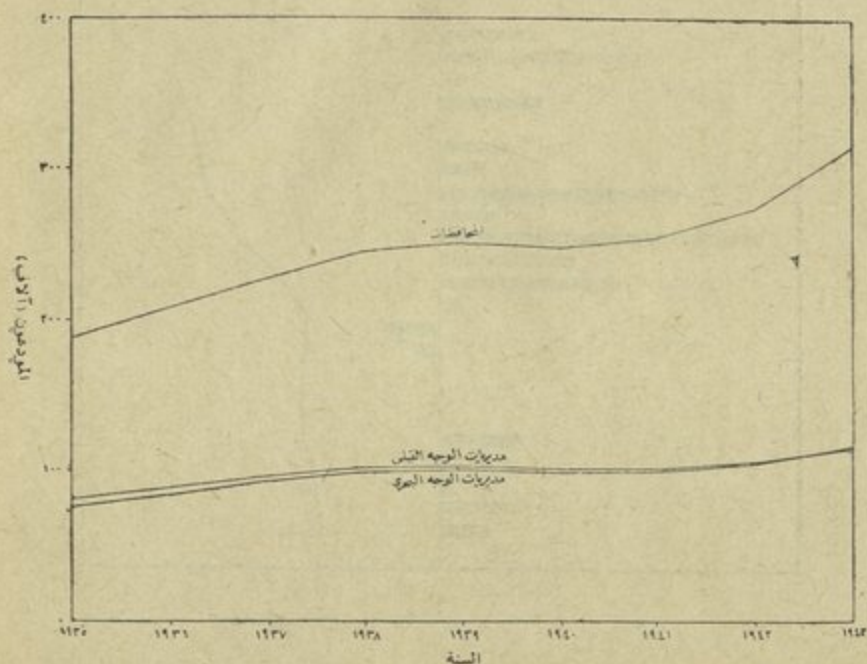


لرسم الشكل نحسب أولاً مقدار صافي الوارد من القطن أو الصادر منه في كل أسبوع . هذه المقادير نراها على الصفحة ٧٠ . وعلى الصفحة ٧١ نرى الشكل المطلوب ممثلاً لحركة القطن المصرى والموجود منه فى الموسم بأكمله . ويلاحظ أننا استخدمنا تدريجين رأسيين فى النصف الأعلى من الشكل تدريج إلى اليسار لصافي الوارد وتدرج إلى اليمين للموجود من القطن بالآلاف القناطر .

(٢) أعد خطوطاً بيانية لمقارنة الإحصائيات الآتية .

عدد المودعين فى صناديق توفير البريد بالآلاف

١٩٤٣	١٩٤٢	١٩٤١	١٩٤٠	١٩٣٩	١٩٣٨	١٩٣٧	١٩٣٦	١٩٣٥	
٣١٥	٢٧٤	٢٥٥	٢٤٨	٢٥١	٢٤٦	٢٢٨	٢٠٨	١٨٨	المحافظات
١١٦	١٠٥	١٠٠	٩٩	١٠١	٩٩	٩٣	٨٤	٧٦	مديريات الوجه البحرى
١١٥	١٠٦	١٠٢	١٠١	١٠٣	١٠٢	٩٦	٨٩	٨١	مديريات الوجه القبلى



يطلب هذا السؤال خطوطاً بيانية للمجموعات الثلاث في شكل واحد وبنفس الوحدات . وقد أعدت هذه الخطوط في الشكل الأخير .

(٣) اذكر أربعة من أشهر أنواع الأشكال المستخدمة وتكلم بإيجاز عن مزايا وعيوب كل نوع تذكره .

لمثل هذا السؤال إجابات كثيرة . ومن الأشكال المؤدية للغرض

(١) التمثيل بالصور ، (٢) الدائرة البيانية ،

(٣) الخط البياني ، (٤) المستوجرام .

أسئلة

١ . وضح البيانات الآتية بأشكال دقيقة مرسومة على ورق مربعات : —

السكن في سكتلندا : تعداد ١٩٢١

عدد المساكن	عدد الأشخاص	مساكن ذات
(آلاف)	ساكنين على هذا النحو (آلاف)	
١٢٤	٣٩٧	١ غرفة واحدة
٤٢٤	١٩١٩	٢ غرفتين
٢٢٢	١٠٣٦	٣ غرف
١٠٧	٤٩٤	٤ ”
٥٩	٢٧٤	٥ ”

٢ . بعد اختيار قيمتين مناسبتين للعديدين ١ ، ب ارصد النقط (١ ، ب) و (١ - ، ب) و (١ - ، ب -) و (١ ، ب -) و (١ - ، ب -) و (١ ، ب -) و (١ - ، ب -) .

إذا رسمت دائرة نصف قطرها ٧ ومركزها عند نقطة الأصل فاكتب باستخدام وحدة واحدة على المحاورين إحداثيات نقط تقاطع الدائرة المحاورين . هل تتأثر النتيجة إذا اختلفت الوحدتان ؟

٣ . تبين الأرقام الآتية أرباح وخسائر شركة معينة أثناء الفترة ١٩٤٧ - ١٩٥٤ . ارسم خطا بيانيا يمثل هذه الأرقام .

الأرباح	الخسائر
١٩٤٧	١٠٠٠ جنية
١٩٤٨	٢٧٠٠
١٩٤٩	٤٠٠٠
١٩٥٠	١٠٠٠
١٩٥١	١٠٠٠
١٩٥٢	٥٠٠٠
١٩٥٣	٤٠٠٠
١٩٥٤	٥٠٠٠

٤ . أوجد الخط المستقيم الذى يصل بين

(١) ١ (٤، ٦) و ٢ (٢، ٢) ،

(٢) ٢ (١، ٥) و ٣ (٣، ١٥) .

أوجد أيضا إحداثى نقطة تقاطع ١ ب ، ح و ٢ .

٥ . اشرح المقصود بشكل لغارتمى واذكر النوع الخاص من البيانات الإحصائية الذى تلائم تلك الأشكال كل الملاءمة .

٦ . عين (بطريقة بيانية) الثابتين ١ ، ب حتى يمكن تمثيل البيانات

(١) س = ٠ ، ص = ٠

(٢) س = ٤ ، ص = ٢,٦

(٣) س = ٨ ، ص = ٧,٩

بالقانون ص = اس ب . أوجد بنفس الطريقة قيمة ص عند س = ٦ .

٧ . اعط معنى " المنحنى التكرارى " ، " و " المنحنى اللغارتمى " واذكر

أى البيانات يحسن رصدها لغارتميا .

ارسم شكلا يمثل المعلومات المعطاة في الجدول ١ وعلق على شكلي المنحنيين .

الجدول ١

السنة	معدل المواليد	معدل الوفيات
١٩٠٩	٢٥,٨	١٤,٦
١٩١٠	٢٥,١	١٣,٥
١٩١١	٢٤,٣	١٤,٦
١٩١٢	٢٣,٩	١٣,٣
١٩١٣	٢٤,١	١٣,٨
١٩١٤	٢٣,٨	١٤,٠
١٩١٥	٢١,٩	١٥,٧
١٩١٦	٢٠,٩	١٤,٤
١٩١٧	١٧,٨	١٤,٤
١٩١٨	١٧,٧	١٧,٦
١٩١٩	١٨,٥	١٣,٨
١٩٢٠	٢٥,٤	١٢,٤

٨ . يعطى الجدول الآتى عدد طلبة وطالبات المدارس المصرية فى فئات السن المبينة بالآلاف فى المدة ١٩٢٨ - ١٩٤٣ . ارسم فى شكل واحد ستة خطوط بيانية تمثل النتائج المبينة .

السنة	أصغر من ٥	٥ - ٧	٨ - ٩	١٠ - ١٢	١٣ - ١٥	١٦ فأفوق
١٩٢٨	١٦	٢٦٩	٢٣٠	١٨٦	٨٥	٥٦
١٩٣١	١٥	٢٨٩	٢٤٠	٢٠٠	٨٨	٥٩
١٩٣٤	١٧	٣١٩	٢٥٥	٢٠٩	٨٢	٦٠
١٩٣٧	١٨	٤٤٦	٣٩٨	٢٩٧	٨٩	٦٠
١٩٤٠	١٨	٤٨٩	٥٧٢	٣٤٣	٧٦	٦٥
١٩٤٣	١٥	٤٤٨	٥١٠	٣٦٢	٧٩	٦٧

الباب الثالث

التوزيع التكرارى

١ . تقديم وملاحظات .

تسلك البحوث العلمية طريقتين رئيسيتين :

١ . الطريقة التجريبية . حاصر العامل موضوع البحث وغير العوامل الأخرى الواحد تلو الآخر بطريقة معينة ثم ارقب النتيجة .
وهى الطريقة الكلاسيكية للطبيعة والكيمياء وتهدف إلى إزالة كل مصادر ' الخطأ ' نهائيا .

٢ . الطريقة الإحصائية . عند وجود عوامل غير ممكن حصارها . وفيها تجرى المشاهدات دون حصار للعوامل غير المهمة وتستنبط النتائج من البيانات .

مبادئها النموذجية علوم الأحياء والزراعة والاقتصاد . وقد أدى هذا إلى ازدهار الطرق الإحصائية واشتداد بأسها لتعين على استنباط النتائج السليمة . ثم أثرت هذه الطرق بدورها فى التنسيق التجريبي أى تخطيط التجارب لإعطاء نتائج سليمة من ناحية ولاستخدام المادة على أحسن وجه من ناحية أخرى .

على أن الحد الفاصل بين الطريقتين ليس واضحا كل الوضوح . فالتجارب الطبيعية التى تخلو من الخطأ خلوا تاما نادرة مهما كانت دقيقة . أضف إلى هذا إمكان القيام بحصار جزئى فى الكثير من البحوث الإحصائية الأمر الذى يؤدى إلى زيادة الدقة والإنقاص من الخطأ مع الاحتفاظ بسلامة النتيجة . ومثل ذلك اختبارات الحقول وانتخاب العينات من طبقات إلى غير ذلك من الأمثلة .

٢ . المصطلحات . (قاموس إحصائي .)

١ . المجتمع . مجموعة من الأشياء أو الأفكار نريد الحصول على معلومات بشأنها . (يسمى أيضا العالم أو المورد .) والمجتمع إما كبير الحجم أو صغيره لكنه كبير في العادة . وقد يكون محدودا أو غير محدود .

٢ . الفرد . عضو في المجتمع .

٣ . العينة . طائفة من أفراد المجتمع وهي محدودة في الغالب .

وإليك بعض الأمثلة .

المجتمع	العينة
١ . جميع رجال القاهرة . (محدود)	رجال هذه الحجرة .
ب . كل القراءات الممكنة التي يقوم بها مشاهد واحد . (غير محدود)	عدد معطى من المشاهدات للمشاهد .
ح . كل أيادى البردج الممكنة . (مجتمع أفكار أى أنظمة)	مجموعة معطاة من أيادى البردج .
د . كل السلع المنتجة في المصنع .	مجموعة السلع المنتجة في المصنع صباح يوم معين .
هـ . كل التجارب المجراة في المعمل .	مجموعة التجارب المجراة في المعمل صباح يوم معين .

٤ . المميز أو الصفة . كل كمية طبيعية تصف موضوعا . والصفة إما

كمية كطول الإنسان أو كيفية كلون ورقة اللعب .

٥ . المشاهدة . نتيجة مراقبة صفة فرد معين . مثل ذلك طول رجل

معين أو لون ورقة معينة .

٦ . المتغير (المتغير العشوائى) . الرمز الجبرى لمشاهدة كمية . والمتغيرات

غير ممكن استخدامها مع الصفات الكيفية .

٣ . أغراض الطرق الإحصائية .

تختص الطرق الإحصائية أول ما تختص بوصف الخصائص العددية الهامة للمجتمعات^١ . ويتم هذا بإحدى كيفيتين . فإما مراقبة مباشرة لكل فرد في المجتمع ومثل ذلك تعداد للدخول في جميع أنحاء الدولة أو اختبار ١٠٠ ٪ لجميع السلع المنتجة في مصنع . وإما استنباط لخصائص المجتمع من عينة أحسن اختيارها . على أن مراقبة كل فرد أمر غير ميسور في معظم الحالات وعندئذ يسلك الباحث في العادة ثاني هذين الطريقتين . فكأن الطرق الإحصائية مختصة قبل كل شيء بمسائل الاستقراء الإحصائي وهذا يقتضي منا دراسة للكيفية التي بها تتغير العينات المختارة من مجتمع واحد — تلك الدراسة التي كانت تعرف قديماً باسم نظرية الأخطاء .

٤ . خصائص المجتمعات^٢ .

لنعتبر مجتمع أطوال الرجال المقيمين في بلدة ما (مجتمع صفات) . لاشك أن أبرز الأشياء التي قد نريد معرفتها هو الطول المتوسط . غير أن بعض الخصائص الأخرى قد تنافس هذا في الأهمية وقد تفوقه فيها . مثل ذلك :

١ . مقياس لثشت الأطوال حول الطول المتوسط . فمثلاً قد يكون الطول المتوسط للرجال في القاهرة واحداً فيها وفي قرية صغيرة ومع ذلك توقع تغيراً أكبر للأطوال في القاهرة لأنها عاصمة .

٢ . قد نريد معرفة نسبة من ينقص طولهم عن طول معين . كالتجنيد يشترط له ألا يقل الطول عن حد معين . أو قد يراد من سلعة مصنوعة ألا تهبط تحت مستوى معين من المتانة . عندئذ نريد أن نعرف نسبة ما يهبط

١ يشمل هذا استخلاص النتائج من التجارب .

٢ يكفيننا هنا مميز واحد للأفراد .

من السلع تحت ذلك المستوى أى فرصة الرفض بالنسبة إلى سلعة .^١

٥ . تصنيف البيانات وتلخيصها .

هـب أن أمامنا عينة من البيانات نريد استنباط خصائص معينة للمجتمع منها .^٢ إذا كانت العينة كبيرة يكون عسيراً إدراك كل خصائصها عند عرضها كمجرد جدول من النتائج . ولكي نوجه العناية نحو استنباط الخصائص الهامة للمجتمع من العينة ينبغي

١ . تصنيف البيانات بطريقة مريحة (تمثيلها) ،

٢ . تلخيص البيانات (أو اختصارها أو تكثيفها) .

أما تصنيف البيانات فموضوع لا يجاد إلا بالخبرة والمران وسوف لا نبجته هنا إلا إذا اقتضت الضرورة منا ذلك . وأما تلخيصها فهذا هو شغلنا الشاغل في هذا الباب .

٦ . تلخيص البيانات .

تحتوى مشاهدات العينة على قدر معين من المعلومات عن المجتمع ولتلخيص البيانات نصرف النظر عن المعلومات غير الخطيرة ولا نتخلى إلا عن أقل قدر ممكن من غيرها من المعلومات .

في جهاز معد لغزل خيوط القطن قيس العد^٣ على ثلاثين بكرة متجاورة فكانت النتيجة القيم الآتية .

١ أدخلنا في هذه العبارة فكرة جديدة لا يمكن بحثها جيداً إلا بعد تعريف الاحتمال .

٢ العينة مفروض لأنها عشوائية أى

(١) فرصة ظهور فرد في العينة مستقلة عن فرصة أى فرد آخر ،

(٢) لأى فرد في المجتمع فرصة متكافئة لانتخابه .

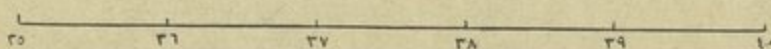
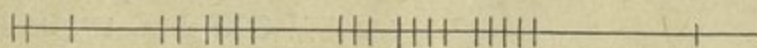
وهنا أيضاً نؤجل بحث العشوائية حتى يعتبر الاحتمال .

٣ العد (أو الثمرة) في لغة الغزاليين هو عدد الهانكات المغزولة من رطل واحد من القطن . والهانك مقياس للطول يساوى ٨٤٠ ياردة .

العدد		العدد		العدد	
٣٧,٧	٢١	٣٧,٩	١١	٣٦,٦	١
٣٨,٣	٢٢	٣٧,٩	١٢	٣٨,٥	٢
٣٩,٦	٢٣	٣٦,٦	١٣	٣٥,١	٣
٣٨,١	٢٤	٣٧,٤	١٤	٣٧,٣	٤
٣٧,٣	٢٥	٣٥,٤	١٥	٣٦,٤	٥
٣٦,٣	٢٦	٣٨,٥	١٦	٣٨,٣	٦
٣٨,٢	٢٧	٣٥,٠	١٧	٣٧,٢	٧
٣٦,١	٢٨	٣٧,٨	١٨	٣٦,٦	٨
٣٧,٢	٢٩	٣٦,٠	١٩	٣٨,١	٩
٣٨,٤	٣٠	٣٦,٥	٢٠	٣٧,٦	١٠

إذا ألقينا نظرة فاحصة على الجدول نحصل على فكرة تقريبية عن المتوسط وعن تشتت الأرقام . فالمتوسط حوالى ٣٧ - ٣٨ وكل الأرقام تقع بين ٣٥ و ٤٠ .

وقد نريد أن نعرف كيف يتغير العدد مع الزمن فيكون ترتيب البيانات مهما ويكون أحسن عرض لها خط بياني . لكننا لا نبالي في الواقع بترتيب البيانات إلا في حالة السلاسل الزمنية . فإذا قررنا التضحية بالمعلومات عن تغير البيانات مع الترتيب فلا بأس من تكثيف البيانات إلى شكل انتشارى .



من الشكل نرى كيف أن المشاهدات تتجمع حول قيمة مركزية وتشتت بكثافة تأخذ في النقصان على جانبي هذه القيمة . والشكل يعطى صورة صادقة لكثافة القيم الواقعة عند أجزاء مختلفة من التدرج .

ولكى نحصل على مقياس كمى لكثافة توزيع القيم نضحي بجانب آخر من المعلومات فنضم المشاهدات إلى فئات على النحو الآتى .

الفئة	التكرار	التكرار %
٣٥,٤ - ٣٥,٠	٣	١٠,٠٠
٣٥,٩ - ٣٥,٥	٠	٠,٠٠
٣٦,٤ - ٣٦,٠	٤	١٣,٣٣
٣٦,٩ - ٣٦,٥	٤	١٣,٣٣
٣٧,٤ - ٣٧,٠	٥	١٦,٦٧
٣٧,٩ - ٣٧,٥	٥	١٦,٦٧
٣٨,٤ - ٣٨,٠	٦	٢٠,٠٠
٣٨,٩ - ٣٨,٥	٢	٦,٦٧
٣٩,٤ - ٣٩,٠	٠	٠,٠٠
٣٩,٩ - ٣٩,٥	١	٣,٣٣
	٣٠	١٠٠,٠٠

يسمى هذا توزيعاً تكرارياً . ويسمى العدد الواقع فى كل فئة التكرار فى تلك الفئة وتؤخذ كل القيم كأن قيمتها هى القيمة عند مركز الفئة . وقد يعبر عن التكرارات كنسب مئوية من العدد الكلى فيسمى التكرار إذ ذاك تكراراً مئوياً .

٧ . ملاحظات على الفئات .

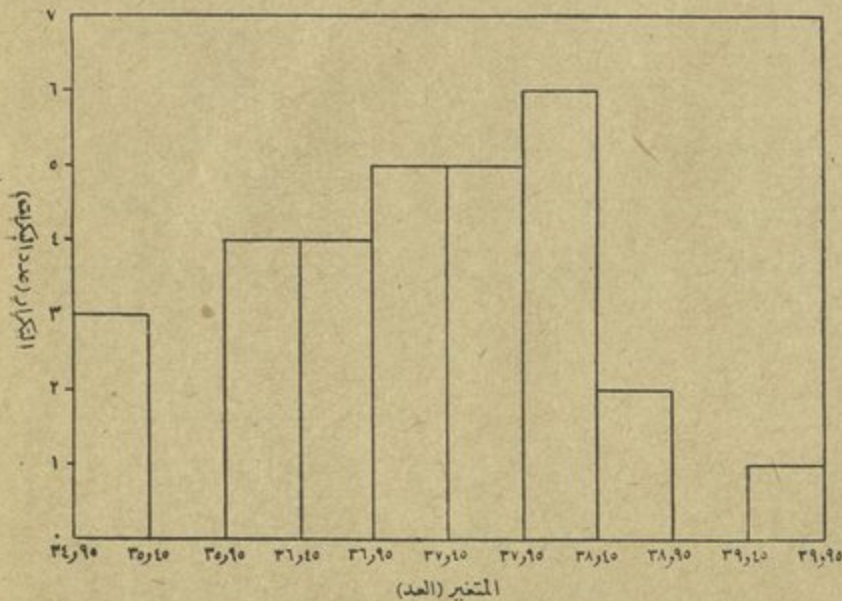
- ١ . تقع القيم المسجلة بين ٣٥,٠ و ٣٥,٤ فعلا بين ٣٤,٩٥ و ٣٥,٤٥ . والقيمة عند مركز الفئة هى ٣٥,٢٠ . بالمثل القيمة عند مركز ٣٥,٩ - ٣٥,٥ التى هى فى الواقع ٣٥,٤٥ - ٣٥,٩٥ هى ٣٥,٧٠ .
- ٢ . فى العينات الكبيرة يحسن تقسيم المدى الكلى للقيم إلى حوالى ١٠ - ٢٠ فئة . وفى العينات الصغيرة نحتاج إلى فئات أوسع .

إذا كانت الفئة أضيق مما يجب تظهر التقلبات العنيفة في التكرار وبالتالي يصعب إدراك الكشافة (التكرار) في أية فئة. وإذا كانت الفئة أوسع مما يجب فقد يتسبب هذا في فقدان المعلومات عن التغير في التكرار فوق فئة مهمة. ومن القواعد النافعة في هذا الصدد ألا نحشر في أكبر الفئات أكثر من خمس العدد الكلي للملاحظات.

٨. المستو جرام.

يقام مستطيل على كل فئة بحيث تتناسب مساحته مع التكرار المشاهد في الفئة.

١. فئات متساوية الاتساع. يتناسب ارتفاع المستطيل في هذه الحالة مع التكرار. وإذا أخذت مساحات المستطيلات مساوية للتكرارات تكون الارتفاعات مساوية للتكرار.



المساحة الكلية في الشكل المرسوم تساوي عدد المشاهدات. وإذا رصدت تكرارات مئوية تكون المساحة الكلية ١٠٠٪.

٢. فئات غير متساوية الاتساع . تبقى مساحات المستطيلات مساوية لل تكرارات مما يجعل ارتفاع المستطيل يتناسب مع التكرار / اتساع الفئة .
مثال . ارسم هستوجراما لتمثيل التوزيع المعطى في الجدول الآتى لأجور عدد معين من الرجال .

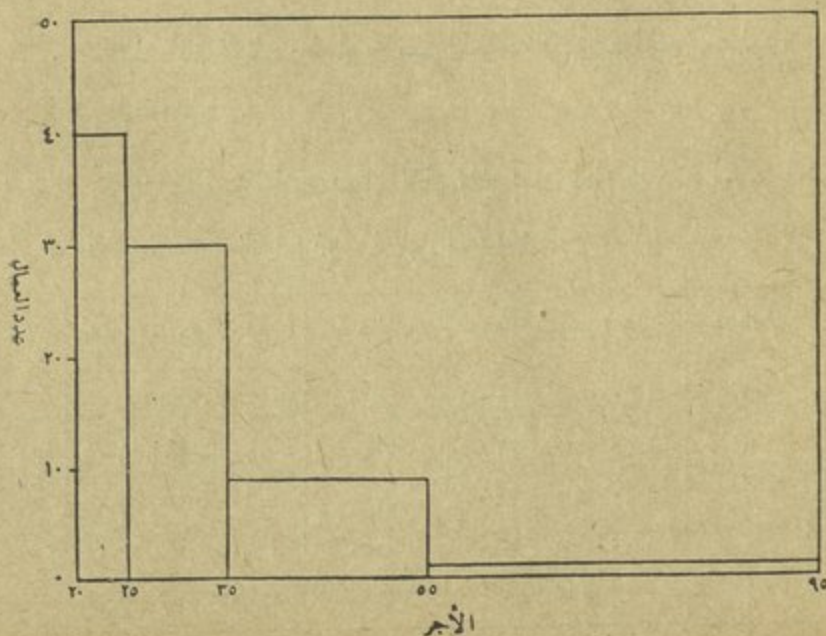
الأجر	٢٥ - ٢٠	٣٥ - ٢٥	٥٥ - ٣٥	٩٥ - ٥٥
عدد العمال	٢٠	٣٠	١٨	٤

نأخذ المساحة تتناسب مع التكرار وتساوى عشرة أمثاله فيكون

$$\text{ارتفاع المستطيل} = \frac{\text{التكرار}}{\text{اتساع الفئة}} \times ١٠$$

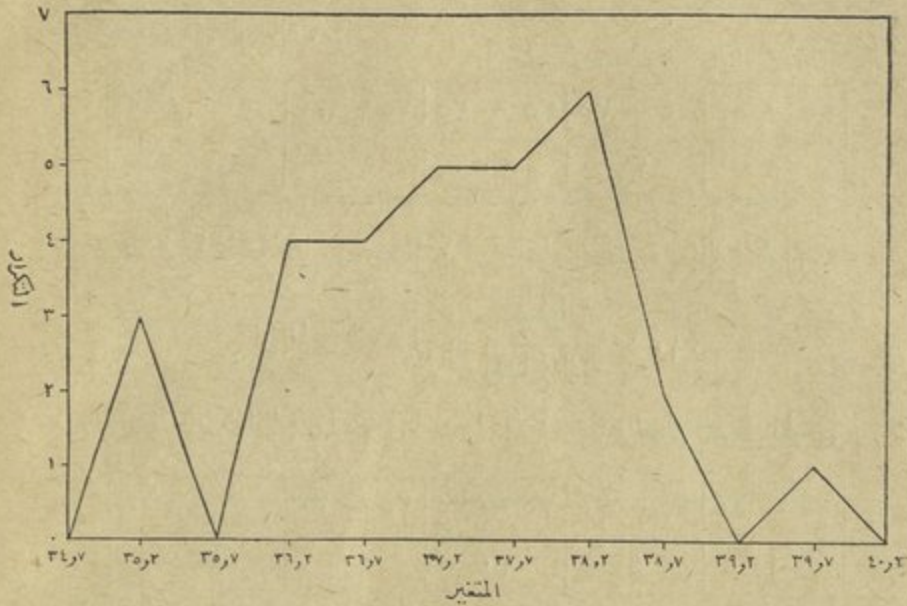
هذا يعطى التكرارات المبينة في الجدول الآتى وهذه تعطى الشكل المرسوم .

الأجر	٢٥ - ٢٠	٣٥ - ٢٥	٥٥ - ٣٥	٩٥ - ٥٥
عدد العمال	٤٠	٣٠	٩	١



٩ . المضلع التكرارى .

ترسم أعمدة إلى نفس الارتفاع السابق وعند مركز الفئة ثم توصل أطراف الأعمدة بخطوط مستقيمة .



وإذا كانت الفئات متساوية تظل المساحة التي تحت المنحنى تساوى العدد الكلى للملاحظات .

تمرين . يحوى الجدول الآتى نتائج بحث فعلى فى دخول أسر الطبقة العاملة فى ناحية صناعية ١ مجاورة لنهر الكليد فى أحد أسابيع مارس ١٩٢٥ .

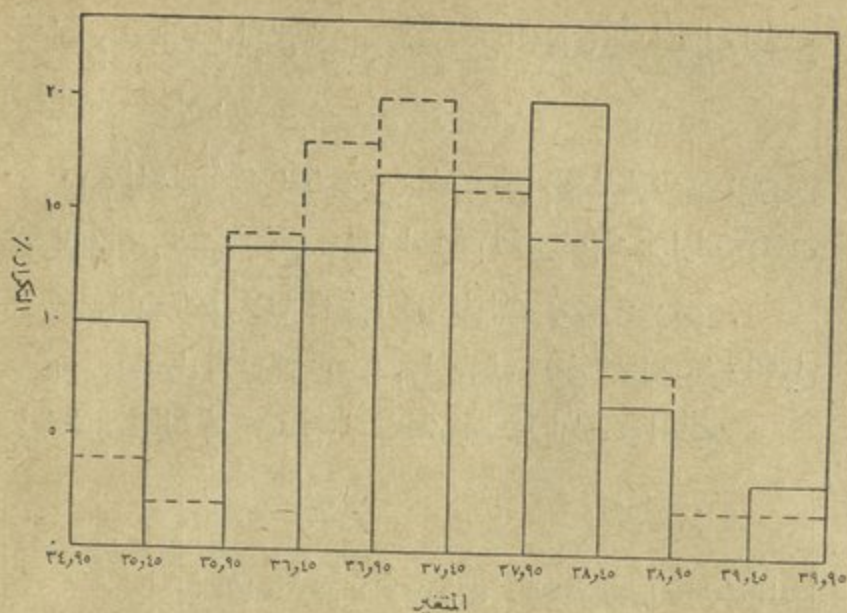
عدد الأسر	الدخل الأسبوعى (شلن)	عدد الأسر	الدخل الأسبوعى (شلن)
١٩	١٠٠ وتحت ١٢٠	٣	تحت ٢٠
٩	١٢٠ " ١٤٠	٣٤	٢٠ وتحت ٤٠
٩	١٤٠ " ١٦٠	٨٠	٤٠ " ٦٠
٤	١٦٠ " ١٨٠	٥٥	٦٠ " ٨٠
١	١٨٠ فما فوق	٣٨	٨٠ " ١٠٠

ارسم هستوجراما يمثل توزيع الأسر على الدخول وأضف إليه المضلع التكرارى للتوزيع .

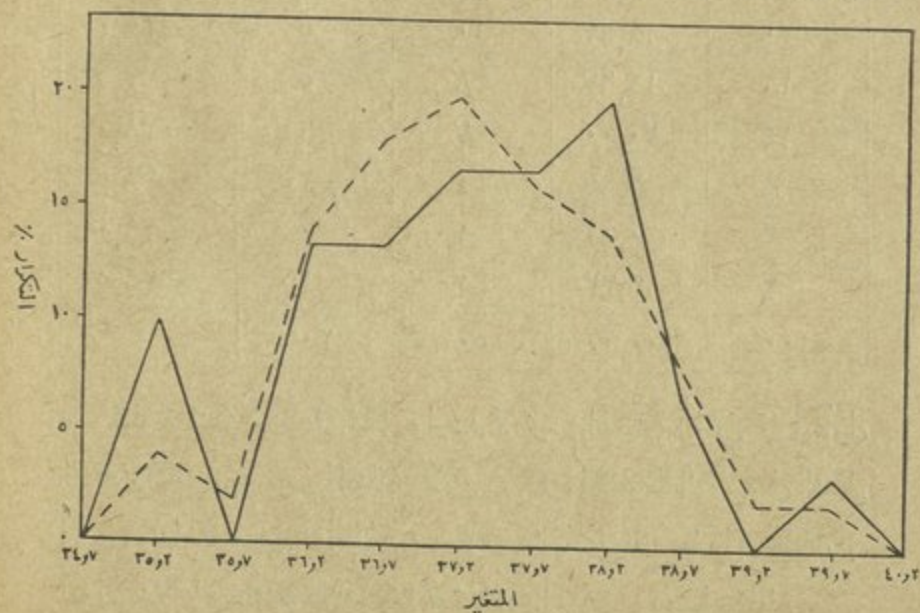
١٠ . المضلع أكثر نفعا من الهستوجرام فى المقارنة بين توزيعين تكراريين على نفس الشكل . وتبدأ العملية بالتعبير عن التكرارات كنسب مئوية من العدد الكلى لأننا لا نبقى أكثر من المقارنة بين التوزيعين . يعطى الجدول الآتى التوزيع التكرارى للعدود فى الثلاثين بكرة الأولى وفى الخمسين التالية لها كما يعطى النسب المئوية للتكرارات فى الحالتين .

الفئة	التكرار		التكرار %	
	فى الثلاثين الأولى	فى الخمسين التالية	فى الثلاثين الأولى	فى الخمسين التالية
— ٣٥,٠	٣	٢	١٠,٠٠	٤
— ٣٥,٥	٠	١	٠,٠٠	٢
— ٣٦,٠	٤	٧	١٣,٣٣	١٤
— ٣٦,٥	٤	٩	١٣,٣٣	١٨
— ٣٧,٠	٥	١٠	١٦,٦٧	٢٠
— ٣٧,٥	٥	٨	١٦,٦٧	١٦
— ٣٨,٠	٦	٧	٢٠,٠٠	١٤
— ٣٨,٥	٢	٤	٦,٦٧	٨
— ٣٩,٠	٠	١	٠,٠٠	٢
— ٣٩,٥	١	١	٣,٣٣	٢
	٣٠	٥٠	١٠٠,٠٠	١٠٠

لمقارنة التوزيعين على شكل واحد لا نرسم الهستوجرامين كما فى أول الشكلين التاليين بل نرسم المضلعين لأن كثرة الخطوط الرأسية فى الشكل الأول وتداخل مستطيلاته لا يساعد العين كثيرا على تتبع هذه المستطيلات . أما الأضلاع فى الشكل الثانى فإنها لا تنطبق وإنما تمل وبعضها يتقاطع .



لاحظ كيف أن المستوجرامين لا يمكنان الناظر من رؤية الفروق بين التوزيعين إلا بصعوبة بعكس الشكل الآتي فهو يظهر هذه الفروق بسهولة ويجعل المقارنة بين التوزيعين أسهل من ذي قبل .



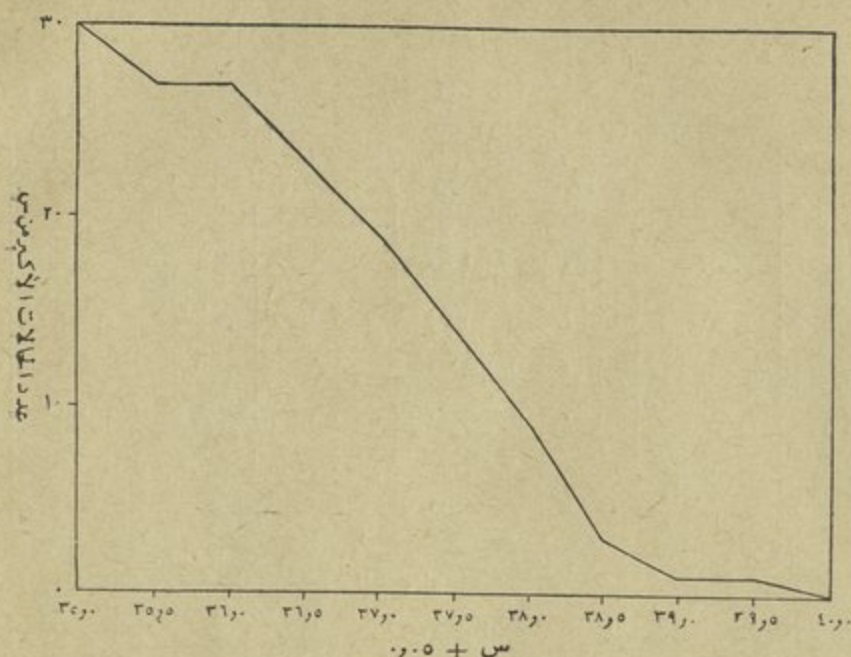
تمرين . ارسم شكلا مناسباً يمكنك من المقارنة بين توزيع الدخول كما ورد على الصفحة ٨٤ وبين التوزيع الآتي لها في الناحية ب من الإقليم نفسه .

الدخل الأسبوعي (شلن)	عدد الأسر	الدخل الأسبوعي (شلن)	عدد الأسر
تحت ٢٠	٩	١٠٠ وتحت ١٢٠	٨
٢٠ وتحت ٤٠	٣٦	١٢٠ " ١٤٠	٨
٤٠ " ٦٠	٧٨	١٤٠ " ١٦٠	٠
٦٠ " ٨٠	٥٦	١٦٠ " ١٨٠	٣
٨٠ " ١٠٠	٣٧	١٨٠ فما فوق	٥

١١ . المضلع التكراري المجمع .

تجمع التكرارات (أو التكرارات المثوية) من أحد الطرفين لإعطاء عدد الحالات الأصغر من أو الأكبر من (التي لا تقل عن) قيمة معطاة . وترصد هذه عند حافة الفئة المناسبة ثم توصل قم الخطوط الرأسية .

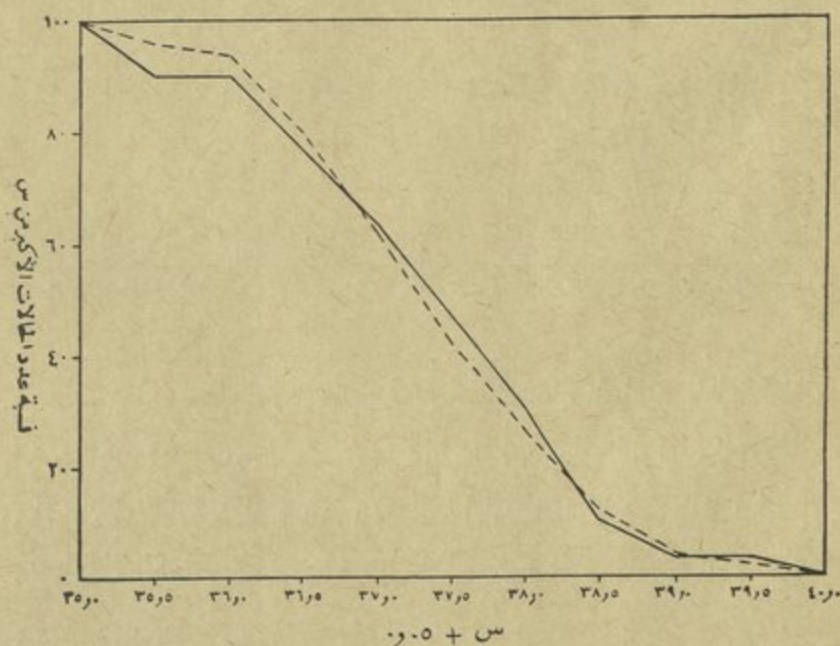
الفئة	التكرار	التكرار المجمع	التكرار المجمع %
— ٣٥,٠	٣	٣٠	١٠٠,٠
— ٣٥,٥	٠	٢٧	٩٠,٠
— ٣٦,٠	٤	٢٧	٩٠,٠
— ٣٦,٥	٤	٢٣	٧٦,٧
— ٣٧,٠	٥	١٩	٦٣,٣
— ٣٧,٥	٥	١٤	٤٦,٧
— ٣٨,٠	٦	٩	٣٠,٠
— ٣٨,٥	٢	٣	١٠,٠
— ٣٩,٠	٠	١	٣,٣
— ٣٩,٥	١	١	٣,٣
	٣٠		



الإحداثيات الرأسية لأية نقطة على الخط المرسوم يعطى عدد البكرات التي لا يقل العد عليها عن عدد معين . وقد رصدنا التكرار المجمع عند نقطة تبعد عن حافة الفئة بمقدار ٠.٥ . جهة اليمين لأن في ذلك تبسيطا للعمل .
تمرين . ارسم خطا تكراريا يعطى عدد البكرات التي لا يتجاوز العد عليها عددا معيناً .

١٢ . يستخدم الشكل التكرارى المجمع لمقارنة توزيعين تكراريين على نفس الشكل كما استخدم المصطلح التكرارى لنفس الغرض من قبل .
يعطى الجدول الآتى التكرارات المئوية المجمعة لتوزيع العدود في الثلاثين بكرة الأولى وفي الخمسين التالية لها (البند ١٠) . والشكل يرينا المصطلحين التكراريين المجمعين للتوزيعين متقاطعين في ثلاثة أماكن . ويلاحظ أن التكرار المجمع مرصود عند نقطة على يمين الحافة اليسرى للفئة وتبعد عنها بمقدار ٠.٥ .

الفئة	التكرار المجمع %	
	في الثلاثين الأولى	في الخمسين التالية
— ٣٥,٠	١٠٠,٠	١٠٠
— ٣٥,٥	٩٠,٠	٩٦
— ٣٦,٠	٩٠,٠	٩٤
— ٣٦,٥	٧٦,٧	٨٠
— ٣٧,٠	٦٣,٣	٦٢
— ٣٧,٥	٤٦,٧	٤٢
— ٣٨,٠	٣٠,٠	٢٦
— ٣٨,٥	١٠,٠	١٢
— ٣٩,٠	٣,٣	٤
— ٣٩,٥	٣,٣	٢

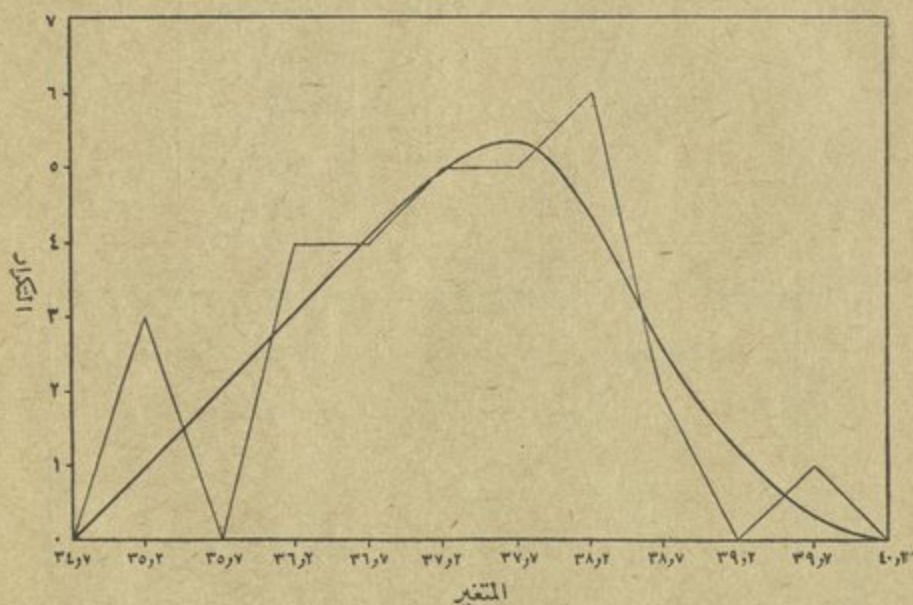


تمرين . قارن على هذا النحو بين توزيع الدخول الكلية لأسر الطبقة

العاملة في الناحية ١ (صفحة ٨٤) وبين توزيعها في الناحية ب (صفحة ٨٧).
أى الناحيتين أسعد حالا من الأخرى ولماذا ؟

١٣ . المنحنى التكرارى (المنحنى الاحتمالى) .

إذا زيد حجم العينة تظهر التكرارات في الفئات أكثر انتظاما من ذى قبل
وكلما زادت الأعداد في كل فئة يمكن جعل الفئات أصغر فأصغر . عندئذ يؤول
الهستوجرام أو المضلع في النهاية إلى منحنى بمهد اسمه المنحنى التكرارى .
وإذا كانت المساحة الكلية تحت المنحنى ١ يسمى المنحنى الاحتمالى ١ .



ليس هذا واضحا ولكنه حقيقة تجريبية سنستخدمها أساسا لتعريفنا لاحتمال
الإحصائى . فمثلا عند جمع التوزيعين السابقين للعدود في الثلاثين بكرة الأولى
وفي الخمسين التالية لها (البند ١٠) للحصول منهما على توزيع واحد نحصل
على النتيجة الآتية ومنها نرى أن التغيرات في التكرار من فئة إلى الفئة التالية
ممهدة إلى حد كبير .

١ إذا رصدت تكرارات مثوبة تكون المساحة التى تحت المنحنى ١٠٠ ٪ .

الفئة	التكرار		
	في الثلاثين الأولى	في الخمسين التالية	في الثمانين كلها
— ٣٥,٠	٣	٢	٥
— ٣٥,٥	٠	١	١
— ٣٦,٠	٤	٧	١١
— ٣٦,٥	٤	٩	١٣
— ٣٧,٠	٥	١٠	١٥
— ٣٧,٥	٥	٨	١٣
— ٣٨,٠	٦	٧	١٣
— ٣٨,٥	٢	٤	٦
— ٣٩,٠	٠	١	١
— ٣٩,٥	١	١	٢
	٣٠	٥٠	٨٠

وكذلك يؤول الشكل التكرارى المجمع إلى منحنى مجمع ممد .

تمرين . ارسم

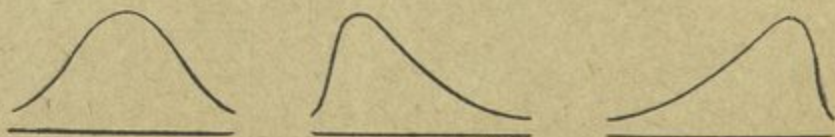
(١) منحنيا تكراريا ممدًا ، (٢) منحنيا مجمعا ممدًا

ليانات دخول أسر الطبقة العاملة في الناحية ١ . البيانات على الصفحة ٨٤ .

١٤ . أشكال المنحنى التكرارى .

١ . لأكثر الأشكال ظهوراً سنم مركزى يتداعى إلى ذيل على الجانبين .

وهو إما متماثل أو مائل (ملتو) . مثل ذلك أطوال الرجال (متماثل) ومتانة الخيط (سالب الالتواء) .



٢. أشكال أخرى .

١٢. أعرج .

مثل ذلك الفترات بين الحوادث النادرة (كالإصابات) وعدد البتلات في بعض الزهور وتوزيع ممولى الضرائب من ذوى الدخول الضخمة .

٢ ب . أجوف . (غير مألوف)

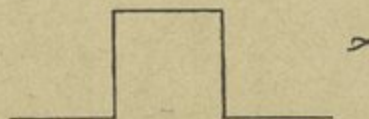
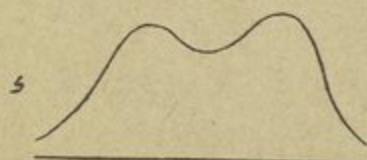
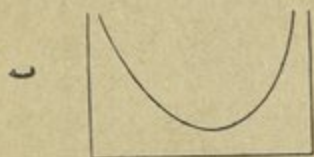
مثل ذلك التخميم (السماء المغطاة بمساحات معقولة من السحب شئ نادر جدا) وهو في الواقع مائل نوعا ما في بعض الدول واختبار التلف لكيتار (جدول توافق) .

٢ ح . مستطيل .

مثل ذلك توزيع المكان الأخير في الكسور العشرية وسمك الأشياء المارة بين اثنين من محددات تفاوت القياس ومسألة بفن التي أمسك فيها يابرة وألتي بها على الأرض زهاء ثلاثة آلاف مرة ليحصى عدد مرات تقاطعها مع أحد خطين متوازيين مرسومين على الأرض . (طول الإبرة أصغر من البعد بين الخطين .)

٢ د . ذو سنمين .

مثل ذلك أطوال الناس (خليط من الرجال والنساء أو الأولاد) . ويعنى هذا الشكل عادة أن المجتمع خليط .



١٥ . قانون الخطأ الأساسى (غاوس ، لا پلاس) .
أكثر المنحنيات النظرية أهمية هو قانون الخطأ الأساسى (أو منحني
التكرار الأساسى)

$$(1) \quad \frac{(س - و)^2}{\frac{1}{\frac{1}{(ط^2)} + \frac{1}{\frac{1}{(س - و)^2}}}} = ص$$

وهو المنحنى الذى يتقارب منه الكثير من التوزيعات العملية .
يحصّر هذا المنحنى بينه وبين محور س الذى هو خط مقارب له مساحة
كلية تساوى ١ . وهو متماثل بالنسبة إلى الخط س = و وله نقطتا انقلاب
عند س = و ± ١ .

وإذا أخذنا لغارتمات فى (١) نحصل على

$$(1) \quad \lg ص = ١ + ب (س - و)^2$$

$$\left(١ = \frac{1}{\frac{1}{(ط^2)} + \frac{1}{\frac{1}{(س - و)^2}}} \right)$$

أو

$$ص = ١ + ب (س - و)^2$$

(ص = لغ ص ، ١ = ١ + ب و ، ب = ٢ - ب و ، ج = ب) .
إذن قانون الخطأ الأساسى يمثله على الورقة نصف اللغارتية قطع مكافئ .
محوره رأسى ومحدب إلى أعلى . والعكس صحيح أيضا .

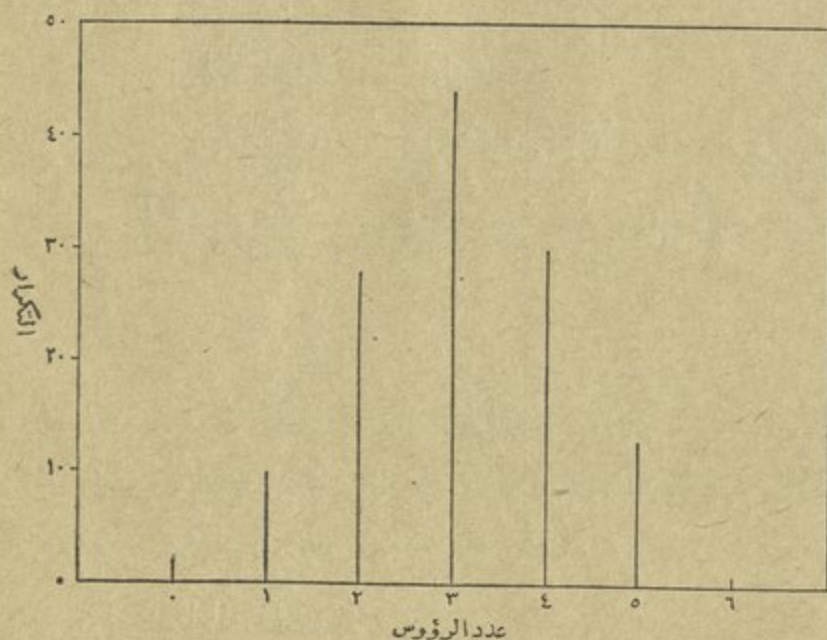
١٦ . البيانات المنفصلة .

ياخذ المتغير فى بعض المشاهدات قيا منفصلة كالمتغير الذى لا يمكن أن
يكون إلا عددا صحيحا . مثل هذا المتغير يسمى متغيرا منفصلا . وفى هذه الحالة
يصبح الشكلان - الهستوجرام والمضلع التكرارى - شكلا واحدا إذ ليس
يوجد الآن معنى لرسم المستطيلات .

مثال . قذفت ٦ قطع من النقود ١٢٨ مرة في الهواء فكان توزيع عدد الرؤوس الساقطة كما في الجدول الآتي . ويراد تمثيل هذه البيانات بشكل تكرارى .

عدد الرؤوس	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
التكرار	٢	١٠	٢٨	٤٤	٣٠	١٣	١

لتمثيل هذه البيانات بشكل تكرارى يمد خط رأسى عند مركز كل فئة ويجعل طول الخط مساويا للتكرار المشاهد فى الفئة . ويترك الشكل على هذا الحال .

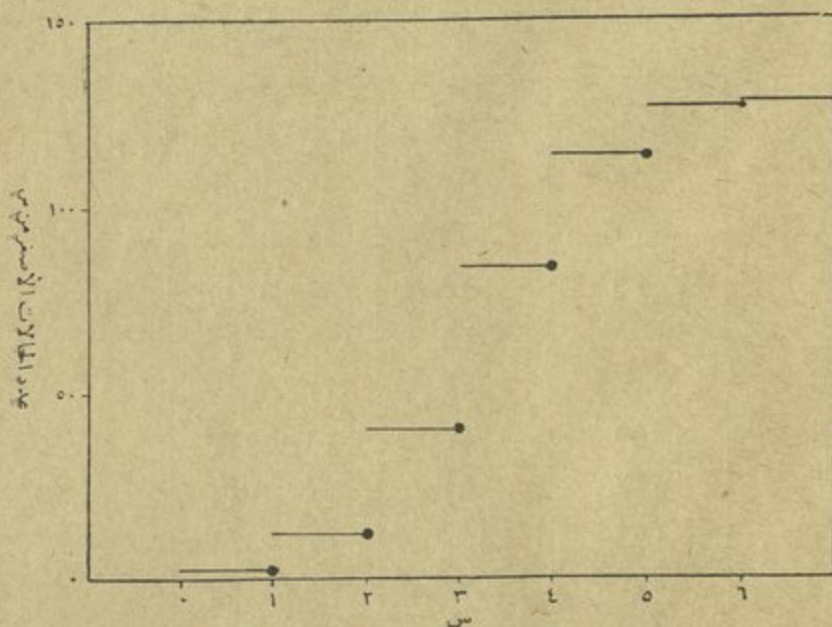


وفى التوزيعات المنفصلة يكون المنحنى المجمع دالة مدرجة ويسدو على شكل خطوط أفقية منفصلة . ويراعى فى هذه الحالة عند قراءة الإحداث الرأسى للمنحنى عند إحدى قيم المتغير قراءة هذا الإحداث عند الحافة المناسبة للدرجة .

مثال . توزيع عدد الرؤوس الساقطة عند قذف ٦ قطع من النقود

١٢٨ مرة : —

عدد الرؤوس	التكرار	التكرار المجمع
٠	٢	٢
١	١٠	١٢
٢	٢٨	٤٠
٣	٤٤	٨٤
٤	٣٠	١١٤
٥	١٣	١٢٧
٦	١	١٢٨
	١٢٨	



يقرأ الإحداثيات الرأسى للمنحنى فى هذه الحالة عند الحافة اليمنى للدرجة
وقد أشرنا إلى ذلك فى الشكل بنقطة سميكة عند الحافة المذكورة .

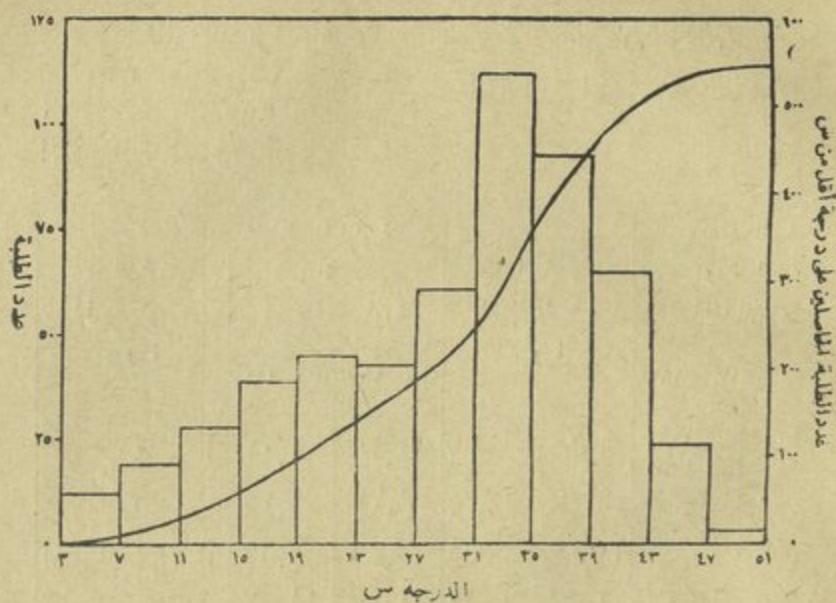
١٧ . مثال .

يبين الجدول الآتي توزيع الدرجات التي نالها ٤٤٤ طالباً في امتحان ما .

الدرجة	عدد الطلبة	الدرجة	عدد الطلبة
٣ إلى ٦	١٢	٢٧ إلى ٣٠	٦١
٧ إلى ١٠	١٩	٣١ إلى ٣٤	١١٢
١١ إلى ١٤	٢٨	٣٥ إلى ٣٨	٩٣
١٥ إلى ١٨	٣٩	٣٩ إلى ٤٢	٦٥
١٩ إلى ٢٢	٤٥	٤٣ إلى ٤٦	٢٤
٢٣ إلى ٢٦	٤٣	٤٧ إلى ٥٠	٣

ارسم هستوجراماً يصور التوزيع وأضف إلى الرسم نفسه خطاً بيانياً
يبين عدد الطلبة الذين نالوا أقل من أية درجة معطاة .
التكرارات المجمعة : —

الدرجة	عدد الطلبة	التكرار المجموع
٣ إلى ٦	١٢	١٢
٧ " ١٠	١٩	٣١
١١ " ١٤	٢٨	٥٩
١٥ " ١٨	٣٩	٩٨
١٩ " ٢٢	٤٥	١٤٣
٢٣ " ٢٦	٤٣	١٨٦
٢٧ " ٣٠	٦١	٢٤٧
٣١ " ٣٤	١١٢	٣٥٩
٣٥ " ٣٨	٩٣	٤٥٢
٣٩ " ٤٢	٦٥	٥١٧
٤٣ " ٤٦	٢٤	٥٤١
٤٧ " ٥٠	٣	٥٤٤



في الشكل المرسوم نرى المستوجرام الذي يمثل توزيع الدرجات وتقرأ ارتفاعات مستطيلاته على التدرج المبين على الحافة اليسرى للشكل . وفيه نرى كذلك المنحنى المجمع الذي يعطى عدد الحاصلين على درجة أقل من أية درجة معطاة وتقرأ إحداثاته الرأسية على التدرج المبين على الحافة اليمنى .

أسئلة

١ . مثل بيانات الجدول الآتي عن توزيع مراتب الإناث بياناً كهستوجرام .

عدد الإناث	المرتب	عدد الإناث	المرتب
	ب ش ب ش		ب ش ب ش
١٣٧	٥٦ ١١ — ٤٧	١١	٢٥ ١١ — ١٨ ٦
٩١	٦٧ ١١ — ٥٧	٢٤	٣٠ ١١ — ٢٦
١٦	٨٤ ١١ — ٦٨	٣٤	٣٦ ١١ — ٣١
		٨٧	٤٦ ١١ — ٣٧

٢ . تقارن مذكرة مرفوعة إلى لجنة كلوين للقرض الوطنى والضرائب بين أرباح عدد كبير من الشركات الصناعية قبل الحرب وبعدها على النحو الآتى بالتقريب : —

النسبة المئوية للدورة الكلية فى الفئة المذكورة		الربح كنسبة مئوية من الدورة	النسبة المئوية للدورة الكلية فى الفئة المذكورة		الربح كنسبة مئوية من الدورة
١٩١٢ — ١٣	١٩٢٢ — ٢٣		١٩١٢ — ١٣	١٩٢٢ — ٢٣	
٣,٨٥	٥,٨٦	٨ وأقل من	١٤,٢٩	٢,٠٢	أقل من ٠
٣,٤٠	٣,٩٦	٩ " "	٨,٣٣	٩,٤٤	٠ وأقل من ١
٢,٨٥	٤,٠١	١٠ " "	٩,٨٦	٧,٦٩	١ " "
١٣,٩٨	١٣,٠٣	٢٠ " "	١٠,٢٥	١١,٠٢	٢ " "
٤,٨٢	١,٢٨	٣٠ " "	٦,٤٥	١٤,٥٧	٣ " "
١,٢٦	٠,٦٤	٥٠ " "	٧,٤١	٨,٦٩	٤ " "
٠,٢٥	٠,١٢	٥٠ وأكثر	٧,٤٨	١١,٤٥	٥ " "
			٥,٥٢	٦,٢٢	٦ " "

ارسم على صفحة مربعات واحدة خطين تكراريين يجمعين لذلك الجزء من البيانات المتقدمة الذى فيه لا يتجاوز الربح ١٠ للئة من الدورة .

٣ . ما ذا يقصد بمنحن تكرارى وبالعبارة فئة تكرارية ؟
ارسم منحيا تكراريا لتوضيح بيانات جدول السؤال ١١ (أسئلة التغير) .
أى الاستنتاجات يمكنك استنباطها من شكله ؟

٤ . اعط (ا) هستوجراما ، (ب) منحيا تكراريا مبهدا ، (ج) منحيا مجمعا لتمثيل إحصائيات السؤال ٣ (أسئلة الحدود) .

٥ . صف الطرق المختلفة لتمثيل التوزيعات التكرارية بأشكال ومنحنيات .

٦ . ما هو التوزيع التكرارى المتماثل ؟ اذكر الخواص الرئيسية لمنحنى الخطأ المتماثل .

٧. صف الأنواع المختلفة للتوزيع التكرارى مما يحدث فى العادة ذاكرًا
المميزات الرئيسية للتوزيع المتماثل .

٨. ارسم هستوجرامًا ومنحنيا تكراريا ممهدا لتمثيل التوزيع المعطى
فى الجدول الآتى لأطوال عدد معين من الرجال . اذكر أى استنتاجات يمكن
استنباطها أو التكهّن بها بخصوص تجانس البيانات ؟

الطول بالبرصات	٥٥	٥٧	٥٩	٦١	٦٣	٦٥	٦٧	٦٩	٧١	٧٣	٧٥	٧٧	٧٩
التكرارات	٣	٢٤	١١٤	٣٠٠	٣٥٠	٢٢١	٢١٣	٣٦١	٤٣٠	٢١٧	٩٥	٢١	٥

٩. يبين الجدول الآتى توزيع أعمار النساء المتزوجات كما تبين من بحث
تم فى بريطانيا العظمى فى ١٩٢١ : —

سنوات العمر	النساء المتزوجات	سنوات العمر	النساء المتزوجات
١٩ — ١٥	٢٠١٠٠	٤٥ — ٤٩	٧٦١٤٠٠
٢٠ — ٢٤	٣٤٧٣٠٠	٥٠ — ٥٤	٥٥٨٧٠٠
٢٥ — ٢٩	٧٦٤٥٠٠	٥٥ — ٥٩	٣٧٥٠٠٠
٣٠ — ٣٤	٩٢١٢٠٠	٦٠ — ٦٤	٢٤١٤٠٠
٣٥ — ٣٩	٩٦٠٣٠٠	٦٥ — ٦٩	١٦١٧٠٠
٤٠ — ٤٤	٨٩٩٦٠٠	٧٠ فما فوق	١٢٩٦٠٠
			٦١٤٠٨٠٠

ارسم هستوجرامًا يصور التوزيع وخطا بيانيا يبين عدد النساء المتزوجات
الأصغر من أى عمر معطى ١.

١٠. أعدت وزارة البحرية البريطانية الجدول الآتى لبيان الحمولة
البريطانية المسحوبة من الخدمة يوم ١ يوليو ١٩٣٢ :

١ اعتبر الفئة الأخيرة (المفتوحة) كأنها ٧٠ — ٧٤ .

أقسام الحمولة	عدد السفن	الحمولة الكلية
١٠٠ و تحت ٥٠٠	٥٦	١٧٩٠٠
٥٠٠ " ١٠٠٠	٥٢	٤١١٠٠
١٠٠٠ " ٢٠٠٠	٩٩	١٤٧٤٠٠
٢٠٠٠ " ٤٠٠٠	١٥١	٤٨٥٤٠٠
٤٠٠٠ " ٦٠٠٠	٢٧٩	١٣٨٣٨٠٠
٦٠٠٠ " ٨٠٠٠	١١٣	٧٧٥٣٠٠
٨٠٠٠ " ١٠٠٠٠	٤٧	٤١٣٥٠٠
١٠٠٠٠ " ١٥٠٠٠	١٤	١٧٣٠٠٠
١٥٠٠٠ " ٢٠٠٠٠	٧	١١٨٢٠٠
	٨١٨	٣٥٥٥٦٠٠

مثل بهستوجرام توزيع عدد السفن على الحمولة وأضف إلى الرسم نفسه
منحنيا يبين الحمولة الكلية للسفن الأصغر من أى حجم معطى .

السيرة

الباب الرابع

الثوابت الإحصائية للتوزيعات التكرارية (پارامتراتها)

١ . تلخيص البيانات (تابع) .

تتركب الخطوة التالية نحو تكشف البيانات من تلخيص المعالم الهامة للتوزيع إلى عدد من پارامترات أو الثوابت ١ .
وأهم معالم التوزيع اثنان حدوده (أو موضعه) و تشتته (أو تغيره) .
ولنبداً بالحدود .

٢ . الحدود .

يلزمنا أولاً التزود بوسيلة لتحديد موضع مركز التوزيع على محور المتغير س . وأشهر الوسائل لعمل ذلك هي احتساب المتوسط أو الوسط الحسابي و للجتم ، س للعينة .

هناك من الأسباب النظرية ما يجعل هذا خير مقياس يتخذ في العادة .
غير أن بعض المقاييس الأخرى للحدود تكون أحياناً ذات شأن . مثل ذلك الوسيط و النمط .

٣ . احتساب الوسط من عينة حجمها ن .

لتكن مشاهدات العينة $s_1, s_2, \dots, s_n$ ، وليكن الوسط الحسابي للعينة $\bar{s}$. واضح أن

$$\bar{s} = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n} = \frac{\sum s}{n} \quad (1)$$

١ إذا عرف الشكل النظري العنقي يمكن إعطاء كافة المعلومات على هيئة پارامترات قليلة .

وبما يساعد على احتساب الوسط أن نأخذ نقطة أصل اختيارية (وسطا اختياريا) حتى يمكن تخفيض حجم الأرقام بعض الشيء. وإذا أخذنا نقطة الأصل عند ١ فواضح أن

$$\frac{(1 - s_n) + \dots + (1 - s_2) + (1 - s_1) + 1}{n} = \bar{s}$$

ولنكتب هذا

$$\frac{s_n + \dots + s_2 + s_1 + 1}{n} + 1 = \bar{s}$$

$$(2) \quad 1 + j =$$

مثلا . ج هو التصحيح المناظر للنقطة ١ .

مثال ١ . الوسط الحسابي للعينة المكونة من

٠,٤ ، ٦,١ ، ٧,٣ ، ٤,٢ ، ٥,١ ، ٦,٤ .

هنا $n = 6$ ولنأخذ $1 = 4,0$ (حتى تبقى الأرقام موجبة) .

ش

س

٠,٠

٤,٠

٢,١

٦,١

٣,٣

٧,٣

٠,٢

٤,٢

١,١

٥,١

٢,٤

٦,٤

$$1,017 = j$$

$$9,1 = \text{مجم ش}$$

$$33,1 = \text{مجم س}$$

$$1,017 + 4,0 = \bar{s}$$

$$5,017 = \bar{s}$$

$$5,017 =$$

تعطى الطريقتان الطويلة (المباشرة) والقصيرة نتيجتين متفقتين .

مثال ٢. توزيع تكرارى (عدود الخيط).

س	ك	ش	ك ش
-٣٥,٠	٥	٤-	٢٠(-)
-٣٥,٥	١	٣-	٣
-٣٦,٠	١١	٢-	٢٢
-٣٦,٥	١٣	١-	١٣
-٣٧,٠	١٥	٠	٥٨ -
-٣٧,٥	١٣	١	١٣
-٣٨,٠	١٣	٢	٢٦
-٣٨,٥	٦	٣	١٨
-٣٩,٠	١	٤	٤
-٣٩,٥	٢	٥	١٠
ن = مج ك = ٨٠		٧١	مج ك ش = ج = ١٣

$$\frac{\text{مج ك ش}}{\text{ن}} = \text{ج} = ١٣$$

$$٠,١٦٢٥ = \frac{١٣}{٨٠} =$$

اختر الوسط الاختيارى عند مركز الفئة ٣٧,٠ - أى عند ٣٧,٢ .
ولاحظ أن الزيادة فى س بين الفئات هى ٠,٥ . وأتينا نعمل بهذه الوحدات .
أى

$$\text{ش} = \frac{٣٧,٢ - \text{س}}{٠,٥} \quad \text{س} = ٣٧,٢ + ٠,٥ \cdot \text{ش}$$

$$\text{س} = \frac{\text{مج ك ش}}{\text{ن}} = ٣٧,٢ + ٠,٥ \times ٠,١٦٢٥ = ٣٧,٢٨١٣$$

تمرين . قسم البنون المتقدمون إلى امتحان ما إلى ١٥ فئة كما يأتى : من
تألوا درجات ١ إلى ٢٠ ، ٢١ إلى ٤٠ ، ٤١ إلى ٦٠ ، ... ، ٢٨١ إلى ٣٠٠ .

وكانت أعداد البنين في الفئات المناظرة ١، ١، ١٠، ١٦، ٢٧، ٨٥،
١٠٩، ١٥٠، ١٥٢، ١١٥، ٤٦، ١٦، ٨، ٥. أوجد بطريقة قصيرة
الوسط الحسابي لهذا التوزيع للدرجات .

٤ . الوسط الهندسي .

الوسط الهندسي للعينة (ذات المشاهدات الموجبة) $s_1, s_2, \dots, s_n$ هو

$$(3) \quad \sqrt[n]{s_1 s_2 \dots s_n} = \sqrt[n]{\text{مض } s}$$

أى الجذر النوني (الموجب) لحاصل ضرب المشاهدات .

إذا أخذنا اللغاريتمات في (٣) نحصل على

$$(4) \quad \lg s = \frac{\lg s_1 + \lg s_2 + \dots + \lg s_n}{n} = \text{مجم } \lg s$$

إذن لغاريتم الوسط الهندسي للعينة يساوى الوسط الحسابي للغاريتمات
مشاهداتها . ويحسب الوسط الهندسي من القانون الأخير بالاستعانة بجدول
اللغاريتمات أو المساطر الحاسبة .

مثال ١ . سلسلة بسيطة .

س	لغ س
٤,٠	٠,٦٠٢١
٦,١	٠,٧٨٥٣
٧,٣	٠,٨٦٣٣
٤,٢	٠,٦٢٣٢
٥,١	٠,٧٠٧٦
٦,٤	٠,٨٠٦٢

$$\text{مجم } \lg s = ٤,٣٨٧٧ \quad \lg s = \frac{٤,٣٨٧٧}{٦} = ٠,٧٣١٣$$

$$s = ٥,٣٨٧ \text{ (أصغر من } s)$$

مثال ٢ . توزيع تكرارى .

س	ك	لغ س	ك لغ س
٣٥,٢	٥	١,٥٤٦٥	٧,٧٣٢٥
٣٥,٧	١	١,٥٥٢٧	١,٥٥٢٧
٣٦,٢	١١	١,٥٥٨٧	١٧,١٤٥٧
٣٦,٧	١٣	١,٥٦٤٧	٢٠,٣٤١١
٣٧,٢	١٥	١,٥٧٠٥	٢٣,٥٥٧٥
٣٧,٧	١٣	١,٥٧٦٣	٢٠,٤٩١٩
٣٨,٢	١٣	١,٥٨٢١	٢٠,٥٦٧٣
٣٨,٧	٦	١,٥٨٧٧	٩,٥٢٦٢
٣٩,٢	١	١,٥٩٣٣	١,٥٩٣٣
٣٩,٧	٢	١,٥٩٨٨	٣,١٩٧٦
	٨٠		١٢٥,٧٠٥٨

$$\text{لغ ه} = \frac{\text{مجم ك لغ س}}{\text{ن}} = \frac{١٢٥,٧٠٥٨}{٨٠} = ١,٥٧١٣, \quad ٣٧,٢٧ = ٥$$

٥ . الوسط التوافقى .

الوسط التوافقى للعينه س_١، س_٢، ...، س_ن (مشاهدات موجبة) هو

$$(٥) \quad \text{ت} = \frac{\text{ن}}{\text{مجم} \frac{١}{\text{س}} + \dots + \frac{١}{\text{س}_٢} + \frac{١}{\text{س}_١}}$$

أى مقلوب الوسط الحسابى لمقلوبات المشاهدات . ويحسب الوسط التوافقى من هذا القانون بالاستعانة بمجدول للمقلوبات .

واضح من (٥) أن

$$(٦) \quad \frac{\text{ن}}{\text{ت}} = \text{مجم} \frac{١}{\text{س}}$$

مثال ١ . سلسلة بسيطة .

س	س/١
٤,٠	٠,٢٥٠٠
٦,١	٠,١٦٣٩
٧,٣	٠,١٣٧٠
٤,٢	٠,٢٣٨١
٥,١	٠,١٩٦١
٦,٤	٠,١٥٦٣
$\text{مجم} = \frac{1}{1,1414} = \text{ت} = \frac{6}{1,1414} = ٥,٢٥٧ \text{ (أصغر من ٥)}$	

مثال ٢ . توزيع تكرارى .

س	ك	س/١	ك/س
٣٥,٢	٥	٠,٠٢٨٤	٠,١٤٢٠
٣٥,٧	١	٠,٠٢٨٠	٠,٠٢٨٠
٣٦,٢	١١	٠,٠٢٧٦	٠,٣٠٣٦
٣٦,٧	١٣	٠,٠٢٧٢	٠,٣٥٣٦
٣٧,٢	١٥	٠,٠٢٦٩	٠,٤٠٣٥
٣٧,٧	١٣	٠,٠٢٦٥	٠,٣٤٤٥
٣٨,٢	١٣	٠,٠٢٦٢	٠,٣٤٠٦
٣٨,٧	٦	٠,٠٢٥٨	٠,١٥٤٨
٣٩,٢	١	٠,٠٢٥٥	٠,٠٢٥٥
٣٩,٧	٢	٠,٠٢٥٢	٠,٠٥٠٤
٨٠			٢,١٤٦٥

$$\text{ت} = \frac{\text{ن}}{\text{مجم ك}} = \frac{٨٠}{٢,١٤٦٥} = ٣٧,٢٧٠٠$$

تمرينان .

١ . قطع راكب دراجة المسافة بين بلدين بسرعة ٣٠ كيلومترا في الساعة وفي العودة قطعها بسرعة ١٠ كيلومترات في الساعة . ماذا كانت سرعته المتوسطة في الذهاب والعودة ؟

٢ . باع تاجر كمية من صنف معين بسعر قرشين للقطعة وباع بأثمان مساوية من أربعة أصناف أخرى بالأسعار ٤ ، ٥ ، ٨ ، ١٠ قروش للقطعة على التوالي . كم كان السعر المتوسط للقطعة ؟

٦ . الوسط الترييحي (جذر متوسط المربعات) .

الوسط الترييحي للعينة $s_1, s_2, \dots, s_n$ هو

$$(v) \quad \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2 + \dots + s_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum s_i^2}{n}}$$

أي الجذر الترييحي (الموجب) لمجموع مربعات المشاهدات مقسوما على العدد الكلي لها أو جذر متوسط مربعاتها . ويحسب الوسط الترييحي من هذا القانون بالاستعانة بجدول للمربعات .

مثال ١ . سلسلة بسيطة .

س	s^2
٤,٠	١٦,٠٠
٦,١	٣٧,٢١
٧,٣	٥٣,٢٩
٤,٢	١٧,٦٤
٥,١	٢٦,٠١
٦,٤	٤٠,٩٦

$$\sum s = ١٩١,١١ = \sum s^2 = ٣١,٨٥٢ \quad \sqrt{\frac{٣١,٨٥٢}{٦}} = \sqrt{\frac{١٩١,١١}{٦}} = \sqrt{٣١,٨٥٢}$$

$$\sqrt{٣١,٨٥٢} = ٥,٦٤٤ \quad (\text{أكبر من } s)$$

مثال ٢. توزيع تكرارى .

ك	س	ك	س
٥	٣٥,٢	٢	٣٩,٧
١	٣٥,٧	١	٣٩,٢
١١	٣٦,٢	١٣	٣٧,٧
١٣	٣٦,٧	١٥	٣٧,٢
١٣	٣٧,٧	١٣	٣٨,٢
٦	٣٨,٧	١	٣٩,٢
١٣٣٩,٠٤	١٢٣٩,٠٤	١١٢٣٧٣,٥٥	١١١٢٧٣,٥٥
١٢٧٤,٤٩	١٢٧٤,٤٩	٨٠	٨٠
١٣١٠,٤٤	١٣١٠,٤٤		
١٣٤٦,٨٩	١٣٤٦,٨٩		
١٣٨٣,٨٤	١٣٨٣,٨٤		
١٤٢١,٢٩	١٤٢١,٢٩		
١٤٥٩,٢٤	١٤٥٩,٢٤		
١٤٩٧,٦٩	١٤٩٧,٦٩		
١٥٣٦,٦٤	١٥٣٦,٦٤		
١٥٧٦,٠٩	١٥٧٦,٠٩		
١٤٤١٤,٨٤	١٤٤١٤,٨٤		
١٧٥٠٩,٥٧	١٧٥٠٩,٥٧		
٢٠٧٥٧,٦٠	٢٠٧٥٧,٦٠		
١٨٤٧٦,٧٧	١٨٤٧٦,٧٧		
١٨٩٧٠,١٢	١٨٩٧٠,١٢		
٨٩٨٦,١٤	٨٩٨٦,١٤		
١٥٣٦,٦٤	١٥٣٦,٦٤		
٣١٥٢,١٨	٣١٥٢,١٨		
١١١٢٧٣,٥٥	١١١٢٧٣,٥٥		

$$١١١٢٧٣,٥٥ = ١٣٩٠,٩١٩٤ = ٣٧,٢٩٥٠ = ع$$

٧. الوسيط .

الوسيط هو المشاهدة التى تترك ٥٠ ٪ من زميلاتها تقع فوقها و ٥٠ ٪ تحتها . فإن كان أى حجم العينة زوجيا نأخذ منتصف المشاهدتين الوسطيتين .

مثال ١ . وسيط العينة المكونة من

٠,٤ ، ٠,١ ، ٠,٢ ، ٠,٣ ، ٠,٤ ، ٠,٥ ، ٠,٦

هنا $n=6$ وهو زوجى . إذن الوسيط هو منتصف المشاهدتين

الوسطيتين عند نظم المشاهدات فى ترتيب تصاعدى (أو تنازلى) . أى

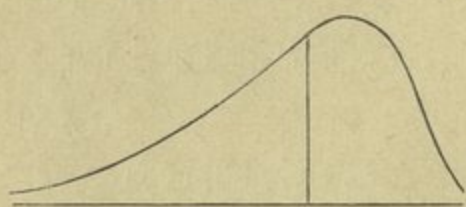
٠,٤ ، ٠,٢ ، ٠,١ ، ٠,١ ، ٠,٢ ، ٠,٣

$$\text{الوسيط} = \frac{٠,١ + ٠,١}{٢} = ٠,١$$

مثال ٢ . توزيع تكرارى (عدود الخيط) .

ترتيب الوسيط بين المشاهدات الثمانين هو ٤٠ . إذن الوسيط يقع في الفئة ٣٧,٠ — لأن هناك ٣٠ بكرة عددها تحت ٣٧,٠ و ٤٥ عددها تحت ٣٧,٥ و ٤٠ يقع بين ٣٠ و ٤٥ . ولتحديد موضع الوسيط داخل الفئة المذكورة نفرض الآن أن العد يرتفع بانتظام مع التكرار المجمع . فبما أن عد البكرة ٣٠ يساوى ٣٧,٠ تقريبا وعد البكرة ٤٥ يساوى ٣٧,٥ تقريبا إذن الفرق وهو ٤٥ — ٣٠ أو ١٥ يناظر فرقا في العد قدره ٠,٥ . لكن الفرق الذى نريده هو الفرق الذى يناظر ٤٠ — ٣٠ أو ١٠ بكرات . هذا الفرق يناظر فرقا قدره $\frac{1}{10} \times ٠,٥$ وحدة وهذا يساوى ٠,٣٣٣ . تقريبا . إذن العد على البكرة ٤٠ هو $٣٦,٩٥ + ٠,٣٣٣$ أو ٣٧,٢٨٣ وهذا هو الوسيط تقريبا .

٨ . فى التوزيع المتصل ينصف الوسيط المساحة التى تحت المنحنى .

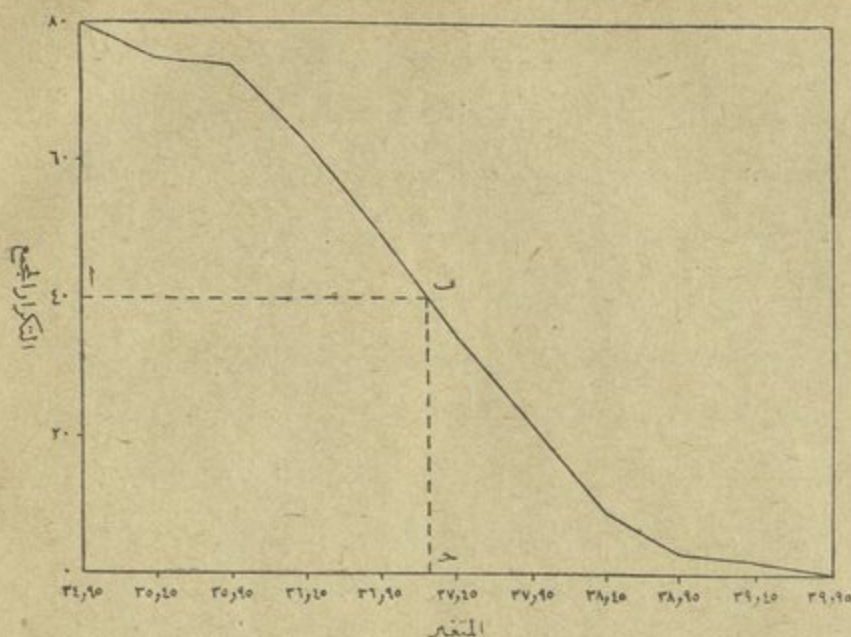


لكن هذا لا يساعدنا كثيرا فى الحصول على الوسيط من توزيع تكرارى لأننا لانعرف كيف ننصف المساحة عمليا إلا فى حالات خاصة جدا .

للحصول على الوسيط بطريقة هندسية نرسم المنحنى التكرارى المجمع .

ثم نقول إن العد الوسيط هو العد الواقع فى المنتصف بين البكرتين ٤٠ و ٤١ . فلنرسم إذن خطا أفقيا عند النقطة ٤٠ على المحور الرأسى وليقطع هذا الخط المنحنى عند ب . من ب نسقط العمود على المحور الأفقى وليساقه عند ح . الآن يمكننا قراءة الوسيط على التدرج الأفقى عند ح .

هذه العملية الأخيرة لا يمكن إجراؤها على المنحنى التكرارى لأنه لا يوجد تدرج رأسى متصل ولأننا لاندري على أى ارتفاع نرسم خطنا الأفقى .



٩. النمط .

النمط هو نقطة الكثافة الكبرى في التوزيع أى موضع الإحداثى الأكبر .

لإيضاح ذلك سنأخذ توزيع عدود خيط القطن واثنانين بكرة . هنا يظهر النمط واقعاً في فئة العدود $٣٧,٥ - ٣٧,٠$ لأن هذه الفئة تضم داخلها عدداً من الحالات أكبر من أية فئة واحدة أخرى . تسمى هذه الفئة الفئة النمطية ولتحديد موضع النمط داخلها نسلك أحد الطرق الآتية .

(١) إذا كانت الفئات ضيقة فواضح أن النمط لن يكون بعيداً بعداً ملموساً عن مركز الفئة النمطية . إذن لا حرج في هذه الحالة من وضع النمط عند مركز الفئة المذكورة .

هذا يضع العد النمطى عند $٣٧,٢$.

(٢) النمط يقسم الفئة النمطية عكسياً بنسبة التكرارين السابق واللاحق للتكرار الأكبر (كنج) .

سم التكرار السابق ك' والتكرار اللاحق ك'. سم الطرف الأيسر لفئة النمط أ واتساعها ف والنمط نفسه ط .

$$(٨) \quad ط = ١ + \frac{ك'}{ك + ك'} \cdot ف$$

(٣) النمط يقسم الفئة النمطية بنسبة الفرق بين التكرار الأكبر وسابقه والفرق بينه وبين لاحقته (بيرسن) . أى

$$(٩) \quad ط = ١ + \frac{ك - ك'}{٢ ك - ك - ك'} \cdot ف$$

حيث ك هو التكرار الأكبر .

إذا كان ك' = ك يتحول القانونان (٨) و (٩) إلى

$$ط = ١ + \frac{١}{٢} \cdot ف$$

وفى هذه الحالة يقع النمط المحسوب بأحدهما عند مركز الفئة النمطية وتتحد الطرق الثلاثة (١) (٢) (٣) لإعطاء قيمة موحدة له . فمثلا فى عدود الخيط (٨٠ بكرة) بما أن ك' = ك (= ١٣) إذن النمط يساوى ٣٧,٢ بالطرق الثلاثة .

مثال . العد النمطى فى توزيع العدود على الثلاثين بكرة الأولى .

الفئة النمطية فى هذا التوزيع هى الفئة ذات التكرار ٦ أى ٣٨,٠ - أيضا ك' = ٥ ، ك = ٢ .

$$(١) \quad ط = ٣٨,٢$$

$$(٢) \quad ط = ٣٧,٩٥ + \frac{٢}{٢ + ٥} \times ٠,٥$$

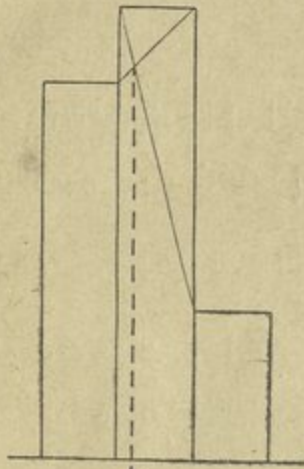
$$٣٨,٠٩٣ = ٣٧,٩٥ + ٠,١٤٣$$

$$(٣) \quad ط = ٣٧,٩٥ + \frac{٥ - ٦}{٢ - ٥ - ١٢} \times ٠,٥$$

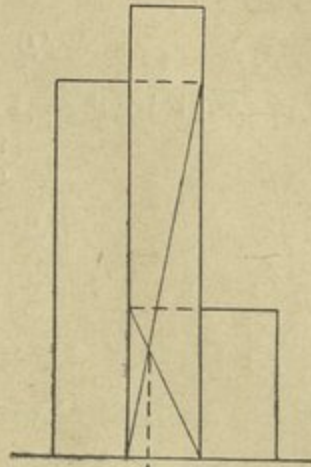
$$٣٨,٠٥ = ٣٧,٩٥ + ٠,١$$

١٠. لإيجاد النمط هندسياً أكثر من طريقة .

(١) من المستوجرام .



نمط بيرسن



نمط كنج

في الشكل المرسوم نرى المستطيل الأكبر وجاريه .

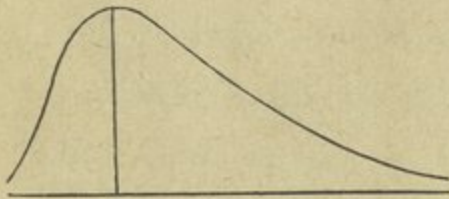
(ب) من المنحنى التكرارى .

في التوزيع المتصل يقع

النمط تحت السهم . أى أن

النمط هو العد الذى يبلغ المنحنى

عنده أقصى علو له .

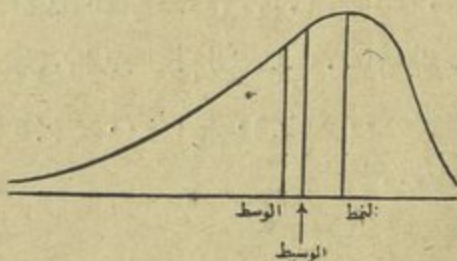


(ج) من المنحنى التكرارى المجمع .

إذا نظرنا إلى الشكل المرسوم على الصفحة ١١٠ نرى أن المنحنى ينحدر في عجلة إلى أدنى حتى يصل إلى مستوى العد ٣٥,٤٥ فيقل الانحدار إلى ٣٥,٩٥ ثم يزداد إلى ٣٦,٤٥ ويزداد للمرة الثانية إلى ٣٦,٩٥ وللمرة الثالثة إلى ٣٧,٤٥ . وبعدئذ يصبح المنحنى أقل انحداراً على مراحل إلى ٣٨,٤٥ و٣٨,٩٥ و ٣٩,٤٥ حيث يزداد الميل إلى ٣٩,٩٥ وفي النهاية تكون الزيادة في الانحدار

بسيطة للغاية . أما أشد الأجزاء انحدارا فهو فئة العد ٣٧,٠ إلى ٣٧,٥ . فإذا لاحظنا أن درجة انحدار المنحنى عند أية فئة للعد يدل على عدد الحالات داخلها يكون أكثر أجزاء المنحنى انحدارا دليلا على موضع النمط . وواضح من الشكل المذكور أن النمط يقع في الفئة ٣٧,٠ إلى ٣٧,٥ . وفي الطرفين حيث الحالات قليلة نسبيا يتفطح المنحنى وبالأخص في هذه الحالة عند الطرف الأعلى أكثر منه عند الطرف الأدنى . على هذا النحو يمكننا المنحنى المجمع من قراءة النمط في توزيع بوجه التقريب ١ .

١١ . كل الأوساط متساوية في المنحنى المتماثل لكنها تختلف فيما عداه من المنحنيات .



إذا لم يكن المنحنى شديد الالتواء يقع الوسيط عادة بين النمط والوسط الحسابي ويبعد عن النمط ضعف ما يبعد به عن الوسط تقريبا . أى

$$(١٠) \quad \text{الوسط} - \text{النمط} = ٣ (\text{الوسط} - \text{الوسيط}) .$$

وهذا صحيح سواء كان الالتواء جهة اليمين أو جهة اليسار .

فمثلا في توزيع عدود الخيط

$$\text{الوسط} = ٣٧,٢٨١ , \text{الوسيط} = ٣٧,٢٨٣ , \text{النمط} = ٣٧,٢ .$$

إذن

$$\text{النمط} - \text{الوسط} = -٠,٠٨١ , \text{الوسيط} - \text{الوسط} = ٠,٠٠٢ .$$

وواضح أننا لم نوفق إلى تحقيق العلاقة في هذه الحالة .

والعلاقة بين الأوساط الثلاثة يمكن تطبيقها لإيجاد النمط من الوسط

والوسيط .

١٢ . الترجيح .

كان الكلام عن الأوساط حتى الآن قاصرا على البسيط منها . غير أن الحاجة تدعونا أحيانا إلى ترجيح الوسط حتى تسلم النتيجة . فمثلا إذا علمنا أن ٥ ٪ من أعضاء نقابة تجارية و ١٠ ٪ من أعضاء نقابة تجارية أخرى و ٧ ٪ من أعضاء نقابة تجارية ثالثة و ١٢ ٪ من أعضاء نقابة تجارية رابعة كانوا عاطلين في أسبوع ما فإننا لا نعرف بوجه الإجمال الوسط الحسابي لكمية العطالة في تلك النقابات التجارية مأخوذة معا إلا إذا أعطينا عدد الأعضاء في كل نقابة . عندئذ نرجح كل نسبة مئوية بالعدد المناظر . فإن كان عدد أعضاء النقابة الأولى ١٠٠٠٠ والثانية ٥٠٠٠ والثالثة ٨٠٠٠ والرابعة ٤٠٠٠ يكون العدد الكلي للأعضاء ٢٧٠٠٠ والوسط الحسابي لكمية العطالة

$$\frac{٤٠٠٠ \times ٧\% + ٨٠٠٠ \times ١٢\% + ٥٠٠٠ \times ١٠\% + ١٠٠٠٠ \times ٥\%}{٢٧٠٠٠}$$

$$= \frac{٢٠٤}{٢٧} = ٧,٦\%$$

تعطى كل نسبة مئوية في هذه الحالة نصيبها من الأهمية فترجح بضررها في العدد المناسب وتسمى الأعداد ١٠٠٠٠ و ٥٠٠٠ إلخ الأوزان . إذن الوسط الحسابي المرجح يحصل عليه بضرب كل واحدة من سلسلة من الكميات في عدد الأشخاص (الأشياء) الذين لهم (التي لها) علاقة بها (الأوزان) ثم أخذ مجموع هذه النتائج بسطا ومجموع الأوزان مقاما .

واضح من المثال السابق أنه لم يكن هناك داع لأخذ الأعداد الفعلية للأعضاء أوزانا لأننا نحصل على نفس النتيجة إذا اتخذنا من الأعداد ١٠ و ٥ و ٨ و ٤ على الولا أوزانا . بهذه الكيفية نقي أنفسنا شر كتابة أصفار لا ضرورة لها . وحتى إذا لم تكن الأوزان الأصلية أعدادا بسيطة مثل ١٠ و ٥ إلخ يكفي في العادة أخذ أوزان صغيرة بشرط أن تكون النسب بين هذه

الأوزان مساوية بوجه التقريب للنسب بين الأوزان الأصلية . هذا يدخل تبسيطا كبيرا في الحساب ما في ذلك شك . والحالة الآتية تبين الفرق الطفيف بين الوسط الحسابي المرجح بالأعداد الأصلية وبين الوسط الحسابي المرجح بأعداد صغيرة متناسبة مع الأعداد الأصلية .

نسبة العطالة في أربع نقابات تجارية	كل نقابة محسوبة كأنها واحد	العدد الفعلي لأعضاء النقابات	الترجيح بأعداد صغيرة متناسبة بوجه التقريب
٥ ٪	١	١٠٣٧٣	١٠
١٠ ٪	١	٤٩٦٤	٥
٧ ٪	١	٨٢١١	٨
١٢ ٪	١	٣٨٧٥	٤
الوسط	٨,٥ ٪	٧,٤٩ ٪	٧,٥٦ ٪

هناك إذن فرق كبير بين الوسط غير المرجح ٨,٥ ٪ الظاهر في العمود الثاني وبين الوسط المرجح ٧,٤٩ ٪ الظاهر في العمود الثالث . لكن الفرق بين هذا الأخير الذي فيه استخدمت الأعداد الأصلية وأوزانا وبين الوسط ٧,٥٦ ٪ الظاهر في العمود الرابع والذي نتج من استخدام أوزان صغيرة متناسبة بوجه التقريب يمكن إهماله في كثير من الحالات .

في المثال السابق لم نستخدم إلا أربع حالات (نقابات) وهذه الحالات تختلف فيما بينها كل الاختلاف من حيث نسبة العطالة التي تعرضها . والترجيح في مثل هذه الحالة يكون أمرا لا بد منه إذا أريد للنتيجة السلامة . لكن إذا احتوت المسألة على عدد كبير من الحالات لا تختلف فيما بينها إلا قليلا فإن غياب الترجيح لا يؤثر كثيرا في النتيجة . ذلك لأن الفروق في الأهمية بين الحالات العديدة تميل إلى التعادل إذ يمحو بعضها البعض وهذا من شأنه إضعاف أثر الترجيح على النتيجة . ويراعى عند استخدام هذه الطرق المختصرة - أوزان متناسبة بوجه التقريب أو إهمال سافر للترجيح - اختبار صلاحية الطريقة .

تمرين . احسب معدل المواليد لمجموعة المدن الميينة بعد .

المدينة	عدد السكان	معدل المواليد (للآلف)
هل	٣٢٠٠٠٠	١٨,٦
پورتسمث	٢٦٠٠٠٠	١٦,٠
صندرلاند	١٨٠٠٠٠	١٩,٤
برايتن	١٥٠٠٠٠	١٣,٨
سوانسى	١٦٠٠٠٠	١٥,٤

١٣ . مثالان .

(١) رفعت الأجور ١٥٪ وخفضت ٢٠٪ ورفعت ١٠٪ ورفعت ١٥٪ ثم خفضت ١٠٪ على التعاقب مع احتساب كل نسبة مئوية على الأجور الجارية وقت إحداث التغير . أوجد التغير المئوى فى الفترة كلها .
 هب أن الأجور كانت ١ فى أول الأمر فتكون قيمتها فى آخر الأمر

$$١,١٥ \times ٠,٨٠ \times ١,١٠ \times ١,١٥ \times ٠,٩٠$$

هب الآن أن التغير المئوى فى الفترة كلها هو غ٪ واكتب $ع = غ / ١٠٠$
 فتكون الأجور عقب انتهاء الفترة (١ + ع) بقانون الفوائد المركبة .
 بالمقارنة نحصل على

$$(١ + ع) = ١,١٥ \times ٠,٨٠ \times ١,١٠ \times ١,١٥ \times ٠,٩٠$$

وبأخذ اللوغارتمات نجد

$$٥ \lg (١ + ع) = ٠,٦٠٧ + ١,٩٠٣١ + ٠,٠٤١٤ + ٠,٦٠٧ + ١,٩٥٤٢$$

$$= ٠,٠٢٠١$$

$$\lg (١ + ع) = ٠,٠٠٤٠ \quad ١ + ع = ١,٠٠٩$$

إذن

$$ع = ٠,٠٠٩ \quad غ = ٠,٩$$

والتغير المئوى فى الفترة كلها هو ارتفاع فى الأجور بالغ ٠,٩٪ .

(٢) بين بمثال أن الحجم المتوسط للأسرة عند عد كل أسرة مرة واحدة أصغر من حجمها المتوسط عند عد كل أسرة مرة لكل طفل .
اعتبر ما يأتي : —

٤	٣	٢	١
العدد الكلي للأشخاص	الأوزان	عدد الأسر	عدد أفراد الأسرة
٦٠	٠	٣٠	(لا أطفال للأسرة) ٢
١٣٥	٥	٤٥	(١) ٣
١٠٨	٣	٢٧	(٢) ٤
٩٠	٢	١٨	(٣) ٥
٥٤	١	٩	(٤) ٦
٤٤٧	١١	١٢٩	

واضح أن الحجم المتوسط البسيط للأسرة هو العدد الكلي للأشخاص مقسوما على عدد الأسر . أى

$$\frac{\text{العمود ٤}}{\text{العمود ٢}} = \frac{٤٤٧}{١٢٩} = ٣,٤٧$$

والآن ينبغي أن نرجع الأسر بالعدد الكلي للأطفال مع حذف الثلاثين أسرة التي لا أطفال لها . وبما أن التكرارات الأخرى تقبل القسمة على عامل مشترك إذن من الممكن استخدام أرقام بسيطة أوزاننا . الأوزان تناسب مع عدد الأسر وعامل التناسب هو ٩ . والعمود ٣ مضروبا في عدد الأطفال (العمود ١) يعطى

$$\frac{٢١}{١١} = \frac{٤ \times ١ + ٣ \times ٢ + ٢ \times ٣ + ١ \times ٥}{١١} = ١,٩١$$

لكن بما أننا لم نحسب في أية حالة أسرة عدد أفرادها أقل من ٢ (الوالدين) إذن على هذا الأساس يكون الحجم المتوسط للأسرة

$$٣,٩١ = ١,٩١ + ٢$$

أُسْئَلَة

١ . ارسم على ورقة مربعات واحدة هستوجرامين للتوزيعين الآتين للمحال التي توظف

(١) ذكورا فقط ، (ب) إناثا فقط

مصنفة حسب مراتب موظفيها .

النسبة المئوية للموظفين الذين يتقاضون أقل من ١٥٠ جنيها في السنة	(١) عدد المحال (التي توظف ذكورا فقط)	(ب) عدد المحال (التي توظف إناثا فقط)
١٠ — ٠	٢٤	١٠
٢٠ — ١٠	٢٢	٠
٣٠ — ٢٠	٣٢	٣
٤٠ — ٣٠	٢٠	٣
٥٠ — ٤٠	٨	١
٦٠ — ٥٠	٤	٩
٧٠ — ٦٠	١	٨
٨٠ — ٧٠	١	١٥
٩٠ — ٨٠	٠	٢٠
١٠٠ — ٩٠	٠	٣٧

احسب أيضا النسبة المئوية المتوسطة للإناث اللاتي يتقاضين أقل من ١٥٠ جنيها في السنة .

٢ . ارتفع سهم في خمس سنوات متعاقبة ٤٪ و ٣٪ و ٣٪ و ٥٪ .
٤٪ - بما كان عليه في أول كل سنة . ماذا كان متوسط الارتفاع السنوي ؟
٣ . يعطى الجدول الآتي إنتاج شركة السكر والتكرير المصرية العمومية
من العسل بالطن أثناء الفترة ١٩٣٦ - ١٩٤٢ . احسب متوسط التغير للبيته
في السنة .

الجدول :

السنة	الإنتاج
١٩٣٦	٧٦٠٠٠
١٩٣٧	٧٩٠٠٠
١٩٣٨	٧٨٠٠٠
١٩٣٩	٨٥٠٠٠
١٩٤٠	٨٩٠٠٠
١٩٤١	٨٥٠٠٠
١٩٤٢	٨٤٠٠٠

٤ . احسب الأوساط التوافقية للسطور الأربعة الأخيرة لجدول الصفحة ٨٠ وقارنها بالأوساط الحسابية .

٥ . وزن عدد معين من الذكور البريطانيين الرشداء ثم صنفوا إلى فئات أوزانها ٩٠ وتحت ١٠٠ رطل ، ١٠٠ وتحت ١١٠ أرطال ، . . . ، ٢٧٠ رطلا وتحت ٢٨٠ رطلا ، ٢٨٠ رطلا فما فوق ، وقد كانت أعداد هذه الفئات على التوالي ٣ ، ٣٤ ، ١٥٢ ، ٣٩٠ ، ٨٦٧ ، ١٦٢٣ ، ١٥٥٩ ، ١٣٢٦ ، ٧٨٧ ، ٤٧٦ ، ٢٦٣ ، ١٠٧ ، ٨٥ ، ٤١ ، ١٦ ، ١١ ، ٨ ، ١٠٠٠ .
أوجد الوزن المتوسط والوزن الوسيط بأقصى ما تسمح به البيانات من الدقة .

كيف كانت تتأثر النتائج لو أن الأوزان لم تؤخذ إلا إلى أقرب رطل ؟

٦ . ارسم

(١) هستوجراما ، (ب) منحنيا تكراريا مهدا ، (ج) منحنيا مجمعا لتمثيل الإحصائيات المعطاة في السؤال ٥ .

بين الوسط والوسيط والنمط على كل منحني .

٧ . اشرح معنى الوسط والوسيط والنمط وتكلم عن استخدامها كأوساط .
وضح بإيجاد الوسط والوسيط من البيانات الآتية :

الوفيات للمليون من الأشخاص القاطنين إنجلترا وويلز

من الحصبة في السنين ١٨٨٠ - ١٨٩٤ .

(تقرير المسجل العام لعام ١٩١٨ ، Cmd. ٦٠٨)

عدد الوفيات لكل مليون

شخص حتى

السنة

٤٧٨	١٨٨٠
٢٨٠	١٨٨١
٤٨٣	١٨٨٢
٣٥٠	١٨٨٣
٤١٩	١٨٨٤
٥٣٣	١٨٨٥
٤٣٦	١٨٨٦
٦٠٢	١٨٨٧
٣٤٧	١٨٨٨
٥١٨	١٨٨٩
٤٣٩	١٨٩٠
٤٣٦	١٨٩١
٤٥٩	١٨٩٢
٣٧٣	١٨٩٣
٣٩١	١٨٩٤

٨ . مقاييس الصدر بالبوصات لآلف رجل معطاة في الجدول الآتي :

٤٠	٣٩	٣٨	٣٧	٣٦	٣٥	٣٤	٣٣	مقياس الصدر
١٩٤	١٨١	١٣٠	٧٤	٣٤	١٢	٤	١	عدد الرجال
	٤٧	٤٦	٤٥	٤٤	٤٣	٤٢	٤١	مقياس الصدر
	١	٣	٨	٢٢	٦٠	١١٢	١٦٤	عدد الرجال

احسب الوسط الحسابي والوسيط والنمط لهذا التوزيع .

٩. في ١ يناير ١٩٢٨ كانت أعداد وسنوات صناعة السيارات المستخدمة في فرنسا كما هي معطاة في الجدول الآتي . أوجد العمر المتوسط والعمرين الوسيط والنمطي للسيارات .

سنة الصناعة	١٩٢٧	١٩٢٦	١٩٢٥	١٩٢٤	١٩٢٣	١٩٢٢	١٩٢١
عدد السيارات	١٢٦٧٠٠	١٤٣٥٠٠	١٣٨٠٠٠	١٠٩٠٠٠	١١٣٠٠٠	٦٨٦٠٠	٣٣٥٠٠

سنة الصناعة	١٩٢٠	١٩١٩	١٩١٨	١٩١٧	١٩١٦	١٩١٥
عدد السيارات	٣٠١٠٠	٢١٤٠٠	٧٥٠٠	١٠٢٠٠	٥٠٥٠	١٤٠٠

سنة الصناعة	١٩١٤	١٩١٣	١٩١٢	١٩١١	١٩١٠	١٩٠٩
عدد السيارات	٤٣٥	١٤٠	٤٥	٦	٢	١

١٠. أوجد الوسيط والوسيط والنمط للدخول الخاضعة لضريبة الإيرادات المرتفعة كما هي معطاة في الجدول الآتي :

الدخل بآلاف الجنيهات	٣-٢	٤-٣	٥-٤	٦-٥	٧-٦	٨-٧	٩-٨	١٠-٩
عدد الأشخاص	٣١٤٠٠	١٦٧٠٠	٩٦٠٠	٦٢٠٠	٤٣٠٠	٣١٠٠	٤٠٠٠	٤٨٠٠
الدخل بآلاف الجنيهات	١٥-٢٠	٢٠-٣٠	٣٠-٤٠	٤٠-٥٠	٥٠-٦٠	٦٠-٧٠	٧٠-٨٠	٨٠-٩٠
عدد الأشخاص	٢١٠٠	١٨٠٠	٦٨٠	٣٤٠	٣٦٠	١٢٠	١٩٠	١٠٠

١١ . عدد أى ثلاثة أوساط إحصائية مما يستخدم عادة وبين خصائصها .
أوجد متوسط إنتاج اللبن من أرقام الجدول ١ بتطبيق مبدأ الوسط المرجح .

الجدول ١ . سجلات اللبن

عدد الأبقار المسجلة	الإنتاجات ١٠٠٠ رطل
١	فوق ١٤ وتحت ١٦
١	١٤ " ١٢ "
٢٠	١٢ " ١٠ "
٩٠	١٠ " ٨ "
١٤٠	٨ " ٦ "
١٢٥	٦ " ٤ "
٤٣	أقل من ٤

١٢ . استأجر صاحب عمل ١٢٩ رجلا بأجر ٢٨ ش . فى الأسبوع ،
٣٣٠ بأجر ٢٩ ش ٦٠ ب ، ٢٠٩ بأجر ٣٠ ش ١٣٧ ، ٠ بأجر ٣٠ ش ٦٠ ب ،
٩٥ بأجر ٣١ ش ٥٩ ، ٠ بأجر ٣٣ ش . أوجد باستخدام ٣٠ ش . كنقطة
أصل أو بطريقة أخرى متوسط الأجور الأسبوعية المدفوعة وأوجد كيف
تتأثر النتيجة إذا استبدلت أعداد الرجال فى كل فئة بأنسب الأعداد الصحيحة
الأقل من ١٠ . اذكر المبدأ العام فى الترجيح الذى هذا هو مثل له و اشرح
الظروف التى فيها يمكن الاطمئنان إلى استخدامه .

١٣ . اشرح عبارة الوسط المرجح .

أثبت أن (أ) إذا كانت الحدود عرضة لخطأ صغير أقصاه $\frac{x}{\%}$ يكون
الوسط المرجح عرضة لخطأ لا يتجاوز $\frac{x}{\%}$ ، (ب) إذا كانت الأوزان
عرضة لخطأ أقصاه $\frac{x}{\%}$ يكون الوسط عرضة لخطأ لا يتجاوز $\frac{x}{\%}$.
أثبت أن (ج) إذا كانت كل الحدود متساوية تقريبا أو (د) إذا كانت
كل الأوزان مخطئة والخطأ المئوى فيها واحدا تقريبا يكون الوسط المرجح
سليما من الخطأ تقريبا .

- ١٤ . ما هو الوسط المرجح ؟ وضح وبين أن أى خطأ فى البيانات المرجحة يكون بوجه الإجمال أشد وطأة من خطأ فى الأوزان .
- ١٥ . اشرح المقصود بالوسط المرجح وميز بين الحالات التى فيها يعترض على الوسط بأنه (١) غير مرجح أو مرجح ترجيحاً خاطئاً وبأنه (٢) مرجح ترجيحاً غير مناسب لأغراض معينة ولو أن الوسط فى ذاته سليم سلامة تامة .
- ١٦ . ما هى المؤهلات الرئيسية التى يجب أن تتوافر فى الوسط ؟ اعط وصفا موجزا للأوساط المختلفة مما يستخدم فى العادة وبين إلى أى حد تحقق هذه الأوساط الشرائط التى طلبتها ؟
- ١٧ . اشرح معنى وأهمية الأوساط وعرف الوسط والوسيط والنمط . ما هى مميزات هذه الأوساط بالترتيب ؟
- ١٨ . أوجد العدد المتوسط للغرف للشخص الواحد وللأشخاص للغرفة الواحدة فى مساكن كل نوع فى السؤال ١ (صفحة ٧٣) .
- ١٩ . للبيانات الآتية من المختار الشهرى للإحصاء صلة بإنتاج الفحم فى بريطانيا العظمى وكل الأرقام أوساط أسبوعية : —

١٩٤٧	١٩٤٦	١٩٤٥	١٩٤٤	١٩٤٣	١٩٤٢	١٩٤١	
٣٥٧٨	٣٤٧٦	٣٣٥٠	٣٥٢١	٣٧٣٠	٣٩٠٥	٣٩٥٧	الإنتاج ، فحم منجم (آلاف الأطنان) ...
٧١٢	٦٩٧	٧٠٧	٧٠٨	٧٠٦	٧٠٨	٦٩٧	أصحاب الأجور فى دفاتر المحجر (آلاف)
٤,٦٨	٤,٨٤	٤,٧٣	٤,٩٦	٥,١٢	٥,٢٢	٥,٢٥	متوسط عدد العمليات المنجزة (لكل صاحب أجر فى الأسبوع)

احسب عدد العمليات المنجزة والإنتاج المتوسط للعملية الواحدة فى كل سنة . علق على التقدم فى إنتاج الفحم خلال المدة .

١٤ . التشتت .

ننتقل الآن إلى البحث عن مقياس لدرجة تشتت المشاهدات حول القيمة المركزية .

إذا نظرنا إلى العينة فلا شك أن الاختيار يقع لأول وهلة على المدى أى الفرق بين أصغر القيم وأكبرها . فمثلا في توزيع العدود تقع الحافة اليسرى للفئة الأولى وهى ٣٥,٠ - عند ٣٤,٩٥ وتقع الحافة اليمنى للفئة الأخيرة عند ٣٩,٩٥ والمدى هو ٣٩,٩٥ - ٣٤,٩٥ أو ٥ ويتغير العد في مدى طوله ٥ وحدات . وفى التوزيع الأعرج يكون المدى على الشاكلة $s < 1$ وواضح أنه غير محدود . وفى التوزيع الأجوف يتراوح المتغير بين قيمتين محدودتين والمدى هو المسافة بين هاتين القيمتين . وفى التوزيع المستطيل المدى هو المسافة من الطرف الأيسر للفتحة إلى الطرف الأيمن أو هو اتساع فتحة التوزيع .

يبد أنه يعاب على المدى المتوقع كمقياس للتشتت أنه يزيد مع حجم العينة . لكن هذا العيب يمكن تداركه متى عرف شكل المجتمع .

١٥ . الانحراف المعياري .

أهم مقياس للتشتت هو الانحراف المعياري (١) للمجتمع ، أى للعينة) الذى يستمد أهميته من أسباب نظرية نمسك فى الوقت الحاضر عن ذكرها . والانحراف المعياري هو جذر متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط أى هو نتيجة أخذ متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط ثم أخذ جذر هذا المتوسط .^١ ويستثنى من هذا التعريف العينات الصغيرة ففى هذه يجب أن نقسم على $n - 1$ بدلا من n .

والتباين هو مربع الانحراف المعياري (٢) للمجتمع أو s^2 للعينة) .

١ لا فرق بين هذا وبين أن نقول إن الانحراف المعياري هو " نصف قطر القصور الذاتي " حول الوسط . (انظر البند ١٨) .

١٦ . احتساب الانحراف المعياري من عينة حجمها n .

لتكن العينة $s_1, s_2, \dots, s_n$. واضح من التعريف أن التباين

هو

$$s^2 = \frac{(s_1 - \bar{s})^2 + (s_2 - \bar{s})^2 + \dots + (s_n - \bar{s})^2}{n - 1}$$

$$(11) \quad \frac{s_1'^2 + s_2'^2 + \dots + s_n'^2}{n - 1} = \frac{\text{مج ش}'^2}{n - 1}$$

حيث

$$s_1' = s_1 - \bar{s}, s_2' = s_2 - \bar{s}, \dots, s_n' = s_n - \bar{s}$$

أو $\text{ش}' = \text{ش} - \bar{s}$ بوجه عام .

وقد يكون $\bar{s}$ غير مضبوط فينشأ الخطأ من جراء تقريبه . وتتلافى هذا باستخدام العلاقة الآتية التي توفر علينا مشقة إجراء عمليات حسابية كثيرة :

$$(12) \quad \text{مج ش}'^2 = \text{مج ش}^2 - n(\text{مج ش})^2$$

حيث أية قيمة اختيارية وحيث (البند ٣)

$$\text{ش} = \text{ش} - \bar{s}, \quad \text{ج} = \text{ج} - \bar{s} .$$

أما برهان هذه العلاقة فبسيط : —

$$\text{ش} = \text{ش} - \bar{s} = (\text{ش} - \bar{s}) + (1 - \bar{s}) = \text{ش}' + \text{ج} .$$

إذن

$$\begin{aligned} \text{ش}^2 &= (\text{ش}' + \text{ج})^2 = \text{ش}'^2 + 2\text{ش}'\text{ج} + \text{ج}^2 \\ \text{مج ش}^2 &= \text{مج ش}'^2 + 2\text{مج ش}'\text{ج} + \text{مج ج}^2 \\ \text{مج ش}'^2 &= \text{مج ش}^2 - 2\text{مج ش}'\text{ج} - \text{مج ج}^2 . \end{aligned}$$

ن ج هو التصحيح المناظر للوسط المقرب ١ .

١ يسمى $n - 1$ عدد درجات الإطلاق (أو الحرية) المستخدمة في تقدير التباين لأن هذا هو عدد الشبكات التي لها أن تأخذ قيم اختيارية .

مثال ١ . سلسلة بسيطة (كما في المثال ١ صفحة ١٠٢) .

هنا $n = 6$ ولناخذ $\epsilon = 0.4$.

ش ^٢	ش	س
٠	٠	٤,٠
٤٤١	٢١	٦,١
١٠٨٩	٣٣	٧,٣
٤	٢	٤,٢
١٢١	١١	٥,١
٥٧٦	٢٤	٦,٤
٢٢,٣١	٩,١	٣٣,١
١٣,٨٠	المجموع	
٨,٥١	التصحيح	
٨,٥١	مجموع ش ^٢ =	

$$٦٣,٨٠ = \frac{٨٢,٨١}{٦} = \frac{٢٩,١}{٦} = \frac{٢(ش)٢}{٦} = \frac{٥٧٦}{٦}$$

$$٠,١٣٠٥ = \text{ي} \quad ٠,١٧٠٢ = \frac{٨,٥١}{٥} = \text{ي}^٢$$

هذا تقدير للانحراف المعياري للمجتمع الذي أخذت العينة منه .

أو $(١ = ٥,٥) :-$

ش ^٢	ش	س
٢٢٥	١٥-	٤,٠
٣٦	٦	٦,١
٣٢٤	١٨	٧,٣
١٦٩	١٣-	٤,٢
١٦	٤-	٥,١
٨١	٩	٦,٤
٨,٥١	٣٣	٣٣,١
٢	٣٢-	٥,٥١
٨,٥٠٨	١	

$$٠,٢ = \frac{١}{٦} = \frac{٢(ش)٢}{٦} = \frac{٨,٥١}{٦}$$

مثال ٢. توزيع تكرارى (عدود الخيط).

س	ك	ش	ك	ش	ك	ش	٢
٨٠	٢٠	٤	٥	٣٥,٠			
٩	٣	٣	١	٣٥,٥			
٤٤	٢٢	٢	١١	٣٦,٠			
١٣	١٣	١	١٣	٣٦,٥			
	٥٨	٠	١٥	٣٧,٠			
١٣	١٣	١	١٣	٣٧,٥			
٥٢	٢٦	٢	١٣	٣٨,٠			
٥٤	١٨	٣	٦	٣٨,٥			
١٦	٤	٤	١	٣٩,٠			
٥٠	١٠	٥	٢	٣٩,٥			
	٣٣١	٧١	٨٠				
				٢,١١٢٥	١٣		
				٣٢٨,٨٨٧٥			

$$٢,١١٢٥ = \frac{١٦١}{٨٠} = \frac{\text{مجم ك ش}^٢}{ن} \quad \frac{٢,١١٢٥}{٣٢٨,٨٨٧٥} = \frac{\text{مجم ك ش}^٢}{ن} = \frac{\text{مجم ك ش}^٢}{١ - ن} = ٢$$

$$٣٢٨,٨٨٧٥ = \text{وحدة}^٢ = ١٦٣١,٤ \text{ وحدة}^٢, \quad \frac{٣٢٨,٨٨٧٥}{٧٩} =$$

$$١,٠٢٠٢ = \text{وحدة}^٢, ٠٤٠٤ = ٢$$

لأن الوحدة وهى الفئة تساوى ٠,٠.

تحقيق . فى العينات التى يناهز حجمها المئة يكون المدى خمسة أمثال الانحراف المعيارى . وفى العينات التى يناهز حجمها الألف يكون المدى ستة أمثال الانحراف المعيارى بوجه التقريب .

لتطبيق هذا على المثال الأخير نلاحظ أن التكرار الكلى فى مسألة العدود يساوى ٨٠ وهذا يناهز المئة . إذن ننتظر أن يكون الانحراف المعيارى خمس المدى وهذا صحيح لأن المدى فى هذه المسألة ٥ (البند ١٤) والانحراف المعيارى لا يختلف عن ١ إلا قليلا .

تمرينان .

١ . احسب القيمة المتوسطة والانحراف المعيارى لسلسلة العدود المعطاة

على الصفحة ٨٠

(أ) باستخدام انحرافاتهما عن أصغرها وهو ٣٥,٠

(ب) باستخدام انحرافاتهما عن النقطة ٣٧,٢٦

(ج) باستخدام الانحرافات عن الصفر .

قارن النتائج .

٢ . احسب من البيانات الآتية الوسط والانحراف المعيارى لأعمار كل

البنين كما كانوا فى مدرسة مانشستر الثانوية فى صيف عام ١٩٢١ :

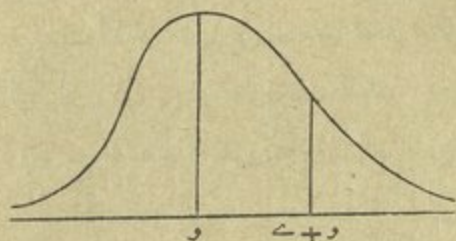
عدد البنين	العمر (سنتين)
٢٩	١١
١١٢	١٢
١٧٣	١٣
٢٥٥	١٤
٢٦٣	١٥
١٧٣	١٦
٨٠	١٧
٢٥	١٨
المجموع ١١١٠	

هل يساوى المدى بوجه التقريب ستة أمثال الانحراف المعيارى فى هذه

الحالة ؟

١٧ . التفسير الهندسى .

فى بعض الحالات يمكن تفسير الانحراف المعيارى هندسيا عن طريق منحنى التكرار .



إذا كاد منحنى التكرار أن يكون 'أساسيا' أى كما فى الشكل يكون الانحراف المعيارى بوجه التقريب المسافة من الوسط إلى إحدى

نقطتى الانقلاب . (انظر الصفحة ٩٣ .)

١٨ . التفسير الميكانيكى .

إذا تحرك جسم حول محور فنصف قطر القصور الذاتى للجسم حول المحور هو بعد لو انتقلت كتلة الجسم كلها وتمركزت على بعد مساو له من المحور تكون النتيجة الدورانية واحدة للكتلة المتمركزة وللكتلة الفعلية الموزعة . هذا يعنى أن نصف قطر القصور الذاتى هو نصف قطر دورانى متوسط لجميع جزيئات الجسم المتحرك . كذلك الانحراف المعيارى هو انحراف متوسط أو مقياس للنشت .

والانحراف المعيارى هو نصف قطر القصور الذاتى للمساحة الواقعة تحت المنحنى التكرارى حول الخط الرأسى المار بمركز ثقلها . فنصف قطر القصور الذاتى لهستوجرام حول محور مار بمركز ثقله هو الجذر التربيعى الموجب لمجموع حواصل ضرب مساحة كل مستطيل فى مربع البعد بين مركزه وبين المحور المار بمركز الثقل مقسوما على المساحة الكلية . وبما أن عرض كل مستطيل يساوى فئة واحدة إذن يمكن اعتبار العرض وحدة الأطوال . على هذا الأساس تكون مساحة كل مستطيل مساوية للتكرار المناظر . أيضا الخط الرأسى عند الوسط الحسابى يمر بمركز ثقل المساحة كلها

وإذن يمكن استخدامه محورا للقصور الذاتي . وأبعاد مراكز المستطيلات عن المحور هي انحرافات مراكز الفئات عن الوسط الحسابي . إذن حاصل ضرب مساحة أى مستطيل فى مربع البعد عن المحور هو حاصل ضرب التكرار فى مربع الانحراف عن الوسط . وبمجموع حواصل الضرب المذكورة هو مجموع مربعات الانحرافات عن الوسط لكل حد فى المجموعة . والمساحة الكلية هى التكرار الكلى . إذن خارج قسمة مجموع حواصل ضرب مساحة كل مستطيل فى مربع بعده عن المحور على المساحة الكلية يساوى جذر متوسط مربعات الانحرافات عن الوسط . أو بعبارة أخرى مربع نصف قطر القصور الذاتي يساوى ع^٢ . الآن اجعل عرض المستطيل يتضاءل إلى غير حد مع تزايد عددها إلى غير نهاية حتى يقترب الهستوجرام من المنحنى التكرارى كنهاية . عندئذ يقترب نصف قطر القصور الذاتي للهستوجرام من نصف قطر القصور الذاتي للمساحة الواقعة تحت المنحنى كنهاية ويقترب الانحراف المعيارى للعينة الممثلة فى الهستوجرام من الانحراف المعيارى للمجتمع الذى أخذت العينات منه إذا كانت هذه حقا تمثل المجتمع .

ومن النظريات المعروفة فى الميكانيكا أن مربع نصف قطر القصور الذاتي لمساحة حول محور غير مار بمركز الثقل يساوى مربع نصف قطر القصور الذاتي حول محور مواز ومار بمركز الثقل زائدا مربع البعد بين المحورين . من هذا تنتج فورا العلاقة

$$I_x = I_{x_c} + A d^2 \quad (١٣)$$

بين I_x الانحراف المعيارى للمجتمع حول الوسط وبين I_{x_c} الانحراف المعيارى له حول أية نقطة أخرى مثل س = ا . ج^٢ هو مربع البعد بين المحورين وهو أيضا مربع التصحيح .

وهناك عدا هذا أوجه كثيرة للشبه بين نظريات الميكانيكا ونظريات الطريقة الإحصائية .

١٩. الانحراف المتوسط .

الانحراف المتوسط يشبه الانحراف المعياري دون تربيع للانحرافات .
لترتب عدود القائمة المطبوعة على الصفحة ٨٠ داخل جدول كما في العمود
الأول من الجدول الآتي .

الانحراف المتوسط (٣٧,٣٥)	العدد	الانحراف المتوسط (٣٧,٣٥)	العدد
٠,٠٥	٣٧,٤	٢,٣٥ —	٣٥,٠
٠,٢٥	٣٧,٦	٢,٢٥ —	٣٥,١
٠,٣٥	٣٧,٧	١,٩٥ —	٣٥,٤
٠,٤٥	٣٧,٨	١,٣٥ —	٣٦,٠
٠,٥٥	٣٧,٩	١,٢٥ —	٣٦,١
٠,٥٥	٣٧,٩	١,٠٥ —	٣٦,٣
٠,٧٥	٣٨,١	٠,٩٥ —	٣٦,٤
٠,٧٥	٣٨,١	٠,٨٥ —	٣٦,٥
٠,٨٥	٣٨,٢	٠,٧٥ —	٣٦,٦
٠,٩٥	٣٨,٣	٠,٧٥ —	٣٦,٦
٠,٩٥	٣٨,٣	٠,٧٥ —	٣٦,٦
١,٠٥	٣٨,٤	٠,١٥ —	٣٧,٢
١,١٥	٣٨,٥	٠,١٥ —	٣٧,٢
١,١٥	٣٨,٥	٠,٠٥ —	٣٧,٣
٢,٢٥	٣٩,٦	٠,٠٥ —	٣٧,٣
٢٦,٧٠			

لقياس درجة التشتت حول الوسط يكفي جمع الانحرافات المختلفة عن
الوسط سواء في ذلك ما كان منها موجبا أو سالبا ثم قسمتها مجموعها على عدد
الملاحظات المنحرفة . هذا يعطي الانحراف المتوسط . ولنا أن نختار الوسط
الذي نستخدمه ليكون الوسط الحسابي أو الوسيط وهذا الأخير يساوي

في هذه الحالة ٣٧,٣٥ والاول ٣٧,٢٦ . لكن العادة جرت عند احتساب الانحراف المتوسط على البدء بالوسيط كنقطة أصل لأن مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط أصغر من مجموعها عن الوسيط الحسابي لأسباب لا ضرورة إلى الخوض فيها هنا . فلنستخدم الوسيط نقطة للأصل ولنضف العمود الثاني إلى جدولنا . وضع الإشارة السالبة أمام عدد في هذا العمود يدل على أن العد تحت الوسيط ووضع الإشارة الموجبة يدل على أن العد فوق الوسيط . فثلا العد الأول ٣٥,٠ يقع تحت الوسيط بمقدار ٢,٣٥ والعد الأخير ٣٩,٦ يقع فوق الوسيط بمقدار ٢,٢٥ وهلم جرا . ثم نجمع الانحرافات تاركين الإشارة السالبة وشأنها لأننا الآن غير معنيين إلا بمقدار الانحراف ولا شأن لنا باتجاهه . هذا يعطى ٢٦,٧٠ . إذن الانحراف المتوسط هو

$$٠٠,٨٩ = \frac{٢٦,٧٠}{٣٠}$$

ملحوظة . من الممكن إثبات أن مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط يساوى الفرق بين مجموع الأعداد الأصغر منه ومجموع الأعداد الأكبر منه . فثلا في المثال الحالى العدود الأصغر من الوسيط هى العدود المكتوبة في النصف الأيمن من الجدول ومجموعها هو ٥٤٥,٦ والعدود الأكبر من الوسيط هى العدود المكتوبة في النصف الأيسر من الجدول ومجموعها هو ٥٧٢,٣ والفرق بين المجموعين هو ٢٦,٧ . وهذه هى النتيجة السابقة نفسها .

٢٠ . لتأخذ مثالا آخر نشرح به طريقة الحصول على الانحراف

المتوسط من توزيع تكرارى .

العد الوسيط في توزيع العدود والثمانين بكرة هو (البند ٧) ٣٧,٢٨٣ . فإذا حسبنا انحراف هذا الوسيط عن كل عد نحصل على النتائج الآتية ومنها

$$٠٠,٨٢ = \frac{٦٥,٣٣٠}{٨٠} = \text{الانحراف المتوسط}$$

العدد	التكرار	انحراف العدد عن الوسيط (٣٧, ٢٨٣)	التكرار في الانحراف
٣٥, ٢	٥	٢, ٠٨٣ —	١٠, ٤١٥ —
٣٥, ٧	١	١, ٥٨٣ —	١, ٥٨٣ —
٣٦, ٢	١١	١, ٠٨٣ —	١١, ٩١٣ —
٣٦, ٧	١٣	٠, ٥٨٣ —	٧, ٥٧٩ —
٣٧, ٢	١٥	٠, ٠٨٣ —	١, ٢٤٥ —
٣٧, ٧	١٣	٠, ٤١٧	٥, ٤٢١
٣٨, ٢	١٣	٠, ٩١٧	١١, ٩٢١
٣٨, ٧	٦	١, ٤١٧	٨, ٥٠٢
٣٩, ٢	١	١, ٩١٧	١, ٩١٧
٣٩, ٧	٢	٢, ٤١٧	٤, ٨٣٤
	٨٠		٦٥, ٣٣٠

أو (باختيار نقطة الأصل عند مركز فئة الوسيط) : —

العدد	التكرار	انحراف المركز عن نقطة الأصل (٣٧, ٢)	التكرار في الانحراف
— ٣٥, ٠	٥	٤ —	٢٠ —
— ٣٥, ٥	١	٣ —	٣ —
— ٣٦, ٠	١١	٢ —	٢٢ —
— ٣٦, ٥	١٣	١ —	١٣ —
— ٣٧, ٠	١٥	٠	٠
— ٣٧, ٥	١٣	١	١٣
— ٣٨, ٠	١٣	٢	٢٦
— ٣٨, ٥	٦	٣	١٨
— ٣٩, ٠	١	٤	٤
— ٣٩, ٥	٢	٥	١٠
	٨٠		١٢٩

لإيجاد مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط بهذه الطريقة تتبع القواعد الآتية : —

- ١ . نأخذ نقطة الأصل عند مركز فئة الوسيط ونحسب انحراف كل مركز عن هذه النقطة متخذين من اتساع الفئة وحدة (بفرض أن الاتساع ثابت من فئة إلى أخرى) .
- ٢ . نضرب تكرار كل فئة في الانحراف المناظر .
- ٣ . نجمع حواصل الضرب التي نحصل عليها من الخطوة ٢ صارفين النظر عن الإشارة السالبة .
- ٤ . نحول هذا المجموع إلى وحدات أصلية بالضرب في الاتساع الثابت للفئة .

٥ . نأتي بالتكرار الكلي للفئات التي لها مراكز لا تتجاوز أصغر العددين الوسيط ونقطة الأصل ونأتي بالتكرار الكلي للفئات التي لها مراكز لا تقل عن أكبر العددين نفسيهما ونطرح المجموع الأول من المجموع الثاني . ثم نضرب النتيجة في باقي طرح نقطة الأصل من الوسيط وأخيرا نطرح حاصل الضرب من نتيجة الخطوة ٤ .

باتباع هذه القواعد نحصل على النتائج الآتية : —

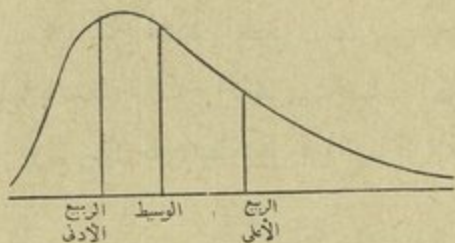
مجموع الانحرافات المطلقة عن نقطة الأصل يساوى ١٢٩ وحدة أو ٦٤,٥ . أيضا الوسيط يساوى ٣٧,٢٨٣ ونقطة الأصل ٣٧,٢ تحت الوسيط ومجموع تكرارات الفئات التي لها مراكز لا تتجاوز ٣٧,٢ (أصغر العددين ٣٧,٢٨٣ و ٣٧,٢) هو ٤٥ ومجموع التكرارات الباقية ٣٥ والفرق بين هذين هو — ١٠ . أيضا الفرق بين الوسيط ونقطة الأصل هو ٠,٨٣ . إذن مجموع الانحرافات المطلقة عن الوسيط هو

$$٦٥,٣٣ = ٠,٨٣ + ٦٤,٥ = ٠,٨٣ \times ١٠ + ٦٤,٥$$

وهذا يعطى الجواب السابق نفسه للانحراف المتوسط عن الوسيط .

٢١ . الربيعان .

إذا اقتفينا أثر الوسيط قليلا (البند ٧) نصل إلى فكرة الربيعين .
فالوسيط يقسم التوزيع إلى جزئين متساويين لأنه يترك ٥٠٪ من المشاهدات
تقع فوقه وتحتّه وإذا أجرينا الآن العملية عينها على كل من هذين الجزئين
وبحسبنا عن المشاهدة الوسطى



في النصف الأدنى من التوزيع
وعن المشاهدة الوسطى في
النصف الأعلى منه فإن هاتين
تعطينان الربع الأدنى والربع

الأعلى على التوالي . فكأن الربعين هما قيمتان اللتان تتركان ٢٥٪
و ٧٥٪ من المشاهدات تقع تحتها . والربع الأدنى يمكن إيجاداه من القانون
(١ + ن) / ٤ والأعلى من القانون ٣ (ن + ١) / ٤ حيث ن هو العدد الكلي
للمشاهدات .

بترتيب العدود المطبوعة على الصفحة ٨٠ حسب القيمة كما هو مبين على
الصفحة ١٣١ وجدنا أن الوسيط هو ٣٧,٣٥ . أما الربع الأدنى فهو

$$٣٦,٤٧٥ = ٠,٧٥ \times ٠,١ + ٣٦,٤$$

والربع الأعلى

$$٣٨,١٢٥ = ٠,٢٥ \times ٠,١ + ٣٨,١$$

وفي التوزيع التكرارى للثمانين عدا العد الوسيط هو ٣٧,٢٨٣ والربع
الأدنى هو عد البكرة ٢٠ (تقريبا) أى

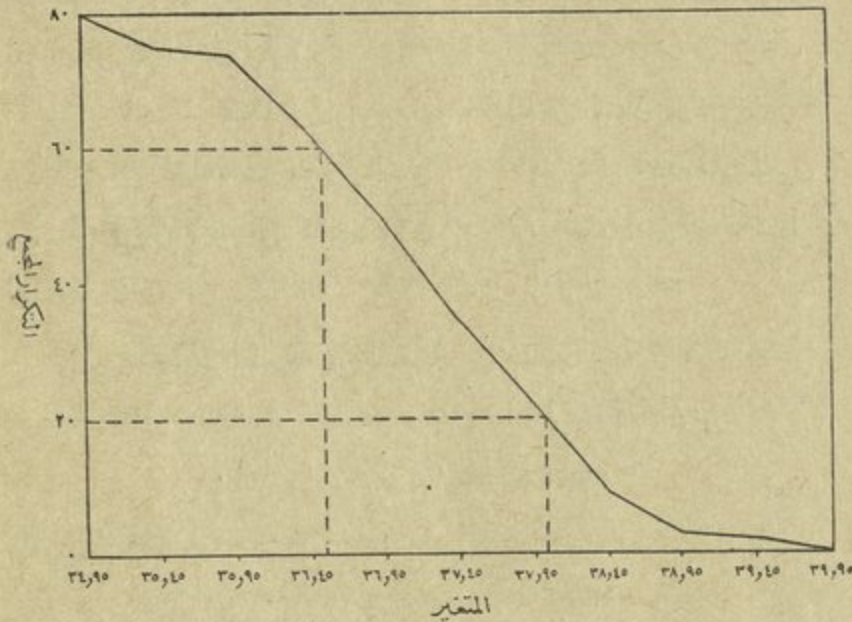
$$٣٦,٥٦٥ = ٠,١١٥ + ٣٦,٤٥ = ٠,٥ \times \frac{٢}{١٣} + ٣٦,٤٥$$

والربع الأعلى هو عد البكرة ٦٠ أى

$$٣٨,٠٢٧ = ٠,٠٧٧ + ٣٧,٩٥ = ٠,٥ \times \frac{٢}{١٣} + ٣٧,٩٥$$

من هذه النتائج نعلم إذن أن الربع الثانى فى التوزيع به عدود واقعة بين

وأن نصف البكرات لها عدود بين ٣٦,٥٦٥ و ٣٧,٢٨٣ وأن الربع الثالث به عدود بين ٣٧,٢٨٣ و ٣٨,٠٢٧
 وباقتفاء أثر المبدأ عينه يمكننا التحدث عن العشيرات (المشاهدة الوسطى
 فى كل جزء عاشر فى العينة) أو المئينات (المشاهدات الوسطى فى كل جزء
 مئوى فى العينة) لكن الفكرة تتعقد بعد الربيعين وتصبح مما لا ضرورة له
 لأن كل النتائج الممكن الحصول عليها من العشيرات والمئينات يمكن الحصول
 عليها باستخدام النتائج الأخرى مما سلف الكلام عنه .
 والربيعان كالوسيط يمكن قراءتهما من المنحنى المجمع .



مثال . قسم البنون والبنات فى مدارس جمهورية مصر عام ١٩٥٢ إلى ٦
 فئات للسنة : أقل من ٥ سنوات ، ٥ إلى ٨ ، ٨ إلى ١٠ ، ١٠ إلى ١٣ ، ١٣ إلى ١٦ ، ١٦ سنة فأكثر فكانت أعدادهم فى هذه الفئات بالآلاف ٣٧ ، ٦١٦ ،
 ٤٤٣ ، ٤١٦ ، ٢١١ ، ١٧٨ . أوجد الوسيط والربيع الأعلى والعشير السابع
 والمئين السادس عشر لهذا التوزيع للأسنان .

التكرار الكلي (آلاف) هو

$$1901 = 178 + 211 + 416 + 443 + 616 + 37$$

(١) ترتيب الوسيط ٩٥١ وهو في الفئة ٨ إلى ١٠ ويساوي

$$9,345 = 9 \frac{103}{443} = 2 \times \frac{653 - 951}{443} + 8$$

سنة .

$$(2) \text{ ترتيب الربع الأعلى} = \frac{1902 \times 3}{4} = 1426,5$$

إذن الربع الأعلى في الفئة ١٠ إلى ١٣ وهو

$$12,383 = 12 \frac{319}{416} = 3 \times \frac{1096 - 1426,5}{416} + 10$$

سنة .

$$(3) \text{ ترتيب العشير السابع} = \frac{1902 \times 7}{10} = 1331,4$$

إذن العشير السابع يقع في نفس الفئة كالربع الأعلى ويساوي

$$11,698 = 11 \frac{401}{308} = 3 \times \frac{1096 - 1331,4}{416} + 10$$

سنة .

$$(4) \text{ ترتيب المئين السادس عشر} = \frac{1902 \times 16}{100} = 304,32$$

هذا المئين يقع إذن في الفئة الثانية ويساوي

$$6,302 = 6 \frac{469}{1540} = 3 \times \frac{37 - 304,32}{616} + 5$$

سنة .

تمرين . في امتحان في الحساب كانت النسب المئوية (ص ، ع) للبنين والبنات على الولاء الحاصلين (الحاصلات) على س للثمة أو أكثر من النهاية العظمى للدرجات كما في الجدول الآتي لبعض قيم س .

س =	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠	١٠٠
ص =	٩٤	٨٣	٧٠	٥٦	٤٣	٣١	٢٠	١٠	٣	٠
ع =	٨٩	٧٤	٥٨	٤٣	٣٠	١٩	١١	٥	١	٠

أرسم خطي ص ، ع البيانيين في نفس الشكل وبنفس المحورين آخذاً محور س أفقياً ووحدة قياس تساوى ١ بوصة لكل ٢٠ .

كم للثمة (١) من البنين ، (٢) من البنات حصلوا (حصلن) على ثلث النهاية العظمى للدرجات أو أكثر؟ وماذا كانت الدرجة الوسيطة

(١) للبنين ، (٢) للبنات ؟

٢٢ . الانحراف الربيعي (الخطأ المحتمل) .

في أبسط الطرائق للتعبير عن التشتت نستخدم الوسيط والربيعين . فالوسيط مع الربيعين الأدنى والأعلى يقسم كلاً رأينا أى سلسلة أو توزيع إلى أربعة أجزاء متساوية وإذا عرفنا قيمتي الربيعين الأدنى والأعلى نعرف أن النصف الأوسط للعينة يقع بين هذين الحدين . أى أننا نعرف أقصى ما يبلغه انحراف نصف مشاهدات العينة عن الوسيط .

بترتيب سلسلة العدود المطبوعة على الصفحة ٨٠ حسب القيمة كما هو مبين على الصفحة ١٣١ وجدنا أن الوسيط هو ٣٧,٣٥ والربيع الأدنى ٣٦,٤٧٥ والربيع الأعلى ٣٨,١٢٥ . والآن يمكن بيان درجة التشتت الظاهرة في تلك الأرقام بإيجاز إذا نحن أخذنا نصف الفرق أو المسافة بين الربيعين الأدنى والأعلى . ونصف المسافة بين الربيعين هو ما يسمى نصف المدى الربيعي أو الانحراف الربيعي أو الخطأ المحتمل وهو المدى الذي فيه تحدث نصف المشاهدات . في المثال الحالى

$$\frac{1,650}{2} = \frac{36,475 - 38,125}{2} = \text{الانحراف الربيعي}$$

$$= 0,825$$

وفي التوزيع التكرارى للثمانين عدا وجدنا أن الوسيط هو ٣٧,٢٨٣ والربيع الأدنى ٣٦,٥٦٥ والربيع الأعلى ٣٨,٠٢٧. إذن

$$\frac{1,462}{2} = \frac{36,565 - 38,027}{2} = \text{الانحراف الربيعي}$$

$$= 0,731$$

٢٣. لدينا إذن على الأقل ثلاث طرائق للتعبير عن تشتت المشاهدات فى سلسلة أو عينة. فى الحالة المعنية لتوزيع الثمانين عدا وجدنا أن الانحراف المعيارى هو ١,٠٢٠٢ والانحراف المتوسط ٠,٨٢ والانحراف الربيعى ٠,٧٣١. أما أهم هذه الثلاثة فهو بالطبع الانحراف المعيارى ويستخدم الانحرافان المتوسط أو الربيعى اللذان يمتازان ببساطتهما فى الحالات التى لا يراد فيها الحصول على جواب دقيق. والعلاقة بين كل من هذين وبين الانحراف المعيارى فى التوزيع العادى 'الشبيه بالناقوس' هى

$$(١٤) \quad \text{الانحراف الربيعى} = 0,6745 \text{ ع}$$

$$(١٥) \quad \text{الانحراف المتوسط} = \sqrt{(٢/٣) \text{ ع}} = 0,7980 \text{ ع}$$

حيث ط هو عدد لودلف الشهير أى ... ٣,١٤١٥٩ (لا النقط). وتختصر العلاقتان فى العادة إلى

$$(١٤)' \quad \text{الانحراف الربيعى} = \text{ثلى الانحراف المعيارى}$$

$$(١٥)' \quad \text{الانحراف المتوسط} = \text{أربعة أتماس الانحراف المعيارى}$$

أيضا يمكننا فى العادة الجزم بأن جميع المشاهدات فى عينة معطاة تقع على جانبي الوسط فى مدى لا يتجاوز ضعف أو ثلاثة أمثال الانحراف المعيارى.

فثلا في التوزيع التكرارى للثمانين عدا

$$\bar{س} = ٣٧,٢٨١٣ \quad \bar{ى} = ١,٠٢٠٢$$

$$\bar{س} - \bar{ى} = ٣٥,٢٤٠٩ \quad \bar{س} + \bar{ى} = ٣٩,٣٢١٧$$

ويمكننا أن نقول إن عدد البكرات التى لها عد أصغر من ٣٥,٢٤١ أو أكبر من ٣٩,٣٢٢ لا يتجاوز ٥ للثمة من ٨٠ أى ٤ . أيضا

$$\bar{س} - \bar{ى} = ٣٤,٢٢٠٧ \quad \bar{س} + \bar{ى} = ٤٠,٣٤١٩$$

ويمكننا أن نقول إن عدد البكرات التى لها عد أصغر من ٣٤,٢٢١ أو أكبر من ٤٠,٣٤٢ لا يتجاوز ١ للثمة من ٨٠ أى بكرة واحدة .

٢٤ . معامل التغير % .

تخدم المقاييس التى تكلمنا عنها الغرض الذى أنشئت من أجله ألا وهو بيان مقدار الانحراف فى مجموعة معينة من المشاهدات كعد بكرة فى جهاز معين أو دخول طبقة معينة من الناس أو سعر سلعة معينة إلخ . بيد أنه إذا أردنا إقامة المقارنة بين التغير فى مجموعتين من المشاهدات المتشابهة كالتغير فى العد على الثلاثين بكرة الأولى وعلى الخمسين التالية لها أو الحالة الاقتصادية لأسر الطبقة العاملة فى جهة ما والحالة الاقتصادية لأسر الطبقة العاملة فى جهة خيالية مثالية أو بين الأسر الأولى وأسر مدينة روسية ناجحة أو بين أسر الطبقة العاملة من قرن مضى وأسر الطبقة العاملة فى الوقت الحاضر (بفرض أن البيانات متوفرة فى كل حالة) فلا بد من قياس الانحرافات بالنسبة إلى قيمة الوسط التى هى مقيسة منه . أى لا بد من نسبة الانحرافات إلى الوسط . ففى سلالة من الناس ممن يعد طولهم عاديا ينظر إلى أى انحراف عن الوسط مقداره ١٥ سنتيمترا كأنه كبير وفى سلالة من العالقة يكون هذا الانحراف تافها بينما فى سلالة من الأقزام يكون مرعبا . إذن نحن الآن لا نطلب من مقياسنا أن يبين التغيرات المطلقة بل نطلب منه أن يبين نسبة التغير إلى الوسط . وينتج أحد هذه المقاييس البسيطة والتى راج استخدامها من ضرب الانحراف

المعياري في ١٠٠ وقسمة النتيجة على الوسط أي ١٠٠ / و للمجتمع أو
 ١٠٠ / س للعينة . يسمى مقياس التغير في هذه الحالة معامل التغير %
 وواضح أنه الانحراف المعياري معبرا عنه كنسبة مئوية من الوسط . أي

$$(١٦) \quad \text{معامل التغير} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} \cdot ١٠٠$$

ومعامل التغير يكون أداة نافعة كلما كان التشتت النسبي في المقام الأول
 من الأهمية .

في التوزيع التكراري للعدود (٨٠ بكرة) يساوى الوسط الحسابي
 ٣٧,٢٨١٣ والانحراف المعياري ١,٠٢٠٢ . إذن

$$\text{معامل التغير} = \frac{١,٠٢٠٢}{٣٧,٢٨١٣} \cdot ١٠٠ = ٢,٧٤$$

٢٥ . العزوم .

يسمى الوسط العزم الأول حول نقطة الأصل . والتباين هو العزم الثاني
 حول الوسط . وتستخدم العزوم الأعلى (العزمان الثالث والرابع) للتعبير
 عن خصائص أخرى لشكل المنحنى .

٢٦ . تصحيح الضم .

إذا ضمت البيانات عند تلخيصها إلى فئات فنتيجة ذلك هي

(١) لا يتأثر الوسط (إلى المرتبة الأولى من الكميات الصغيرة) ،

(٢) يرتفع التباين بمقدار $١٢/٢$ حيث ف هو اتساع الفئة .

ويسمى هذا تصحيح شپرد للتباين .

أما عن (١) و (٢) فهذان لا يستندان على أساس من الصحة إلا إذا
 كان ف صغيرا بالنسبة إلى $\bar{x}$ كما هو الحال عادة في التطبيقات العملية
 للموضوع . زد على ذلك ضرورة استيفاء شرائط خاصة على شكل التوزيع .

مثال . نطبق هنا ما قلناه عن تصحيح شپرد على مثالنا السابق .

$$ي^2 \text{ عند الضم} = ٤,١٦٣١ \text{ وحدة}^2$$

$$\text{اتساع الفئة} = ١ \text{ وحدة واحدة}$$

$$\text{تصحيح شپرد} = \frac{٢١}{١٢} = ٠,٠٨٣٣$$

$$ي^2 \text{ المصحح} = ٤,٠٧٩٨ \text{ وحدة}^2$$

$$ي = ٢,٠١٩٩ \text{ وحدة} = ١,٠٠٩٩$$

تمرين . إذا أعطيت البيانات

٢٠,٢٥	٤,٩٠	١٣,٧٩	٢,٧٧	٤
٤	٥	٧	١	ف

فصح هذه الانحرافات المعيارية من أخطاء الضم باستخدام تصحيحات شپرد .

٢٧ . أمثلة .

(١) نشرت مجلة إيكونوميست في أعداد مختلفة لها من ١٩١٤ إلى ١٩٢٠ أسعار الجملة للربيع من القمح البريطاني في أوائل يناير وأبريل ويوليو وأكتوبر في السنين المذكورة فكانت كالآتي :

ب	ش	ب	ش	ب	ش	ب	ش	ب	ش	ب	ش	ب	ش
٣١	٣	٤٣	١١	٥٣	١٠	٧٤	٢	٧١	٣	٧٢	٦	٧٢	٦
٦	٣١	٣	٥٥	١١	٥٥	٣	٨٠	٤	٧٢	٦	٧٢	٨	٧٢
١	٣٤	٥٢	٣	٤٦	١	٧٨	٤	٧٤	٤	٧٣	٩	٧٨	٩٠
٣٧	٥	٤٣	١٠	٥٨	٨	٧٠	٧	٧٢	٤	٧٣	٥	٩٠	٩٠

احسب الانحراف المعياري لأسعار القمح .

الطريقة هي كتابة انحراف كل سعر عن الوسط الحسابي (العمود الثاني)

ثم تربيع هذه الانحرافات (العمود الثالث) وجمع المربعات .

مربع الانحراف	انحراف السعر عن الوسط الحسابي (ب ش) (٣ ٦٢)		السعر	
	ش	ب	ش	ب
٩٧٧	٣١	٣—	٣١	
٩٤٦	٣٠	٩—	٣١	٦
٧٩٣	٢٨	٢—	٣٤	١
٦٣٨	٢٥	٣—	٣٧	
٣٦١	١٩	—	٤٣	٣
٤٩	٧	—	٥٥	٣
١٠٥	١٠	٣—	٥٢	
٣٥٥	١٨	١٠—	٤٣	٥
٦٩	٨	٤—	٥٣	١١
٤٠	٦	٤—	٥٥	١١
٢٥٦	١٦	—	٤٦	٣
١٢	٣	٥—	٥٨	١٠
١٥٨	١٢	٧	٧٤	١٠
٣٢٤	١٨		٨٠	٣
٢٥١	١٥	١٠	٧٨	١
٧١	٨	٥	٧٠	٨
٨٠	٨	١١	٧١	٢
١٠٢	١٠	١	٧٢	٤
١٤٦	١٢	١	٧٤	٤
١٠٧	١٠	٤	٧٢	٧
١٠٠	١٠		٧٢	٣
١٠٥	١٠	٣	٧٢	٦
١٢٣	١١	١	٧٣	٤
١٢٣	١١	١	٧٣	٤
١٠٥	١٠	٣	٧٢	٦
١٠٩	١٠	٥	٧٢	٨
٢٧٢	١٦	٦	٧٨	٩
٧٩٣	٢٨	٢	٩٠	٥
٧٥٧٠			١٧٤٢	٥

بمجموع المربعات هو ٧٥٧٠. إذن متوسط المربعات هو

$$270 = \frac{7570}{28}$$

والانحراف المعياري

$$16 \quad 5 = 16,43 = 270 \sqrt{}$$

على وجه التقريب .

(٢) احسب الانحراف المتوسط والخطأ المحتمل لأسعار القمح في السنين ١٩١٤ إلى ١٩٢٠. قائمة الأسعار على الصفحة ١٤٢ .

انحراف السعر عن الوسيط (ب ش ٨ ١/٢ ٧١)		السعر		انحراف السعر عن الوسيط (ب ش ٨ ١/٢ ٧١)		السعر	
ب	ش	ب	ش	ب	ش	ب	ش
٦ ١/٢		٧٢	٣	٨ ١/٢ —	٤٠	٣١	
٧ ١/٢		٧٢	٤	٢ ١/٢ —	٤٠	٣١	٦
٩ ١/٢		٧٢	٦	٧ ١/٢ —	٣٧	٣٤	١
٩ ١/٢		٧٢	٦	٨ ١/٢ —	٣٤	٣٧	
١٠ ١/٢		٧٢	٧	٥ ١/٢ —	٢٨	٤٣	٣
١١ ١/٢		٧٢	٨	٣ ١/٢ —	٢٨	٤٣	٥
١ ٧ ١/٢		٧٣	٤	٥ ١/٢ —	٢٥	٤٦	٣
١ ٧ ١/٢		٧٣	٤	٨ ١/٢ —	١٩	٥٢	
٢ ٧ ١/٢		٧٤	٤	٩ ١/٢ —	١٧	٥٣	١١
٣ ١ ١/٢		٧٤	١٠	٥ ١/٢ —	١٦	٥٥	٣
٦ ٤ ١/٢		٧٨	١	٩ ١/٢ —	١٥	٥٥	١١
٧ ١/٢		٧٨	٩	١٠ ١/٢ —	١٢	٥٨	١٠
٨ ٦ ١/٢		٨٠	٣	١/٢ —	١	٧٠	٨
١٨ ٨ ١/٢		٩٠	٥	٦ ١/٢ —		٧١	٢
٣٧٣	١١						

إذا رتبنا الأسعار في جدول كما في العمود الأول من الجدول السابق نجد

أن الوسيط $8\frac{1}{2}$ ^ب والانحراف المتوسط هو 71 ^ش

$$\frac{373/11}{28} = \frac{33.91}{28} \quad \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{ش} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 \\ 13 \end{matrix}$$

الربيع الأدنى هو

$$\begin{matrix} \text{ب} & \text{ش} & \text{ب} & \text{ش} & \text{ب} & \text{ش} \\ 3 & 46 & 3 & 46 & 3 & 46 \end{matrix} + \frac{52 - 3}{4} = \frac{49}{4} + 46$$

$$\begin{matrix} \text{ب} \\ \text{ش} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 8 \\ 47 \end{matrix} =$$

والربيع الأعلى $8\frac{1}{2}$ ^ب إذن 73 ^ش

$$\frac{1}{4} = \frac{73 - 8}{47} \quad \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{ش} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 8 \\ 47 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{25 - 8}{10} \quad \begin{matrix} \text{ب} \\ \text{ش} \end{matrix} \quad \begin{matrix} 8 \\ 10 \end{matrix}$$

(٣) احسب معامل التغير في الدخول من البيانات الآتية :

عدد الأمر	الدخل (شلتات)
١٠	٥٥
٣	٥٦
٣	٥٧
٥	٥٨
٤	٥٩
٧	٦٠
٥	٦١
المجموع ٣٧	

الدخل (شلنات)	عدد الأمر	انحراف الدخل عن نقطة الأصل الاختيارية (شلنات)	عدد الأمر في الانحراف	عدد الأمر في مربع الانحراف
س	ك	ش	ك ش	ك ش ^٢
٥٥	١٠	٤—	٤٠(—)	١٦٠
٥٦	٣	٣—	٩	٢٧
٥٧	٣	٢—	٦	١٢
٥٨	٥	١—	٥	٥
٥٩	٤	٠	٦٠ —	
٦٠	٧	١	٧	٧
٦١	٥	٢	١٠ —	٢٠
	٣٧		١٧	٢٣١
			٤٣ —	٤٩,٩٧٣٠
				١٨١,٠٢٧٠

$$\text{مجم ك ش} = \frac{٤٣—}{٣٧} = ١,١٦—$$

$$\text{مجم ك ش}^٢ = \frac{٢(٤٣—)}{٣٧} = \frac{١٨٤٩}{٣٧} = ٥٠,٢٨٥$$

إذن

$$\text{س} = ٥٩ — ١,١٦ = ٥٧,٨٤$$

$$\text{ي}^٢ = \frac{١٨١,٠٢٧٠}{٣٦} = ٥,٠٢٨٥ \quad \text{ي} = ٢,٢٤$$

للحصول على معامل التغير نضرب الانحراف المعياري في ١٠٠ ونقسم النتيجة على الوسط . إذن

$$\text{معامل التغير} = \frac{٢,٢٤ \text{ شلنا}}{٥٧,٨٤ \text{ شلنا}} \times ١٠٠ = ٣,٨٧$$

أسئلة

١. (١) أثبت أن الانحراف المتوسط يكون أصغر ما يمكن عند قياسه من الوسيط.

(٢) تكلم عن المدى في عينة كأساس لتقدير التشتت.

(٣) اشرح علاقة المستوجرام بالتوزيع التكرارى لصفة تتغير تغيرا متصلا.

٢. اذكر ثلاث طرائق مختلفة يمكن قياس التشتت بها وأثبت أن الانحراف المعياري يكون أصغر ما يمكن عند قياس الانحرافات من الوسط الحسابي.

٣. في ١٩٢٤ أخذت عينة مكونة من ٨٩٨ أسرة من الطبقة العاملة في مدينة بولتن وصنفت الأسر حسب عدد الغرف المسكونة :

عدد الغرف	عدد الأسر
٢	١٥
٣	٤٧٧
٤	٢٢٧
٥	١٦٩
٦	٧
٧	٢
٨	١

أثبت أن ٣,٦٥ هو الوسط الحسابي لعدد الغرف المسكونة في أسرة واحدة وأوجد الانحراف المعياري لعدد الغرف المسكونة للأسرة الواحدة في هذه المجموعة من الأسر.

٤. احسب (باستخدام وسط مؤقت) الوسط وجذر متوسط مربعات الانحرافات (الانحراف المعياري) من البيانات الآتية :

س	ك (التكرار)
١٣	٥
١٤	١٩
١٥	٣٣
١٦	٦٩
١٧	٤٥
١٨	٣٠
١٩	١٢
٢٠	٢

٥ . يعطى الجدول الآتى بآلاف الأوقيات الدقيقة إنتاج ذهب الراند
للاثنى عشر شهرا يناير - ديسمبر ١٩٢٥ والأرقام المناظرة لعامى ١٩٢٤
و ١٩٢٣ . أوجد المتوسط الشهرى والانحراف المعيارى لكل من السنوات
الثلاث .

إذا كنت ترمى إلى المقارنة فكيف تقيس تغير الإنتاج فى كل من
السنين ؟

الجدول :

يناير	فبراير	مارس	أبريل	مايو	يونيو
١٩٢٥	٨٢٤	٧٥٤	٨٢٥	٧٨٨	٨١٣
١٩٢٤	٧٩٧	٧٦١	٧٩٦	٧٦٩	٨٠٩
١٩٢٣	٧٦٤	٧٠٥	٧٦٢	٧٤٤	٧٨٧
يوليو	أغسطس	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر
١٩٢٥	٧١٨	٨٠٨	٧٩٧	٨١٣	٧٨٨
١٩٢٤	٥٢٩	٨١٤	٧٩٩	٨٢٨	٨٠٢
١٩٢٣	٧٥٤	٧٦٩	٧٤٠	٧٩٤	٧٨١

١ الراند إقليم غنى بمناجم الذهب يقع غرب مدينة جوهانزبرج (الترانسفال) .

٦ . سجلت أطوال ٣٠ من أغاريد القبرات بالدقائق إلى أقرب نصف دقيقة كما يأتي :

١	١ ½	١	١ ½	٢	١	٢ ½	٣ ½	٦	٤ ½
١	٣ ½	١ ½	١	١	١	١	٢ ½	١	٤
١١	٢ ½	١	٦	١	٣ ½	٢	٢ ½	١	٢ ½

أوجد الطول المتوسط والانحراف المتوسط عن الوسط .

٧ . عرف "النمط" و "الربيع" و "الوسط المرجح" . بين أهمية فكرة الوسط المرجح في احتساب "معدل الوفاة المصحح" لمقاطعة .
أوجد الربيع الأعلى للبيانات المعطاة في الجدول ٣ .

الجدول ٣

أعمار الناس ، تعداد ١٩١١ ، إنجلترا وويلز

أعداد منسوبة (جهات حضرية)	فئات العمر
١٠٧	تحت ٥ سنين
١٠٢	٥ وتحت ١٠
٩٦	١٠ " ١٥
٩٣	١٥ " ٢٠
١٧٨	٢٠ " ٣٠
١٥٥	٣٠ " ٤٠
١١٦	٤٠ " ٥٠
٧٨	٥٠ " ٦٠
٤٨	٦٠ " ٧٠
٢٧	٧٠ فما فوق

المجموع ١٠٠٠

٨ . اشرح المقصود بالتغير في توزيع إحصائي ثم يابجأ الربيعين الأولين
قارن بين التوزيعين في السؤال ١ (صفحة ١١٨) من حيث التغير .

٩ . ماذا يفهم بالعبارة 'توزيعات تكرارية' ؟ صف كيف تنشأ هذه عند قياس طوائف من الأفراد بالنسبة إلى صفة طبيعية . اشرح العبارتين 'وسط حسابي' ، 'انحراف معياري' .

١٠ . يبين الجدول الآتي الأرباح (بالمعدل للمئة) المدفوعة في السنة ١٩٢٥ على الأسهم العادية لألف محل في صناعة بريطانية ما : —

عدد المحلات	الأرباح للمئة
١٩٠	٠ إلى ١,٩
٢٦٠	٢ " ٣,٩
٢٠٠	٤ " ٥,٩
١٢٠	٦ " ٧,٩
٨٠	٨ " ٩,٩
٤٨	١٠ " ١١,٩
٤٤	١٢ " ١٣,٩
١٦	١٤ " ١٥,٩
١٩	١٦ " ١٧,٩
١٣	١٨ " ١٩,٩
١٠	٢٠ فما فوق
١٠٠٠	

اعرض هذه النتائج بوساطة هستوجرام أو مضلع تكرارى وأوجد —

(أ) الربح المتوسط المدفوع ،

(ب) الوسيط والربيعين .

١١ . ارسم منحنيًا مجعًا بهذا لإحصائيات السؤال السابق (صفحة ١٠٣)

واقراً كل درجة مئوية عشرة من منحنائك .

١٢ . اشرح ووضح فكرة التشتت وبين طبيعة قياسه بوساطة

(١) الانحراف الربيعي و (٢) الانحراف المعياري .

١٣ . أوجد الوسط والوسيط والمدى المسيطر للمصروفات الأسبوعية في حالة الجدول الآتي : —

المصروفات الأسبوعية على الطعام للوحدة في ٩٧٠ أسرة حضرية ، ١٩١٨

عدد الحالات	المصروفات
١٨	لا تتجاوز ٥,٥ ش
١٠٧	٥,٥ ش —
٢٥٥	٧,٥ ش —
٢٤٥	٩,٥ ش —
١٧٣	١١,٥ ش —
١٠١	١٣,٥ ش —
٣٨	١٥,٥ ش —
١٧	١٧,٥ ش —
٩	١٩,٥ ش —
٧	فوق ٢١,٥ ش

١٤ . إذا أعطيت توزيع مرتبات الإناث كما في السؤال ١ (صفحة ٩٧) فأى وسط وأى مقياس للنشتت تعتقد أنهما خير من غيرهما للمقارنة بينهما وبين نظيريهما من توزيع مماثل للذكور ؟ احسب المقياسين اللذين يقع اختيارك عليهما .

١٥ . احسب مقياسين للنشتت يمكن المقارنة بينهما للتوزيعين الكاملين في السؤال ٢ (صفحة ٩٨) .

١٦ . أوجد الانحراف المعياري ومقياس آخر للنشتت لتوزيع السؤال

١٠ .

ماهى المعلومات التى تنقلها هذه المعاملات ؟

١٧ . أوجد الانحراف الربيعي لأعمار سيارات السؤال ٩ (صفحة ١٢١) وتقريبا أيا كان للانحراف المعياري .

١٨ . اشرح معنى أرقام العمود الأول في الجدول الآتي وبين كيف يحتسب الوسيط منه :

عدد أعضاء كل عمر	عمر أعضاء ناد للجولف
٥	١٦ — ٢٠
١٧	٢١ — ٢٥
٧٢	٢٦ — ٣٠
١٨٠	٣١ — ٣٥
٢٥٠	٣٦ — ٤٠
٢٢١	٤١ — ٤٥
١٩٢	٤٦ — ٥٠
١٣٠	٥١ — ٥٥
٨٣	٥٦ — ٦٠
٤٢	٦١ — ٦٥
٢١	٦٦ — ٧٠

احسب أيضا الربيعين الأدنى والأعلى والانحراف الربيعي .

١٩ . إذا كان ك تكرار قراءة س فأوجد الانحراف المعياري بإيجاد مكان الربيع : —

٦٧	٦٦	٦٥	٦٤	٦٣	٦٢	٦١	٦٠	٥٩	٥٨	٥٧	س
٣٥٠	٣٣٥	٢٨٨	١٧٥	٩٨	٥٧	٣٤	١٨	٩	٥	٥	ك
٧٧	٧٦	٧٥	٧٤	٧٣	٧٢	٧١	٧٠	٦٩	٦٨		
٥	٧	١٢	٢٠	٣٧	٦٤	١٠٥	١٨٠	٢٨٥	٣٣٦		

٢٠ . أثبت أن الانحراف المتوسط Δ لنون قيمة لمتغير يكون أصغر ما يمكن عند قياسه من وسيط النون قيمة .

بين أيضا أنه إذا كان Δ أصغر ما يمكن فإن عدد هذه القيم التي تختلف عن الوسيط بمقدار د أو أكثر لا يكون أكبر من n/Δ .

٢١. كون توزيعا تكراريا من : —

الكسوب المتوسطة للنساء (١٨ فما فوق) في ٥٦ تجارة صناعية رئيسية ،
بريطانيا العظمى ، أبريل ، ١٩٤٧

(ب / ش في الأسبوع)

٦٥/ ١	٦١/ ٦	٦٢/ ٣	٦٥/ ٢	٥٢/ ٧	٦٩/ ١٠	٧٣/ ٥	٦٦/ ١٠
٦٧/ —	٥٨/ ٤	٦٧/ ٦	٦٣/ ١١	٥٩/ ٤	٧١/ —	٧٣/ ١	٦٠/ ٧
٦٩/ ١	٦٤/ ٧	٥٦/ ٩	٦٨/ ٩	٥٦/ —	٦٨/ ٥	٧٩/ ٩	٦٣/ —
٦٤/ ٢	٦٥/ ٦	٦٤/ ٢	٦٣/ ٦	٦٥/ ٧	٧١/ —	٧١/ ٨	٦٨/ ٦
٧٤/ ٩	٧١/ —	٦٣/ ٥	٧٤/ ١	٦٤/ ١١	٦٥/ ١	٦٧/ ٨	٧٨/ ٧
٧٤/ ٨	٦٤/ ٧	٦٢/ —	٦٤/ ٢	٦٢/ ٥	٧١/ ١١	٧١/ —	٦٤/ ٣
٦٦/ ٥	٦٤/ ٩	٦٦/ ٩	٦١/ ١١	٦٠/ ١	٦٩/ ٧	٧٠/ ٧	٧٢/ ٤

(المصدر : جريدة وزارة العمل ، أكتوبر ، ١٩٤٧)

قدر الكسب الوسيط والكسبين الربيعين وهات مقياسا لتشتت التوزيع .

٢٢ . تبين من بحث حديث في طول مدة خدمة مدرسي المدارس الأولية في لندن وكان مشتملا على عدد كلى حوالى ٧٠٠٠٠ من سنى الخدمة أن التوزيع المثوى لهذا المجموع كما يأتى :

التوزيع المثوى	طول الخدمة بالسنتين	التوزيع المثوى	طول الخدمة بالسنتين
٧,٧	٢٥ ¼ وأقل من ٣٠ ¼	٢٤,٤	١ ¼ وأقل من ٥ ¼
٥,١	٣٥ ¼ " " ٣٠ ¼	٢١,٨	١٠ ¼ " " ٥ ¼
١,٨	٤٠ ¼ " " ٣٥ ¼	١٧,٤	١٥ ¼ " " ١٠ ¼
٠,٢	٤٥ ¼ " " ٤٠ ¼	١١,٨	٢٠ ¼ " " ١٥ ¼
		٩,٨	٢٥ ¼ " " ٢٠ ¼

أوجد متوسط طول الخدمة والانحراف المعياري . أيضا قدر بلا حساب

دقيق الربيعين والانحراف الربيعي . اشرح ماذا يراد من الانحرافين قياسه .
 ٢٣ . اشرح المقصود بالتشتت وبالأخص مقياسه المسمى الانحراف
 المعيارى . قارن السلسلتين الآتيتين من حيث استقرارهما واذكر بالإيجاز
 أى فوارق تلاحظها .

متوسط درجة حرارة الهواء فى جرينتش

(١) للسنين ١٨٧٦ — ١٨٨٥ و (ب) للسنين ١٨٩٦ — ١٩٠٥ .

(١)		(ب)	
السنة	° ف	السنة	° ف
١٨٨٦	٥٠,١	١٨٩٦	٥٠,٢
١٨٨٧	٤٩,٤	١٨٩٧	٥٠,٣
١٨٨٨	٤٩,٦	١٨٩٨	٥١,٣
١٨٨٩	٤٦,٢	١٨٩٩	٥٠,٦
١٨٩٠	٤٩,٤	١٩٠٠	٥٠,٤
١٨٩١	٤٨,٧	١٩٠١	٤٩,٢
١٨٩٢	٤٩,٧	١٩٠٢	٤٩,٢
١٨٩٣	٤٩,٤	١٩٠٣	٥٠,١
١٨٩٤	٥٠,٧	١٩٠٤	٤٩,٨
١٨٩٥	٤٨,٦	١٩٠٥	٤٤,٩

٢٤ . الأرقام الأسبوعية للعاطلين خلال ربع السنة المنتهى ٢١ فبراير
 ١٩٢٧ والأرقام المناظرة للفترة المماثلة المنتهى ٢٢ فبراير ١٩٢٦ هى كما يأتى
 (بالآلاف) : للربع المنتهى فبراير ١٩٢٧ : ١٤٨٠ ، ١٥٢٠ ، ١٤٢٠ ، ١٣٢٠ ،
 ١٣٦٠ ، ١٤٨٠ ، ١٤٤٠ ، ١٣٨٠ ، ١٣٥٠ ، ١٣٤٠ ، ١٣١٠ ، ١٢٧٠ ، ١١٨٠ ؛
 للربع المنتهى فبراير ١٩٢٦ : ١١٧٠ ، ١١٦٠ ، ١١٣٠ ، ١١٠٠ ، ١١٨٠ ،
 ١٢٥٠ ، ١٢٢٠ ، ١٢١٠ ، ١٢٠٠ ، ١١٨٠ ، ١١٦٠ ، ١١٤٠ ، ١١٣٠ .
 أوجد معاملى التغير للأعداد الأسبوعية للعاطلين للربيعين المنتهين ٢١
 فبراير ١٩٢٧ ، ٢٢ فبراير ١٩٢٦ .

٢٥ . اشرح معنى وفائدة معامل التغير . احسب معامل التغير للجدول ١
(ص ١٢٢) .

٢٦ . احسب مع تصحيحات شپرد القيمة المتوسطة والانحراف المعياري لدرجات الحرارة المسجلة في الجدول الآتي وهي أعلى درجات الحرارة في نيويورك لكل يوم من يوليو في السنين ١٩١١ - ٢٠ (قيم مركزية) :

درجة الحرارة	عدد الأيام
٩٧	٤
٩٤	١٣
٩١	١١
٨٨	٣١
٨٥	٤٥
٨٢	٥١
٧٩	٦٦
٧٦	٤٥
٧٣	٢٦
٧٠	١١
٦٧	٥
٦٤	٢
	المجموع ٣١٠

٢٧ . اكتب مذكرات قصيرة عن كل مما يأتي : (ا) الأوساط الحسابية والهندسية ، (ب) مقاييس التشتت ، (ج) التدرج اللغارتية (أو المنسوبة) ، (د) معدلات الوفاة المصححة .

٢٨ . في توزيع السؤال ١٠ (صفحة ١٦٦) أوجد بوجه التقريب السمكين اللذين يقع تحتها وفوقهما ١٦ للثة من التكرار . ثم بأخذ نصف فرق هاتين القيمتين بين أن الانحراف المعياري ٠.٠٣٢ بوصة بوجه التقريب .

٢٨ . ثوابت أخرى للشكل — الالتواء الخ .

رأينا عند الكلام عن أشكال المنحنى التكرارى (الباب الثالث — البند ١٤) أن هناك توزيعات متماثلة تميل فيها المشاهدات إلى أحد جانبي النمط قدر ميلها إلى الجانب الآخر وتوزيعات مائلة أو ملتوية تميل فيها المشاهدات إلى أحد الجانبين أكثر من ميلها إلى الجانب الآخر . والآن نبدأ البحث عن مقياس للتعبير عن درجة الالتواء في البيانات .

٢٩ . المعامل النمطى .

يتساوى الوسط الحسابى والنمط فى أى توزيع متماثل ويختلفان متى حاد التوزيع عن التماثل . أيضا كلما زاد التوزيع التواء يزداد الفرق بين الوسط والنمط . هذا يجعل الفرق بين الوسطين مقياسا معقولا للالتواء . وللحصول على المعامل النمطى للالتواء نقسم الفرق المذكور على الانحراف المعيارى . أى

$$(١٩) \quad \text{المعامل النمطى} = \frac{\text{الوسط} - \text{النمط}}{\text{الانحراف المعيارى}}$$

فمثلا فى توزيع العدود (٨٠ بكرة) الوسط هو ٣٧,٢٨ والنمط ٣٧,٢٠ والانحراف المعيارى ١,٠٢ تقريبا . فإذا عوضنا فى (١٩) نجد

$$\begin{aligned} \text{المعامل النمطى} &= \frac{٣٧,٢٠ - ٣٧,٢٨}{١,٠٢} = \frac{-٠,٠٨}{١,٠٢} \\ &= -٠,٠٨ \end{aligned}$$

والالتواء فى هذه الحالة موجب لأن الوسط أكبر من النمط . لكنه صغير إلى حد يثير الشك ولذا لا نستطيع التعويل عليه .

تمرين . استخدم العلاقة التقريبية بين الوسط والوسيط والنمط فى توزيع قريب من التماثل لإيجاد النمط والالتواء لتوزيع فيه الوسط هو ٧,٥٦ والوسيط ٦,٣٩ والانحراف المعيارى ٤,٣٧ .

٣٠. المعامل الربيعي .

يتوقف هذا المعامل كسلفه على فكرة بسيطة . ففي التوزيع المتماثل أيا كان يقع الربيعان الأدنى والأعلى على بعدين متساويين من الوسيط وهذا لا يحدث إلا مع التوزيع المتماثل . فإذا مال التوزيع والتوى يميل الوسيط نحو الربيع الأدنى أو نحو الربيع الأعلى وكلما زاد التوزيع التواء يزداد ميل الوسيط نحو أحد الربيعين . هذا يجعل الفرق بين البعدين — بعد الوسيط عن الربيع الأدنى وبعده عن الربيع الأعلى — أساسا لا بأس به لمقياس معقول للتواء . ويحول هذا المقياس إلى معامل بقسمته على الانحراف الربيعي والنتيجة هي المعامل الربيعي للتواء . أي

(٢٠) المعامل الربيعي

$$= \frac{(\text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى})}{\text{الانحراف الربيعي}}$$

فمثلا الوسيط في المثال السابق هو ٣٧,٢٨٣ والربيع الأدنى ٣٦,٥٦٥ والربيع الأعلى ٣٨,٠٢٧ والانحراف الربيعي ٠,٧٣١ إذن

$$\begin{aligned} \text{الربيع الأعلى} - \text{الوسيط} &= ٣٨,٠٢٧ - ٣٧,٢٨٣ = ٠,٧٤٤ \\ \text{الوسيط} - \text{الربيع الأدنى} &= ٣٧,٢٨٣ - ٣٦,٥٦٥ = ٠,٧١٨ \\ \text{الفرق} &= ٠,٠٢٦ \end{aligned}$$

وبالتعويض في (٢٠) نحصل على

$$\text{المعامل الربيعي} = \frac{٠,٠٢٦}{٠,٧٣١} = ٠,٠٤$$

هذه النتيجة تشير إلى وجود التواء موجب بسيط في بيانات العدود لكنها نتيجة لا يمكن التعويل عليها كثيرا لأن المعامل صغير للغاية .

والمعامل الربيعي للتواء كالوسيط والربيعين يمكن الحصول عليه هندسيا من المنحنى المجموع .

٣١. المعامل العزمى .

يستخدم العزم الثالث للتوزيع حول الوسط للتعبير عن درجة الالتواء . هذا العزم يكون صفرا في كل توزيع متماثل لأن الحدود الموجبة تمحو الحدود السالبة في كل حالة من هذا القليل . لكنه لا يكون صفرا في أى توزيع غير متماثل . وكلما زاد التوزيع التواء وبعدا عن التماثل تزيد القيمة العددية المطلقة للعزم الثالث . هذا يجعل العزم الثالث للتوزيع حول وسطه الحسابى مقياسا معقولا للالتواء . ويحول المقياس إلى معامل بقسمته على مكعب الانحراف المعيارى وتسمى النتيجة المعامل العزمى للالتواء . فإذا كتبنا لا لهذا المعامل ، غم للعزم الثالث حول الوسط يكون

$$\gamma_3 = \frac{\gamma_3}{\sigma^3} \quad (21)$$

هذا المعامل لا يتأثر بتدريج المتغير أو بموضع التوزيع على محور المتغير . إذن هو لا يقيس خصائص للتدريج أو الموضع ولكنه يقيس شيئا آخر وهذا الشيء هو الالتواء بعينه . والمعامل يكون موجبا إذا وقع الذيل الطويل للتوزيع فى الجهة الموجبة لأن مجموع مكعبات الانحرافات الموجبة يكون فى هذه الحالة أرجح من مجموع مكعبات الانحرافات السالبة . ويكون سالبا إذا وقع الذيل الطويل فى الجهة السالبة .

فمثلا فى توزيع العدود والثمانين بكرة (البند ٢٥)

$$\gamma_3 = 4,111 \quad \gamma_3 = -1,796$$

وبالتعويض فى (٢١) نجد أن

$$\gamma_3 = \frac{-1,796}{\sqrt[3]{4,111}} = -0,216$$

هذه النتيجة تناقض النتيجة السابقتين وترينا أن التوزيع المذكور سالب الالتواء وليس موجبه كما يبدو من قيمة المعامل النمطى أو الربيعى للالتواء .

٣٢ . الانبعاج .

إذا تأملنا أشكالا كثيرة لمنحنيات تكرارية من ذوات السنم نرى أن بعضها أكثر انبعاجا عند السنم من البعض الآخر . وللحصول على مقياس مناسب يعبر عن درجة الانبعاج في المنحنى التكرارى للبيانات نستخدم العزم الرابع للتوزيع حول الوسط ونقسمه على القوة الرابعة للانحراف المعيارى . هذا يعطينا

$$\text{لا} = \frac{\text{غ}^4}{\text{ع}^4} \quad (٣٢)$$

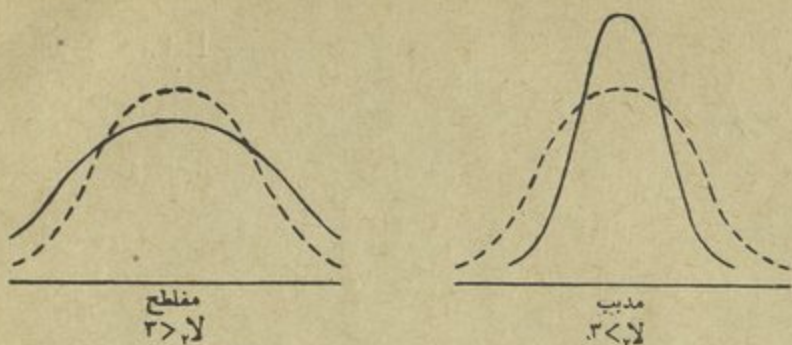
يسمى لا_٤ المعامل العزمى للانبعاج وواضح أنه كالمعامل العزمى للالتواء لا يتوقف على التدرج أو الموضع وبالتالي لا يقيس خصائص ذات علاقة بالتدرج أو بالموضع ولكنه يقيس الشيء الذى اخترنا له اسم الانبعاج . هذا المعامل لا_٤ يزيد مع ارتفاع المنحنى عند السنم وواضح أن لهذا الارتفاع علاقة وثيقة بانبعاج المنحنى عند هذه النقطة . فالمنحنى يكون قصيرا ومفلطحا عند السنم إذا كان ارتفاعه هناك صغيرا ويكون طويلا ومدببا إذا كان الارتفاع كبيرا . إذن لا_٤ يحقق الغرض المطلوب منه كمقياس لدرجة الانبعاج في التوزيع .

وفي المنحنى التكرارى الأساسى يكون

$$\text{غ}^4 = ٣ \text{ ع}^4 , \quad \text{لا} = ٣ .$$

إذن لو اعتبرنا انبعاج منحنى التكرار الأساسى عند السنم عاديا فإننا نصف أى توزيع بأنه متكافئ . إذا كان لا_٤ = ٣ . وبأنه مفلطح إذا كان لا_٤ > ٣ لأن المنحنى يكون في هذه الحالة أكثر انبعاجا من المنحنى الأساسى . وأخيرا نصف التوزيع بأنه مدبب إذا كان لا_٤ < ٣ .

١ لم أر قط برهانا لهذه النظرية (أى لا_٤ > ٣ للمنحنى المفلطح و لا_٤ < ٣ للمدبب) وليس لدى فى الوقت الحاضر أدنى فكرة نحو برهان مناسب لها .



فمثلا في توزيع العدود والثمانين بكرة (البند ٢٥)

$$٠.٢,٧٥٢ = \frac{٤٦,٥١٣}{٢٤,١١١} = ٢$$

هذه القيمة أصغر من ٣. إذن التوزيع المذكور من النوع المفطح.

٣٣. أمثلة.

(١) احسب الخاصي لا من البيانات الآتية عن عدد العضلات في ديدان الأنقليسات الأوروبية :

عدد الديدان	عدد العضلات
١	١٥٤
٧	١٥٥
٢١	١٥٦
٣٨	١٥٧
٥٢	١٥٨
٤٥	١٥٩
٢٢	١٦٠
١٢	١٦١
٢	١٦٢
١	١٦٣
المجموع ٢٠١	

س	ك	ش	ك ش	ك ش ^٢	ك ش ^٣
١٥٤	١	٤—	٤(—)	١٦	٦٤(—)
١٥٥	٧	٣—	٢١	٦٣	١٨٩
١٥٦	٢١	٢—	٤٢	٨٤	١٦٨
١٥٧	٣٨	١—	٣٨	٣٨	٣٨
١٥٨	٥٢	٠	١٠٥ —		٤٥٩ —
١٥٩	٤٥	١	٤٥	٤٥	٤٥
١٦٠	٢٢	٢	٤٤	٨٨	١٧٦
١٦١	١٢	٣	٣٦	١٠٨	٣٢٤
١٦٢	٢	٤	٨	٣٢	١٢٨
١٦٣	١	٥	٥	٢٥	١٢٥
	<u>٢٠١</u>		<u>١٣٨</u>	<u>٤٩٩</u>	<u>٧٩٨</u>
			<u>٣٣</u>		<u>٣٣٩</u>

$$\therefore , 164179 = \frac{33}{2.1} = 1.6$$

$$\therefore , 1,616,067 = \frac{339}{2.1} = 1.6 \quad \therefore , 2,482,087 = \frac{499}{2.1} = 2.4$$

وبالتعويض في (١٨) نجد

$$\therefore , 4727 = 1.6 \quad \therefore , 2,4006 = 2.4$$

أيضا

$$\therefore , 0.833 = \frac{1}{1.2} = \text{تصحیح شپرد} \quad , 1 = \text{اتساع الفتة}$$

إذن

$$\therefore , 2,2722 = \text{غ المصحح}$$

$$\therefore , 129 = \frac{0.4727}{2/2.2722} = 1.2$$

(٢) لدينا أوزان قطيع من ٣٢٢ أرنباً بالهكتوجرامات . احسب
لا_١ ولا_٢ لهذا القطيع .

الوزن : ١٠-١٤ ١٥-١٩ ٢٠-٢٤ ٢٥-٢٩ ٣٠-٣٤ ٣٥-٣٩ ٤٠-٤٤

التكرار : ٢٨ ٩٥ ١٣٠ ٦٣ ٥ ٠ ١

سم الوزن س والتكرار ك .

س	ك	ش	ك ش	ك ش ^٢	ك ش ^٣	ك ش ^٤
١٠-١٤	٢٨	٢-	٥٦(-)	١١٢	٢٢٤(-)	٤٤٨
١٩-٢٥	٩٥	١-	٩٥	٩٥	٩٥	٩٥
٢٤-٢٥	١٣٠	٠	١٥١ -		٣١٩ -	
٢٩-٢٥	٦٣	١	٦٣	٦٣	٦٣	٦٣
٣٤-٣٠	٥	٢	١٠	٢٠	٤٠	٨٠
٣٩-٣٥	٠	٣	٠	٠	٠	٠
٤٤-٤٠	١	٤	٤	١٦	٦٤	٢٥٦
	٣٢٢		٧٧	٣٠٦	١٦٧	٩٤٢
			٧٤ -		١٥٢ -	

$$٠,٩٥٠٣١١ = \frac{٣٠٦}{٣٢٢} = {}^٢\text{ع} \quad ٠,٢٢٩٨١٤ = \frac{٧٤-}{٣٢٢} = {}^١\text{ع}$$

$$٠,٢٩٢٥٤٦٦ = \frac{٩٤٢}{٣٢٢} = {}^٤\text{ع} \quad ٠,٤٧٢٠٥٠ = \frac{١٥٢-}{٣٢٢} = {}^٣\text{ع}$$

هذا يعطى

$$٠,٢٧٨٤٣ = {}^٤\text{غ} \quad ٠,١٥٨٩ = {}^٣\text{غ} \quad ٠,٨٩٧٥ = {}^٢\text{غ}$$

إذن

$$٠,٢,٤٥٧ = \frac{٢,٧٨٤٣}{٠,٨٩٧٥} = {}^٢\text{لا} \quad ٠,١٨٧ = \frac{٠,١٥٨٩}{٢/٠,٨٩٧٥} = {}^١\text{لا}$$

(٣) احسب قيمة المعامل العزى للانبعاث في حالة التوزيع التكرارى المستطيل إذا كان التكرار الثابت ١ ومراكز الفئات $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ، $\pm$ ن حيث ن عدد صحيح موجب .

ماذا يحدث إذا كبر عدد الفئات إلى غير نهاية؟

لدينا

$$\text{مجم س} = 0,$$

$$\text{مجم س}^2 = \frac{1}{n} \sum_{r=-n}^n r^2 = \frac{1}{n} (1+2+\dots+n^2) = \frac{1}{n} (1+n^2)(1+n),$$

$$\text{مجم س}^4 = \frac{1}{n} \sum_{r=-n}^n r^4 = \frac{1}{n} (1+2^4+\dots+n^4) = \frac{1}{n} (1-2n^3+3n^4)(1+n^2)(1+n).$$

أيضا التكرار الكلى يساوى $1+n^2$ والوسط $\bar{S} = 0$ لأن $\text{مجم س} = 0$. إذن

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} (1+n^2),$$

$$\sigma^4 = \frac{1}{n} (1-2n^3+3n^4)(1+n^2)(1+n).$$

بتطبيق (٢٢) ينتج أن

$$\frac{(1-2n^3+3n^4)3}{(1+n^2)n^5} = \frac{3}{n^2},$$

وهذا هو المعامل العزى لانبعاث توزيع مستطيل .

أيضا

$$\frac{3}{n^2} - \frac{(1-2n^3+3n^4)3}{(1+n^2)n^5} = 3 - \frac{3}{n^2}$$

$$= \frac{(1+2n^2+3n^4)3}{(1+n^2)n^5} > 0$$

لجميع قيم ن . إذن التوزيع المستطيل مفلطح لجميع قيم ن .

وأخيرا

$$1,8 = \frac{9}{5} = \frac{3 \times 3}{1 \times 5} \leftarrow \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{5} + 3\right) 3}{\left(\frac{1}{5} + 1\right) 5} = 2,8$$

عندما يؤول n إلى ∞ . فإذا لاحظنا أن التوزيع المستطيل هو الحد الفاصل بين التوزيعات ذات السهم والتوزيعات الجوفاء نصل إلى النتيجة غير المنتظرة أن كل توزيع فيه $2,8 > 1,8$ يكون أجوف.

أسئلة

١. ما الذى يفهم بالالتواء فى توزيع وما هى التوزيعات التى تعرفها والتى فيها التواء واضح. ما هى الطرائق المستخدمة للتعبير عن درجة الالتواء؟
٢. اشرح المقصود بالالتواء وكيف يمكن قياسه. ما العلاقة التقريبية بين الوسط والوسيط والنمط فى توزيع لا يبعد كثيرا عن التماثل؟ استخدم هذه العلاقة لإيجاد النمط والالتواء لتوزيع فيه الوسط هو ٣,٩٧٣ والوسيط ٤ والانحراف المعياري ١,٤١.
٣. فى الجدول الآتى للأجور يمثل س الأجور اليومية بالشللنات وك عدد من يتسلمون الأجر: —

س	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠
ك	٣١٦	١٤٧٠	١٢٥٨	٩٤٠	٥٠٦	١٩٨	٢١٤	٨٦	٤	٨

احسب الانحراف المعياري والالتواء.

٤. كيف يقاس التواء مجموعة من البيانات؟

أوجد مقياس التواء أعداد مرات ظهور مرض القدم والفم فى بريطانيا المعطاة فى الجدول الآتى.

١٩٢٣	سبتمبر	أكتوبر	نوفمبر	ديسمبر	١٩٢٤
أغسطس	٥٩	٨٨	٥٢١	١١٤٨	٦٧٦
١٩٢٤	مارس	أبريل	مايو	يونيو	يوليو
٢٩٧	١٩١	٨٣	٣١	٤٩	٩٢

- ٥ . اشرح المسميات الانحراف الربيعي والانحراف المتوسط والالتواء .
 موضحاً بالإشارة إلى إحصائيات السؤال ٥ (ص ١١٩) .
- ٦ . عرف ووضح كلمة الالتواء كما تستخدم مع توزيع تكرارى .
 أوجد الربيعين الأعلى والأدنى لأرقام الجدول ١ (ص ١٢٢) وقدر التواء البيانات .
- ٧ . اشرح التشتت حول الوسط . احسب الانحراف الربيعي لتوزيع الجدول ٣ (ص ١٤٩) وقس التواءه .
- ٨ . للجدول الآتى صلة بأقيسة أجريت على ١٠٧٨ زوجاً من الآباء والأبناء الرشداً :

طول الأب (بوصة)							
٥٨,٥ -	٦١,٥ -	٦٤,٥ -	٦٧,٥ -	٧٠,٥ -	٧٣,٥ -		
٦١,٥	٦٤,٥	٦٧,٥	٧٠,٥	٧٣,٥	٧٦,٥		
٠	١	٢	٠	٠	٠	٦١,٥ - ٥٨,٥	(مجموع) طول الأبن
٤	١٩	٣٣	٥	٢	٠	٦٤,٥ - ٦١,٥	
٨	٥٤	١٤٨	٨١	٨	٠	٦٧,٥ - ٦٤,٥	
٣	٣٤	١٤٩	٢٠٢	٦٠	٤	٧٠,٥ - ٦٧,٥	
٠	٣	٤٠	١٠٤	٦٢	٣	٧٣,٥ - ٧٠,٥	
٠	١	٣	١٥	٢١	٢	٧٦,٥ - ٧٣,٥	
٠	٠	٠	٤	٣	٠	٧٩,٥ - ٧٦,٥	

احسب للعمود الخاص الذى فيه يقع طول الأب فى المدى ٦١,٥ - ٦٤,٥ بوصة (أ) الطول الوسيط للابن ، (ب) ريعى توزيع طول الابن ، (ج) مقياسا للتشتت ، ثم (د) مقياسا لالتواء ذلك التوزيع .
 اجر عمليات مشابهة وعلى حدة لكل من الأعمدة الثلاثة المعروفة بوقوع طول الأب فى ٦٤,٥ - ٦٧,٥ ، ٦٧,٥ - ٧٠,٥ ، و ٧٠,٥ - ٧٣,٥ بوصة على الولا .
 ناقش النتائج .

٩ . كان توزيع الباشلات الموجودة فى ١٥٠ خلية كما يلى :

عدد باشلات الخلية	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	المجموع
عدد الخلايا	٣	١٥	٢٢	٢٦	٢٣	٢٥	١٧	٥	٩	٥	١٥٠

احسب الخاصين لا ولا .

١٠ . احسب الخاصين لا ولا للأقيسة الآتية لسمك ١٧٦ بنسا من السنة ١٩٢١ بالبوصات .

عدد البنات	السمك
٦	٠,٠٦٠ - ٠,٠٦١
١٣	٠,٠٦٢ - ٠,٠٦٣
٢٧	٠,٠٦٤ - ٠,٠٦٥
٥١	٠,٠٦٦ - ٠,٠٦٧
٤٠	٠,٠٦٨ - ٠,٠٦٩
٢٣	٠,٠٧٠ - ٠,٠٧١
١٠	٠,٠٧٢ - ٠,٠٧٣
٤	٠,٠٧٤ - ٠,٠٧٥
٢	٠,٠٧٦ - ٠,٠٧٧
المجموع ١٧٦	

الباب الخامس

الاحتمال

١ . الحوادث العامة .

إذا أردت مفتاح الأنوار الكهربائية في الحجرة التي أحضر فيها تطفأ الأنوار وهذا يعد حادثاً . وإذا فتحت يدي عن هذه القطعة من الطباشير التي أمسك بها تسقط القطعة . وهذا أيضاً حادث . والحادث في كلا المثالين ينتمي إلى ما يمكن أن يسمى طائفة الحوادث المحققة . وهناك الحوادث الارتجالية — حوادث لا حيلة لنا فيها وكما تجيء تكون . هذه الأشياء تعد بمثابة أفكار رئيسية في الإحصاء .

إن أبسط شيء يمكن تصويره عن الحادث هو أنه إما أن يحدث بالفعل أو لا يحدث . يلي هذا أن الحادث يكرر نفسه . ولتتكم قليلاً عن فكرة التكرار . إذا كرر الإنسان حوادث معينة فإنه يتوقع نتائج معينة — إذا أسقطت قطعاً من الطباشير فإنها تسقط دائماً . وإذا قذفت قرشاً إلى عل وتركته يسقط على راحة يدي فإنه يسقط رأساً أو ذنباً . هب الآن أتت أجريت هذه التجربة الأخيرة ن مرة وأنتى كنت أرقب سقوط الرأس كل مرة فوجدت أن هذا الحادث يتحقق في م من هذه المرات . في هذا المثال يسمى العدد م/ن التكرار . ولا يفوتنا أن نلاحظ أننا نحصل على الرأس نصف المرات . وقد نستعير عن القرش في هذه التجربة بزهره النرد ذات الأوجه الستة نلقى بها على نضد ونزقظ ظهور الوجه السادس فنجد أننا نحصل على ستة سدس المرات . وسواء قذفنا قرشاً أو ألقينا زهرة فالشيء المشاهد هو أن هذه الكمية أو هذا التكرار يكون في حالة استقرار . إنه لا يلبث أن يستقر عند النصف في حالة القرش أو عند السدس في حالة الزهرة .

على هذا الأساس نرى أن تكرارات حادث ارتجالي $د$ في فئات تخضع جميعا لظروف تجريبية متشابهة $ظ$ ويألف كل منها من عدد من التجارب هي القيم التجريبية لثابت طبيعي يحدده الحادث $د$ والظروف $ظ$. هذا الثابت الطبيعي هو الذي يساوى $\frac{1}{p}$ في تجربة القرش أو $\frac{1}{p}$ في تجربة الزهرة.

٢. ألحنا (الباب الثالث صفحة ٩٠) إلى أنه قد وجد بالتجربة أنه كلما زيد حجم العينة يؤول التوزيع التكرارى إلى شكل مستقر وأنه (في حالة المتغير المتصل) إذا جعلت الفئة متناهية في الصغر يؤول المستو جرام إلى منحني ممد يدعى المنحنى التكرارى.

٣. (١) الاحتمال الإحصائى (النظرية التكرارية).

إذا كان $م$ عدد المشاهدات الواقعة بين قيمتين ثابتتين $ا$ ، $ب$ وكان $ن$ العدد الكلى للمشاهدات في العينة فإننا نسلم بأن العدد (التكرار) $م/ن$ يؤول إلى نهاية $ح$ إذا آل $ن$ إلى ما لا نهاية بمعنى أنه إذا جعل $ن$ كبيرا تؤول نسبة قيم $م/ن$ الواقعة خارج المدى $ح \pm \epsilon$ إلى الصفر. سنسلم إذن بهذا ونأخذه على أنه حقيقة تجريبية أساسية. عندئذ تسمى النهاية $ح$ الاحتمال الإحصائى للحادث ٢.

تعريف الاحتمال الإحصائى.

الاحتمال الإحصائى $ح$ لوقوع مشاهدة $س$ بين قيمتين $ا$ ، $ب$ هو النسبة النهائية للعدد $م$ من المشاهدات الواقعة بين هذين الحدين إلى العدد الكلى $ن$ في العينة عندما تكبر هذه إلى غير نهاية. أى

$$(١) \quad ح(ا \leq س \leq ب) = \lim_{ن \rightarrow \infty} \frac{م}{ن}$$

١ هذا يسرى على الحوادث المحققة كإسقاط قطعة الطباشير ولكن هذا ناهى.

٢ انظر كتاب فون ميزس — الاحتمال والإحصاء والمق (١٩٢٨).

بما أن $0 \leq m \leq n$ لأن m لا يمكن أن يكون أكبر من n إذن

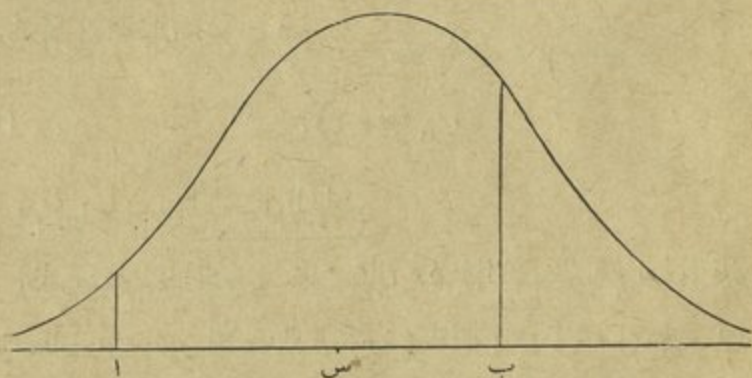
$$1 \geq \frac{m}{n} \geq 0$$

وفي النهاية يكون

$$(2) \quad 0 \leq h \leq 1$$

وقد تكون المساحة الكلية تحت المنحنى التكرارى ١ فتكون المساحة

بين ١، ب هي الاحتمال الإحصائى ح.



٤. (٢) الاحتمال الرياضى (من السبب إلى المسبب).

إذا قذفنا قرشا عدة مرات وسجلنا عدد الرؤوس نجد عن طريق التجربة أن نسبة الرؤوس تؤول إلى $\frac{1}{2}$. وبالمثل إذا ألقينا زهرة عدة مرات نجد أن نسبة الستات تؤول إلى $\frac{1}{2}$. هذان العددان $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{2}$ هما إذن حسب تعريفنا الاحتمالان الإحصائيان للحصول على رأس أو ستة على الولا.

ومن الطبيعى أن تنسب هاتين النسبتين النهائييتين إلى خاصتى التماثل فى القرش والزهرة إذ بالتماثل ليس يوجد سبب يدعو إلى توقع ظهور رؤوس أكثر من أذنان (أو ستات أكثر من خمسات أو أربعات إلخ). ونقول إن الفرص متكافئة أمام الرؤوس والأذنان للظهور. لكن هذا لا يثبت أنها ستظهر فعلا على قدم المساواة.

تعريف الاحتمال الرياضى .

هـب أن

(١) حالة واحدة من حالات عددها k متكاملة ومتنافية فيما بينها تنشأ

فى تجربة معطاة ،

(٢) فرص الحدوث متكافئة أمام الحالات كلها (من أسباب تمت إلى

التماثل إلخ) ،

(٣) r من هذه الحالات 'ملائم' لحادث د .

عندئذ يكون احتمال حدوث د

$$(٣) \quad H = \frac{r}{k} \quad (٥)$$

هذا يعرف ما يسمى الاحتمال الرياضى .

إذا رضينا بهذا التعريف للاحتمال يمكننا إثبات نظرية برنولى (قانون

المتوسطات أو قانون الأعداد الكبيرة) القائلة إنه إذا حصل على m نجاحا

فى n تجربة مستقلة فإنه متى زاد n يؤول احتمال وقوع m/n خارج المدى

$\pm \epsilon$ إلى الصفر^١ .

مثال ١ . إذا ألقيت الزهرة فما احتمال ظهور ٥ أو ٦ ؟

هنا

$$k = ٦$$

وفرص الظهور متكافئة أمام الأوجه الستة . والحالات الست متكاملة لأنها

تستنفد جميع الحالات (فمثلا ظهور ٧ أمر غير ممكن) ومتنافية فيما بينها إذ

لا يستطيع الظهور فى وقت واحد إلا وجه واحد .

١ جيمز برنولى — آرز كنيجكتاندى (١٧١٣) . انظر كتاب إيشكن — الرياضىة

الإحصائية وكتاب وذربرن — منهاج أول فى الإحصاء الرياضى .

والحدث د في هذه المسألة هو ظهور ه أو ٦ . أيضا ه و ٦ هما الحالتان
الملائمتان للحدث . إذن

$$2 = r$$

وبتطبيق التعريف ينتج أن

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = c$$

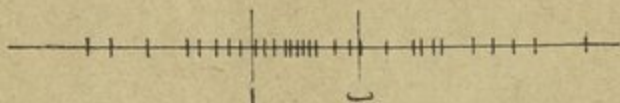
مثال ٢ . إذا دورت ثلاثة قروش فما احتمال (فرصة) ظهور رأسين ؟
الحالات الممكنة (وكلها متكافئة من حيث الفرصة) هي : —

		ر	ر	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	ر
		ر	ر	ذ
		ر	ذ	ذ
		ر	ر	ر
		ر	ذ	

على هذا الأساس يمكن بناء نظرية للاحتمال متماسكة الأطراف لا تناقض فيها غير أنه يبدو من الصعب جعلها تنسب إلى تكرارات فعلية. لكن هذا لا ينبغي أن يقلل من شأن النظرية الموضوعية لأن الإحصائيين أنفسهم لا يستخدمون هذه التكرارات في أعمالهم العادية عند تعريفهم للاحتمال ويستخدمون في الواقع فكرة درجة الاعتقاد المعقول^١.

٦. الصلة بين الاحتمالين الإحصائي والرياضي.

إذا زيد حجم عينة يؤول شكل التوزيع التكراري إلى شكل مستقر. يدعونا هذا كما أوضح فشر إلى إدخال فكرة مجتمع خيالي شامل غير محدود يتيح لأي فرد فيه فرصا متكافئة للشول في العينة. عندئذ يكون احتمال سحب فرد ذي صفة معينة (كصفة الوقوع بين a, b) نسبة عدد الأفراد في المجتمع غير المحدود من لهم تلك الصفة إلى العدد الكلي. هذه النسبة H هي الاحتمال بعينه.



وفكرة المجتمع الخيالي الشامل تمكننا من تطبيق قواعد الاحتمال الرياضي على البيانات الإحصائية.

٧. تعرف العينة الارتجالية بأنها عينة لأي فرد فيها من المجتمع الخيالي غير المحدود فرصة متكافئة للظهور بصرف النظر عن ظهور بقية الأفراد فيها. والآن يمكن إثبات أنه في عينة ارتجالية ذات n فردا إذا كان للعدد m الصفة المطلوبة (ولتكن صفة الوقوع بين a, b) يؤول احتمال وقوع m/n خارج المدى $\pm e$ إلى الصفر إذ يؤول n إلى ∞ (نظرية برنولي). هذا يربط ما بين النهاية المشاهدة وبين الاحتمال الرياضي.

٨ . تدرج الاحتمال .

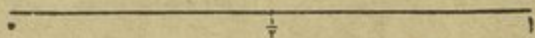
واضح (من أى واحد للتعريفات الثلاثة للاحتمال) أن

$$\left. \begin{array}{l} 0 \text{ إذا كان د مستحيلا ،} \\ \frac{1}{4} \text{ إذا تكافأت الفرستان أمام د للحدوث ولغيره ،} \\ 1 \text{ إذا كان د أكيدا .} \end{array} \right\} = \text{ح}$$

ليس العكس صحيحا ولكننا لن ندخل فى هذا بل نكتفى بمثال

بسيط : -

إذا تكافأت الفرص أمام متغير متصل لأخذ أية قيمة بين الصفر والواحد فاحتمال أخذه القيمة $\frac{1}{4}$ هو . رغم أن القيمة $\frac{1}{4}$ ليست مستحيلا .



٩ . قواعد الاحتمال الرياضى .

١ . إذا كان ح احتمال حدوث حادث فاحتمال عدم حدوثه هو

$$\text{خ} = 1 - \text{ح} . \text{أى}$$

$$\text{ح} + \text{خ} = 1 \quad (٤)$$

أى إما وجود للحادث أو لا وجود له .

البرهان (على أساس النظرية التكرارية) .

$$\text{ح} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} , \quad \text{خ} = \frac{\text{ن} - \text{م}}{\text{ن}}$$

وإذن بالجمع ينتج أن

$$\text{ح} + \text{خ} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}} = 1 .$$

تمرين . إذا أقيمت الزهرة فما احتمال ظهور رقم أصغر من ٦ ؟
هذه القاعدة حالة خاصة للقاعدة الآتية .

٢ . يقال لحادثين د_١ ، د_٢ إنهما متنافيان معا إذا لم يكن ممكنا حدوثهما في وقت معا . فمثلا أنت لا تستطيع الحصول على ٦ و ٤ من زهرة في وقت معا . أما من زهرتين فالحدثان ٦ و ٤ ليسا متنافيين معا إذ عندئذ تستطيع الحصول على ستة وعلى أربعة . هذه الحوادث المتنافية فيما بينها تسمى أولية . إذا كان د_١ ، د_٢ حادثين متنافيين معا فاحتمال حدوث إما د_١ أو د_٢ هو

$$(٥) \quad \text{ح} (د_١ + د_٢) = \text{ح} (د_١) + \text{ح} (د_٢)$$

حيث نقصد بالوضع 'د_١ + د_٢' ، 'د_١ أو د_٢' .

البرهان . هب أن د_١ يحدث م مرة في عينة ارتجالية (أو أن م هو عدد الحالات الملائمة للحدث د_١) وأن د_٢ يحدث م مرة في العينة . إذن إما د_١ أو د_٢ يحدث م + م مرة وإذن

$$\text{ح} (د_١ + د_٢) = \frac{٢م}{ن} = \frac{١م}{ن} + \frac{١م}{ن} = \text{ح} (د_١) + \text{ح} (د_٢)$$

$$\text{ح} (د_١) + \text{ح} (د_٢) =$$

واضح أن هذا لا يكون صحيحا إذا لم يتناف الحداث معا .

مثال . ما احتمال إلقاء ه أو ٦ بزهرة ؟

هنا د_١ هو إلقاء ه واحتمال هذا هو

$$\text{ح} (د_١) = \frac{١}{٦}$$

أيضا د_٢ هو إلقاء ٦ واحتمال هذا هو

$$\text{ح} (د_٢) = \frac{١}{٦}$$

والحدثان متنافيان معا . إذن بتطبيق القاعدة ينتج أن احتمال إلقاء ه أو ٦ هو

$$\text{ح} (د_١ + د_٢) = \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

مثال ١ . ما احتمال إلقاء ستين من زهرتين ؟

هنا د هو إلقاء ٦ من إحدى الزهرتين واحتمال هذا هو

$$ح(١, د) = \frac{1}{6}$$

أيضا د هو إلقاء ٦ من الزهرة الأخرى واحتمال هذا هو

$$ح(د, ١) = \frac{1}{6}$$

والحدثان مستقلان كلاهما عن الآخر . إذن الاحتمال المطلوب هو

$$ح(د, ١) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(حقق هذا بعد الحالات .)

مثال ٢ . استخدام القاعدتين معا (قاعدة الجمع والضرب) .

ما احتمال إلقاء خمسة وستة زهرتين ؟

هذا الاحتمال يساوى احتمال إلقاء ٥ بالزهرة الأولى و ٦ بالزهرة الثانية

زائدا احتمال إلقاء ٦ بالأولى و ٥ بالثانية . أى

$$\frac{1}{18} = \frac{2}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$$

تمرينان .

١ . حل مسألة القروش الثلاثة (مثال ٢ ، البند ٤) على هذا النحو .

أيضا أثبت أنه إذا قذفت ٥ قروش تكون فرصة ظهور ٣ رؤوس $\frac{5}{16}$.

(ليس العد ملائما لهذه الحالة .)

٢ . إذا ألقيت الزهرة مرتين فما هو احتمال الحصول على ١ فى المرة

الأولى و ٦ فى المرة الثانية ؟

وقاعدة الضرب الأخيرة حالة خاصة للقاعدة العامة الآتية .

٤ . إذا كان D_1 ، D_2 حادثين مستقلين أو غير مستقلين (كما لو كان حدوث أحدهما يؤثر على حدوث الآخر) فاحتمال حدوث الاثنين معا في الترتيب D_1 ثم D_2 هو

$$(٨) \quad H(D_1, D_2) = H(D_1) \cdot H(D_2 / D_1)$$

أى احتمال حدوث D_1 فى احتمال حدوث D_2 بعد حدوث D_1 فعلا .
وقس على ذلك مع أى عدد من الحوادث غير المستقلة .

مثال . يحتوى وعاء على ٥ كرات بيضاء و ٣ حمراء . ما احتمال سحب كرة بيضاء أولا ثم كرة حمراء بعد ذلك ؟
هنا D_1 هو سحب كرة بيضاء أولا واحتمال هذا هو

$$H(D_1) = \frac{5}{8}$$

أيضا D_2 هو سحب كرة حمراء بعد الكرة البيضاء واحتمال هذا هو

$$H(D_2 / D_1) = \frac{3}{7}$$

إذ بعد سحب الكرة البيضاء فى المرة الأولى ينخفض عدد الكرات فى الوعاء من ٨ إلى ٧ . بتطبيق القاعدة ينتج أن احتمال سحب كرة بيضاء فكرة حمراء بعد ذلك هو

$$H(D_1, D_2) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

التحقيق بالعد . عدد كفيات سحب كرتين إحداها بيضاء والأخرى حمراء هو 5×3 أو ١٥ . وعدد كفيات سحب كرتين من الوعاء أيا كانتا هو عدد توافيق ٨ أشياء مختلفة مأخوذة اثنين معا أى

$${}^8C_2 = 28$$

إذن احتمال سحب كرتين إحداهما بيضاء والأخرى حمراء بصرف النظر عن الترتيب هو $\frac{10}{38}$. فإذا اشترط قصر الترتيب على كرة بيضاء يليها كرة حمراء يكون الاحتمال المطلوب نصف هذا أو $\frac{10}{76}$.

تمرين . ابحث عن احتمال سحب قلبين من مجموعة من أوراق اللعب . هل سحب الورقتين قلبين حادثان مستقلان ولماذا ؟

١٠ . التوقع .

هـب أن هناك لاعبين ١ ، ب يلهمان بقرش وأن اللعبة هي قذف القرش في الهواء فإن سقط القرش رأساً يدفع ١ إلى ب ١ جنيهاً وإن سقط ذنباً يدفع ب إلى ٢ جنيين . ما المبلغ الذي يدفعه ١ إلى ب نظير فرصه حتى تكون اللعبة عادلة ؟

احتمال الرأس أو الذنب $\frac{1}{2}$ والمبلغ هو

$$- \frac{1}{2} \times 1 \text{ جنيه} + \frac{1}{2} \times 2 \text{ جنيين} = 0.5 \text{ قرشا} .$$

هذا هو ما يكسبه ١ من ب في المتوسط إذا مارس الاثنان لعبتهما ردحا من الوقت . وتسمى هذه الكمية التوقع ١ .

هـب الآن بوجه الإجمال أن احتمال الكسب ح واحتمال الخسارة خ وأن المبلغ الذي يدفعه ب إلى ١ في الحالة الأولى هو ١ من الجنيهاً والمبلغ الذي يدفعه ١ إلى ب في الحالة الثانية هو ب من الجنيهاً . عندئذ يكون توقع ١ بالجنيهاً ح ١ - خ ب ولكي تكون اللعبة عادلة يشترط أن يكون هذا صفراً . أى

$$ح ١ = خ ب .$$

١ يعرف هذا ما يسمى التوقع الرياضى . وهناك ما يسميه لاپلاس التوقع الأدبى وهو القيمة التى تعود علينا أو المتعة التى تكون نصيبنا من حادث . أما علاقة هذا بالقيمة النقدية بدلالة التوقع الرياضى فقد تكون بعيدة بعض الشيء .

١١ . لعبة سانت پيترزبرغ (دانييل برنولى) .

يلعب ب ١ ، ب طبقا للقواعد الآتية . يقذف ١ قرشا ويستمر في قذفه حتى يقذف الرأس . فإن ظهر الرأس في القذفة الأولى يدفع ١ إلى ب ٢ جنيهين وإن ظهر الرأس الأول عقب القذفة الثانية ٤ جنيهات وعقب الثالثة ٨ جنيهات و... وعقب القذفة النونية ٢٠٢ جنيهات وهلم جرا . ما المبلغ العادل الذى يدفعه ب إلى ١ نظير فرصه ؟

توقع ب الرياضى بالجنيهات هو

$$\dots + 1 + 1 + 1 = \dots + 8 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$\dots \infty =$$

إذن على أساس هذا التحليل ينبغي على ب أن ينقد ١ مبلغا لا نهائيا من المال .
إذ لم نعتبر إلا مبلغا ضخما محدودا وليكن ٢٠٢ (= ١٠٤٨٥٧٦) جنيها فإن ب يخسر إذا ظهر رأس فى أية واحدة من القذفات التسع عشرة الأولى ولكنه يكسب كثيرا إذا ظهر الرأس الأول عقب القذفة العشرين أو ما بعدها . فمثلا إذا لم يظهر الرأس إلا عقب القذفة المئة فإن مكسب ب فى هذه الحالة يعادل كتلة من الذهب أكبر من الشمس ولكن احتمال هذا أصغر من ١٠-٣٠ . وقد تساءل الناس أيجوز لأى إنسان أن يقامر بمثل هذا المبلغ حال علمه علم اليقين أنه سوف يخسر الجزء الأكبر منه مقابل فرصة تكاد لا تذكر لمكسب جسيم ؟ لقد كان حتى لمقامرى القرن الثامن عشر شكوكهم فى هذا . وقد فسر دانييل برنولى اللغز بإدخال فكرة التوقع الأدبى فقال إن قيمة ٢٠٢ جنيها تختلف اختلافا بينا تبعا للمبلغ الذى لدينا لنبدأ به . وقال إن قيمة ضياع هذا المبلغ لأى إنسان لا يملك سواه لا تساوى وتضاد قيمة الفوز بالمبلغ عنه . وأخيرا اقترح قانونا ينسب قيمة المكسب إلى المبلغ الذى يملكه الفائز بالفعل لكننا لن نترث هنا لشرح مغزى هذا القانون الأخير .

١٢. كراپس .

يلقى المتبارى بزهرتين فإن كان مجموع الزهرتين ٧ أو ١١ يكسب ويسمى هذا ناشرل . وإن كان ٢ أو ٣ أو ١٢ يخسر ويسمى هذا كراپ . وتلخص قواعد اللعبة فيما يلي : —

(١) ٧، ١١ يكسب (ناشرل) ،

(٢) ٢، ٣، ١٢ يخسر (كراپ) ،

(٣) (١) يلقي تكررًا لما ألقاه أول مرة يكسب ،
(٢) يلقي ٧ يخسر .

في هذه اللعبة يتراوح المجموع بين ٢ و ١٢ وأى مجموع بين هذين يمكن . فإذا حسبنا احتمال كل مجموع بتطبيق قواعد البند ٩ نحصل على النتائج الآتية :

المجموع :	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
الاحتمال :	١	٢	٣	٤	٥	٦	٥	٤	٣	٢	١
	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦	٣٦

فمثلا احتمال الحصول على ١ من الزهرة الأولى أو من الثانية هو $\frac{1}{36}$ في الحالتين واحتمال الحصول على المجموع ٢ منهما معا هو بقاعدة الاستقلال حاصل الضرب $\frac{1}{36} \times \frac{1}{36}$ ولا شئ غيره . والجدول متماثل كما نرى .

لنحسب باستخدام هذه النتائج احتمال الكسب أو الخسارة أول مرة .

$$ح (يكسب الإلقاء الأول) = ح (٧ + ١١)$$

$$= ح (٧) + ح (١١)$$

(حادثان متافيان معا)

$$= \frac{٨}{٣٦}$$

$$ح (يخسر الإلقاء الأول) = ح (٢ + ٣ + ١٢)$$

$$ح (٢) + ح (٣) + ح (١٢) =$$

(حوادث متنافية فيما بينها)

$$\frac{٤}{٣٦} =$$

تمهيد ١. في أية سلسلة من الإلقاءات المتكررة إذا كان احتمال الكسب ح والخسارة خ والاستمرار ١ - ح - خ يكون احتمال الكسب آخر الأمر $ح / (ح + خ)$ واحتمال الخسارة $خ / (ح + خ)$.

لإثبات هذا نلاحظ أن احتمال الكسب عند الإلقاء الأول إن هو إلا ح وأن

$$\text{احتمال الكسب عند الإلقاء الثاني} = ح (لا قرار على الأول وكسب الثاني) \\ = (١ - ح - خ) ح$$

احتمال الكسب عند الإلقاء الثالث

$$= ح (لا قرار على الأول والثاني وكسب الثالث)$$

$$= (١ - ح - خ)(١ - ح - خ) ح$$

$$= (١ - ح - خ)^2 ح$$

أى حاصل ضرب ثلاثة احتمالات وهلم جرا . وبوجه الإجمال

$$\text{احتمال الكسب عند الإلقاء النوفى} = (١ - ح - خ)^{ن-١} ح$$

إذن احتمال الكسب آخر الأمر لابد أن يساوى مجموع كل أولئك . أى ح (الكسب آخر الأمر)

$$= ح + ح (١ - ح - خ) + ح (١ - ح - خ)^2 + \dots$$

$$= \frac{ح}{١ - (١ - ح - خ)} = \frac{ح}{ح + خ}$$

هذا يثبت النصف الأول من التمهيد .

وللحصول على احتمال الخسارة نبدل ح ، خ في هذه النتيجة . أى

$$ح (الخسارة) = \frac{خ}{خ + ح}$$

هذا ينهى إثبات التمهيد ١ .

هـ أولا أن المتبارى ألقى في المرة الأولى . احتمال إلقاء في كل مرة

هو

$$ح (٤) = \frac{٣}{٣٦} = ح (التمهيد ١) .$$

ايضا

$$ح (٧) = \frac{٦}{٣٦} = ح .$$

فإذا طبقنا التمهيد ينتج أن

$$\frac{٣}{٩} = \frac{٣}{٦ + ٣} = \text{احتمال الكسب}$$

أى فرصة تعادل الثلث للكسب . وما يقال عن ٤ فى المرة الأولى يقال عن ١٠ من المائل . لدينا إذن النص الآتى :

$$ح (الكسب / ٤) = \frac{٣}{٩} \quad (١٠ \quad ٤)$$

أى احتمال الكسب بعد الحصول على ٤ (أو ١٠) أول مرة .

هـ الآن أن الأربعة كانت خمسة . هنا

$$ح = \frac{٤}{٣٦} , \quad خ = \frac{٦}{٣٦} , \quad ح = \frac{٤}{١٠} = \frac{ح}{خ + ح}$$

إذن

$$ح (الكسب / ٥) = \frac{٤}{١٠} \quad (٥ \quad ٩)$$

بالمثل

$$٨ \quad ٦) \quad ح(الكسب/٦) = \frac{٥}{١١}$$

نحن الآن في موقف يمكننا من احتساب احتمال الكسب في هذه اللعبة.
 احتمال الكسب = احتمال الكسب في المناسبة الأولى +

$$\begin{aligned} & ح(٤) ح(الكسب/٤) + ح(٥) ح(الكسب/٥) + \\ & ح(٦) ح(الكسب/٦) + ح(١٠) ح(الكسب/١٠) + \\ & ح(٩) ح(الكسب/٩) + ح(٨) ح(الكسب/٨) \end{aligned}$$

$$= \frac{٥}{١١} \frac{٥}{٣٦} + \frac{٤}{١٠} \frac{٤}{٣٦} + \frac{٣}{٩} \frac{٣}{٣٦} + \frac{٨}{٣٦} =$$

$$= \frac{٥}{١١} \frac{٥}{٣٦} + \frac{٤}{١٠} \frac{٤}{٣٦} + \frac{٣}{٩} \frac{٣}{٣٦} +$$

$$\frac{٢٤٤}{٤٩٥} =$$

هذا الاحتمال دون النصف بقليل . إذن اللعبة تكاد تكون عادلة لكنها ليست عادلة كل العدل . أما وجه الغبن فيها فضعيف إلى حد يجعل الملقى يمتضى فيها دون أن يلحظه . هذا عن ناحية العدالة وأما عن ناحية التسلية فاللعبة مملّة بوجه عام إذ ما وجه التسلية في إلقاء زهرتين عددا هائلا من المرات ثم الانتظار حتى نرى ماذا يحدث ؟

تمهيد ٢ . في التمهيد السابق العدد المتوقع من الإلقاءات قبل انتهاء اللعبة هو $١/(ح+خ)$.

العدد المذكور هو (بتعريف التوقع)

$$\begin{aligned} & ١ \cdot (ح+خ) + ٢ \cdot (ح-١)(ح+خ) + \\ & ٣ \cdot (ح-١)(ح-٢)(ح+خ) + \dots \end{aligned}$$

$$(1) = (s-1)(1 + s + s^2 + \dots)$$

$$(s = 1 - c - x > 1)$$

$$1 + s + s^2 + \dots =$$

$$-s - s^2 - s^3 - \dots$$

$$1 = 1 + s + s^2 + \dots =$$

$$\frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{1}{c+x}$$

هذا يثبت التمهيد ٢.

والآن نستطيع إيجاد العدد المتوسط من الإلقاءات اللازمة للحصول على قرار يحسم اللعبة. فإذا قرار عقب الإلقاء الأول أو حصول على ٤ أو ٥ أو ٦ أو ٨ أو ٩ أو ١٠. أما احتمال قرار عقب أول إلقاء فهو $\frac{12}{36}$. وأما الحصول على ٤ فاحتماله $\frac{2}{36}$ والعدد المتوقع من الإلقاءات الأخرى (عقب الحصول على ٤) هو

$$\frac{36}{9} = \frac{1}{\frac{6}{36} + \frac{3}{36}}$$

وقس على ذلك مع ٥ و ٦ إلخ. إذن العدد المطلوب هو

$$2 \times \frac{4}{36} \left(\frac{36}{10} + 1 \right) + 2 \times \frac{3}{36} \left(\frac{36}{9} + 1 \right) + \frac{12}{36} \times 1$$

$$\frac{557}{160} = 2 \times \frac{5}{36} \left(\frac{36}{11} + 1 \right) +$$

هذا العدد قريب من $3\frac{1}{4}$. وهذا في المتوسط هو العدد اللازم من

الإلقاءات قبل الحصول على قرار.

تمرينات .

١ . إذا حصل الملقى في أول الأمر على ٨ فأوجد احتمال أنه يكسب بالحصول على (١) ٨ قبل ٧ ، (ب) ٨ أو ٦ قبل ٧ ، (ج) ٨ و ٦ قبل ٧ ، (د) ٦ ثم ٨ قبل ٧ .

٢ . إذا حصل الملقى في أول الأمر على ٥ فأوجد احتمال أنه يكسب بالحصول على (١) ٥ قبل ٧ ، (ب) ٥ أو ٩ قبل ٧ ، (ج) ٥ و ٩ قبل ٧ ، (د) ٩ ثم ٥ قبل ٧ .

٣ . إذا حصل الملقى في أول الأمر على ١٠ فأوجد احتمال أنه يكسب بالحصول على ٥ ثم ٦ ثم ٨ قبل الحصول على ٧ .

١٣ . أمثلة .

(١) أنجبت مجموعة من العلماء ١٢٣٨ ولدا و ١١٥١ بنتا . احسب بفرض أن هذه المجموعة من العلماء تكون عينة معتدلة لعموم السكان احتمال كون الطفل المولود في أية حالة ولدا . هل تعتقد أن هذا الاحتمال يختلف عن ٥٠ . اختلافا يكفي لجعله معنوياً ؟
العدد الكلي للحالات هو

$$١٢٣٨ + ١١٥١ = ٢٣٨٩$$

فإذا طبقنا التعريف العام للاحتمال الإحصائي ينتج أن الاحتمال المطلوب هو

$$٠,٥١٨ = \frac{١٢٣٨}{٢٣٨٩}$$

وللإجابة عن الجزء الثاني من السؤال نقذف ١٠ قطع من النقود ٢٣٩ مرة (١٠ × ٢٣٩ يساوي بوجه التقريب العدد الكلي للحالات) ونحصى العدد الكلي للرؤوس ثم نحسب احتمال ظهور الرأس في كل مرة ونقارن الفرق بين هذا العدد وبين ٥٠ . بالفرق

$$٠,٥١٨ - ٠,٥ = ٠,٠١٨$$

(٢) يقذف ١ ، ب ، ح بالترتيب قرشا وأول من يحصل منهم على الرأس يكسب اللعبة . ما فرصة كل منهم ؟

لكي يكسب ١ يجب أن يسقط الرأس في المرة الأولى أو الرابعة أو السابعة إلخ وألا يسقط في أية مرة أخرى . أيضا هذه الحوادث كلها متنافية فيما بينها إذ بمجرد سقوط الرأس توقف عملية القذف وتنتهي اللعبة . ولكي يكسب ب يجب أن يسقط الرأس في المرة الثانية أو الخامسة أو الثامنة إلخ ولا يسقط إلا في إحدى هذه المرات . ولكي يكسب ح يجب أن يسقط الرأس في إحدى المرات الثلاثة والسادسة والتاسعة إلخ .

احتمال الرأس في المرة الأولى هو $\frac{1}{2}$. ولكي يسقط الرأس لأول مرة في المرة الرابعة يجب أن يسقط الذنب في المرات الثلاث الأولى والرأس في المرة الرابعة واحتمال هذا هو $\frac{1}{8}$. كذلك احتمال الرأس في المرة السابعة هو $\frac{1}{8}$ إلخ . إذن فرصة ١ تساوى مجموع هذه الاحتمالات أى

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

كذلك فرصة ب هى

$$\left(\dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} = \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

أى نصف فرصة ١ أو $\frac{1}{4}$.

وفرصة ح هى

$$\left(\dots + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{4} = \dots + \frac{1}{64} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16}$$

أى ربع فرصة ١ أو $\frac{1}{8}$.

(٣) نسبة احتمال فشل حادث معين إلى احتمال نجاحه هي ٤ : ٣ ونسبة احتمال فشل حادث آخر مستقل عن الأول إلى احتمال نجاحه هي ٦ : ٥ . أوجد نسبة احتمال نجاح الحادثين معا إلى احتمال عدم نجاحهما معا . أوجد أيضا نسبة احتمال نجاح الحادثين معا إلى احتمال فشلهما معا .

احتمال نجاح الحادث الأول هو $\frac{3}{7}$ واحتمال نجاح الثاني هو $\frac{5}{11}$. وبما أن الحادثين مستقلان إذن احتمال نجاحهما معا هو

$$\frac{15}{77} = \frac{5}{11} \times \frac{3}{7}$$

واحتمال عدم نجاحهما معا هو

$$\frac{62}{77} = \frac{15}{77} - 1$$

إذن نسبة احتمال نجاحهما معا إلى احتمال عدم نجاحهما معا هي ١٥ : ٦٢ .

أيضا احتمال فشل الحادث الأول هو $\frac{4}{7}$ واحتمال فشل الثاني هو $\frac{6}{11}$. وبما أن الحادثين مستقلان إذن احتمال فشلهما معا هو

$$\frac{24}{77} = \frac{6}{11} \times \frac{4}{7}$$

إذن نسبة احتمال نجاحهما معا إلى احتمال فشلهما معا هي ١٥ : ٢٤ أو ٥ : ٨ .

أُسْئَلَة

١ . ما المقصود بالاحتمال وما مصدر العلاقة بين الاحتمال والإحصاء ؟
اذكر بالضبط المعنى الذى تلحقه بالعبارة أن احتمال كون أحد دارسى هذه الكلية امرأة يساوى هذا الكسر أو ذاك . ما العلاقة الممكن ذكرها بين مثل هذا الاحتمال وبين الواقعة أن جماعة — صغيرة صغرا كافيا — من الدارسين كانت تتركب من رجال فقط ؟

٢ . اذكر المقصود في الإحصاء بالاحتمال شارحا بالدقة معنى عبارات كالاتيتين :

- (١) احتمال أن أحد سكان كارديف ذكر هو $\frac{90}{182}$.
 (ب) احتمال أن نصف الأشخاص المشتغلين تحت الأرض في مناجم الفحم في سنة معينة أو أكثر سيصابون إصابة ممتدة صغيرة للغاية .
 ٣ . اشرح المقصود باستقلال الصفات أو الاحتمالات . بين أهمية اعتبار الاستقلال عند بحث مسألة كالاتية :

”نسبة الذكور إلى العدد الكلي لسكان غلامورغان هي ٥٢ للثئة و ٨٢ للثئة من السكان يقطنون المدن . هل تستطيع استنباط النسبة المئوية للعدد الكلي للسكان الذكور ممن يقطنون المدن؟“

ما الذي تستنبطه مثلا (١) إذا علمت أن الاحتمالين مستقلان و (ب) إذا كنت تجهل هل هما مستقلان أم لا ؟

- ٤ . إذا سحبت ورقة حيثما اتفق من مجموعة لأوراق اللعب فاذكر احتمال كون الورقة (١) حمراء ، (٢) طيبة ، (٣) ١ ، (٤) العشرة الطيبة .
 اذكر أيضا احتمال أنها ليست (٥) ١ ، (٦) طيبة ، (٧) صورة .
 ٥ . إذا قذف قرش ثلاث مرات فأوجد احتمال سقوطه رأسا (١) كل مرة ، (٢) مرتين .

٦ . إذا قذفت ثلاثة قروش مرة واحدة فأوجد احتمال الحصول على (١) ذنين أو أكثر ، (٢) ذنب واحد .

٧ . عند إلقاء الزهرة اذكر احتمال كون النتيجة (١) ٥ ، (٢) عددا زوجيا ، (٣) عددا فرديا ، (٤) عددا يقبل القسمة على ٣ .

٨ . يحتوى صندوق على ست كرات سوداء وأربع كرات بيضاء . فإذا سحبت كرة حيثما اتفق فأوجد احتمال أنها (١) سوداء ، (٢) بيضاء ، (٣) إما سوداء أو بيضاء .

٩. يحتوى صندوق على ست كرات سوداء وأربع بيضاء وثلاث زرقاء .
 فإذا سحبت كرة حيثما اتفق فأوجد احتمال أنها (١) سوداء ، (٢) بيضاء ،
 (٣) زرقاء ، (٤) ليست سوداء ، (٥) ليست بيضاء ، (٦) ليست
 زرقاء ، (٧) إما سوداء أو بيضاء ، (٨) لا سوداء ولا بيضاء .
 ١٠. يحتوى صندوق على ٦ كرات سوداء وأربع كرات حمراء . فإذا
 سحبت كرة حيثما اتفق ثم سحبت ورقة حيثما اتفق من مجموعة لأوراق اللعب
 فأوجد احتمال

(١) أن تكون الكرة والورقة سوداوين ،

(٢) أن تكون الكرة والورقة حمراوين ،

(٣) أن تكون الكرة سوداء والورقة صورة ،

(٤) أن تكون الكرة حمراء والورقة إما ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ .

١١. يلهو ١ ، ب بالزهرة ويكسب ١ إذا ظهر رقم فردى ويكسب ب إذا
 ظهر رقم زوجي . أوجد احتمال أن يكسب ١ السلسلة إذا اتفق بعد ٣ محاولات
 أن كان (١) ١ كاسبا مرة ، (٢) ١ كاسبا مرتين ، (٣) ١ كاسبا ثلاث
 مرات .

١٢. إذا فندت مجموعة أوراق اللعب ولوحظت الورقة السفلى كل مرة
 فأثبت أن احتمال ظهور أوراق من الأنواع الأربعة عقب إجراء التفنيد
 أربع مرات هو $\frac{3}{4}$.

١٣. إذا أُلقيت ثلاث زهرات فأوجد

(١) عدد الكيفيات المختلفة لسقوطها ،

(٢) أصغر مجموع وأكبر مجموع .

أثبت أن عدد كيفيات ظهور المجموع ١٠ يساوى عدد كيفيات ظهور
 المجموع ١١ .

١٤. يحتوى صندوق على ست كرات سوداء وخمس كرات بيضاء فإذا

سحبت أربع كرات حيثما اتفق فأوجد احتمال أن تكون الكرات الأربع
(١) جميعا سوداء ، (٢) جميعا بيضاء ، (٣) ٣ كرات سوداء وكرّة بيضاء ،
(٤) ٣ كرات بيضاء وكرّة سوداء ، (٥) كرتين بيضاوين وكرتين
سوداوين .

١٥ . إذا أُلقيت خمس زهرات فأثبت أن تكرارات ظهور المجاميع من
٥ إلى ٣٠ هي :

المجموع	التكرار	المجموع	التكرار
٥ أو ٣٠	١	١٢ أو ٢٣	٣٠٥
٦ أو ٢٩	٥	١٣ أو ٢٢	٤٣٠
٧ أو ٢٨	١٥	١٤ أو ٢١	٥٤٠
٨ أو ٢٧	٣٥	١٥ أو ٢٠	٦٥١
٩ أو ٢٦	٧٠	١٦ أو ١٩	٧٣٥
١٠ أو ٢٥	١٢٦	١٧ أو ١٨	٧٨٠
١١ أو ٢٤	٢٠٥		

١٦ . عند إلقاء خمس زهرات قد يظهر نفس العدد على زهرتين
أو أكثر . أثبت أن النتائج الآتية تظهر بالتكرارات المبينة :

(١) خمسة أعداد متشابهة مثل ٤٤٤٤٤ ، ٦ كيفيات .
(٢) أربعة أعداد متشابهة والعدد الخامس مختلف مثل ٦٣٣٣٣ ، ١٥٠
كيفية .

(٣) ثلاثة أعداد متشابهة والعددان الباقيان متشابهان أيضا مثل ٤٤٥٥٥ ،
٣٠٠ كيفية .

(٤) ثلاثة أعداد متشابهة والعددان الباقيان مختلفان مثل ٥٤١١١ ،
١٢٠٠ كيفية .

(٥) عددان متشابهان وعددان آخران متشابهان أيضا والعدد الباقي
مختلف مثل ٦٥٥١١ ، ١٨٠٠ كيفية .

(٦) عدنان متشابهان والأعداد الثلاثة الباقية مختلفة مثل ٦٥١٣٣ ، ٣٦٠٠ كيفية .

(٧) كل الأعداد مختلفة مثل ٦٥٤٣١ ، ٧٢٠ كيفية .

١٧ . إذا أُلقيت خمس زهرات فأوجد احتمال أن يكون عدد الستات (١) ٢ ، (٢) ٣ ، (٣) ٥ ، (٤) ٢ على الأقل ، (٥) ٣ على الأكثر .
١٨ . إذا أُلقيت ست زهرات فأوجد احتمال الحصول على ١ من زهرتين ومن زهرتين فقط .

١٩ . إذا قذفت عشر قطع من النقود فأوجد احتمال أن يكون عدد الرؤوس الساقطة (١) ١٠ ، (٢) ٦ ، (٣) ٥ ، (٤) ٢ ، (٥) ٤ على الأقل ، (٦) ٤ على الأكثر .

٢٠ . يحتوى صندوق على ٦ كرات سوداء وأربع كرات بيضاء . ثم سحبت كرة حيثما اتفق ولو حظ لونها ثم ردت إلى الصندوق . فإذا أُجريت هذه العملية عشر مرات فأوجد احتمال سحب (١) خمس كرات بيضاء وخمس سوداء ، (٢) أربع كرات سوداء وست بيضاء ، (٣) ست كرات سوداء وأربع بيضاء .

٢١ . فى لعبة البردج توزع ٥٢ ورقة بالتساوى على ٤ لاعبين . أوجد احتمال حصول لاعب على (١) ١٣ ورقة من نوع واحد ، (٢) ٧ ورقات من نوع واحد و ٦ ورقات من نوع آخر ، (٣) ٤ ورقات ١ وتسع ورقات أخرى ، (٤) ٤ ورقات ١ وأربع ملوك وخمس ورقات أخرى .
أوجد أيضا احتمال ألا يحصل لاعب على ١ أو أوراق مصورة .

٢٢ . أوراق الدومينو قطع مستطيلة مقسمة إلى مربعين . وكل مربع إما أن يكون أبيض أو يحمل عددا من النقاط تشبه النقاط الموجودة على زهرات النرد . أوجد عدد القطع إذا تراوحت العلامات من أبيض وأبيض إلى (١) ٦ و ٦ ، (٢) ٩ و ٩ .

٢٣ . أوجد احتمال أن يكون مجموع النقط على المربعين ٦ إذا أخذت قطعة دومينو حيثما اتفق من مجموعة تتراوح علاماتها من أبيض وأبيض إلى (١) ٦ و ٦ ، (٢) ٩ و ٩ .

٢٤ . يسحب ١ ، ب كلاهما قطعة دومينو حيثما اتفق أحدهما من مجموعة تتراوح علاماتها من أبيض وأبيض إلى ٦ و ٦ والآخر من مجموعة تتراوح علاماتها من أبيض وأبيض إلى ٩ و ٩ . أوجد احتمال أن يكون على القطعتين المسحوبتين ٦ نقط و ٩ نقط على الولا .

٢٥ . هب أنك أعطيت ثلاثة خطابات وثلاثة غلافات وأنت وضعت الخطابات في الغلافات حيثما اتفق . ما احتمال وضع الخطابات داخل الغلافات الصحيحة ؟

٢٦ . في السؤال السابق أوجد احتمال

(أ) وضع الخطابات الثلاثة جميعاً خطأ داخل الغلافات الثلاثة ،

(ب) وضع خطابين اثنين فقط خطأ داخل غلافين ،

(ج) عدم وضع الخطابات الثلاثة جميعاً وضعا صحيحاً .

٢٧ . في السؤال ٢٥ أوجد احتمال

(أ) وضع خطاب واحد فقط داخل الغلاف الصحيح ،

(ب) وضع خطاب واحد فقط خطأ ،

(ج) عدم وضع الخطابات الثلاثة جميعاً خطأ .

٢٨ . يلقي ١ ، ب ، ح زهرة بالتناوب وقد اتفقوا فيما بينهم على أن أول

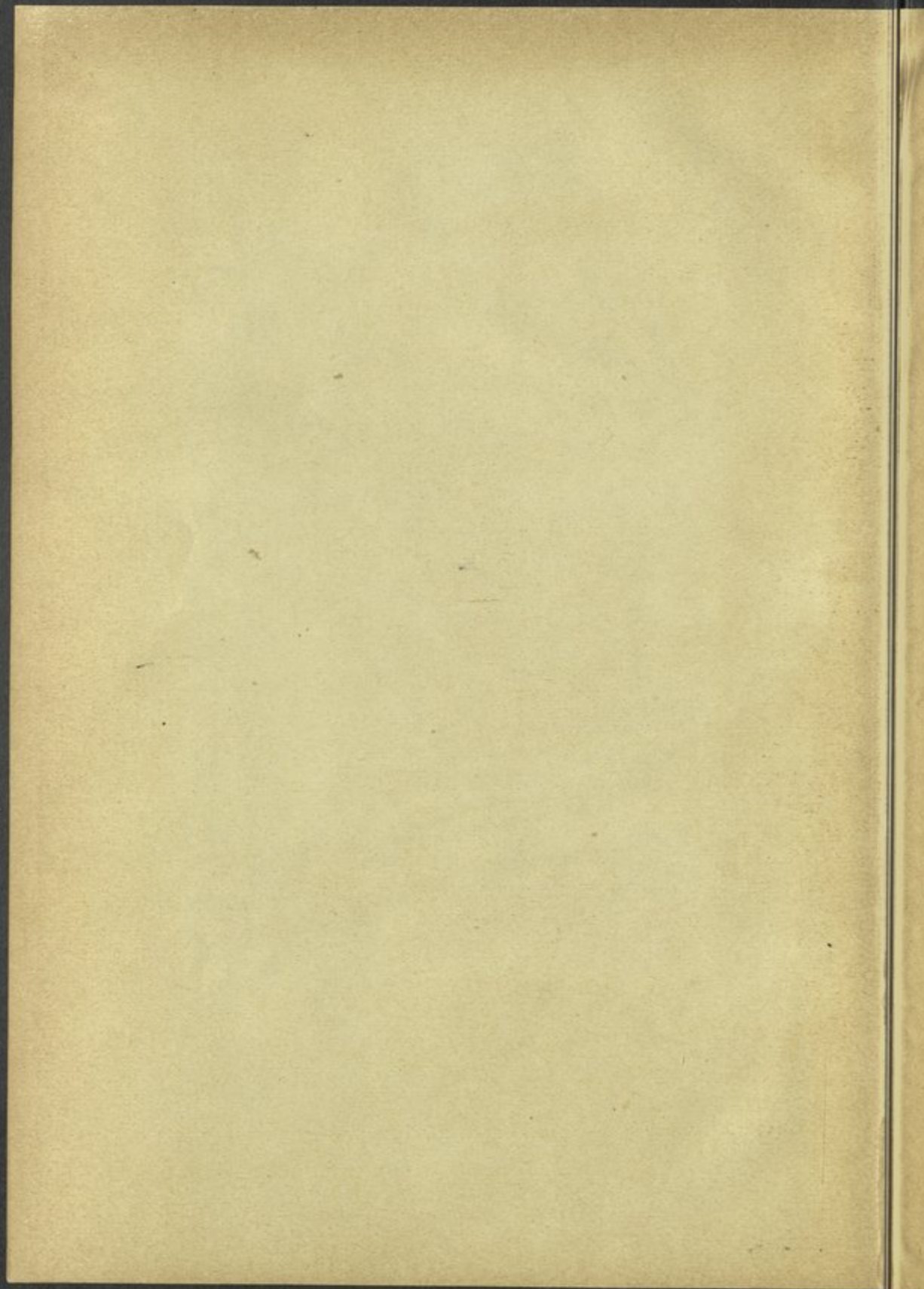
من يحصل على الستة يكسب اللعبة . ما فرصة كل منهم ؟

٢٩ . يسحب صديان ١ ، ب بالتناوب من وعاء حتى يحصل أحدهما على

كرة بيضاء فيدفع الآخر له ستة قروش . فإذا كانت الكرات لا ترد وكان

الوعاء يحتوي في البداية على ثلاث كرات بيضاء وسبع سوداء فأثبت أن حق

البدء في السحب يساوي قرشا واحدا .



THE
AMERICAN

311.2:A51mA:c.1

أمين، أمين يس
المنحى الاحصائي في مبحث المعرفة ع

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES



01012566

American University of Beirut



311.2
A51mA

General Library

