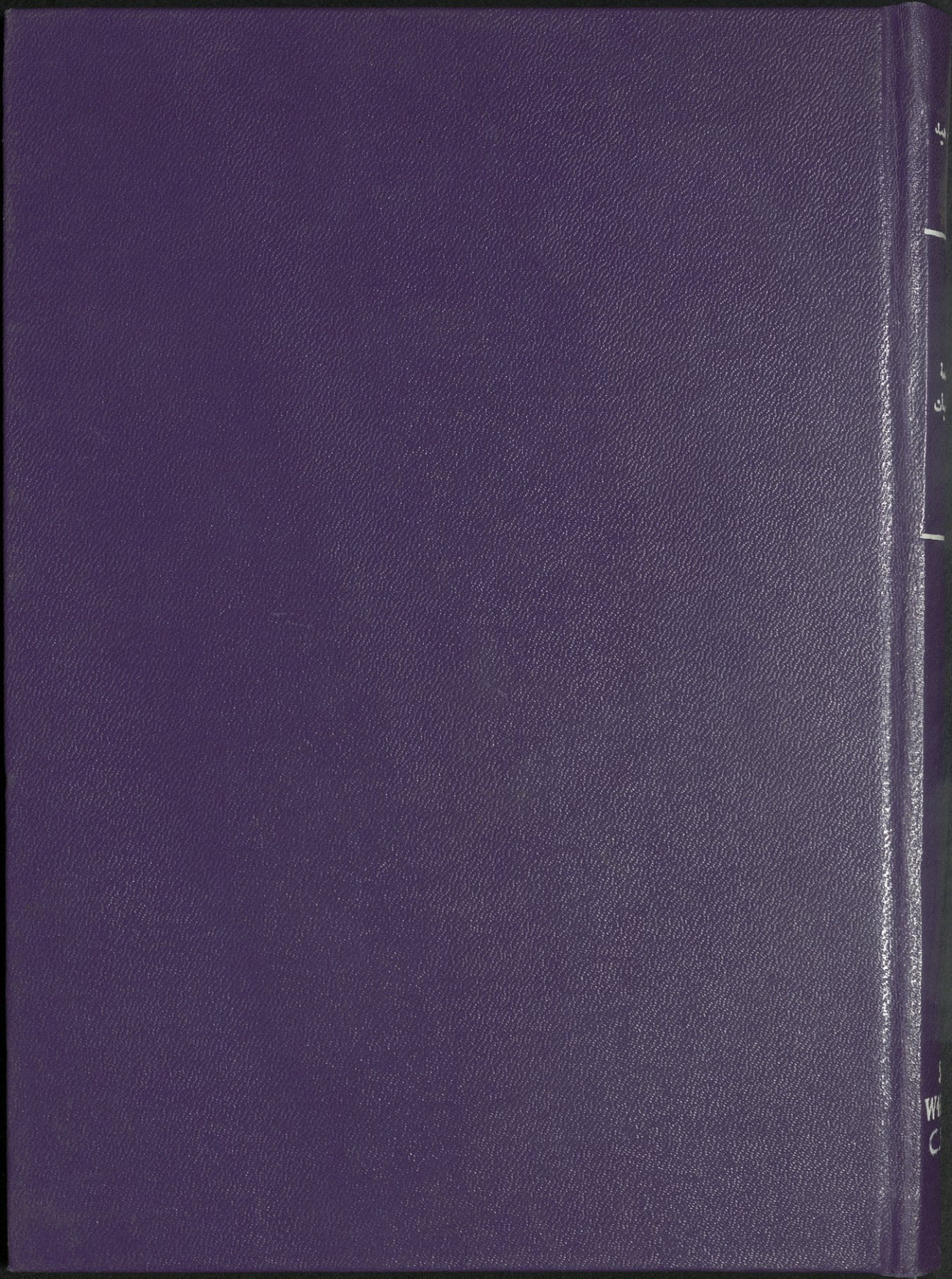
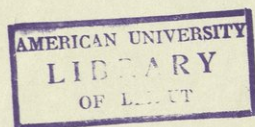
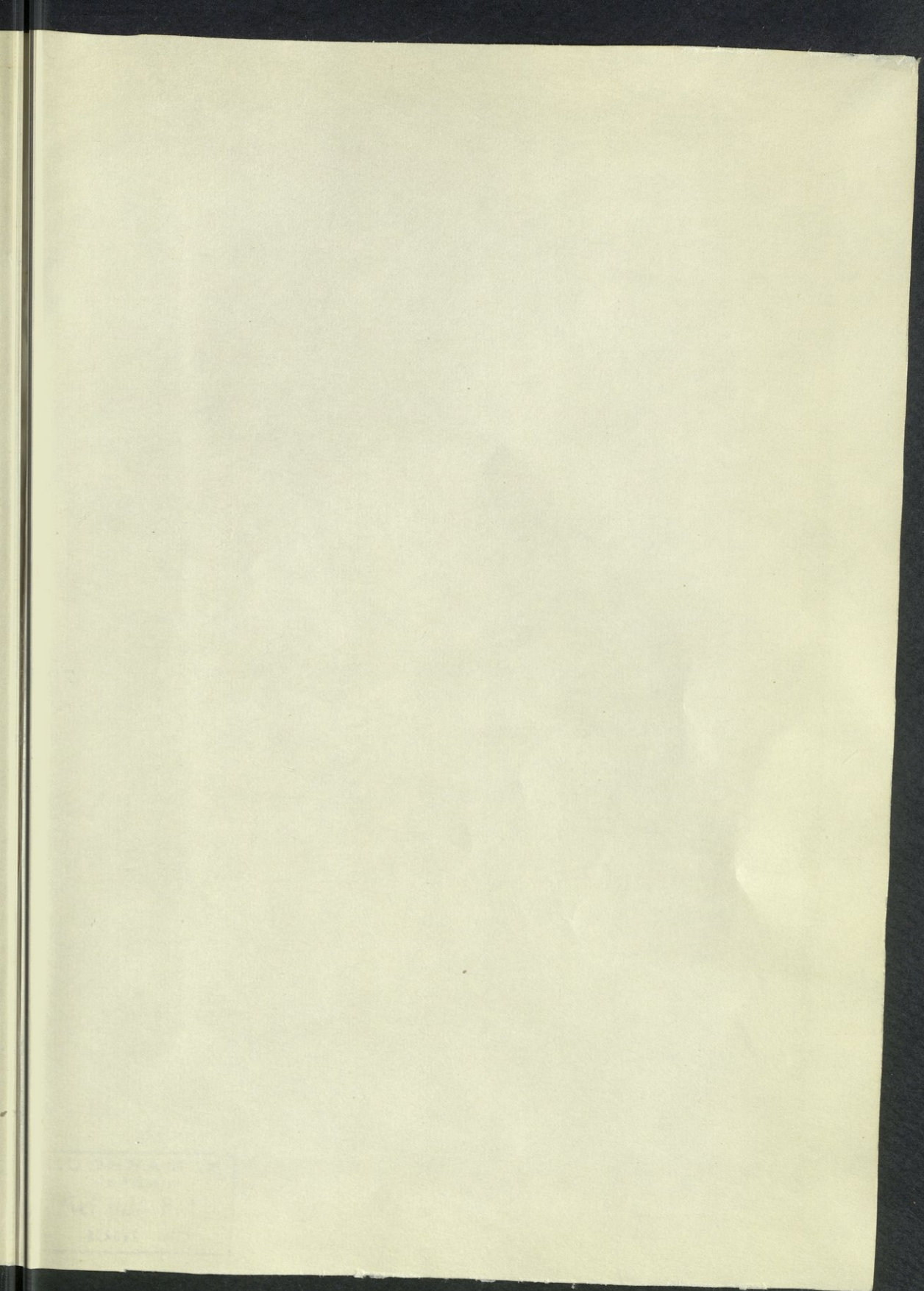
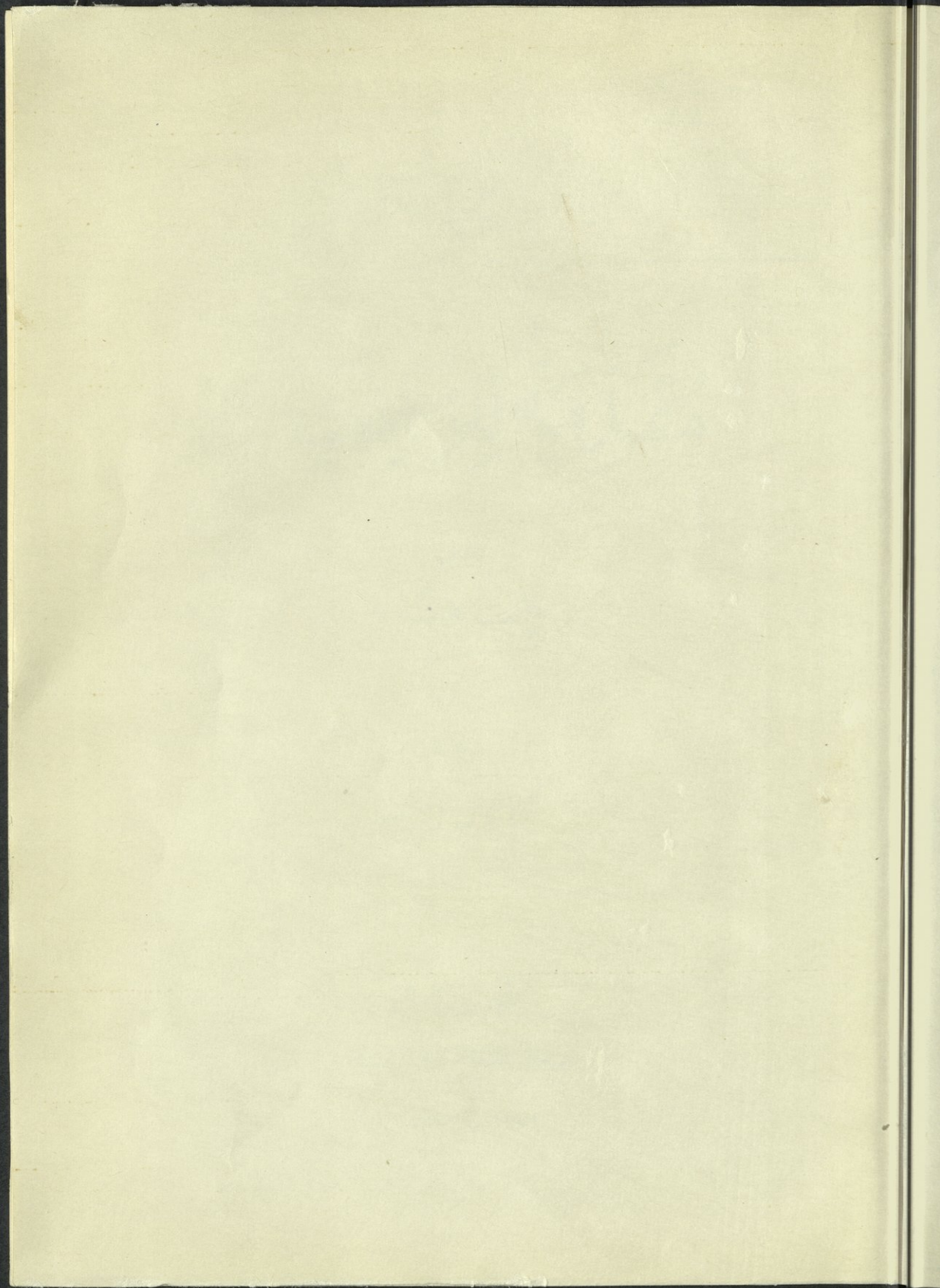


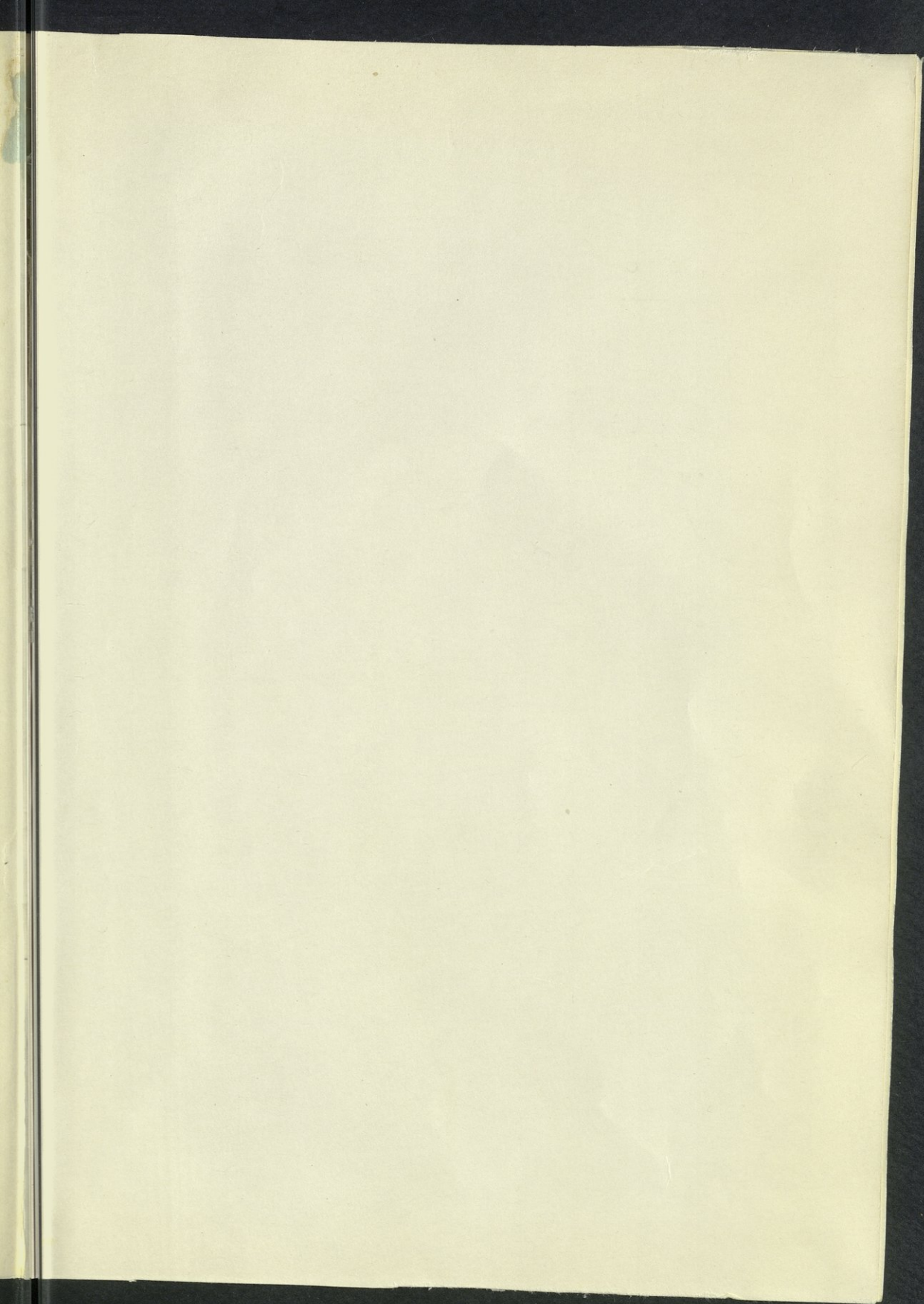




N. MAKHOUL
BINDERY
1 8 AUG 1971
Tel. 260458







510
W 41 m A
C.1

مطبوعات مجمع علمي العراقي

مُقَدِّمَةٌ لِلرِّيَاضِيَّاتِ

تأليف

وَائِثْ هَيْد

ترجمة

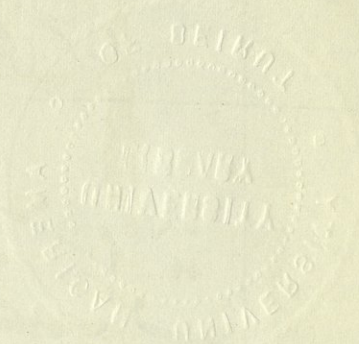
مُحِي الْمَيْدِينِ يُونُسُف

مطبعة الرابطة

شركة الرابطة للطبع والنشر المحدودة
بغداد

١٩٥٢ - ١٣٧١

Archiv



المحتويات

الصفحة

٣	...	...	...	...	مقدمة المترجم
٥	...	...	...	...	نبذة عن حياة المؤلف
١١	...	...	...	...	الفصل الاول
١٨	...	...	...	...	الفصل الثاني
٢٨	...	...	...	...	الفصل الثالث
٤٣	...	...	...	...	الفصل الرابع
٥٦	...	...	...	...	الفصل الخامس
٦٨	...	...	...	...	الفصل السادس
٨٢	...	...	...	...	الفصل السابع
٩٦	...	...	...	...	الفصل الثامن
١٠٧	...	...	...	...	الفصل التاسع
١٢١	...	...	...	...	الفصل العاشر
١٣٧	...	...	...	...	الفصل الحادى عشر
١٥٥	...	...	...	...	الفصل الثانى عشر
١٦٣	...	...	...	...	الفصل الثالث عشر
١٨٢	...	...	...	...	الفصل الرابع عشر
٢٠٥	...	...	...	...	الفصل الخامس عشر
٢٢١	...	...	...	...	الفصل السادس عشر
٢٢٩	...	...	...	...	الفصل السابع عشر
٢٣٤	...	...	...	...	ملاحظات
٢٣٦	...	...	...	...	الكتب والمراجع
٢٣٩	...	...	...	...	الفهرست

مجله

مجله	۱
مجله	۲
مجله	۳
مجله	۴
مجله	۵
مجله	۶
مجله	۷
مجله	۸
مجله	۹
مجله	۱۰
مجله	۱۱
مجله	۱۲
مجله	۱۳
مجله	۱۴
مجله	۱۵
مجله	۱۶
مجله	۱۷
مجله	۱۸
مجله	۱۹
مجله	۲۰
مجله	۲۱
مجله	۲۲
مجله	۲۳
مجله	۲۴
مجله	۲۵
مجله	۲۶
مجله	۲۷
مجله	۲۸
مجله	۲۹
مجله	۳۰
مجله	۳۱
مجله	۳۲
مجله	۳۳
مجله	۳۴
مجله	۳۵
مجله	۳۶
مجله	۳۷
مجله	۳۸
مجله	۳۹
مجله	۴۰
مجله	۴۱
مجله	۴۲
مجله	۴۳
مجله	۴۴
مجله	۴۵
مجله	۴۶
مجله	۴۷
مجله	۴۸
مجله	۴۹
مجله	۵۰
مجله	۵۱
مجله	۵۲
مجله	۵۳
مجله	۵۴
مجله	۵۵
مجله	۵۶
مجله	۵۷
مجله	۵۸
مجله	۵۹
مجله	۶۰
مجله	۶۱
مجله	۶۲
مجله	۶۳
مجله	۶۴
مجله	۶۵
مجله	۶۶
مجله	۶۷
مجله	۶۸
مجله	۶۹
مجله	۷۰
مجله	۷۱
مجله	۷۲
مجله	۷۳
مجله	۷۴
مجله	۷۵
مجله	۷۶
مجله	۷۷
مجله	۷۸
مجله	۷۹
مجله	۸۰
مجله	۸۱
مجله	۸۲
مجله	۸۳
مجله	۸۴
مجله	۸۵
مجله	۸۶
مجله	۸۷
مجله	۸۸
مجله	۸۹
مجله	۹۰
مجله	۹۱
مجله	۹۲
مجله	۹۳
مجله	۹۴
مجله	۹۵
مجله	۹۶
مجله	۹۷
مجله	۹۸
مجله	۹۹
مجله	۱۰۰

مَقْدَمَةُ الْمُتَرْجِمِ

قرأت هذا الكتاب منذ زمن بعيد ، ومع أننى لم أكن اذ ذاك أعرف
المكانة العلمية الرفيعة التى يحتلها مؤلفه فى عالم الفكر الحديث ، فقد
أعجبت به اعجاباً عظيماً . ورغبت فى ترجمته الى اللغة العربية لأساهم ،
ولو بقسط ضئيل ، فى تغذية الفكر العربى بالآراء العلمية الغربية .
وبعد مدة ليست باليسيرة أعدت قراءة الكتاب ، فأنقلبت رغبتى هذه الى
عزم وتصميم . وعلى الرغم من كثرة أشغالى بدأت بها متوكلاً على الله ،
متتھزاً سويحات من الراحة والفراغ . وكنت قد قطعت شوطاً ، عندما
علمت أن اللجنة الثقافية التابعة للجامعة العربية وضعت قائمة بمختارات
من الكتب الأجنبية القيمة ، لينقلها من يشاء من المعنيين برفع المستوى
العلمى والثقافى فى البلاد العربية ، الى اللغة العربية . وكان هذا الكتاب
واحداً منها . وقد شجعنى ذلك على مضاعفة الجهد لانجاز الترجمة
سريعاً . ويسرنى الآن أن أقدمها للقارئ العربى الكريم وأتوقع أن
سيجد فيها فائدة علمية كبيرة ولذة فكرية ليست باليسيرة . فهى تفيد
المدرس ، وتفيد الطالب فى المراحل الأولى من الدراسات العالية ، كما
تفيد القارئ الاعتيادى الذى له المام عام بأوليات الرياضيات .

ان هذه الترجمة تكاد تكون حرفية، فقد تقيدت بالنصوص الأصلية
لأن نقل الفكر الواردة في الكتاب كما هي مجردة عن كل إضافة
توضيحية أو حشو أو تعليق مسهب فيه •

ولابد لي هنا من الاشادة بفضل اخواني أعضاء المجمع العلمي
العراقي الموقر لمؤازرتهم الثمينة • وأخص بالذكر منهم العلامة الدكتور
مصطفى جواد الذي قرأ الكتاب من أوله الى آخره وأجرى عليه بعض
الاصلاحات اللغوية • والعلامة الاستاذ محمد بهجة الأثرى الذي وقف
على طبع الفصول الأربعة الأولى منه في مجلة المجمع العلمي العراقي •
وأرى من واجبي كذلك ، أن أقدم الشكر الجزيل للدكتور الفاضل ناصر
الحائى ، فقد أتحفني ببذرة وافية عن تاريخ حياة المؤلف ونشاطه
الفكرى ، وأن أنوه بفضل عدد من السادة الأفاضل الذين كنت أناقشهم
في بعض الجمل الفنية ، والمصطلحات العلمية ، وأستأنس بأرائهم ولم
يرغبوا في أن أنوه بأسمائهم تواضعاً وكرماً منهم ، وأشكر أيضاً الذوات
الذين قاموا بطبع المسودات على الآلة الطباعة ومقابلتها • والحقيقة ان
هذه المساعدات الكثيرة الثمينة ، من اخوان أعتز بصدقاتهم ، هي التي
جعلت ظهور هذا الكتاب من الممكنات • فأشكرهم جميعاً ، وأتضرع الى
الله أن يلهم أبناء قومي روح التعاون الصادق للنهوض بهذا البلد المبارك •

محي الدين بن يوسف

نبذة عن حياة المؤلف

وايت هيد

١٨٦١ - ١٩٤٧

يعد الفيلسوف (وايت هيد) فى طليعة المفكرين الذين أثروا فى اتجاهات الفلسفة الحديثة وامتازوا بطابع فكرى خاص • فلقد تميز بسعة اطلاعه ، ودقة معرفته ، وقابليته على تبسيط المشكلات العلمية والرياضية والفلسفية تبسيطاً يكفل للقارئ غير المختص ، فى أكثر الحالات ، فهمها والافادة منها بما يوقفه على طبائعها وكثير من تفاصيلها • أخذ نفسه بسنة عرف بها وتلك أن الفلاسفة يجب أن يسلكوا سبيلاً مبسطة تعرض للقارئ المسائل العلمية والدينية والخلقية عرضاً سليماً ، وعليهم أن يفسروا المسائل كلها بما يضمن حسن فهمها وسلامتها •

ويمكن أن يعلل تشعب (وايت هيد) العلمى ومساهمته فى أكثر من ميدان بتأثير بيئته الخاصة به ؛ فلقد كان أبوه وجده أستاذين ، وما انقطع أبوه عن التدريس الا ليوقف نفسه للكنيسة ، ويظل عاكفاً على كتبه وثقافته ، فلا عجب أن ينشأ ابنه على السجية التى يرتضيها له • دخل (وايت هيد) المدرسة مبكراً واتصل - على عادة أبناء زمانه - بدراسة التاريخ ، وباللغتين اللاتينية والأغريقية اللتين عركما مدة لم

تكن محببة الى نفسه ، ولكنه لم يستطع أن يفلت منهما لأن شأنهما كان
أوانذاك كبيرا ، ولكنه ولع بالتاريخ لا كولوج المؤرخين • فلقد قال عن
نفسه : انه قصد فى دراسة التاريخ أن ينتزع صوراً من الماضى ويرى
مثلها أو نقيضها من الدنيا الحديثة • وظل هذا دأبه ، يعرض ما سماه
(الماضى العملى) ، وذلك باقتناص المثل والشواهد التى حافظت على
استمرار الكيان الانسانى • وهذا يفسر طبيعة مصنفاته التاريخية ،
ويبرر - فى الوقت ذاته - ما قد يبرم به المؤرخ المحترف •

ولم ينس (وايت هيد) أن يمد يده الى (التربية) ويأخذ منها
بنصيب كبير ويكتب فيها كتابه المعروف (أهداف التربية) •

ولقد تهيأ له أن يبرز فى الرياضيات بجانب العلوم التى برع
بها • ولما قصد (كلية ترنتى) فى (كمبردج) سنة ١٨٨٠ كان قد
عزم على الانقطاع الى دراسة الرياضيات وحدها ؛ وكان ما منى به نفسه ،
اذ حصل على الشهادة بعد أربع سنوات ، ومنح بعدها (زمالة دراسية)
وانتخب محاضراً بهذه المادة • وكانت المدة التى قضاها فى كمبردج
بين ١٨٨٠ و ١٩١٠ المهد الاول الذى خلق منه مفكراً ناضجاً ، ومتحدثاً
طلقاً بارعاً ، حتى صار يعرف ببراعته فى التحدث هذا الفن الذى برع
فيه طيلة حياته • ولقد تزوج عام ١٨٩٠ وأنجب ثلاثة أولاد نزع أحدهم
الى التعليم وانخرط الآخر فى الجيش ، ولم يطل لبثه اذ قتل فى الحرب
الاولى ، وعهد الى الأخير بمديرية مكتبة (هارفرد) • ولم تحرم هذه
العائلة التى خلدها رياضى عالمى من أن يبرع أحد أفرادها بهذا العلم

ويدرسه في أعظم جامعة ، ذلك هو (جى • ايج • سى • وايت هيد)
ابن أخ وايت هيد الكبير ، الذى اضطلع بمهمة تدريس الرياضيات في
أو كسفورد •

لقد ساهم (وايت هيد) في أوائل حياته مع (الفيلسوف المعروف
برتراند رسل) بكتابة (القواعد المنطقية للرياضيات) الذى طبع في
ثلاثة أجزاء باسم (Principia Mathematica) ؛ وكانت الخطة
أن يكتب (وايت هيد) نفسه جزءاً رابعاً في (قواعد الجبر) ولكنه لم
يستطع انجاز ذلك (١) •

وكان (وايت هيد) منصرفاً في أوائل حياته الى دراسة الرياضيات
والمنطق مقتنياً خطى (پينو) و (فريج) ؛ ولم تكن تأليفه في هذه
الفترة ناجحة - كما قالوا - وذلك لأن أكثر اصطلاحاته التى قننها في
الرياضيات عثرت ، ووجدت طريقها المناسبة في علوم أخرى وقبلت هناك ،
من ذلك مثلاً رأيه بأن الرياضيات ليست (علم الكم) (أو علم العدد)
ولكنها علم (علاقات منطقية ثابتة) •

ولقد أجمل خلاصة آرائه في هذا الباب بكتابه المسمى (بحث
في الجبر العالمى) الذى تطرق فيه الى ما سماه (المنطق الجبرى)

(١) لقد كتب الفيلسوف (برتراند رسل) مقالا في مجلة العقل
Mind فى عدد نيسان سنة ١٩٤٨ وصف فيه فكرة تأليف هذه
الأجزاء وتوزيع العمل بينه وبين (وايت هيد) • وهناك فصل ممتع
فى تحليل هذا الكتاب كتبته البروفسور (كواين) فى مجلد طبع
بمسلسلة (مكتبة الفلاسفة الأحياء) • The Library of Living
Philosophers.

و (الجبر المنطقى) (١) •

ولقد اقترح فى رسالة قدمها الى (الجمعية الملكية) عام ١٩٠٥ بعنوان (آراء رياضية فى العالم المادى) توحيد المفاهيم الرئيسة حول الفراغ والمادة • وكان هذا الاقتراح مستقلاً عن نظرية (ايشتاين) فى النسبية التى لم تطبع حتى ١٩١٦ •

انتدب (وايت هيد) بعد أن أحرز صيتاً مرموقاً لتدريس الرياضيات فى جامعة لندن University College ومن ثم اختير أستاذاً للرياضيات التطبيقية فى Imperial College • ولقد كتب كتابه (مقدمة فى الرياضيات) - الذى تقدمه لقراء العربية - بعد عام على مكثه فى لندن ، وطبع فى السلسلة المعروفة Home University Library والكتاب يوحى بحق قوة (وايت هيد) الرياضية ونضجه العقلى وتمكنه من مادته •

ولقد كرّس وقته كله - وهو فى لندن - منصرفاً الى اصدار الكتب العلمية الثمينة سواء فى الجامعة أو فى المؤسسات العلمية الشهيرة • فقدم الى (الجمعية الأرسطية) عدة مقالات وبعض الكتب القيمة منها (قواعد المعرفة الطبيعية) عام ١٩١٩ و (رأى فى الطبيعة) ١٩٢٠ و (أساس النسبية) ١٩٢٢ • ولم ينضب معين الرجل ، بل ظل يتحنف العالم بكتبه بين آونة وأخرى ، فأصدر كتابه المعروف

(١) شرح الدكتور Lowe منهج (وايت هيد) الرياضى بكتاب ظهر فى سلسلة (مكتبة الفلاسفة الاحياء) بعنوان (تطور وايت هيد الفلسفى) •

(العلم والعالم الحديث) عام ١٩٢٦ ، وكتابه (الرمزية) ١٩٢٨ •
ولقد وقف نفسه لدراسة الفلسفة بعد عام ١٩٢٤ عندما استدعته
جامعة (هارفرد) للتدريس فى (فرع الفلسفة) هناك ، وظلت تحتفظ
بشرف تدريسه فيها حتى وفاته عام ١٩٤٧ •
ليس لكتبه طابع واحد يلتزمه ، فيتميز بعضها بوضوح العبارة ،
وحسن النظم ، وصفاء الفكرة ؛ وبعضها غامض يعز ادراكه على غير
المختصين •

ولقد أنكر بعض النقدة عليه هذا ، ولكنه ظل كما قيل عنه
(كالفنان يركز جهده فى انتاجه) ولجمهور قرائه أن يدركوا قصده ،
وليس عليه ألا يفهموه أو يدركوه •
ظل وايت هيد الرياضى الفيلسوف حبيبا الى نفوس طلابه وقرائه ،
طوال حياته ؛ ولم تنس أمهات الجامعات العالمية أن تعترف بقيمة
أولفاته وبما آثره فى الميادين التى عمل لها كافة • فمنح عدة ألقاب
علمية ورتب شرف عالية ، ويكفى القارئ أن يعرف أن ست جامعات
عالية قد منحته شهادة الدكتوراه الفخرية بينها (هارفرد)
و (مانچستر) •

الركنور ناصر الحامى

الفصل الأول

الطبيعة المجردة للرياضيات

The Abstract Nature of Mathematics

ان دراسة الرياضيات مستهدفة في أولى مراحلها لخيبة الأمل فيها • فالتطبيقات العملية المهمة لهذا العلم والمتعة النظرية بأفكاره وقوة الحجة في أساليبه تجعلنا نتوقع تقدماً سريعاً نحو أعمال مهمة ممتعة ان يقال أن بمساعدته توزن النجوم وتحصى بلايين الذرات في قطرة الماء • ولكن هذا العلم العظيم - كشبح والد هملت الذى يرى هنا ثم هناك واذا به يخفى كالسراب - يتملص من تشبثات قوانا الفكرية أن تمسك به وما نراه منه لا يوحى بالسبب نفسه الذى كان كافياً لتملص الشبح وهو كونه ادق من طرائقنا العنيفة • واذا ما جاز استعمال العنف فيه فيجب أن يكون تجاه النتائج التافهة التى تحتل صفحات قسم من مباحث الرياضيات الأولية •

ان سبب خيبة هذا العلم فى أن يحافظ على شهرته ، هو أن الأفكار الأساسية فيه لا توضح للطالب مجردة عن الطريقة الفنية التى

ابتدعت لتيسير عرض تلك الآراء فى أمثلة معينة • وعلى ذلك يجد المتعلم المسكين نفسه ، كما يحرز بعض المعلومات ، يتخط فى جملة من التفاصيل لا تربط بينها فكرة عامة • لا شك فى أن المهارة الفنية شرط أول للفعاليات الفكرية القيمة ؛ اذ كيف تذوق مثلاً نغمات (ملتون) الشعرية ، أو وجد (شلى) اذا كان علينا أن تهجى الكلمات ، ولسنا واثقين بمعرفة أشكال الحروف على انفراد ؟ وبهذا المعنى لا يوجد طريق معبد فى كيفية تحصيل العلم • الا أن قصر الانتباه من جهة ثانية على الطرق الفنية وصرف النظر عن الاهتمام بالآراء العامة لا يقل خطأ عما سبق ، وهو شأن المتحذلقين •

ليس الغرض من الفصول الآتية تعليم الرياضيات ، بل جعل المتعلم قادراً - منذ البدء - على معرفة ماهية هذا العلم ، وافهامه لماذا يعد بحكم الضرورة أساس التفكير الصحيح فى دراسة الظواهر الطبيعية • وكل اشارة تالية الى استنتاجات تفصيلية فى أية ناحية كانت من نواحي هذا العلم ، ستذكر على سبيل المثال ، وسيعنى بجعل الفكرة العامة للموضوع مفهومة ، على ما قد يعترض بين حين وآخر من عمليات فنية أو رموز لا يفهمها القارئ أوردناها لغرض الايضاح •

يتعرف معظم الناس بالرياضيات أول مرة عن طريق دراسة الحساب فان $2 + 2 = 4$ تتخذ فى العادة نموذجاً للقضايا الرياضية البسيطة التى يعرفها كل أحد فالحساب اذن موضوع صالح لأن يتخذ أساساً للكشف عن أبرز ميزة لهذا العلم أن أمكن • وأول حقيقة ملحوظة

عن الحساب ، هى استخدامه فى كل شئ : فى الأذواق والأصوات والتفاح وفى الزوايا وفى خواطر العقل وعظام الجسم ؛ لأن طبيعة الأشياء لا دخل لها فى الأمر بتاتا ، فان $2 + 2 = 4$ تصح فى كل الأشياء ، لذلك نَسجل أن الميزة البارزة للرياضيات هى أنها تتعامل بصفات وآراء تنطبق على الأشياء لمجرد أنها أشياء ، أى بصرف النظر عن كل المشاعر الخاصة أو العواطف أو الاحساسات المرتبطة بها بأى شكل كانت . وهذا هو المقصود بالقول : « ان الرياضيات علم مجرد » .

والنتيجة التى توصلنا إليها جديرة بالتأمل ، فمن الطبيعى أن نظن أن العلم المجرد لا يمكن أن يكون ذا أهمية كبيرة فى أعمال الحياة البشرية ؛ لأن بحوثه لا تتطرق الى ما له فائدة حقيقية . ومما يذكر هنا أن للكاتب (سويفت) رأيين فى هذا الأمر ذكرهما فى سياق قصته عن رحلة (كلفر) الى جزيرة (ليوتا) ، فهو يصف رياضيتى ذلك البلد بأنهم قوم سخفاء العقول وخيالون لا خير فيهم ، وأن الرجل منهم لا ينيق من تأملاته الا اذا لطم وجهه ، ولهم خدم مختصون بذلك . ويصف خياطا رياضيا قاس له طولـه (أى طول كلفر) بالربعية (Quadrant)^(١) ثم استنتج له بقية قياساته مستعينا بالمسطرة والفرجار وكانت النتيجة أن خاط له ثوبا لا يصلح له . ومن ناحية ثانية حكم

(١) وهى آلة تستعمل فى وجدان المسافات والارتفاعات، تشبه السكستانت - السدسية - الا أن تقسيماتها تقع على ربع دائرة ، لا على سدسها .

رياضيو (لپوتا) فى البلاد ، وأستطاعوا أن يحفظوا سيطرتهم على رعاياهم
باختراعهم العجيب لجزيرة « ممغطة » تعوم فى الهواء ، الا أن
(سوفت) فى الحقيقة عاش فى وقت غير ملائم للسخرية من الرياضيين
المعاصرين اذ كان قد ظهر توا كتاب (نيوتن) : « الأصول
Principia » (١) ، وهو احدى القوى العظيمة التى غيرت العالم
الحديث • فكان (سوفت) كمن يسخر من الزلزال •

ان مجرد تدوين قائمة بما أنجزته الرياضيات من أعمال باهرة ،
ليس بالطريقة الوافية لاعطائنا فكرة عن أهميتها ، ونحن جديرون
أن نفكر قليلا فى الوصول الى السبب الأسمى الذى يجعل الرياضيات ،
بسبب كونها علما مجردا محضا ، تبقى أبدا من أهم موضوعات الفكر •
ولنحاول أن نوضح لأنفسنا بجلاء لماذا يجب أن ننحو فى تعليقاتنا
لنظام الحوادث وترتيبها نحوا رياضيا •

تأمل كيف تتلازم جميع الحوادث ، فنحن حين نرى البرق نصغى
لسماع الرعد ، وحين نسمع هزيم الرياح نستشرف الى أمواج البحر •
وفى برد الخريف تتساقط الأوراق ، وحيثما نظرتنا نجد نظاما سائدا
وأمورا مترابطة بحيث اذا وقعت بعض الحوادث استطعنا أن نتكهن بما
سيجرى بعدها • وتقدم العلم انما يستند الى الكشف عن هذه الصلات
والى العمل بحذق وصبر لبيان أن حوادث هذا العالم الدائم التغير ،

(١) واسمه الكامل Principia Mathematica Philosophie

Naturalis

ان هى الا مثل من ارتباطات أو علاقات عامة قليلة ندعوها بالقوانين •
وهدف الفكر العلمى أن يستتج العالم من الخاص ، والدائم من العارض •
ويعدّ سقوط تفاحة ودوران كوكب حول الشمس وتعلق الهواء
بالارض - فى نظر العلم - أمثلة لقانون الجذب العام • وامكانية تحليل
أشد الحوادث العرضية تعقدا الى عناصرها لبيان أنها مظاهر مختلفة لقانون
ثابت ، هى النزعة المهيمنة على التفكير الحديث •

لفكر الآن فى نوع القوانين التى نريدها لتحقيق تحقيقا تاما هذا
المثل العلمى الأعلى • انا نتعرف الحقائق الخاصة بالعالم المحيط بنا
بوساطة حواسنا ، فيها نسمع ونذوق ونرى ونشم ونشعر بالحر والبرد
وندفع ونلمس ونتألم ونقتشعر • وكل هذه احساسات شخصية بحتة •
فان ألم سنّى لا يمكن أن يكون ألم سنك ، وبصرى لا يمكن أن يكون
بصرك • بيد أننا نعزو أصل هذه الأاحساسات الى العلاقات بين الأشياء
التي تؤلف العالم الخارجى • وعليه لا يقتلع طبيب الأسنان ألم السن
ولكنه يقتلع السن • وليس ذلك حسب ، بل نحن نحاول أيضا أن
تتصور العالم مجموعة واحدة من الأشياء المترابطة التي تؤثر فى احساسات
الناس كافة فلا يوجد عالم من الأشياء خاص بحواسى ، وعالم آخر
خاص بحواسك ، ولكنه عالم واحد نوجد فيه معا • انها السن نفسها
للطبيب والمريض كليهما ، وان العالم الذى نسمعه ونلمسه هو العالم
نفسه الذى نراه •

فمن السهل اذن أن نفهم أن المطلوب هو وصف العلاقات بين

هذه الأشياء الخارجيه وصفا لا يعتمد على حاسة مخصوصة ، ولا على مجموعة الحواس لانسان بعينه ، وأنه يجب أن نصف القوانين التي يؤيدها سير الحوادث في عالم الأشياء الخارجيه وصفاً حيادياً جامعاً - ان امكن - بحيث تكون هي هي للعمى والصم ، أو لمخلوقات أرقى منّا فهماً ، كما هي للرجل الاعتيادي ♦

ونحن اذا ما تركنا احساساتنا الانية جانبا ، فالقسم الاكثر فائدة فيما يتبقى من مداركنا - لوضوحه واحاطته - يتألف من الفكر العامة عن الخواص المجردة الأساسية للأشياء ، أغنى الأفكار الرياضية المجردة المذكورة سالفاً ♦ وهكذا حدث أن البشرية أخذت تسير خطوة خطوة في البحث عن وصف رياضي لخواص الكون دون أن تدرك مغزى ما تقوم به ♦ اذ بهذه الوسيلة وحدها يمكن تكوين فكرة عامة لسير الحوادث طليقة من قيود ناس بأعيانهم ، أو احساسات بعينها . مثال ذلك أننا اذا سئلنا ، ونحن على مائدة ، وفي يد أحدنا تفاحة يأكلها : ما الشيء الذي كان في متناول حاسة بصرى ، وحاسة لمسك ، وحاستى ذوقه وشمه ؟ كان جوابنا جميعاً : تفاحة ♦ الا أن العلم فى تحليلاته النهائية يرمى الى وصف التفاحة ، بدلالة أوضاع ذراتها وحركاتها ، ذلك الوصف الذى يتجاهلنا جميعاً : أنا وأنت وهو ، كما يتجاهل البصر واللمس والذوق والشم ♦ وهكذا تزودنا الآراء الرياضية ما يستلزمه الوصف العلمى لسير الحوادث ، لأنها آراء مجردة ♦

ويساء فهم هذا الأمر احيانا بسبب التفكير فيه فى نطاق ضيق ،

فقد كان لدى (فيثاغورس) لمحبه عنه حين قال : « ان العدد لهو أصل
جميع الأشياء » كما أن الاعتقاد في العصور الأخيرة أن التفسير النهائي
لكل الأشياء يوجد في ميكانيك (نيوتن) ، ليس هو في الواقع الا
تمهيدا الى الحقيقة القائلة : ان العلم كلما تقدم نحو الكمال كان رياضيا
بأرائه . ♦

الفصل الثاني

المتغيرات

VARIABLES

بدأت نشأة الرياضيات (علما) حين برهن أحد الناس - ويرجح أنه كان يونانيا - على قضايا لا تتقيد بأشياء معينة خاصة ، بل تنطبق على (أى) الأشياء ، أو على أشياء (ما) • وكان اليونانيون أول من أحدثوا هذه القضايا فى الهندسة ، بل ان علم الهندسة هو أعظم ما نتجه اليونان فى الرياضيات • أما الجبر ، فانه مع التمهيدات اليسيرة التى خلفها المتأخرون من رياضى اليونان ، مرت عليه عصور قبل أن تنهيا له بداية موفقة •

وقد ساعد استعمال الحروف ، بدل الأرقام الحسابية المعينة ، على تكوين آراء عامة فى الجبر تبحث عن (أى) مقدار ، أو عن مقدار (ما) دون تحديده • مثال ذلك ، أننا اذا قلنا فى الحساب ان: $2 + 3 = 3 + 2$ تكون تلك حالة خاصة • أما فى الجبر ، فالتنا نضع ذلك بصورة عامة فنقول : اذا مثلت س ، ص (أى) عددين كانا ، فان $س + ص = ص + س$ • كذلك بدلا من قولنا $2 < 3$ نقول على وجه

التعميم : اذا كانت س (أى) عدد فلا بد من وجود عدد (ما) ، أو أعداد ، مثل ص بحيث تكون (ص < س) ولا بأس من الإشارة عرضا الى أن الفرض الأخير - ويتجلى كونه فرضا حين يوضع بصيغته النهائية الدقيقة - ذو أهمية كبيرة لكل من الفلسفة والرياضيات ، فعنه تنبثق فكرة اللانهاية • وربما كان تقدم الجبر - ونقول (ربما) لأن ما سذكركه هو من باب الحدس - متوقفا على معرفة الأرقام العربية التى تم بادخالها اهمال استعمال الحروف الهجائية اهمالا نهائيا فى الرياضيات كأعداد معينة • ذلك الأمر الذى نبه الرياضيين على الاستفادة من هذه الحروف لما فى ذلك من تيسير فنى للدلالة على كميات غير معينة كما نقصد بقولنا (أى) عدد او عدد (ما) • فالرومانيون مثلا كانوا يعبرون عن سنة ١٩١٠ بالحروف Mdecccx ، مع أننا نعبر عنها بالأرقام ١٩١٠ ، وبذلك انفتح المجال أمامنا لاستعمال الحروف فى الرياضيات لأغراض أخرى •

وبعد ظهور الجبر اخترع (نيوتن) و (ليبتز) حساب التفاضل ، وعقب ذلك ركود فى تقدم فلسفة العلوم الرياضية فيما يخص بالآراء التى سردناها آنفا • ولم يدرك الرياضيون أهمية الفكرتين (أى) و (ما) وكونهما أساسيتين فى طبيعة الرياضيات الا قبل سنوات قليلة حيث نجم عن ذلك أبواب جديدة فى العلوم الرياضية ليتوغل فيها من شاء من الباحثين •

ولنذكر الآن بعض النصوص الجبرية البسيطة لنعرف معرفة

تمقيت كيتب تتولد الأفكار الأساسية :

- ١ - (أيا) كانت قيمة س العددية فإن $٢ + ٢ = ٢ + س$.
 - ٢ - لقيمة (ما) من قيم س العددية يكون $٢ + ٣ = ٣$.
 - ٣ - لقيمة (ما) أو قيم (ما) من قيم س العددية يكون $٢ + ٣ < ٣$.
- وأول مسألة جديدة بالملاحظة هي معرفة المعاني التي يمكن أن تنطوي عليها كلمة (ما) كما استعملت هنا . ففى المثال الأول نقول :
- لما كانت س $٢ + ٢ = ٢ + س$ صحيحة مهما ، أو (أيا) كانت قيمة س ، فهى اذن صحيحة لكل قيمة (ما) من قيم س ، وهكذا فإن (أيا) بهذا النوع من الاستعمال تعنى (ما) ، وان (ما) تتضمن فى معناها (أيا) .
- أما فى المثال الثانى فلا توجد الا قيمة واحدة لـ س تجعل $٢ + ٣ = ٣$ وهذه القيمة هى العدد ١ . فتدل (ما) فى هذه الحالة على قيمة واحدة ، أى العدد ١ . وأما فى المثال الثالث فإن كل قيمة لـ س أو أية قيمة لـ س (أكبر) من الواحد تجعل $٢ + ٣ < ٣$. ولذلك تدل (ما) فى هذا المثال على كل مقدار أو عدد يقع بين الواحد و (أى) وتدخل فى ذلك الحالتان النهائيتان (الواحد و أى) .
- وانه لا أمر طبعى أن نستعيز عن النصين (٢) و (٣) بالسؤالين
- الآتيين :

- ٢ - ما قيمة س التي تجعل س $٢ + ٣ = ٣$ ؟
 - ٣ - ما قيم س التي تجعل س $٢ + ٣ < ٣$ ؟
- وإذا نظرنا فى (٢) وجدنا أن س $٢ + ٣ = ٣$ هى معادلة . ومن

السهل أن نرى أن حلها هو $s = 3 - 2 = 1$ ، وإذا ألقينا هذا السؤال ووضعنا معادلة تتضمن معناه كالمعادلة $s + 2 = 3$ سمينا s بالمجهول ، وغاية حل المعادلة هو وجدان هذا المجهول • ولا ريب في أن للمعادلات أهمية كبيرة في الرياضيات ، بل قد يلوح أول وهلة كأن النص (٢) يعرب عن حقيقة أدق وأعمق مما ينطوى عليه النص (٢) غير أن ذلك خطأ واضح ، لأن فكرة (المتغير) الذي لا قيمة محدودة له ، والذي نعر عنه بقولنا (أى) و (ما) ، هى فى الحقيقة الفكرة المهمة فى الرياضيات • أما فكرة المجهول واستخراج قيمته بحل المعادلة بأقصر الطرق ، فهى على أهميتها تعد ثانوية • ومن الأسباب التى تجعل الكثير من بحوث الجبر الأولية تافهة ، هو شغل الكتب الدراسية بحل المعادلات • وهذه الملاحظات بأعيانها تنطبق على المتبينة (٣) إذا ما قولت بالنص الوارد فى (٣) •

ان معظم الدساتير الرياضية المهمة وخصوصا ما يتضمن الفكرة (ما) ، يحتوى على أكثر من متغير واحد ، فان البحث مثلا عن أزواج الأعداد s ، v التى تحقق العلاقة $s + v = 1$ (سواء أكانت هذه الأعداد صحيحة أم كسرية) ينطوى على فكرة متغيرين مترابطين هما s ، v • وفى الحالات التى يوجد فيها متغيران تخطر على البال الفكرتان الواردتان فى النوعين الأساسيين من النصوص السابقة فنقول مثلا : (١) مهما كان زوج الأعداد s ، v أو (أيا) كانت القيمة العددية لكل من s ، v فان $s + v = s + s$ و (٢) لبعض

الأزواج من العددين s ، v أو لا أزواج (ما) من القيم العددية لـ
 s ، v يكون $s + v = 1$.

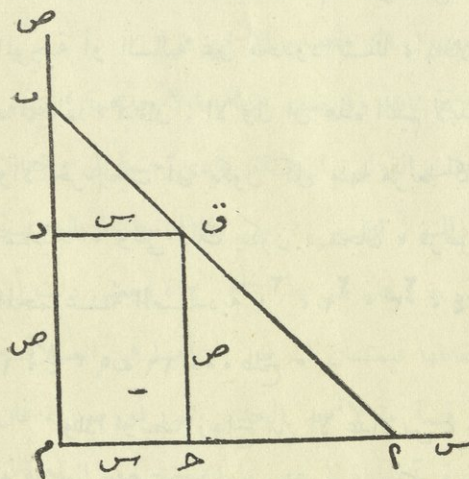
ان النص الوارد في (٢) يدعونا الى النظر في مجموعة أزواج
 الأعداد التي تتربط فيما بينها بعلاقة ثابتة كالعلاقة بين s ، v حين
 يكون $s + v = 1$ واحدى فوائد الدساتير التي تدخل في الفكرة
 الواردة في النص (١) أى التي تصح في أى زوج كان من الأعداد ،
 أنها تساعد على وضع الدساتير من النوع (٢) بأشكال مترادفة لا حصر
 لها مثال ذلك : ان العلاقة $s + v = 1$ يمكن أن توضع بأشكال
 مترادفة شتى ، مثل $s + v = 1$ ، $(s - v) + 2v = 1$ ، $6s + 6v = 6$
 $6s = 6 - 6v$ الخ . وهى على اختلافها فى الشكل تنص على العلاقة
 نفسها بين s ، v ، وبذلك يتاح للرياضى الماهر أن يستخدم الشكل
 الذى يراه أكثر صلاحا للوصول الى مقصده الا تى .

إذا ارتبط حدان بعلاقة ثابتة وفرضت قيمة ما لأحدهما ، فليس
 من الصواب فى الأعم الأغلب القول : ان ذلك يؤدى حتما الى وجدان
 قيمة معينة للثانى . مثال ذلك : ان s ، v اذا ارتبطتا بالعلاقة
 $v = 2s$ وفرضنا أن $s = 4$ فان $v = 8$ ، ومعنى ذلك أن
 كل قيمة موجبة لـ s تقابلها قيمتان لـ v . أما فى العلاقة
 $s - v = 1$ اذا فرضت قيمة ما لأحد الحدين s أو v ، فان
 الحد الآخر يمكن أن يأخذ قيمة مقابلة لا حصر لها تحقق هذه العلاقة .
 وفى الموضوع مسألة مهمة أخرى تستدعى الانتباه ، وتبين عند

« درسنا للعلاقة $S + V = 1$ ففي هذه العلاقة إذا اقتصرنا على التعامل بالأعداد الموجبة فقط (سواء أكانت صحيحة أم كسرية) وجب أن لا تزيد قيمة كل من V أو S على الواحد الصحيح • فإذا تجاوزت قيمة أحدهما هذا المقدار لا يمكن أن تكون قيمة الثاني موجبة ، وعلى ذلك تحصر هذه العلاقة « مجال » اختيار قيم للمتغير S بالأعداد التي لا تزيد على الواحد الصحيح ، وكذلك الحال في « المجال » المفتوح لـ V • ولنلق نظرة الآن على العلاقة $V = 2 - S$ فان اقتصرنا - عند إعطائنا أزواج القيم للمتغيرين S ، V التي تحقق هذه العلاقة - على الأعداد الصحيحة فقط موجبة كانت أو سالبة ، وجدنا أن مقابل كل عدد صحيح نعد قيمة لـ V يوجد عدد صحيح لـ S ، ووجدنا أيضا أن « مجال » اختيار القيم للمتغير V من بين الأعداد الصحيحة الموجبة أو السالبة غير محدود بتاتا ، بخلاف قيم S التي يحد من « مجالها » قيدان : الأول ان هذه القيم لا بد أن تكون موجبة دائما ، والآخر يجب أن يكون كل منها مربعا كاملا كيما تكون V عددا صحيحا • وعلى ذلك يكون « مجال » فرض قيم لـ S محصورا في المجموعة العددية $1, 2, 3, 4, \dots$ الخ ، أى من بين $1, 4, 9, 16, \dots$ الخ •

وإذا ارتبط أزواج من الأعداد S ، V بعلاقة ما ، فان دراسة الخواص العامة لهذه العلاقة تيسر كثيرا باستعمال الرسم البياني ، وهالك التفصيل :

ارسم المستقيمين المتعامدين م س ، م ص ، ثم خذ على امتداد م س ، س من الوحدات (بأى مقياس كان) واحسب ذلك ممثلاً للعدد س ، وكذلك خذ على امتداد م ص ، ص من الوحدات (بأى مقياس كان) وعد ذلك ممثلاً للعدد ص ، وبذلك يكون طول م ح = (راجع الشكل ١) الواقع على م س يساوى س من الوحدات وطول م د الواقع على م ص يساوى ص من الوحدات . فاذا أكملنا متوازي الأضلاع م ح ق د تحدث لدينا نقطة ق ، وهى تقابل العددين س ، ص ، وهكذا فان كل نقطة واحدة يقابلها زوج من الأعداد ، وكل زوج من الأعداد تقابله نقطة واحدة . ويطلق على زوج الأعداد اسم (الاثنائين) ويمكن تبيان النقاط التى تحقق اثنائياتها علاقة ثابتة بين متغيرين بوضوح ، وذلك بامرار خط بها ان كانت جميعا على خط ، أو بتظليل مساحة ان



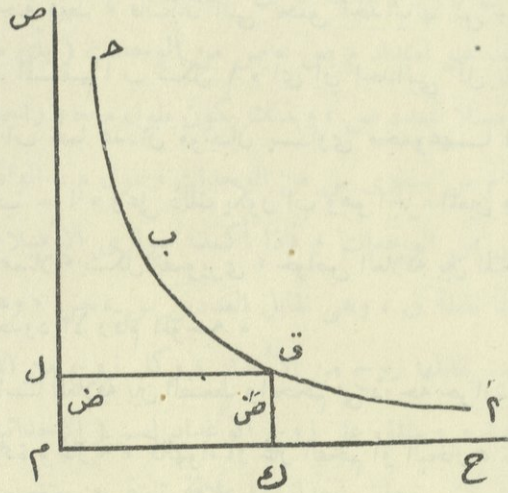
شكل (١)

كانت تنع جميعاً على تلك المساحة . وفي الأحوال التى يمكن تمثيل العلاقة بين المتغيرين بمعادلة ما مثل $ص + س = ١$ أو $ص^٢ = س$ تقع النقاط التى تحقق اثنائياتها العلاقة المبينة بالمعادلة الأولى جميعاً على خط مستقيم ، أما المبينة في المعادلة

الثانية ، فتقع على خط منحن • وإذا أخذنا بنظر الاعتبار
 الأعداد الموجبة فقط ، فالنقاط التي تحتمل أحداثياتها $s + v = 1$
 تقع على الخط المستقيم ab شكل ١ « أى أن أحداثيات كل نقطة واقعة
 على المستقيم ab هما عددان موجبان يساوى مجموعهما ١ » ، وفيه
 $1 = 1$ ، $m = 1$ ، $b = 1$ • وعلى ذلك يكون ab وهو الجزء المعين من المستقيم
 غير المحدود ممثلاً ، بشكل تصوري ، خواص العلاقة بين المتغيرين s ،
 v ضمن حدود الأرقام الموجبة •

ان دراستنا للعلاقة بين الضغط والحجم فى درجة حرارة ثابتة لكتلة
 معلومة من مادة « غازية » كالهواء أو غاز الفحم أو البخار ، تمدنا بمثال
 آخر للعلاقة بين متغيرين • فان فرضنا أن H هى حجم الغاز بالأقدام
 المكعبة ، وأن P هى مقدار الضغط بالباوندات ، لوجدنا من تطبيق
 القانون المدعو بقانون بويل أن حاصل ضربهما ، أى $H \cdot P$ ، يساوى
 كمية ثابتة بشرط أن لا تتبدل درجة الحرارة خلال فترة التغير •
 ولنفرض مثلاً أن كمية الغاز فى الأحوال المحيطة بها تجعل من الممكن
 أن يكون $H \cdot P = 1$ (مع علمنا أن مقدار العدد على الجهة اليسرى
 من المعادلة لا أهمية رئيسية له) فلأجل وضع صورة بيانية لما سبق
 نرسم الخططين المتعامدين H ، P (راجع الشكل ٢) ونأخذ على
 أولهما البعد m كـ ليمثل العدد H من الوحدات الحجمية (أى عدد
 الأقدام المكعبة) ونأخذ على الثانى البعد m لـ ليمثل العدد P من
 وحدات الضغط (أى عدد باوندات الضغط على الانج المربع الواحد) ،

ثم نكل المتوازي الأضلاع م ل ق ل ، فنجد نقطة ق • وهى تمثل حالة



شكل (٢)

الغاز الذى يكون حجمه ح اذا كان الضغط الواقع عليه ض • واذا كانت أحوال هذا الجزء من الغاز بحيث أن ح ض = ١ فان النقاط ق جمعاء التى تاظر أية حالة كانت من حالات هذا الجزء من الغاز تقع على الخط المنحنى ا ب ح ، وهو يتضمن جميع النقاط التى تكون فيها كل من ح ، ض موجبة ويكون ح ض = ١ وعلى ذلك يصور هذا المنحنى صورة بيانية للعلاقة بين الحجم والضغط • فحين يكون الضغط كبيرا جدا تكون نقطة ق المناظرة لهذه الحالة واقعة بالقرب من ح أو وراءها على الجزء غير المرسوم من المنحنى ، ويكون الحجم اذ ذاك صغيرا جدا • أما اذا كان الحجم كبيرا ، فان نقطة ق تقع بالقرب من ا ،

أو أبعد منها ، ويكون الضغط قليلا ، وربما احتاج المهندس الفيزيائي
الى معرفة الضغط الذى يولد حجما معيناً ، وبهذا ندخل فى قضية البحث
عن المجهول ض اذا كان ح عدداً معيناً الا أن ذلك يقع فى الأحوال
الخاصة فقط . ولكننا اذا أردنا الوقوف على الخصائص العامة للغاز
وتصرفاته ، وجب أن نأخذ بنظر الاعتبار الشكل العام لجميع المنحنى
أ ب ح ، وكذلك خواصه العامة ، ونقول بتغيير آخر : ان الفكرة
الأساسية حقيقة هى فكرة زوج المتغيرين اللذين يحققان العلاقة ض ح
= ١ ، وهذا المثال يوضح لنا لماذا تعد فكرة المتغيرات أساسية فى
الرياضيات النظرية والتطبيقية .

الفصل الثالث

اساليب التطبيق

METHODS OF APPLICATION

ان الكيفية التي ظهرت بها فكرة المتغيرات المتصلة فيما بينها بعلاقة
ما ، في التطبيقات الرياضية ، جديرة بالتفكير • واذا ما خصصنا لها
شيئا من الوقت ، فستجلى أفكارنا في الموضوع بكليته •
لنبداً بأيسر الأمثلة ، ولنفرض أن القدم المكعبة الواحدة من البناء
تكلف من المال درهما واحداً ، وأن الدينار كما هو معلوم يساوى ٢٠
درهماً ، فيترتب على ذلك - في جميع الأحوال المعقدة التي تلازم انشاء
بيت جديد في وسط الاحساسات والعواطف المتنوعة التي تتنازع المالك
والمعمار والبناء والعامل والمتفرج ، وترافق عادة نماء البيت وتكامله -
أن العلاقة بين السعة المكعبة وكلفة المالك تبقى ثابتة بموجب الدستور
المفروض • أى اذا كانت س عدد الأقدام المكعبة في البناء ، وكانت ص
كلفته مقدرة بالدنانير ، فإن $٢٠ \text{ ص} = \text{س}$ • ومع أن المفروض أن هذه
العلاقة بين س ، ص تصح عند انشاء أى بيت كان لأى مالك كان ،
لا يمكن أن يزعم أن الاحساس بحجم البيت وتكاليفه وادراكهما حدث

بتأثير حاسة خاصة ، أو قوة معينة من قوى العقل ، أو أى انسان معين كان . فهما (أى الحجم والكلفة) يذكران ذكرًا عامًا مجردًا ، من غير اكتراث لحالة المالك الفكرية حينما يطلب منه دفع التكاليف .

والفكر أبعد من ذلك قليلا لنرى ماذا يعنى كل هذا . ان انشاء بيت هو مجموعة معقدة من الأعمال ، وانه ليستحيل البدء بتطبيق القانون ، أو تحقق صحته الا اذا استطعنا أن نميز خلال السير العام للحوادث أن مجموعة أعمال معينة تؤلف حالة خاصة هي بناء بيت ، ونقول بايجاز : يجب أن نعرف أن هذا بيت عند مشاهدته ، ونعرف أدوار انشائه ، وفي أثناء هذه الأدوار التي عزلناها بالفكر عن سائر الطبيعة يجب أن يكون عنصرا الكلفة والسعة التكميلية قابليين للتحديد . وإذا ما تم تعيين مقدار كل منهما ، وكان القانون صحيحا ، وجب أن تحقق هذه المقادير الدستور : ٢٠ ص = س .

فهل هذا القانون صحيح ؟ ان كل ذى خبرة بالمباني يعلم أننا قدرنا السعر عاليا بعض الشيء ، وأن البيت الفخم وحده هو الذى يتطلب مثل هذا السعر . وهذا يثير أمرا آخر يجب ايضاحه ، وهو أننا عند اجرائنا الحسابات المتعلقة بالدستور ٢٠ ص = س لا يهمننا أن يكون القانون صحيحا أو مغلوطا فيه ، ونقول أكثر من ذلك : لا يهمننا شيء حتى المعانى التي أعطيناها لـ س ، ص وهي أن تمثل أولاهما الأقدام المكعبة والأخرى الدنانير . وذلك أننا فى خلال البحث الرياضى لا نتناول فى الحقيقة سوى دراسة خواص العلاقة بين زوجى العددين

س ، ص • أما النتائج التي تتوصل اليها ، فتصلح أن تنطبق بالدقة نفسها كما لو كانت ص عدد السماكين وس عدد الأسماك بحيث يكون القانون المفروض أن معدل ما يصطاده السمك الواحد هو ٢٠ سمكة • ان الحقيقة الرياضية الموثوق بها في هذا البحث تتعلق بالنتائج التي تبين خواص العلاقة ٢٠ ص = س حسب ، أى بين زوجي العددين المتغيرين س ، ص ، مع أنه لا توجد حقائق رياضية موثوق بها بأى شكل كان لما يكلفه البناء الفعلى لأى بيت كان • وعلى ذلك لا يكون المقانون تام الصحة ، ولا تكون النتائج التي ينتجها مضبوطة حق الضبط ، ولعلها كانت مغلوطة فيها الى حد كبير • لا شك في أن كل ذلك يبدو واضحا جدا ، الا أنه في الحالات التي هى أشد تعقيدا ، لا يوجد في الحقيقة خطأ أكثر شيوعا من القول بأن الحسابات الرياضية اذا كانت طويلة ومدققة فان انطباقها على قسم من حقائق الطبيعة يجب أن يكون حتميا ؛ ذلك أنه لا يمكن أن تكون نتيجة قضية ما أكثر صحة من مقدماتها المفروضة • ولما كانت جميع الحسابات الرياضية عن سير الطبيعة تبدأ بقانون طبيعي مفروض ، كالقانون الذى فرضناه آنفاً لكلفة البناء ، فان حساباتنا في وجوب وقوع حادثة ما ، مهما كانت مدققة ، لا تنفى الشك الذى يخامرنا في صحة القانون • ويكاد يكون من المحقق أن النتيجة الدقيقة التي قررها القانون لا تكون مضبوطة كما ينبغي • وعلى ذلك لا تنطبق النتيجة الواقعية على النتيجة المحسوبة انطباقا تاما حتى في أفضل الأحوال • ولما كنا لا نملك قوة قادرة على الملاحظة

بتدقيق مثلى ، نرى أن قوانيننا غير المضبوطة تكفى فى بلوغ أغراضنا .
لنوجه الآن أنظارنا الى قضية واقعية ، وهى قانون الجذب لـ
(نيوتن) • فان هذا القانون ينص على أن قوة الجذب بين كل جسمين
تناسب طردا مع حاصل ضرب كتلتيهما ، وعكسا مع مربع البعد بينهما •
فاذا رمزنا بـ K_1 ، K_2 لكتلتى الجسمين محسوبة بالباوندات و
بـ (ل) للبعد بينهما بالأفمال ، فان القوة المسالطة على أحد الجسمين ،
الناشئة عن جذب الآخر له باتجاه ذاته ، تتناسب مع $\frac{K_1 K_2}{L^2}$ ،
وعلى ذلك يكون فى الامكان أن ندون أن هذه القوة تساوي $\frac{B K_1 K_2}{L^2}$ ،

حيث تكون ب عددا معينا يتوقف مقداره على القيمة المطلقة لهذا
التجاذب ، وعلى المقياس الذى نختاره لذرع القوى • وان رغبتا فى أن
نجرى حسابنا بدلالة قوى كوزن كتلة مقدارها باوند واحد ، فمن
السهل أن نرى أن العدد الذى تمثله ب يكون فى غاية الصغر • فحينما
نفرض أن كلا من K_1 ، K_2 ، ل تساوى واحدا ، يصبح المقدار
 $\frac{B K_1 K_2}{L^2}$ دالا على قوة التجاذب بين كتلتين متساويتين ، مقدار
كل منهما باوند واحد والبعد بينهما ميل واحد ؛ ويكون قدر التجاذب
فى هذه الحالة لا أهمية له •

ومهما كان الأمر فقد توصلنا الى دستور لقوة التجاذب • فاذا
سمينا هذه القوة ق ، يكون ق = $\frac{B K_1 K_2}{L^2}$. وهذا الدستور

يعطينا صلة الترابط بين المتغيرات ق ، ك ، ل ، ل .

وجاء فى قصة نيوتن التى نعرفها جميعا فى الكشف عن قوة الجاذبية ، أن (نيوتن) كان جالسا فى بستان ، وشاهد تفاحة تسقط من شجرة ، فلمعت فى ذهنه فورا فكرة الجاذبية العامة • وليس من المهم أن تكون الصيغة النهائية للقانون قد خطرت بباله حين كان فى بستان ، أو فى مكان آخر ، فلا شك أنه كان آنذاك فى مكان ما ، ولكن بالنسبة لأغراضنا يكون من الأفضل تثقيفاً ، أن نعم النظر فى الكمية الكبيرة من الآراء التمهيدية ، التى تمخضت عنها عقول كثيرة خلال عصور عدة ، وكانت ضرورية لامكان صوغ هذا القانون المضبوط •

فقد لزم أولاً تكوين عادة التفكير الرياضى ، وابتكار أساليب البحث الرياضية مما سبق أن أوضحناه فى الفصلين السابقين ؛ ولولا ذلك لاستحال على (نيوتن) أن يفكر فى دستور يعبر عن القوة بين أى كتلتين كانتا لاى بعد كان بينهما • ان المصطلحات المستعملة كقوة وكتلة ومسافة كانت هى أنفسها محتاجة الى تعريف • ولناخذ أيسرها وهى (المسافة) ، فقد يبدو من الواضح بمكان أن تتصور أن الاشياء المادية تؤلف شكلا هندسيا معينا ، بحيث تكون الأبعاد بين أجزائه المختلفة قابلة للقياس باحدى وحدات الطول كالليل أو اليارد • ويكاد يكون ذلك أول ما يلوح للخطر عند دراسة مظاهر البنيان المادى، وهو الثمرة التدريجية لدراسة الهندسة ونظرية القياسات • ومع ذلك يستعمل حتى الآن فى قسم من الحالات ، نوع آخر من التفكير لقياس الأبعاد •

ففى الأرضين الجبلية تقاس المسافات بالساعات • فان تركنا المسافة جانباً فان القوة والكتلة أشد غموضاً منها • والحقيقة ، ان التفهم التام للأفكار التى اراد (نيوتن) أن يعبر عنها بهذه الكلمات نمتى ببطء ، وان (نيوتن) نفسه كان أول من أحاط علماً بالقواعد العامة للديناميكا • أخطأ الناس فى فهم العلم طوال العصور الوسطى بتأثير (أرسطو) • وكان من حسن حظ (نيوتن) أنه جاء بعد سلسلة من عظماء الرجال الذين أعادوا تشييد العلم ومهدوا الطريقة الصحيحة للتفكير به ، وخصوصاً (غاليلو) فى ايطالية ، وكان ذلك خلال القرنين السابقين له ، فجاء هو فأكمل عملهم بعد أن أصبحت لديه فكرة واضحة ومعينة عن القوة والكتلة والمسافة مع ادراك أهميتها وامكان تطبيق ذلك على سقوط التفاحة وحركات الكواكب • وهكذا عثر على قانون الجذب ، وبرهن على أنه الدستور الذى يصح دائماً عند تطبيقه على هذه الأنواع المختلفة من الحركة •

ان الأمر الحيوى فى استخدام الدساتير الرياضية هو أن تكون لديك فكرة واضحة وتقدير صحيح لامكان انطباقها على الظواهرات التى تكون فى قيد الملاحظة • ولم يكن أجدادنا الاقدمون أقل منا تأثراً بأهمية الظواهرات الطبيعية ولا بالرغبة فى اتخاذ الوسائل الفعالة لضبط تتالى الحوادث ، فقد كانوا - بحكم الآراء الخاطئة التى يقولون بها - يقومون بالاحتفالات الدينية الفخمة لتسهيل ميلاد القمر الجديد ، كما أنهم يضحون القرايين لانقاذ الشمس فى أثناء أزمة الكسوف •

وليس فى الأمر ما يدعو الى اعتقاد أنهم كانوا أكثر بلادة منا ، الا أنه فى تلك الحقبة من الزمن لم يتيسر المجال للتجمع البطيء للآراء الواضحة الصائبة •

ويتضح الأسلوب الذى نمت به العلوم الطبيعية حتى اتخذت شكلا قابلا للمعالجة بالطرق الرياضية ، من دراسة تاريخ النماء التدريجى لعلم الكهر مغناطيسية • ان عواصف البرق والرعد تحدث كثيرا فترعب الانسان وتروعه ، وكذلك الحيوان • ولذلك كانت منذ أقدم الأزمنة مبعث نظريات وهمية خرق ، غير أن الكشوف العلمية الحديثة المتعلقة بالكهرباء ربما كانت أكثر غرابة من كل تعليل سحرى تصوره المتوحشون • ثم جاء اليونانيون فعلموا أن الكهرمان « ويدعى باليونانية بالالكثرون » اذا ذلك يجذب الأجسام اليابسة الخفيفة • وفى عام ١٦٠٠ ب • م نشر الدكتور (كلبرت) من أهل (كوايچستر) أول كتاب فى الموضوع اتبع فيه الطريقة العلمية بعض الشيء ، فقد نسق قائما بالمواد التى تشابه الكهرمان فى خصائصها ، كما يعود اليه أيضا فضل وجدان علاقة بين الظاهرتين الكهربائية والمغناطيسية وان كانت غامضة • وازداد تقدم المعرفة فى أوائل القرن السابع عشر وطوال القرن الثامن عشر ، فصنعت مكائن قليلة للحصول على الشرارات الكهربائية ، كما اخترعت جرة ليدن التى أمكن بواسطتها تقوية نتائج هذه المؤثرات • وهكذا تم الحصول على شىء من المعلومات المنظمة ، الا أنه لم تكن قد وجدت بعد آراء رياضية تنطبق على هذا الموضوع • وفى سنة ١٧٥٢

أرسل (فرنكلين) طائفة بين الغيوم ، وأثبت أن البروق كهربية •
وفى تلك الأثناء كان الصينيون منذ عصر قديم « ٦٢٣٢ ق • م »
يتفنون بخاصية البوصلة ولكنهم - كما يبدو - لم يربطوا ذلك بفكرة
نظرية كائنة ما كانت • ان التطورات التى تعد بحق عظيمة فى حياة البشر
تعود بأصولها الى البحث عن المعرفة لأجل المعرفة • فان البوصلة لم
تعرف فى أوربة الا فى أواخر القرن الثانى عشر بعد الميلاد ، أى
بعد مرور أكثر من ٣٠٠٠ عام على بدء استعمالها فى الصين • ولكن
الأهمية التى اكتسبها علم الكهرمغناطيسية ، منذ ذلك الحين فى كل
ناحية من الحياة البشرية ، لم تنشأ عن الميل العملى الفائق للأوربيين ،
بل نجمت عن حقيقة أن الظواهر الكهربائية والمغناطيسية قام على دراستها
فى الغرب رجال سيطر عليهم الميل النظرى المجرد •

ثم ظهر التيار الكهربى ، ويعود الفضل فى الكشف عنه الى اثنين
من الايطاليين ، وهما (غالفانى) عام ١٧٨٠ م ، و (فولتا) عام ١٧٩٢ م •
وقد ادى هذا الاختراع الى احداث سلسلة جديدة من الظواهر تتطلب
البحث والتنقيب • وبهذا أصبح لدى العالم العلمى اذ ذاك ثلاث
مجموعات من الحوادث منفصلة بعضها عن بعض ، متجانسة فى نوعها ،
وهى : تأثيرات الكهرباء الساكنة التى تتولد من مكائن الكهرباء الاحتكاكية ،
والظواهر المغناطيسية ، وتأثيرات التيارات الكهربائية • ومنذ ختام القرن
الثامن عشر فصاعدا أخذت خطوط الأبحاث الثلاثة هذه تتشابك
وتتصل حتى تألف منها علم الكهرمغناطيسية الحديث الذى ينذر حياة

البشر بالانقلاب •

ثم بدأت الآراء الرياضية بالظهور ، ففي العشر السنوات من ١٧٨٠ الى ١٧٨٩ م برهن (كولبس الفرنسى) أن الأقطاب المغناطيسية تتجاذب أو تتدافع بنسبة عكسية لمربع المسافة بينها ، وأن القانون نفسه ينطبق على الشحن الكهربائية • ومما يلفت النظر التماثل العجيب بين هذين القانونين وقانون الجاذبية • وفى سنة ١٨٢٠ م اكتشف (أورستد الدينماركى) أن التيارات الكهربائية تبدى قوة تؤثر فى المغناطيس • وتلا ذلك على الفور تقريبا أن وضع (أمير الفرنسى) دستور هذه القوة بشكل صحيح ، وبرهن أيضا أن التيارات الكهربائية يؤثر بعضها فى بعض • « ان العمل التجربى الذى أثبت به (أمير) قانون العمل الميكانيكى بين التيارات الكهربائية ، يعد من أعظم الانجازات العلمية الالامعة • ويظهر أن كلا من النظرية والتجربة بزغت من فكر (نيوتن الكهربى) تامة النماء بالغلة أشدها بحيث كانتا كاملتى الشكلين ولا يمكن الطعن فى كمالهما ، وقد استخلصنا بدستور جامع يمكن به أن نستنتج جميع الظاهرات الكهربائية ، وهو الذى سيقى أبدا الدستور الرئيسى لعلم الالكتروديناميك^(١) » •

أما القوانين الخطيرة للحث الكهربى بين التيارات ، أو بين التيارات والمغناطيس ، فقد تم الكشف عنها على يد (مايكل فردى)

(١) عن الفصل الثالث من الجزء الثانى من كتاب (الكهربى والمغناطيس) تأليف كلارك ماكسويل • والمقصود بـ (نيوتن الكهربى) هو أمير الفرنسى •

فى عام ١٨٣١ - ١٨٣٢ م • فلما سئل : « ما فائدة هذا الكشف ؟ »
أجاب « وما فائدة الطفل ؟ انه يكبر ليكون رجلا » • وقد كبر طفل
(فردى) وصار رجلا وهو الآن أساس جميع المستحدثات الكهربائية
وقام (فردى) كذلك باعادة تنظيم الوجهة النظرية لهذا العلم • أما
آراؤه ، التى لم تفهم على حقيقتها بالضبط فى عالم العلم اذ ذاك ، فقد
وسعها (كلارك ماكسويل) فى سنة ١٨٧٣ م ، ووضعها فى قالب
رياضى • وبالبحوث الرياضية التى قام بها (ماكسويل) تبين له أنه تحت
احوال خاصة يجب أن تتولد اهتزازات أو موجات كهربية • ثم ارتأى
فورا أن الموجات التى تولد النور هى كهربية • وأصبح رأيه هذا موضع
الفحص لتحقيق صحته ، فبين أن نظرية النور بكاملها ليست الا فرعاً من
علم الكهرباء الواسع • ثم تلاه (هرز الألمانى) فاقتفى خطوات (ماكسويل)
ونجح عام ١٨٨٨ م فى احداث الموجات الكهربائية بطرق كهربية بحتة ،
وصارت تجاربه أساس التلغراف اللاسلكى • وفى السنوات الأخيرة
جرت كشوف أساسية مهمة ، ولا يزال هذا العلم مستمرا على النماء
والتقدم من حيث الأهمية النظرية والفائدة العملية •

ان هذه النظرة الخاطفة التى القيناها على تطور هذا العلم وتقدمه ،
تصور لنا كيف أمكن - بالتجارب التى أوحت شيئاً فشيئاً -
بالآراء العلمية السديدة ، وأوحت الآراء العلمية بتجارب جديدة -
أن تنصهر مجموعة من الظواهر المتفرقة ، بل التافهة ، ليتكون منها علم
واحد متماسك ، نرى فيه أن نتائج الاستدلالات الرياضية المجردة ،

المستددة الى عدد قليل من القوانين البسيطة المفروضة ، تزودنا تفسيراً
لسير الحوادث المتشابكة المتراكبة العقد •

وأخيراً فلنخط الى ما وراء العلوم الخاصة بالكهرمغناطيسية
والضوء ، لنعم وجهة نظرنا الى أبعد من ذلك ، فنوجه انتباهنا الى نماء
الفيزياء الرياضية التى تعد فصلاً عظيماً من فصول التفكير العلمى ،
ولنسأل أولاً : ما مجمل قصة نمائها بأيسر حالاتها ؟

انها لم تبدأ علماً واحداً ، ولم تكن ثمرة زمرة معينة من الناس ؛
فقد كان الرعاة البابليون يرقبون السماء ، كما كان عمال الحكومة فيما
بين النهرين ومصر يمسحون الارضين • أما رجال الدين والفلاسفة ،
فكانوا يطيلون التفكير فى الطبائع العامة للأشياء • فكانت المجموعة
الواسعة من أعمال الطبيعة تنسب الى قوى خفية لا يسبر غورها •
والمثل السائر « تهب الرياح حيث شاءت » يعبر تعبيراً دقيقاً عن جهلهم
المطبق اذ ذاك بوجود قواعد ثابتة تتالى على حسب تفاصيلها الظاهرات
الطبيعية • ولكنهم فى الأعم كانوا يعلمون ، كما هو معلوم الآن ،
انتظام وقوع هذه الحوادث ، غير أنه لم يكن فى الامكان تقصى اتصالها
بعضها ببعض ، بل لم تكن لديهم معلومات عن كيفية البدء بتأليف مثل
هذا العلم • ومعظم ما أمكن تتجه كان القليل من الحزر والتخمين
المبعثر عن طبائع الأشياء ، ومثلهم فى ذلك كمن يرمى فى الظلام ،
فيصيب حيناً ويخطئ حيناً آخر •

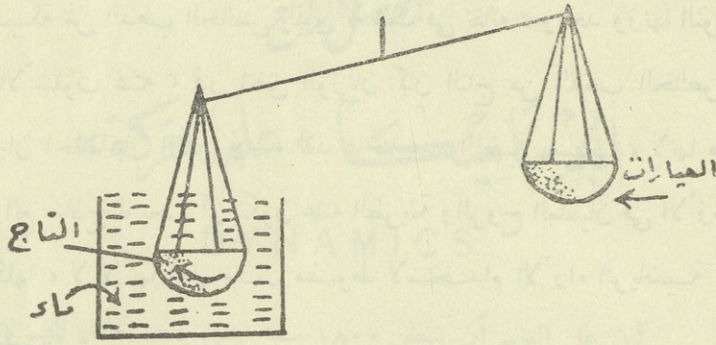
وفى الوقت عينه تتج مسح الأرض علم الهندسة ، كما كشفت

مراقبة السماء عن النظام الشمسى ودقة انتظامه • ثم جاء جماعة من اليونانيين المتأخرين ، مثل (أرشميدس) ممن كانت لهم نظرات صائبة فى أوليات قضايا الموائع والبصريات • وفى الحق كان «أرشميدس» ، الذى جمع العبقرية الرياضية الى اصالة الرأى الفيزيائى ، خليقا أن يوضع فى صف (نيوتن) الذى جاء بعده بألفى عام ، فيعد من مؤسسى الفيزياء الرياضية • وكان (أرشميدس) يعيش فى (سيركوز) المدينة اليونانية العظيمة فى (صقلية) • ويقال : انه أحرق سفن الرومان الذين كانوا يحاصرون هذه المدينة « ٢١٠ - ٢١٢ ق.م » بأن ركز عليها أشعة الشمس بواسطة المرايا • ومع أن هذه القصة بعيدة الاحتمال جدا ، فانها شهادة حسنة على ما كان يتمتع به بين معاصريه من شهرة فى البصريات • على أنه قتل فى ختام هذا الحصار ، وجاء فى احدى الروايات المنقولة عن (بلوتارخ) عند سرده سيرة (مارسيلس) ، أن أحد الجنود الرومان وجده غارقا فى دراسته لشكل هندسى كان قد رسمه على أرض الحجرة التربة ، فأراد أسره ، فلم يقطع أمره بسرعة ، فقتله • ومن الحق أن يقال ، لصيانة سمعة القادة الرومان ، أنهم كانوا قد أصدروا أوامره للجنود بأن لا يعتدى عليه • وفى الأخبار قصة أخرى مشهورة تحتوى على شهادة ضمنية قوية جدا بعبقريته ، فالكشف الذى يعزى اليه يليق ، عن جدارة ، بمثل نبوغه فى التنبؤ الرياضى والفيزيائى • ومن حسن الحظ أنه يسير بحيث يمكن ايضا هنا بالتفصيل ، لأنه من أحسن الأمثلة السهلة للإبانة عن طريقة

استخدام الآراء الرياضية في الفيزياء •

يقال ان (هيرو) ملك (سيراكوز) أرسل الى أحد الصائغة بمقدار من الذهب ليصنع منه له تاجا ، ثم ظن أن الصائغ قد اختلس قسما من الذهب ووضعه في التاج فلزا رخيضا سبكه مع سائر الذهب ، فأرسل بالتاج الى (أرشميدس) وطلب اليه أن يفحصه • ولو حدث ذلك في هذا الزمان لأمكن اجراء عدد غير محدود من الفحوص الكيميائية ، ولكن كان في ذلك الزمان على (أرشميدس) أن يفكر فيه من حيث هو أمر لم يسبقه مثيل ، ثم خطر له الحل وهو يستحم في الحمام ، فما كان منه الا أن قفز واخذ يجرى في الشوارع نحو القصر صارخا « يوريكا • يوريكا » أي وجدتها وجدتها • ولو عرفنا اليوم الذي وقعت فيه هذه الحادثة ، لوجب علينا أن نحتفل به بأنه يوم ميلاد الفيزياء الرياضية • ولما كان (نيوتن) جالسا في بستانه كان العلم قد بلغ أشده • ولقد كان كشف (أرشميدس) هذا عظيما حقا ، اذ رأى أن الجسم حين يغمر بالماء يدفعه الماء المحيط به الى أعلى بقوة تساوى محصلتها وزن الماء الذي أزاحه • ويمكن اثبات هذا القانون نظريا بالاستناد الى القواعد الرياضية لعلم الموائع كما يمكن تحقيق صحته بالتجربة • وعلى ذلك فاذا كان وزن التاج في الهواء « و » من الباوندات ووزن الماء المزاح عندما يغمر التاج بالماء « و~ » من الباوندات فان القوة الاضافية الى أعلى ، اللازمة لموازنة التاج ليبقى معلقا في الماء ، تكون « و - و » من الباوندات •

ويمكن استخراج مقدار هذه القوة بوزن الجسم وهو معلق داخل



شكل (٣)

الماء كما ترى في الشكل (٣) . فإذا كان مقدار الميزان في الكفة اليمنى ، ق من الباوندات ، يكون الوزن الظاهري للتاج وهو مغمور بالماء ق من الباوندات ، ويصبح بذلك لدينا :

$$ق = و - و$$

$$أي و = و - ق$$

$$و = \frac{و}{و - ق} \dots \dots \dots (١) \text{ التي يمكن فيها وجدان}$$

كل من و ، و بدقة مرضية بطريقة الوزن السهلة . وهكذا يعرف المقدار

$$\frac{و}{و} \text{ من المعادلة (١) . ولكن } \frac{و}{و} \text{ هذه هي نسبة وزن التاج الى وزن}$$

ما يساوى حجمه من الماء ، وهي نسبة تبقى ثابتة لكل كتلة من المعادن اذا كانت من المادة نفسها ، ويطلق عليها الآن اسم الوزن النوعي للمادة ،

وتتوقف على طبيعة المادة الجوهرية لا على شكلها ولا على مقدارها •
ولذلك ما كان على (أرشميدس) ليفحص ذهب التاج ، الا أن يأخذ
سبيكة من الذهب الخالص الذى لا شك فى نقائه ، ويجد وزنها النوعى
بالأسلوب عينه ، فإن اتفق الوزنان كان التاج من الذهب الخالص ،
وان اختلفا بان الفش فيه • لقد عالجنا هذه القضية بأسهاب ، لأنها مثال
رائع ساذج لما يجب أن تكون عليه الطريقة والروح العلميان فى الأزمان
كلها ، لا لأنها أول مثال مضبوط لاستخدام الآراء الرياضية فى
الفيزياء •

ان قتل جندي روماني لـ (أرشميدس) يرمز الى تطور علمي هو من
الدرجة الأولى فى خطورته ، وهو انتقال سيادة العالم الأوربي من
اليونانيين المعروفين بولعهم بالعلوم المجردة الى الرومان الواقعيين •
ولقد عرف اللورد (بيكونسفيلد) فى احدى رواياته الرجل الواقعي بأنه
الرجل الذى يمارس غلط أجداده • كان الرومانيون شعبا عظيما ولكنهم
أصيبوا بلعنة العقم الفكرى التى تلازم الواقعية فى العادة ، فلم يحسنوا
شيئا من المعلومات التى ورثوها عن أجدادهم ، واقتصر تقدمهم على قسم
من التفاصيل الفنية الساذجة فى المنشآت الهندسية ، ولم يكونوا من
الحالمين أصحاب الخيال الذين يطيلون التأمل حتى يصلوا الى وجوه
نظر جديدة تمنحهم سلطانا على قوى الطبيعة ، أساسيا واسعا • فلم نسمع أن
رومانيا فقد حياته لاغراقه التام فى تأمل الاشكال الهندسية •

الفصل الرابع

الدِّينَامِيكَا "علم الحركة"

DYNAMICS

كان على العالم أن ينتظر ١٨٠٠ سنة حتى يجد خلفاء للفيزيائيين الرياضيين اليونان • ففي القرنين السادس عشر والسابع عشر للميلاد قام ايطاليون عظماء وخاصة (ليوناردو دافنسي) المقتن (١٤٥٢ - ١٥١٩) و (غاليليو) (١٥٦٤ - ١٦٤٢) باعادة الكشف عن السر الذي كان معروفا لدى (أرشميدس) ، وهو ربط الأفكار الرياضية المجردة بالتحريات التجريبية عد دراسة الظواهر الطبيعية ، وفي الوقت نفسه كان تقدم الرياضيات البطيء ، وتجمع المعلومات الفلكية المضبوطة ، قد جعل الفلاسفة الطبيعيين في وضع أقوى على البحث والتتقيب • كما أن حب فرض الذات بدافع الاعتزاز بالنفس والنهم في التجارب الشخصية الذي كان مستفحلا بين مفكرى ذلك العصر حملهم على القيام بالتجارب قياما شخسيا ليشاهدوا الحوادث بأنفسهم ، حتى كشفوا بالتعليل الاستقرائي عن سر العلاقة بين النظرية الرياضية والتجارب العملية • ولذا كان قيام (غاليليو) الفيلسوف برمى عدة أثقال من قمة برج پيزا

المائل عملا باهرا يميز ذلك العصر • ومع أنه لا يخلو زمن من رجال
للفكر ورجال للعمل ، فقد كانت الفيزياء الرياضية ثمرة عصر تميز
رجالها بأن جمعوا بين القدرة الفكرية والرغبة في العمل •

ان اسقاط أثقال من قمة برج يعد صورة رائعة لعمل أساسى فى
المعرفة لا يقل قيمة عن أول ادراك للآراء الصحيحة فى علم الحركة
(الديناميكا) ، وهو العلم الأساسى للموضوع برمته • ولقد كانت نقطة
الجدل الخاصة تدور حول الأجسام المختلفة الأوزان ، هل تسقط من
ارتفاع واحد فى أوان واحد ؟ ذلك أن (أرسطو) ، وكان يعد قوله
بالاجماع ، القول الفصل فى ذلك العصر ، قد رأى أن سقوط الأجسام
الثقيلة أسرع من سقوط غيرها • ولكن (غاليلو) أصر على أنها تسقط
فى الزمن نفسه ، وبرهن على صحة قوله باسقاط أثقال مختلفة من أعلى
البرج المائل • أما الخروج عن هذه القاعدة الذى يشاهد أحيانا ، فله
أسباب : كخفة الوزن القصوى ، أو السرعة الكبيرة ، وذلك لما لمقاومة
الهواء من تأثير لولاه لظهر القانون مضبوطا •

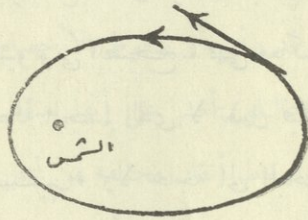
لم يكن نجاح تجربة (غاليلو) نتيجة حدس موفق ، بل كان ثمرة
آرائه الصحيحة فى القوة الاستمرارية والكتلة • ولذكر الآن نص
القانون الأول للحركة كما وضعه (نيوتن) وهو : كل جسم ، يستمر
على حالة السكون ، أو الحركة المنتظمة على خط مستقيم ، ما لم تجبره
قوة مؤثرة على تغيير حالته ؛ فقد كان هذا القانون نشيد الانتصار على
المكابرين المغلوبين أكثر من أن يكون دستورا جامدا • ولفهم القضية

التي هي تيد البحث نحذف جملة : « أو الحركة المنتظمة على خط مستقيم » لنحصل على ما يمكن عدّه قانون (أرسطو) المضاد ، وهو : كل جسم يستمر على حالة السكون ، ما لم تجبره قوة مؤثرة على تغيير حالته .

ان هذا الدستور الاخير المغلوط فيه يزعم انه في حالة انعدام القوة يستمر الجسم على حالة السكون ، وعلى ذلك يتطلب الجسم اذا كان في حالة الحركة قوة لاستمرار تلك الحركة ، فاذا توقفت هذه القوة عن العمل توقفت الجسم عن الحركة . أما وجهة نظر القانون النيوتوني الصحيح ، فهي معاكسة لذلك كل العكس ، فانها تنص على أن حالة الجسم الذي لا تعمل فيه قوة ما هي الحركة المنتظمة على خط مستقيم . ولا حاجة الى البحث عن قوة ولا عن تأثير خارجي مسبب لذلك . وبعبارة أخرى : ان الحركة المنتظمة على خط مستقيم هي التي تلازم الجسم دائما ، وان حالة السكون هي حالة خاصة بهذا النوع من الحركة وذلك حين تكون السرعة صفرا ، وتبقى كذلك . وعليه نحن لا نبحث عن مؤثر خارجي حين يكون الجسم في حركة الا لتعديل التغيرات التي تطرأ على معدل السرعة أو وجهتها . وما دامت حركة الجسم بمعدل السرعة وبالوجهة أنفسهما فلا حاجة الى الاستعانة بقوى أخرى لتعديل حركته .

ان الفرق بين وجهتي النظر يتجلى بالرجوع الى نظرية حركة الكواكب السيارة ، فقد قال (كوبرنيكوس البولندي) المولود في

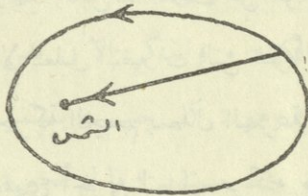
مدينة ثورن من بروسية الغربية (١٤٧٣ - ١٥٤٣) : ما أيسر الأمر لو تصورنا أن الكواكب السيارة ، وفيها الأرض ، هي التي تدور حول الشمس في أفلاك تقرب من شكل الدائرة ! ثم جاء من بعد ذلك (كبلر) الرياضي الألماني فبرهن في سنة ١٦٠٩م على أن أفلاك السيارات هي ، في الحقيقة والفعل ، قطوع ناقصة ، وهي نوع خاص من المنحنيات البيضية الشكل . وسنعرض لها بتفصيل أكثر . وفي اثر ذلك ورد السؤال عن ماهية القوى التي تحفظ الكواكب في هذه الحركة ، فعلى حسب النظرية الخاطئة القديمة التي كان يتمسك بها (كبلر) يجب



شكل (٤)

أن يتطلب دوام السرعة الفعلية نفسها قوة ، ولذلك أخذ يتطلع الى النوى المماسية كما يظهر من الشكل الـ (٤) ولكن على حسب نظرية (نيوتن) ينتج أنه في حالة عدم وجود قوة ما يجب أن تسير الكواكب السيارة

الى الأبد بسرعتها الحالية على خط مستقيم ، فترحل نهائياً عن الشمس .



شكل (٥)

ولذلك كان على (نيوتن) أن يفتش عن قوة تحنى مسير الحركة ليأخذ شكل القطع الناقص ، وقد رأى أن هذه القوة يجب أن تكون موجهة

نحو الشمس كما يظهر من الشكل الـ (٥) • والحقيقة ان هذه القوة
هى قوة جذب الشمس تعمل على حسب قانون التناسب العكسى لمربع
المسافة الذى مر ذكره •

ظهر علم الآلة (الميكانيك) عند اليونان من ملاحظة نظرية
الكفاءة الآلية (الميكانيكية) الحاصلة من استعمال العتلات ، ومن النظر
فى المسائل المختلفة ذات العلاقة بأوزان الأجسام ، ولكنه وضع أخيراً
على أسسه الصحيحة فى أواخر القرن السادس عشر وفى أثناء القرن
السابع عشر ، كما سبق أن بيناه • ولم يكن لوجدان تعليل لسقوط
الأجسام حسب ، بل لوجدان نظرية علمية لحركات الكواكب وهذا
فى الأغلب • ومنذ تلك الأيام أخذ علم الحركة (الديناميكا) على
عاتقه واجبا أكثر طموحا حتى ليتمكن الادعاء الآن بأنه المرجع الأخير
للعلوم الطبيعية الأخرى ، وأن هذه العلوم ليست إلا فروعا له • ويلخص
السبب لهذا الادعاء بما يأتى : ان الصفات المختلفة للأشياء التى ندركها
بحواسنا ليست إلا أسلوبنا الخاص بنا لادراك ما يطرأ من تغير على
مواقع الأشياء فى الفراغ • مثال ذلك : نفرض أننا ننظر الى (كنيسة
وستمنستر) ، فقد كانت قائمة فى محلها كالطود بلونها الرمادى عصورا
خلت ، إلا أن هذا اللون الرمادى الذى يضافى على البناء ما يقوى شعورنا
برسوخه ، ليس هو على حسب النظرية العلمية الحديثة إلا أسلوبنا فى
تعرف الحركات السريعة للذرات النهائية المؤلفة لوجه البناء ، التى تنقل
اهتزازاتها مادة تسمى الأثير • ثم اننا لو وضعنا أيدينا على حجارته

للاحظنا برودتها ، وانتظام درجة حرارتها ، وذلك مما يسبغ على المكان روح الطمأنينة والهدوء • ولكن هذا الشعور بدرجة الحرارة ، لا يدل الا على انتقال الحرارة من اليد الى الحجر أو العكس • وليست الحرارة على حسب العلم الحديث الا تهيج ذرات الجسم وحركتها • وأخيرا يبدأ الأرغن فنسمع الصوت ، وهو نتيجة تموج الهواء وضربه طبلة الاذن • ان محاولة تفسير الظواهر الطبيعية تفسيراً حركياً (ديناميكياً) هو العمل على شرحها ببيانات ذات طابع عام تبين أن المادة كذا ، أو الجسم كذا ، كان في المحل كذا ، وهو الآن في محل آخر ، وهكذا نصل الى الفكرة الأساسية العظيمة للعلم الحديث ، وهى أن احساساتنا كافة هى نتيجة الموازنات بين الهياكل المتغيرة للأشياء فى الفراغ بأوقات مختلفة • ويترتب على ذلك أن قوانين الحركة ، أى قوانين التغير فى هياكل الأشياء ، هى القوانين النهائية فى علم الطبيعة •

واستخدام الرياضيات فى بحوث الفلسفة الطبيعية يجعل العلم يعمل بترتيب وانتظام ، ما يعمل به التفكير المعتاد بطريقة النبه والاتفاق أى المصادفة • فحين نتحدث عن كرسى نقصد شيئاً نراه ، أو نحس به بطريقة ما ، مع أن معظم حديثنا يتضمن افتراض وجود ذلك الشيء مستقلاً عن بصرنا أو احساسنا • أما فى الفيزياء الرياضية ، فتتخذ طريقاً معاكساً لذلك ، اذ يجرى تصور الكرسى دون الرجوع الى أحد بالذات ومن غير سلوك طريقة خاصة بالاحساس • وتكون النتيجة أن الكرسى يصبح فى الذهن طائفة من الذرات فى الفراغ ، أو مجموعة

من الالكترونيات ، أو جزءاً من الأثير في حالة الحركة ، أو على ما تصفه الآراء العلمية الشائعة • أعنى أن العلم يحيلها الى اشياء متحركة في الفراغ يؤثر بعضها في حركات بعض • والعناصر أو العوامل المختلفة التي تدخل في حسابات مجموعة من الحالات المتصورة ، ما هي الا الأشياء التي بها يتم تعيين مواقع الأشياء في الفراغ : كأطوال الخطوط ، وسعة الزوايا والمساحات والحجوم • ومن البديهي أن حقيقة الحركة والتغير تتطلب - الى العناصر الهندسية المذكورة - ضرورة ادخال معدلات التغير لهذه العناصر ، ونعنى بذلك السرعة ، والسرعة الزاوية والعجلة وما شاكلها • وعلى هذا تتعامل الفيزياء الرياضية بالعلاقات بين الأعداد المتغيرة التي يفترض أنها تمثل العلاقات في الطبيعة بين قياسات هذه العناصر الهندسية ومعدل تغيرها • فالقوانين الرياضية تتعامل دائماً بالمتغيرات ؛ ولا يعوز عن هذه المتغيرات بالأرقام الا اذا اقتضى الحال ، بين وقت وآخر ، تحقق صحة القانون بالرجوع الى التجربة ، أو اذا أريد تطبيقه للوصول الى نتائج خاصة •

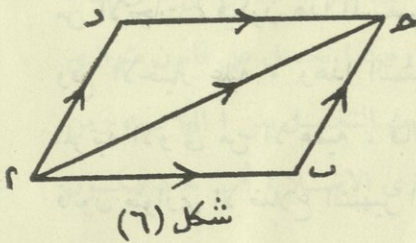
ان الشيء الممتع عن العالم حين تتصوره على هذا الشكل المجرد وأنت تدرس الفيزياء الرياضية - التي تقصر عنايتها على مواقع الاشياء وأشكالها ، وما يطرأ عليها من تغير - هو أن حوادث هذا العالم المجرد كافية في تفسير احساساتنا • مثال ذلك : ان سماع الصوت ناشئ عن اضطراب ذرات الهواء بطريقة خاصة ، فعند حدوث مثل هذا الاضطراب ، أو الموجات الهوائية كما يسمونها ، يسمع الناس الاعتياديو السمع صوتاً •

وبمثل ذلك أو بما يوازيه - على حسب وجهات النظر المختلفة باختلاف الناس - تحدث احساساتنا الأخرى لأسباب أو بواعث طبيعية • ويبدو أن أفكارنا ذاتها تتغير بالتناظر مع هيئة المنح وحركته • فإذا أصاب المنح ضرر فإن الأفكار يلحق بها الضرر أيضا • أضف الى ذلك أن حوادث هذا العالم المادى تتعاقب على حسب قوانين رياضية لا تعباً با احساساتنا وعواطفنا وتفكيرنا •

ومما لا ريب فيه أن هذا هو المظهر العام لعلاقة الفيزياء الرياضية بعواطفنا واحساساتنا وتفكيرنا • وكم أثار هذا البحث من جدل ومقالات طويلة ! وليست بنا حاجة الآن الى أكثر من ملاحظة واحدة ، وهى أن هذه الحالة بأسرها نشأت ، كما رأينا عن محاولتنا لوصف عالم خارجى بشكل (تفسيرى) لعواطفنا واحساساتنا ، ولكنه ، أيضا ، عالم لا يتوقف جوهرياً على حواس معينة ولا على شخص معين • فهل هذا العالم يا ترى قصة خرافية ليس غير ؟ ان القصة الخرافية تكون خيالية وكيفية : ولو وجدنا حقاً مثل هذا العالم ، لوجب أن يخضع لوصف متقن يحدد بالضبط اجزاءه المختلفة وعلاقاتها المتبادلة • ولكن العالم العلمى هذا ، يخضع لمثل هذا الفحص خضوعاً عظيماً ، بحيث يمكن استقصاء حوادثه والتكهن فيها باستعمال أداة الأفكار الرياضية المجردة • ويبدو من المؤكد أن ما لدينا ، هو التحقق الاستقرائى ، من فرضيتنا الاولى • ولكن يجب الاعتراف بأن البرهان الاستقرائى لا يمكن أن يكون حاسماً ؛ واذا كانت الفكرة بأسرها ، عن عالم دى وجود

مستقل عن حواسنا الخاصة ، خاطئة ، وجب أن نفسر بعناية الأسباب التي تجعل محاولتنا لوصفها ، بدلالة ما لدينا من الآراء الرياضية التي تنطبق عليها ، نتج مثل هذا النجاح الباهر .

وسنضرب تأنيثين في يبداء واسعة اذا نحن دخلنا في الشروح التفصيلية للقوانين الأخرى للحركة ، ولذلك سنحرر بقية هذا الفصل لشرح عدة من الآراء القيمة التي تعد أساسية لكل من الفيزياء الرياضية والرياضيات البحتة . وهي فكرة الكميات المتجهة وكيفية جمعها بقانون متوازي الاضلاع . لقد سبق أن علمنا أن قوام الحركة هو أن جسما ما كان في (أ) ثم صار في (ج) ، ولتحديد حركة الانتقال هذه من (أ) الى (ج) انتقلا كاملا يقتضى البت في أمرين : هما مقدار الحركة (أى طول أ ح) ووجهتها . ان كل شيء كهذا الانتقال ، مما يتعين بالضبط كما تعين هو ، أى بمجرد معرفة مقدار واتجاه يسمى بالمتجه Vector . مثال ذلك - ان تعريف السرعة يتطلب تحديد مقدار واتجاه ، اذ يجب أن يقال : انها كذا ميلا في الساعة ، وفي الوجة كذا . وخير مثال يوضح ضرورة وجود هذين العاملين وتمايزهما لتحديد السرعة ، هو



عمل ريان السفينة حيث يتصل بمروسيه
الكثيرين لتعيين هذين العاملين .
فيخبر رئيس المهندسين بعدد العقد
البحرية في الساعة التي يجب أن
تمخر السفينة بموجها ، ويخبر

مدير السكان بوجهة السير الذي يجب أن يستمر فيه على حسب،
البوصلة • ومعدل تغير السرعة ، أى ازديادها فى وحدة زمنية ، هو
كمية متجهة ايضا • ومثل ذلك يقال فى القوة بمعناها الحركى
(الديناميكى) أعنى أنها كمية متجهة • والحقيقة ان الطبيعة الاتجاهية
فى القوة تنشأ من الفور - على حسب القواعد الحركية (الديناميكية) -
من مماثلاتها فى الحركة والعجلة • ولكن هذه قضية ليست لنا حاجة
الى بحثها ، بل يكفى أن نقول هنا : ان القوة تعمل على الجسم بمقدار
معلوم ووجهة خاصة •

ان جميع المتجهات Vectors يمكن تمثيلها تمثيلا بيانيا بخطوط
مستقيمة ، وكل ما يطلب عمله للوصول الى ذلك هو أن ينظم (أولا)
المقياس الذى ستمثل بموجبه وحدات مقدار المتجه بوحدات من الطول ،
كأن يقال مثلا فى حالة السرعة أن الانج الواحد يمثل سرعة ١٠ أميال
فى الساعة ، أو فى حالة القوى أنه يمثل ما وزنه ١٠ أطنان و (ثانيا)
أن تكون وجهة المستقيم فى الشكل مطابقة لاستقامة المتجه Vector
وبعد ذلك نرسم مستقيما بهذه الواجهة بحيث يكون طوله المقدار المطلوب
من الانجات ، فيكون هذا المستقيم هو الذى يمثل المتجه بالمقياس الذى
وقع الاختيار عليه • وهذا التمثيل التصويرى للمتجهات ، يأتى فى
المرتبة الاولى من الأهمية ، فبالاعتماد عليه تتمكن من الاعراب عن
قانون متوازى الأضلاع الشهير الذى به تجمع المتجهات اذا كانت من
جنس واحد. وبوجهات مختلفة •

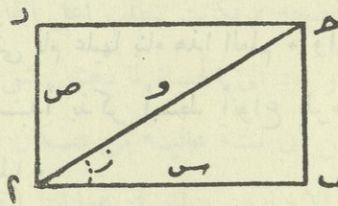
لنعد الآن المتجه $\vec{A}$ في الشكل الـ (٦) يمثل انتقال

جسم من A الى B ولنسمه متجه الانتقال Vector of transportation
فمما يدعو الى الملاحظة انه اذا صح امكان اختزال
الظواهر الطبيعية الى مجرد تغيير في المواقع ، كما بينا آنفا ، فان انواع
المتجهات الطبيعية كافة يمكن في الحقيقة اختزالها - بشكل من الاشكال -
الى هذا النوع الواحد . ويمكن الوصول الى النتيجة عينها للانتقال
النهائي من A الى B ، وذلك بأن يجرى النقل من A الى B ثم من B الى
 C ، أو باكمال متوازي الاضلاع AB C D ، والانتقال من A الى D ،
ثم من D الى C ، ويقال لهذه التنقلات التي اجريت بمثل هذا التتالي ،
أنها جمعت . وهذا هو مجرد تعريف لما نعينه بقولنا : (جمع التنقلات) .
ولنلاحظ أكثر من ذلك أننا اذا عدنا الخطوط المستقيمة المتوازية
خطوطا مرسومة بالوجهة عينها ، فيمكننا ان نعد الانتقالين من B الى C
أو من A الى D كاتتقال واحد حدث لجسمين كان موقعاهما البدائيان B ،
 A . وبهذه النظرة يجوز لنا القول بأن الانتقال من A الى D أجرى على
جسم ، أيا كان موقعه ، وليكن B . وعلى ذلك يكون في وسعنا القول
بأن الانتقال من A الى C يمكن تصوره كمجموع انتقالين من A الى B ،
ومن A الى D ، حدثا بأي ترتيب كان . وهكذا نحصل على قانون متوازي
الاضلاع لجمع التنقلات ، وهو اذا حدث التنقل من A الى B ، ومن
 A الى D ، فما علينا الا ان نكمل المتوازي الاضلاع AB C D فيكون
المجموع $\vec{A}$ C .

ويلوح كل ذلك بديا كأنه أمر مصطنع ، مع اننا يجب ان نلاحظ
أن الطبيعة نفسها هي التي تقدم لنا هذه الفكرة • مثال ذلك ، أن باخرة
تسير في وجهة أ د (الشكل - ٦) وفيها رجل يقطع ظهرها عرضا ، فلو
أن الباخرة كانت واقفة لبلغ نقطة ب في دقيقة واحدة • ولكن في تلك
الدقيقة تكون نقطة البداية على ظهر الباخرة قد وصلت الى د ، وتحول
طريقة من أ ب الى د ح بحيث اصبح هذا الانتقال ، بالواقع ، من أ الى
ح على سطح البحر • على أن هذا المجموع ظهر لنا محللا الى انتقالين :
الاول من أ الى ب بالنسبة للباخرة ، والآخر من أ الى د وهو انتقال
الباخرة واذا نظرنا الى عنصر الزمن ، وهو دقيقة واحدة ، فإن أ ح في
الشكل يمثل حينئذ سرعة الرجل ، وذلك انه اذا كانت أ ح تمثل عددا
من أقدام الانتقال فانها تمثل العدد نفسه من الأقدام في الدقيقة الواحدة ،
أي سرعة الرجل ، وعلى ذلك يمثل أ ب ، أ د سرعتين ، هما سرعة
الرجل بالنسبة لسطح الباخرة ، وسرعة الباخرة نفسها • ومن مجموعهما
تتألف سرعة الرجل النهائية • ويتضح من ذلك أن الأشكال والتعريفات
المتعلقة بهذه التنقلات يمكن تحويلها الى أشكال وتعريفات تتعلق بالسرع ،
وذلك بأن تكون التنقلات حدثت في وحدة زمنية • كذلك يمكن تحويل
الأشكال والتعريفات ذات العلاقة بالسرع الى أشكال وتعريفات عن
العجلة ، وذلك بأن تصور هذه الأشكال تمثل السرعة الاضافية في
وحدة الزمن •

يتضح مما سبق أن ما نعينه بجمع السرع المتجهة أو العجلات

المتجهة ، هو جمعها بقانون متوازي الأضلاع •
ولما كانت القوة - بحسب قوانين الحركة - تمثل بالعجلة المتجهة
التي تحدثها في جسم له كتلة معينة ، فإن جمع قوتين لمعرفة أثرهما
المشترك ، يكون على حسب قانون متوازي الاضلاع •
ونلخص ما تقدم بان جمع كل متجهين من جنس واحد من
المتجهات العلمية الأساسية كالانتقالات والسرع والقوى يتم بوجودان
محصلة متجهة على حسب قانون متوازي الأضلاع •



شكل (٧)

يعد المستطيل من أبسط
أنواع متوازيات الأضلاع ،
وهو في الرياضيات البحتة يدل
على علاقة كثيرة الوقوع بين
المتجه الواحد أ ح والمتجهين

المركبين المتعامدين ، أ ب ، أ د (الشكل - ٧) • فإذا فرضنا أن س ،
ص ، و ، تمثل عدد وحدات الطول في كل من أ ب ، أ د ، أ ح وان
ز تمثل عدد وحدات الزاوية ب أ ح ، فإن العلاقة بين س ، ص ، و ،
ز ، بأشكالها الكثيرة هي من الموضوعات الدائمة في الرياضيات البحتة ،
وتأثيرها تستخدم في حساب المتجهات الأساسية في الفيزياء الرياضية •
وهذا الشكل هو الجسر الرئيسي الذي يجب أن يتجازه نتائج الرياضيات
البحتة كيما يمكن استخدامها في حقائق الطبيعة •

الفصل الخامس رمزية الرياضيات

SYMBOLISM OF MATHEMATICS.

نعود الآن الى الرياضيات البحتة ، لننعم النظر في العدد الفكرية التي قام عليها بناء هذا العلم . وأول ما يثير اهتمامنا هو الرمزية فيه . وسنبداً بذكر أبسط أنواع الرموز ، وهي رموز الحساب المعروفة عالمياً .

لنفرض وقتياً ، أن لدينا أفكاراً واضحة عن الأعداد الصحيحة ، الممثلة بالاشارات أو الأرقام العربية 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 100, 101 الخ . . ان العرب هم الذين أدخلوا هذه الاشارات الى أوروبا ، ويقال انهم استقوها من منابع هندية ، وان أول مؤلف معروف عاليج موضوع الأرقام بصورة منتظمة ، هو كتاب وضعه رياضى هندي يدعى باسكارا (ولد سنة ١١١٤ م .^(١)) . على أن الظهور الفعلي لرموز الأرقام يمكن رجعه تاريخه الى القرن السابع الميلادى . ويحتمل انها اخترعت في الاصل في بلاد التبت . ان بحث

(١) اننى مدين بتفاصيل الحقائق التاريخية عن الرياضيات البحتة لكتاب « موجز تاريخ الرياضيات » تأليف W. W. R. Ball

تُريخ هذه الأرقام أمر تفصيلي بالنسبة إلى مقاصدنا
الحاضرة ، أما الأمر الممتع الذي يجب ملاحظته ، فهو
الصورة البليغة التي يعرضها هذا النظام العددي ، فيما
لنرموز الصالحة من أهمية عظيمة ، ذلك أن هذه الرموز ، تريح الفكر
من غناء أعمال ليست ضرورية ، فيتحرر لتفرغ لحل مسائل أعلا •
والواقع أنها أدت إلى ازدياد القابليات العقلية للنوع البشري • فقبل
استحداث الأرقام العربية ، كانت عملية الضرب شاقة ، أما عملية
القسمة ، حتى قسمة الأعداد الصحيحة ، فكانت تتطلب أعلى القابليات
الرياضية • وإن رياضيا غريقيا لو عاد إلى الحياة لما دهش لشيء من
علمنا الحاضر ، أكثر من دهشه من أن نسبة عالية من سكان أوروبا
الغربية ، تستطيع ، بتأثير التعليم الإلجباري ، إجراء عمليات القسمة
لأكبر الأعداد ، فقد كان ذلك في نظره ، من المستحيلات • أن توسع
نظام العددي وشموله الكسور العشرية ، لم ينجز إلا في القرن السابع
عشر • وبراعتنا الآن في حساب الكسور العشرية وإجراء أعمالها
بسهولة ويسر ، يكاد يكون النتيجة الخارقة للكشف التدريجي عن
نظام تام للعددية •

تعد الرياضيات ، في الأغلب ، علما صعبا وغامضا بسبب ما تستعمله
من الرموز العديدة • إذ من البديهي أن لا شيء أشد غموضا من رمزيه
لا نفهمها ، كما أنه من الصعب تتبع المقاصد في رمزية نفهمها جزئيا
ولم نعد استعمالها • شأنها في ذلك شأن الاصطلاحات الفنية لكل مهنة أو

حرفة ، فتلك أيضا لا تكون مفهومة لدى من لم يتدرب على استعمالها •
 على أن هذا لا يعنى أنها صعبة فى حد ذاتها ، بل هى على العكس من
 ذلك ، فهى انما استحدثت لتسهيل الأمور • ومن يتأمل الفكر الرياضية
 يجد فى الرمزية ، على الدوام ، تيسيرا عظيما ، وفيها عدا فائدها
 العلمية ، متعة ذهنية جزيلة ، ذلك أنها تمثل تحليلا لأفكار الموضوع ،
 بل تكاد تعطى صورة ناطقة للعلاقة بينها • واذا كان لدى احد شك فى
 فائدة الرموز فليدّون بالتمام ، ودون الاستعانة برموز رياضية أية
 كانت ، المعانى الكاملة التى تنطوى عليها كل من المعاملات الآتية ، التى
 تمثل شيئا من الدساتير الأساسية فى الجبر * :-

$$(١) \dots\dots\dots س + ص = ص + س$$

$$(٢) \dots\dots\dots (س + ص) + ع = ع + (س + ص)$$

$$(٣) \dots\dots\dots س \times ص = ص \times س$$

$$(٤) \dots\dots\dots (س \times ص) ع = ع (س \times ص)$$

$$(٥) \dots\dots\dots س(ص + ع) = (س \times ص) + (س \times ع)$$

ويسمى (١) و (٢) قانونى الابدال والربط فى الجمع و (٣) و (٤)
 قانونى الابدال والربط فى الضرب أما (٥) فيسمى قانون التوزيع الذى
 يربط الجمع بالضرب : وكمثال لذلك ، سنعبّر عن (١) دون استعمال
 الرموز ، فنقول اذا أضفنا عددا ثانيا الى عدد مفروض اياً كان نحصل على
 النتيجة نفسها كما لو أضفنا العدد المفروض الى العدد الثانى •

* راجع الملاحظة (أ) فى اخر الكتاب •

يتبين من هذا المثال ، أننا باستعانتنا بالرمزية ، نستطيع اجتياز
مراحل فى التعليل بواسطة العين وبصورة آلية (ميكانيكية) تقريبا ،
ما يتطلب ، بخلاف ذلك ، استعمال القوى العقلية العليا •

ومن الخطأ الفاحش الذى يعده فريق حقيقة مسلمة ، وهو الذى
كثيرا ما رددته كتب الحكم والامثال والسنن الخطباء الناصحين ، أن نقول
بان علينا أن نربى عادة التفكير فيما نعمل ، اذ أن القضية على النقيض
من ذلك • فالخضارة تتقدم بالاكثار من عدد العمليات المهمة التى نستطيع
اجراءها دون تفكير بها وان عملية التفكير ، يجب ادخارها لحين الحاجة
اليها • فهى أشبه ماتكون بفرقة الفرسان المعدة للاغارة ، حيث يكون عدد
الابطال المنتخبين محددا ، والحيل على أهبة ، ولكنها لاتقوم بعملها الا
فى اللحظات الحاسمة •

من الخواص التى يجب توفرها فى الرمزية ، أن تكون موجزة ،
بحيث ترى بلمحة عين وتكتب بسرعة • وليس فى الوسع وضع الرموز
بصورة أخصر من وضعها متجاوزة ، الواحد بجانب الآخر دون فاصل ،
اذ فى الرمزية الجيدة ، يكون لتجاور الرموز المهمة معنى مهم • وهذه
احدى مزايا رموز العدية العربية ، حيث يمكن ، مع الزهد من الانتباه ،
لتجاور الارقام ، كتابة عدد ايا كان اطلاقا بدلالة الارقام العشرة • ١ و
٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦ و ٧ و ٨ و ٩ •

كذلك فى الجبر ، اذ كان لدينا عدنان متغيران مثل (س ، ص) فعلىنا أن
نختار معنى لما نقصده ، عند وضعهما متجاورين هكذا س ص • ان اهم

فكبرتين بين يدينا الآن هما فكرتا الجمع والضرب • وقد اصطلاح
الرياضيون ، كيما تكون رمزياتهم أكثر ايجازا ، على أن س ص تدل
على س × ص • وعلى ذلك فالنواين (٣) و (٤) و (٥) تكتب على العموم
بالشكل :

$$\begin{aligned} \text{س ص} &= \text{ص ص} , (\text{س ص}) \text{ ع} = \text{س} (\text{ص ع}) , \\ \text{س} (\text{ص} + \text{ع}) &= \text{س ص} + \text{س ع} \end{aligned}$$

وبذلك وفقوا لربح كبير فى الايجاز بالتعبير • وتطبق هذه القاعدة
الرمزية نفسها فى حالة مجاورة عدد ثابت لآخر متغير ، فنكتب ٣ س
بدلا عن ٣ × س و ٣٠ س بدلا عن ٣٠ × س ومن الواضح أن علينا ،
عندما نعوض عن الاعداد المتغيرة بأعداد ثابتة ، ان لانسى اعادة الاشارة ×
لكيلا نعارض نظام العدية العربى • فاذا عوضنا عن س بثنين وعن ص
بثلاثة فى س ص ، وجب كتابة ذلك ٢ × ٣ وليس ٣ ٢ التى تعنى
٢ + ٣٠ •

ومن الممتع أن نلاحظ أن من الرموز ما يكون ، على تفاهة مظهره ،
ذا أهمية فى تقدم العلم فيشير الى تأكيد فكرة قد تكون فى غاية الدقة ،
ولكن وجوده يجعل من السهل وضوح علاقة هذه الفكرة بكافة
المجموعات الفكرية المركبة التى هى من ضمنها • مثال ذلك أن نأخذ
أبسط الرموز كافة أى (+) وهو يمثل العدد « صفر » • ان نظام العدية
الرومانى لم يتضمن رمزا للصفر ، وان معظم رياضى العالم القديم
ليقعون فى الحيرة والذهول ازاء فكرة العدد « الصفر » لانها فكرة دقيقة

جدا ، وليست واضحة على كل حال • وانك لو اجد في البحوث الفلسفية مساجلات طويلة في معنى الكمية الصفر • والحقيقة المحضة هي أن الصفر ، كفكرة ، ليس اصعب ولا أدق من الاعداد الاساسية الاخرى • فماذا نقصد بـ ١ أو ٢ أو ٣ •••؟؟ ولكننا اعتدنا استعمال هذه الفكر ، ومع ذلك قد يتف كثر منا حيارى لو طلب منهم اعطاء تحليل واضح للفكر الفرعية التي تدخل في تكوينها • على أن مايلفت النظر في الصفر هو عدم الاحتياج اليه في اعمال الحياة اليومية ، فلن يذهب أحد لشراء صفر من السمك • فهو من ناحية ما ، أكثر جميع الارقام الرئيسية تقربا للحضارة ، ذلك أن أساليب التفكير المنقطف وحاجاته وحدها ، هي التي فرضت علينا استعمال الرمز (•) الذي يمثل العدد « الصفر » ، لما في ذلك من فوائد جمّة •

أحدث هذا الرمز في سياق نظام العدية العربي ويعد جزءا رئيساً منه • ففي ذلك النظام تتوقف قيمة الرقم على موقعه في العدد • فانظر مثلا الى الرقم ٥ ، كما هو واقع في الاعداد ٢٥ و ٥١ و ٣٥١٢ و ٥٢١٣ • ففي العدد الاول ، يدل الرقم ٥ على خمسة ، أما في العدد الثاني ، فيدل الرقم ٥ على خمسين ، وفي الثالث على خمسمائة ، وفي الرابع على خمسة آلاف • فاذا ما اردنا كتابة العدد واحد وخمسين بالشكل الرمزي ٥١ ، فان الرقم ١ يدفع الرقم ٥ الى الموقع الثاني (يحسب من اليمين الى اليسار) وبذلك تصبح قيمته خمسين • اما اذا اردنا كتابة العدد خمسين بالذات ، فلا يوجد لدينا رقم ١ مثلا ، ليقوم بهذه الخدمة ، وعلى ذلك ، يقتضى أن نضع رقما في مرتبة الآحاد ،

بحيث لا يزيد شيئا على المجموع ، ولكنه يدفع الرقم ٥ الى الموقع الثانى •
ويقوم بهذه الخدمة (•) أى رمز الصفر • ومن الراجح جدا ، أن
الذين استحدثوا الرمز (•) ، لم تكن لديهم فكرة واضحة عن العدد
« صفر » ، بل كل ما ارادوه ، اشارة ترمز الى وجود لاشئ فى محل
الرقم الذى تشغله • ويرجح ان فكرة العدد صفر ، نشأت بالتدريج عن
الرغبة فى تشبيه معنى هذه الاشارة بمعانى الاشارات ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ٦
التي تمثل اعدادا اساسية • وليست هذه هى الحالة الوحيدة التي نجد
فيها ان فكرة دقيقة استحدثت فى الرياضيات بسبب رمزية فرضتها فى
الاصل ، مقتضيات السهولة العملية •

وهكذا فان اول استعمال للصفر كان لجعل العدية العربية ممكنة ،
وهى خدمة ليست بالضئيلة • وفى وسعنا أن نتصور ، بعد أن استحدث
الصفر لهذه الغاية ، أن الرجال العاملين ، من ذلك النوع الذى يكره
الاراء البديعة ، استهجنوا اعتداد الصفر عددا ، وعدوا ذلك عادة
سخيفة ، ولكنهم كانوا مخطئين ، كما هو الحال دائما مع مثل هؤلاء
الناس الذين لا يستسيغون مضغ طعام أعده آخرون ، لان الخدمة الثانية
التي أداها الرمز (•) تعتمد فى جوهرها على وظيفة تمثيله للعدد
« الصفر » •

ان هذا الاستعمال الرمزى الثانى ، يلوح عند أول نظرة ، من
السذاجة ، بحيث يصعب على المتدبى ادراك أهميته • ولنبدأ بمثال
بسيط : تكلمنا فى الفصل الثانى على العلاقة بين عددين متغيرين س ،

ص مرتبطين بالمعادلة $س + ص = ١$ ، وقلنا بإمكانية تمثيل هذه العلاقة بأشكال غير محدودة العدد ، مثل $س = ١ - ص$ ، $ص = ١ - س$ ، $١ - س = ٢س + ٣ص - ١$ ، $س = ٢س + ٣ص - ١$ ، وهكذا ، ولكن الطريقة المهمة للتعبير عنها هي $س + ص = ١$ ، $٠ = ١ - ص$ ، كذلك ان الطريقة المهمة ، لكتابة المعادلة $س = ١$ ، هي $س - ١ = ٠$ ، وللمعادلة $٣س - ٢ = ٢س$ ، هي $٢س - ٣س + ٢ = ٠$ أى أن ما نقصده ، هو أن تكون جميع الرموز ، سواء منها مامثل اعدادا متغيرة مثل $س$ ، $ص$ وما مثل اعدادا ثابتة عدا الصفر مثل ١ ، ٢ فى الامثلة أعلاه ، على الجهة اليمنى ، بحيث تساوى هذه الجهة العدد صفر ٠ . ويقال أن اول من فعل ذلك هو توماس هاربرت من اهل أكسفورد (١٥٦٠ - ١٦٢١) ٠ ولكن ما أهمية هذا التصرف الرمزى البسيط ؟ انه جعل من الممكن ، نماء الفكرة الحديثة عن (الصيغة الجبرية) ٠ .

وسنجد ان علينا ان نرجع الى هذه الفكرة على الدوام ٠ ولن نذهب بعيدا اذا قلنا ، انه لايمكن فهم قسم أيا كان ، من الرياضيات الحديثة دون الرجوع اليها دوما ٠ ان فكرة الصيغة هذه عمومية الى درجة يصعب معها تحديدها بعبارات مجردة ، وفى هذه المرحلة ، نحسن صنعا اذا اكتفينا بملاحظة شئ من الامثلة ٠ فالمعادلات $٢س - ٣ = ٠$ ، $س - ١ = ٠$ ، $س - ٦ = ٠$ ، كلها معادلات ذات صيغة واحدة ، أى انها معادلات ذات مجهول واحد ($س$) غير مضروب بنفسه ، ولا يظهر فيها $س^٢$ ، $س^٣$ ، الخ ٠ كذلك المعادلات $٣س - ٢ = ٢س$ ، $١ + ٢س - ٣س = ٠$ ، $٢س - ٣س + ٢ = ٠$ ، $س - ٢ = ٤ = ٠$ ذات

صيغة واحدة أى انها معادلات ذات مجهول واحد س ، وقد ظهر فيها
 س × س أى س^٢ ، وتسمى معادلات تربيعية • وكذلك المعادلات
 التكعيبية ، وهى التى يظهر فيها س^٣ ، تعطينا صيغة أخرى وهكذا •
 وإذا نظرنا الى المعادلات التربيعية الثلاث ، نجد فرقا صغيرا ، بين
 المعادلة الاخيرة س^٢ - ٤ = • والمعادلتين اللتين تسبقانها ، ناشئا عن
 عدم ظهور س (وهى غير س^٢) فى الاخيرة ، وظهورها فى الاوليين •
 ان هذا الفرق تافه جدا اذا ما قوبل بالحقيقة المهمة وهى ان الثلاث معادلات
 تربيعية •

وفوق ذلك توجد صيغ من المعادلات تبين العلاقة بين متغيرين ،
 مثل س + ص - ١ = • ، ٢ س + ٣ ص - ١ = • وغيرها ،
 وهى امثلة لما يدعى بالصيغة الخطية للمعادلة • وسبب تسميتها بالخطية ، ان
 طريقة الرسم البيانى التى شرحناها ، فى ختام الفصل الثانى ، تمثل هذه
 المعادلات بخط مستقيم • وتوجد كذلك صيغ أخرى للمتغيرين ، مثل
 الصيغة التربيعية والتكعيبية •••• الخ • ولكن النقطة التى نؤكددها هى أن
 هذه الدراسة للصيغة ، تكون اكثر يسرا ، بل ممكنة ، اذا اتبعت الطريقة
 الانموزجية فى كتابة المعادلات ، بحيث يكون الرمز (•) على الجهة
 اليسرى • وزيادة على ذلك يؤدى الـ (•) وظيفة اخرى ، تتعلق
 بدراسة الصيغة • فمهما كانت قيمة س فإن • × س = • وان
 س + • = • س وبهذه الخواص يمكن تسوية الاختلافات الصغيرة
 فى الصيغة • مثال ذلك ان الفرق الذى ذكرناه اعلاه بين المعادلتين

التربيعيتين :

س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠ ، س^٢ - ٤ = ٠ ، يمكن محوه ،
 وذلك بان نكتب المعادلة الثانية بالشكل : س^٢ + (٠ × س) -
 ٤ = ٠ ، فبالاستناد الى القانونين المذكورين اعلاه ، يكون س^٢ +
 (٠ × س) - ٤ = س^٢ + ٠ - ٤ = س^٢ - ٤ = ٠ وبناء
 على ذلك تمثل المعادلة س^٢ - ٤ = ٠ نوعا خاصا من
 المعادلات التربيعية ، وهى من الصيغة العامة نفسها ، التى
 تنسب اليها المعادلة س^٢ - ٣ س + ٢ = ٠

ولهذه الاسباب الثلاثة ، يعد الرمز صفر ، المثل للعدد صفر ،
 من مستلزمات الرياضيات الحديثة . وهو الذى جعل من الممكن اجراء أنواع
 من التحريات ، كان من المستحيل أن تجرى من دونه .

ان رمزية الرياضيات ، هى فى الحقيقة ، ثمرة الافكار العامة التى
 تسيطر على العلم . وبازائها الآن من هذا القليل فكرتان عامتان . الاولى
 عن المتغير والثانية عن الصيغة الجبرية . وقد فرض اتصال هاتين الفكرتين
 على الرياضيات نوعا آخر من الرمزية ، يعد على طرافته ، ذا أثر فعال
 فيها . فقد علمنا أن كل معادلة ، ذات متغيرين مثل س ، ص تمثل رابطة
 خاصة بين هذين الزوجين من المتغيرات ، وهكذا تكون س + ص
 - ١ = ٠ تمثل رابطة واحدة معينة و ٣ س + ٢ ص - ٥ = ٠
 تمثل رابطة معينة أخرى بين المتغيرين س ، ص . الا ان كلا من هاتين
 الرابطتين ذات صيغة ، سبق وسميناها بالرابطة الخطية . ولنسأل الآن ،

كيف تمكن من تمثيل رابطة خطية أية كانت ، بين العددين المتغيرين
 س ، ص ؟ أعنى أننا نريد أن نمثل بالطريقة الرمزية رابطة خطية أية
 كانت ، كما تمثل س عددا من الاعداد • ويتم ذلك بتبديل الاعداد
 الموجودة في الرابطة المعينة ٣ س + ٢ س - ٥ = • بأحرف
 فينتج لدينا أس + ب ص - ج = • ، أى أن أ ، ب ، ج تقوم مقام
 اعداد متغيرة ، كما تقوم س ، ص • على أن هناك فرقا في استعمال هذين
 الطقمين من المتغيرات ، ذلك أننا عندما ندرس الخواص العامة للعلاقة
 بين س ، ص يجب أن نعد قيم أ ، ب ، ج ثابتة ولكن من دون تعيين
 مقاديرها على وجه التحديد ، فمهما كانت المقادير هذه ، فهي مستبقى
 ثابتة في اثناء النظر في العلاقة بين المتغيرين س ، ص ولكافة القيم الممكنة
 لهما • ومما تجب ملاحظته ، أننا بسبب عدم وضعنا قيما معينة لكل من
 أ ، ب ، ج ، نكون ، عند وجداننا خواص هذه العلاقة ، قد برهنا على
 أنها خواص تعود الى اية علاقة من هذا القبيل بين س ، ص • فإذا ما
 غيرنا الآن قيم أ ، ب ، ج نتوصل الى فكرة أن أس + ب ص - ج
 = • تمثل رابطة خطية متغيرة بين س ، ص • وتدعى المتغيرات الثلاث
 أ ، ب ، ج بالثوابت اذا ما قابلناها مع س ، ص • والمتغيرات التي تستعمل
 بهذا الشكل تسمى أحيانا بالبرامترات ايضا •

اعتاد الرياضيون أن يعفوا أنفسهم من غناء أن يبينوا أى متغيراتهم
 « ثابتة » ، وايها « متغيرة » تعد العلاقة فيما بينها هي الاصل في المعادلة ،
 وذلك بأن يستعملوا الحروف الاخيرة من الالفباء للمتغيرات « المتغيرة » ،

والحروف الاولى منها للمتغيرات « النابتة » أى البرامترات ، ويلتقى هذان النظامان فى وسط الالفباء • وقد يتطلب الامر أحيانا كلمة أو كلمتين من الايضاح ، الا ان العرف والسياق المنطقي ، يغنيان عن ذلك اعتياديا • ومن المدهش ندرة الالتباس الذى ينجم عن تصرف سائب كهذا • ولقد كانت نتيجة هذا الحذف المستمر للاعداد المعينة ، والاستعاضة عنها بطبقات متتالية من البرامترات ، أن أصبح مقدار الحسابات العددية ضئيلا جدا ، فالكثير من الرياضيين لا يستسيغون هذه الحسابات ، بل قد تعوزهم المهارة الخاصة فيها • ان حقل علم الحساب ينتهى حيث تبدأ سيطرة فكرة المتغيرات والصيغة الجبرية •

الفصل السادس

تعميمات العدد

GENERALIZATIONS OF NUMBERS

من الميزات العظيمة للرياضيات تلك المجموعة المؤلفة من الفكر المنتسقة التي اخترعت ، بمناسبة الاعداد الصحيحة التي بدأنا بها • ويجوز تسمية هذه الفكر بامتدادات أو تعميمات العدد • ولدينا منها أولا فكرة الكسور • ان اول بحث وقع بين أيدينا عن علم الحساب ، كان لكاهن مصرى اسمه (أ همس) ، كتبه فيما بين سنة ١٧٠٠ ق • م وسنة ١١٠٠ ق • م ويرجح أنه كان منقولاً عن نسخة أقدم منه بكثير ، ومعظم بحثه يدور على خواص الكسور • ويظهر من ذلك أن نشوء هذه الفكرة (فكرة الكسور) قديم جدا في تاريخ الرياضيات • والحقيقة ان الموضوع كان بارزا للعيان • فمن العمليات الشائعة الحدوث اذ ذاك ، تقسيم حقل الى ثلاثة أقسام متساوية واخذ قسمين منها ، لذلك يجب أن لا نستغرب اذا كان رجال الحضارات القديمة ، قد ألفوا فكرة الثلثين وما جانسها من أفكار • ويصح ان نقول ، ان فكرة الكسور كانت أول تعميم للعدد • أما الاغريق فقد فكروا في هذا الموضوع على أساس النسبة ،

فكان اليونانى يرى من الطبيعى أن يقول عند مقابلة خط طوله قديمين
بخط طوله ٣ اقدام ، بأن طوليهما بنسبة ٢ الى ٣ • أما نحن ، فتأثير
المصطلحات الجبرية ، يغلب علينا أن نقول ان طول الخط الاول ثلثا طول
الخط الثانى ، ونفكر فى الثلثين كعدد مضروب فيه •

وعلى ذكر نظرية النسبة أو الكسور نقول ان اليونانيين قاموا
بكشف عظيم ، كان موضع الكثير من التفكير الفلسفى والرياضى • اذ
وجدوا النسب الالقياسية^(١) ، وبرهنوا حقا ، فى اثناء تحرياتهم الهندسية ،
على أنه لو أخذ خط ، أيا كان طوله ، فمن المحتم وجود خطوط أخرى
لا تكون نسبة أطوالها للخط الاول كالنسبة بين عددين صحيحين •
وبتعبير آخر توجد أطوال ليست كسورا مضبوطة من أطوال أخرى •
مال ذلك ، ان قطر المربع لا يمكن أن يعبر عنه ككسر ما ، من
ضلعه • وفى المصطلحات الحديثة نقول ان طول القطر هو $\sqrt{2}$ من طول
الضلع ولكن الكسر الذى يمثل $\sqrt{2}$ هذه بتمامها لا وجود له ،
بل كل مايمكن عمله ، هو التقرب من قيمتها الكاملة الى الحد الذى
نريده ، مع عدم امكان الوصول اليها بتاتا • فنقول مثلا أن $\frac{9}{5}$ تنقص
قليلا عن ٢ وان $\frac{1}{4}$ أكبر منها ، وعليه فـ $\sqrt{2}$ تقع بين $\frac{3}{5}$ و $\frac{7}{5}$ •
ولكن أفضل طريقة منظمة للتقرب من $\sqrt{2}$ هى الحصول على
سلسلة من الكسور العشرية ، يكون كل منها أكبر من سابقه ويتم
ذلك باستخراج جذرها التريعى بالطريقة المعتادة • وهذه السلسلة هى

Incommensurable ratios (1)

١ و $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ وهكذا .

كان الاغريق يسمون نسباً كهذه (لاقياسية) • وقد أثارت هذه النسب منذ أيام الاغريق حتى العصور الاخيرة نقاشاً فلسفياً عظيماً • ولم تحل المشكلات المتعلقة بها الا حديثاً •

سنضع النسب اللاقياسية مع الكسور ، وسنعد جملة الاعداد الصحيحة والاعداد الكسرية والاعداد اللاقياسية صنفاً واحداً من الاعداد ، ندعوه بـ « الاعداد الحقيقية » • واذا كنا دوماً ، تصور الاعداد الحقيقية مرتبة على حسب أقدارها ، فتبدأ بالصفر وتذهب متصاعدة في الكبر دون حدود كلما تقدمنا ، لذلك وللسهولة ، تمثل الاعداد الحقيقية بنقاط على خط :

$\frac{1}{4}$	١	$\frac{2}{4}$	٢	$\frac{3}{4}$	٣	$\frac{4}{4}$	٤
س	د	ك	ج	ق	ب	ن	أ
و	م						

ليكن م س أى خط يبدأ بـ (م) ويمتد الى غير حد بالوجهة م س • خذ الآن أية نقطة مناسبة عليه مثل أ ، بحيث يمثل م أ وحدة الطول • ثم اقطع الاطوال أ ب ، ب ج ، ج د • الخ بحيث يكون كل منها مساوياً الى م أ ، فعند ذلك تمثل النقطة م العدد صفر ، والنقطة أ العدد واحد ، و (ب) العدد ٢ ، وهكذا • والواقع أن العدد الذى تمثله أية نقطة هو قياس بعدها عن م بدلالة وحدة الطول م أ • أما النقاط الواقعة بين م ، أ فتمثل الكسور الحقيقية والاعداد اللاقياسية التى تكون أقل من (١) • فمنتصف م أ يمثل $\frac{1}{2}$ ، ومنتصف أ ب يمثل $\frac{3}{4}$ ، ومنتصف ب ج يمثل $\frac{5}{4}$ ، وهكذا • وبهذه الوسيلة تمثل كل نقطة

على م س عددا حقيقيا ما ، وكل عدد حقيقى يمثل نقطة ما على م س •
وهذه السلسلة أو الصف من النقاط ، الواقعة على م س التى تبدأ
بـ (م) وتتحرك بانتظام بالوجهة من م الى س ، تمثل الاعداد الحقيقية
مرتبة بنظام تصاعدى فى الكبر ، مبتدئة بالصفر ، وتزداد باستمرار
كلما تقدمنا •

ان ذلك كله يلوح أمرا هينا • ولكن ، حتى فى هذه المرحلة ،
توجد آراء مهمة يمكن استنباطها بالركون الى هذه الحقائق الواضحة •
لأن سلسلة النقاط التى تمثل الاعداد الصحيحة فقط ، أى النقاط
م ، أ ، ب ، ج ، د ، فنجد أن النقطة الاولى م نقطة معينة ، تتلوها
نقطة أ • وكل نقطة مثل أ أو ب لها نقطة معينة تسبقها مباشرة وأخرى
تتلوها مباشرة ، عدى م التى لاسابقة لها • زد على ذلك ان هذه السلسلة
تستمر بلا حد ولا نهاية • وهذا النوع من الترتيب ، هو الذى يدعى
بنوع ترتيب الاعداد الصحيحة • وخلاصته ، أن يكون لكل بيت ما
يجاوره من جهتيه ، عدا البيت الاول من صف البيوت • خذ بعد ذلك ،
الاعداد الصحيحة والكسور معا مهما النقاط التى تقابل النسب
الاقياسية فان نوع الترتيب المتسلسل الذى نحصل عليه الآن ،
يختلف تماما عما ذكرناه • فالحد الاول م ، ولكن لا يوجد حد له ما
يسبقه مباشرة أو يتلوه مباشرة • وهذا أمر واضح اذ يمكن دوما وجدان
كسر تقع قيمته بين قيمتى أى كسرين • ومن الطرق السهلة جدا لعمل

ذلك ، أن تجمع الكسرين وتنصف المجموع • مثال ذلك : ان بين
قيمتي $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ يقع الكسر $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$) أي $\frac{17}{12}$ وبين $\frac{2}{3}$ و $\frac{17}{12}$
يقع الكسر $\frac{1}{2}$ ($\frac{2}{3} + \frac{17}{12}$) أي $\frac{22}{12}$ وهكذا الى ما لا حد
له • بسبب هذه الخاصية يقال في هذه السلسلة انها (متراصة) •
كذلك لا توجد نقطة نهائية لهذه السلسلة التي تزداد بصورة مطلقة ،
وبلا حد ، كلما تقدمنا على الخط م س • وقد يجول في الخاطر ، عند
الظرة الاولى ، أن نوع السلسلة ، التي ألفناها بهذه الطريقة ، من
الكسور ، والمتضمنة الاعداد الصحيحة ايضا ، هو نوع السلسلة نفسه
الذي يمكن الحصول عليه من جميع الاعداد الحقيقية ، وهي الاعداد
الصحيحة والكسور واللاقياسيات مجتمعة ، أي من جميع نقاط الخط
م س • ان كل ما قلناه حتى الآن عن سلسلة الكسور ينطبق بالدرجة
نفسها على سلسلة الاعداد الحقيقية جميعها ، ولكن توجد بعض الفروق
المهمة التي سنتقدم لكشفها الآن • ان اهمال اللاقياسيات في سلسلة
الكسور ، يؤدي الى فقدان النقاط الفاصلة بين قسم من الاصناف • فلو
أخذنا اللاقياسي $2\sqrt{7}$ نجد ان موقعه في سلسلة الاعداد الحقيقية
يفصل بين كافة الاعداد التي مربعها أقل من ٢ ، وكافة الاعداد التي
مربعها أكبر من ٢ • غير اننا اذا لازمنا سلسلة الكسور وحدها ، واهملنا
اللاقياسيات بحيث اننا لا ندخل $2\sqrt{7}$ فيها ، فلن نجد كسرا يقسم
السلسلة الى قسمين بهذا الشكل ، أي ان يكون مربع كافة الحدود في
احدى جهتيه أصغر من ٢ ، وفي الجهة الثانية أكبر من ٢ • وعلى ذلك ،

نجد في سلسلة الكسور شبه ثغرة ، في المحل الذي يجب ان
تكون فيه ٢٧ • وقد يرى ناس ان وجود اشباه الثغرات أمر
نافه • ولكن الرياضى كائنا من كان ، يتفق له ان يقرأ هذا ، يعلم ان
احتمال فقدان الحدود لصنف من الاعداد او لنهاياتها العظمى ، تلك
التي لم تأخذ حتى الآن مواقعها في السلسلة ، أمر ضرره ليس بالقليل •
ولتجنب هذه المشكلة اقتضى الرجوع الى الالقياسيات وادخالها ، حتى
ينم الحصول على سلسلة كاملة بلا ثغرات •

ويوجد فرق اعمق اساسا بين السلسلتين ، اذ نستطيع ترتيب
الكسور كالاعداد الصحيحة ، أى ان يكون لها حد أول ، وان يكون لكل
حد ما يتلوه مباشرة ، وباستثناء الحد الاول ما يسبقه مباشرة ، وسنبين
كيفية اجراء ذلك • لنكتب كل حد من سلسلة الكسور والاعداد
الصحيحة على شكل كسر ، فنكتب $\frac{1}{2}$ بدلا عن ١ و $\frac{2}{3}$ بدلا عن ٢
وهكذا الاعداد الصحيحة كافة باستثناء الصفر • كذلك سنعد وقتيا ،
الكسور المتساوية في القيمة التي لم تختصر الى ابسط اشكالها كسورا
مستقلة ، وعلى ذلك ، الى اشعار آخر ، سنعد مثلا $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{6}$ و $\frac{6}{9}$ و $\frac{8}{12}$
كسورا متميزة بعضها عن بعض • والآن ضع الكسور على شكل
مجموعات بحيث تقسمها الى اصناف ، وذلك بأن تجد مجموع البسط
والمقام لكل كسر • وللايجاز سنسمى هذا المجموع دليل الكسر •
مثال ذلك :

ان فى وسعنا التخلّص من تكرار الكسور ذات القيمة الواحدة
 بشطبها حيثما كانت بعد ظهورها للمرة الاولى . ففى الحدود القليلة
 الاولى اعلاه ، نجد ان $\frac{2}{3}$ الموضوعه داخل قوسين ، هى الكسر الوحيد
 الذى لم يكن بأبسط اشكاله ، وقد ظهر سابقا بالشكل $\frac{1}{3}$ ، وعليه يجب
 شطبه . ولكن السلسلة لا زالت تحمل الخواص انفسها ، وهى (أ) لها
 حد اول و (ب) لكل حد ما يجاوره من جهتيه و (ج) لا نهاية للسلسلة .
 وفى الوسع البرهان على ان ليس فى الامكان ترتيب جميع الاعداد
 الحقيقية على هذا الشكل ، وقد كشف عن هذه الحقيقة العجيبة ، الرياضى
 الالمانى جورج كتور الذى لا يزال حيا^(١) ، وهى ذات أهمية كبيرة
 فى فلسفة الآراء الرياضية . اتنا هنا نمس فى الواقع حدود المسائل
 العظيمة عن معنى الاطراد (واللانهاية) .

وللعدد امتداد آخر ، يتأتى من ادخال الفكرة التى اختلف فى
 تسميتها بعملية او بخطوة ، وكلا الاسمين يصح من وجهتى نظر
 مختلفتين قليلا . وسنبداً بقضية معينة . لنأخذ الافادة $3 + 2 = 5$ ، وهى
 ان نضيف ٢ الى ٣ فينتج ٥ . فكر بعلمية اضافة الـ ٣ ، ولنعبّر عنها بقولنا
 $3 +$. كذلك $4 - 3 = 1$ فكر الآن بعملية طرح الـ ٣ ، ولنعبّر عنها
 بقولنا $3 -$. وبذلك بدلا من ان ننظر للاعداد الحقيقية بذاتها ، فاننا
 ننظر فى عمليات جمعها او طرحها . فبدلا من $2 +$ او $2 -$ ،

(١) قيل هذا فى سنة ١٩١١ وقد توفى عام ١٩١٨ .

أى عمليات اضافة ٢ او طرح ٢ ، وبعد ذلك تتمكن من جمع هذه العمليات ، ويكون هذا الجمع ، طبعا ، بمعنى يختلف عما نستعمله فى جمع الارقام . ان مجموع عمليتين هو عملية واحدة تعطى نفس النتيجة التى نحصل عليها من استعمال العمليتين بصورة متتالية . ولكن بأى ترتيب يجب اجراء العمليتين ؟ والجواب ان ذلك لا أهمية له . مثال ذلك ان :

$$3 + 1 + 2 = 1 + 3 + 2$$

أى ان جمع الخطوتين ٣ + و ١ قابل للابdal .
ان للرياضيين تقليدا يشوش على المشتغلين فى تتبع المعانى ، ولكنه مريح عند الممارسة ، وهو استعمال الرمز نفسه بمعان مختلفة ، ولو انها متقاربة . والشرط الاساسى للرمز ، فى نظرهم ، هو ان تكون القوانين الاصولية لاستعماله واحدة ، مهما تنوع معناه . وعلى هذه العادة او التقليد ، يشار لجمع العمليات بـ + كما هو الحال فى جمع الاعداد . وعلى ذلك يمكن ان تكتب :

$$4 + = (1 +) + (3 +)$$

حيث تدل الـ + فى وسط الجهة اليمنى من المعادلة ، على جمع العمليتين ٣ + و ١ + . الا انه لا داعى لان نكون متحذلقين جدا فى رمزيتهما الا فى الاحوال النادرة ، التى تتطلب منا تبعا مباشرا للمعانى . ولذلك نحن نسقط الـ + الاولى فى السطر وفى القوس ، ولا نكتب بتاتا اشارتى + متتاليتين ، وعلى ذلك تصبح المعادلة اعلاه $4 = 1 + 3$.

ونفسرها بأنها جمع بسيط لعددین او ، باتقان أكثر ، بأنها جمع عمليتين ، كما عبرنا عنها بالضبط ، فى كتابتنا للمعادلة بالطريقة السابقة ، او اخيرا ، بأنها تعبر عن نتيجة استعمال عملية $+$ الى العدد ٣ والحصول على العدد ٤ . وكل تفسير ممكن ، يكون دوما صحيحا . ولكن التفسير الوحيد ، الذى يكون دوما فى الامكان تحت شروط خاصة ، هو جمع العمليات . اما التفاسير الاخرى فكثيرا ماتولد نتائج غير معقولة .

ان ذلك يؤدى من فوره الى سؤال ، لاريب فى أنه ، كان يرد بالحاح على ذهن القارئ ، وهو ما فائدة هذا التفصيل ؟ ولاشك ان الرجل العملى يتقدم فى هذا الموقف ويطلب باصرار محو هذه الاحاويل الفكرية السخيفة . اما الجواب عن هذا ، فهو ان الرياضى يرمى من وراء ذلك الى العمومية ، وهى فكرة جديدة بأن توضع فى صف فكرة التغير والصيغة ، وذلك لما لها من أهمية فى التحكم بالتصرف الرياضى . وان الغريزة الرياضية تنفر من كل قيد لعمومية النظريات او البراهين أو التفاسير . وان هذه الفكر الثلاث ، المتغير والصيغة والعمومية تؤلف ثالوثا رياضيا يسيطر على الموضوع برمته . وهى جميعا تثبت من اصل واحد ، هو الطبيعة المجردة لهذا العلم .

ولننظر الآن كيف تتحقق العمومية بادخال فكرة العمليات . خذ المعادلة $س + ١ = ٣$. ان حلها $س = ٢$. وهنا نستطيع ان نفسر رموزنا بأنها مجرد اعداد ، ويكون الالتجاء ، فى هذه الحالة ، الى فكرة العمليات أمر لاضرورة له بتاتا . ولكن س اذا كانت مجرد عدد ، فان المعادلة

$س + ٣ = ١$ تكون بلا معنى ، لان $س$ يجب ان تكون عدد الاشياء
 الباقية اذا اخذت ٣ اشياء من شئ واحد • وعمل كهذا غير ممكن • وفى
 هذه النقطة ، نستعين بفكرة الصيغة الجبرية ، وهى بحد ذاتها تعميم
 بمظهر آخر ، ولذلك نأخذ المعادلة العامة التى لها صيغة المعادلة
 $س + ١ = ٣$ نفسها ، وهى $س + أ = ب$ ، وحلها هو $س = ب - أ$ •
 وهنا تزداد مشكلتنا شدة ، لان هذه الصيغة لا يمكن استعمالها اذا اقتضى
 الامر اجراء تفسير عددى ، الا اذا كانت $ب$ اكبر من $أ$ • أى انه
 لا يسوغ لنا ان نقول بجواز اعتبار $أ$ و $ب$ أى عددين ثابتين دون شرط
 ما • وبتعبير آخر نكون قد وضعنا قيداً ، لتأبيلية تغير العددين الثابتين
 $أ$ و $ب$ ، نجره كسلسلة خلال جميع مناقشاتنا • ويستحيل اجراء
 تحريات رياضية مسهب فيها فى ظروف كهذه تجعل مصير كل معادلة ،
 الدفن تحت أكداس القيود • غير اننا ، اذا اوّلنا رموزنا بفكرة العمليات ،
 فان جميع القيود تتلاشى ، كأنها ذهبت بفعل ساحر • فالمعادلة :
 $س + ١ = ٣$ تكون نتيجتها $س = ٢$ ، والمعادلة $س + ٣ = ١$ تنتج
 $س = - ٢$ ، والمعادلة $س + أ = ب$ تعطى $س = ب - أ$ ، وهى عملية
 جمع او طرح ، حسب مقتضى الحال • وليست بنا حاجة الى ان نقرر ما
 اذا كانت $ب - أ$ تمثل عملية جمع او طرح ، لان قواعد التصرف
 بالرموز واحدة فى الحالتين ، وليس من خطة هذا الكتاب تدوين باب
 مفصل من الجبر الاولى • على ان غرضنا يقتصر على توضيح الفكر
 الاساسية التى وجهت نشوء هذا العلم • ولن نتطرق الى شرح القواعد

الموجبة والسالبة • ونعني بها العمليات او الخطوات • ان الاعداد
 المعلّمة هي أيضا حالات خاصة مما يدعى بالمتجهات Vectors
 (وهى كلمة مقتبسة من اللغة اللاتينية اصلها Veho ومعناها انا
 اجبر او احمل) ، اذ فى الوسع ان تصمور ذرة تحمل من م الى أ او
 من أ الى ب •

ان اشارتنا ، قبل بضع صفحات ، الى اعتراض الرجل العملى على
 التعقيدات التى يثيرها ادخال الاعداد الموجبة والسالبة ، لم يكن غير
 قذف بحق ذلك الرجل البارع • لاننا فى الحقيقة على أهبة النظر الى أحد
 ميادين انتصاراته العظيمة • فان كان لابد من الاعتراف بالحق ، فان الرجل
 العملى ، كان أول من استعمل علامتى + و - • ومع أن أصلهما ليس
 بالبين تماما ، فمن الراجح أنهما أخذتا عن الاشارات التى كانت تكتب
 بالطباشير على صناديق البضائع فى المستودعات التجارية فى المانيا ،
 للدلالة على زيادتها على الوزن القياسى أو نقصها عنه • وأقدم بيان جاء
 عنهما تجده فى كتاب المانى طبع فى لينزك عام ١٤٨٩ ب • م • ويظن
 أن اول من استعملها فى الرياضيات ، هو رياضى المانى يدعى ستايفل
 Stifel فى كتاب طبعه فى نورنبورگ عام ١٥٤٤ • ولكن
 ماقولك فى أن الامان لم ينظر اليهم بجد ، كأمة عملية ، الا حديثا ؟ ان
 احد الامثال القديمة ، خصص سلطة البحر بالانكليز ، والبر بالفرنسيين ،
 والجو بالالمان الذين يجب أن يكونوا قد اتوا بالعلامتين + و - من
 السحاب • ان الآراء النافعة للبشرية ، التى حققتها هذه الرموز ، لا كبر

جدا من أن تأتي من البحر أو البر •

ان امكانيات استعمال الاعداد الموجبة والسالبة واضحة للعيان •
فاذا مثلنا الاطوال الموجبة وجهة ، بأعداد موجبة ، فاننا نمثل الاطوال
الموجبة للموجهة المعاكسة ، بأعداد سالبة • واذا كانت السرعة باتجاه
ما موجبة ، فانها تكون سالبة بالاتجاه المضاد • واذا كان الدوران حول
قرص مدرج ما ، Dial ، بصورة مضادة لحركة عقربى الساعة ،
(أى بصورة عكساعية)^(١) موجبا فالدوران للجهة المضادة لذلك
(أى الجهة الساعية)^(٢) ، يكون سالبا • واذا كان الرصيد فى المصرف
موجبا ، فسحب مايزيد عليه يكون سالبا • والتكهرب الزجاجى^(٣) اذا
كان موجبا ، كان التكهرب الشمعى^(٤) ، سالبا • وفوق ذلك نجد فى
حالة المثال الاخير ، أن اصطلاحى التكهرب الموجب والتكهرب السالب ،
اصبحا الاسمين الغالبين ، وأزاحا الاصطلاحين الاخرين من الميدان •
وفى الوسع تقديم قائمة كبيرة من هذه الامثلة • والواقع ، ان فكرة
الاعداد الموجبة والسالبة كانت أشهر القضايا الرياضية الدقيقة توفيقا •

(١) ترجمنا كلا من كلمتى Anticlock و Counter clock wise

wise بكلمة « عكساعى » لان القصد منها وصف حركة الدوران عندما
تكون فى وجهة معاكسة لوجهة حركة عقربى الساعة •

(٢) كما ترجمنا Clockwise بكلمة ساعى فالحركة الساعية يقصد
بها الدوران بوجهة حركة عقربى الساعة •

(٣) Vitreos electrification وهو التكهرب الناشئ

من ذلك الزجاج بالحرير •

(٤) Resinous electrification وهو التكهرب الناشئ من

ذلك قطعة من شمع الختم أو المطاط المجفف أو الكهرمان بقماش من
الصوف •

الفصل السابع

الاعداد التخيلية

IMAGINARY NUMBERS

ان كانت الآراء الرياضية التي عالجتها في الفصل السابق ، من النوع الذي أحرز قبولاً عاماً ، فإن الآراء التي في هذا الفصل ، قد أثارت ما يضارع ذلك من الاهتمام العام . ولكن نجاحها ، كان من جنس آخر ، من النوع الذي يطلق عليه الفرنسيون اسم Succé de scandal الذي أعرب عن حيرته ، في انصراف الرياضيين الى العناية بأشياء غامضة ، يشهد عليها اسمها نفسه بأنها تخيلية ، بل شاركه في ذلك حملة الاقلام والفلاسفة . ومن المفيد أن نشير في هذه المرحلة الى وجود طراز خاص من الذهن ، همه اقلاق نفسه والآخريين بالجدل حول انطباق المصطلحات العلمية على مسمياتها . فمن الاسئلة العقيمة التي سئلت ، هل من المناسب ان يقال ان الاعداد اللاقياسية Incommensurable هي surable numbers هي أعداد ؟ وهل الاعداد الموجبة والسالبة هي اعداد حقاً ؟ وهل الاعداد التخيلية هي تخيلية ؟ وهل هي أعداد ؟ ومن العسير أن يفهم بجلاء ، ان المصطلحات العلمية ، ان هي الا اسماء تطلق

بصورة كيفية ، كأسماء العلم للأطفال ، ولذلك فلا يمكن مناقشة كونها صحيحة أم مغلوطة فيها ولكن يجوز أن تصدر عن حكمة ، أو دون تروية • فيكون أحيانا فى الوسع ترتيبها بحيث تكون سهلة الحفظ ، أو ان توحى بآراء مهمة متناسقة • والماعدة الاساسية فى هذا الامر أعرب عنها (هميتى دمتى فى حديثه مع أليس فى بلاد العجائب عندما قال لها « انتى أدفع لهما ثمنا غالبا ، وأجعلها تعنى ما أريد ») • ولذلك فلن نعبأ ما اذا كانت الاعداد التخيلية تخيلية ، وانها أعداد ، ولكننا سنقبل هذا التعبير باعتداده اسما كيميا لفكرة رياضية معينة ، سنحاول توضيحها الآن •

أن أصل الفكرة ، يشابه ، من جميع الوجوه ، أصلها للاعداد الموجبة والسالبة • وقد انبثقت بالاسلوب عينه ، عن الفكر الرياضية الكبيرة الثلاث ، المتغير والصيغة الجبرية ، والتعميم • فكما نشأت الاعداد الموجبة والسالبة ، عن النظر فى معادلات مثل $س + ١ = ٣$ ، $س + ٣ = ١$ أو فى المعادلة العامة $س + أ = ب$ ، كذلك صدر اصل الاعداد التخيلية ، عن معادلات مثل $س^٢ + ١ = ٣$ ، $س^٢ + ٣ = ١$ و $س^٢ + أ = ب$ ، ومر بالمراحل أنفسها • فالمعادلة $س^٢ + ١ = ٣$ ، تصبح $س^٢ = ٢$ ، ولها حلان • فلما أن تكون $س = + \sqrt{٢}$ واما أن تكون $س = - \sqrt{٢}$ • وجرت العادة أن يكتب النص على وجود هذين الحلين المتقابلين ، بالشكل

$\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ، انا نسير حتى الان في طريق واضحة المعالم ، كما
 نرى القضية السابقة ، ولكن توجد معضلة تناظر معضلة تلك القضية .
 فالمعادلة $\sqrt{2} = 3 + 1$ ، تنتج $\sqrt{2} = 2 - 2$ ، ولا يوجد عدد موجب
 أو سالب ، اذا ضرب بنفسه كانت نتيجته مربعا سالبا . وعلى ذلك ،
 اذا اقتصرنا معنى رموزنا على الاعداد الموجبة والسالبة المألوفة وحدها ،
 فلن نجد حلا للمعادلة $\sqrt{2} = 2 - 2$ وتكون المعادلة لغوا . وأخيرا اذا
 أخذنا الصيغة النهائية $\sqrt{2} = 2 + 1$ ، ب فلا يمكن وجدان الحلين
 $\sqrt{2} = 2 + 1$ ، الا في حالة واحدة ، وهي التي لا تكون فيها ب أقل
 من أ ، وليس في حالة سواها . لذلك ليس في وسعنا أن نقول ، من
 دون قيد ، بجواز جعل العددين الثابتين أ ، ب ، أى عددين كانا اطلاقا ،
 أى ان العددين « الثابتين » أ ، ب ليسا « متغيرين » مستقلين غير مقيدين
 كما يجب أن يكونا . وينشأ عن ذلك ، جملة من التحديدات والقيود ،
 التي تتراكم حول عملنا ، كلما تقدمنا .

وتنتظرنا الآن المهمة نفسها ، كما في السابق ، وهي وجدان تفسير
 جديد لرموزنا ، بحيث نضمن على الدوام معنى للحلين $\sqrt{2} = \pm$
 $\sqrt{2} = 2 + 1$ ، الناتجين من المعادلة $\sqrt{2} = 2 + 1$ ، أو بتعبير آخر ،
 تتطلب تفسيراً للرموز يجعل الرمز $\sqrt{2}$ دوماً ، ذا معنى ، سواء أكانت
 موجبة أم سالبة . ومن البديهي أن يكون ذلك التفسير ، مما يصح معه
 أن يجرى على الرمز $\sqrt{2}$ ، مفعول جميع القوانين الاصولية المعتادة ،

للمجمع والطرح والضرب والقسمة • كذلك يجب أن لا يتعارض هو
والعمومية التي توصلنا اليها باستعمال الاعداد الموجبة والسالبة ، بل
يجب في الواقع ، من أحد الوجوه ، أن يتضمنها كحالات خاصة •
وعندما تكون أسالبة ، يجوز أن نكتب بدلها - ج^٢ ، مع العلم أن ج^٢
موجبة • فيكون اذ ذاك : $\overline{V} - \overline{J^2} = \overline{V(1 - J^2)}$ وعليه اذا استمعنا أن نقمر رموزنا
بحيث يكون لـ $\overline{V} - 1$ ، معنى معلوم ، نكون قد وصلنا الى هدفنا •
ولذلك أصبح ينظر الى $\overline{V(1 - J^2)}$ بانها الرأس والمقدم للكميات التخيلية
جمعا •

ان أمر وجدان تفسير لـ $\overline{V(1 - J^2)}$ ، عمل أشق جدا من نظيره
تفسير - أ • والحقيقة مع أن أسهل المعضلتين ، حلت بالسليقة تقريبا
من فور ظهورها ، فان كون الثانية معضلة ربما في الامكان حلها ، لم
يدر في خلد أعظم الرياضيين في اول الامر • فالمعادلات من النوع
س^٢ = ٣ ، كانت تعد لغوا ، ويضرب صفحا عنها •

وعلى كل ، أخذوا يدركون بالتدريج ، خلال القرن الثامن عشر ،
بل قبله ، كيف يسر ، تعيين معنى لهذه الرموز السخيفة ، الامور جدا •
ولذلك روجعت المناقشات الشكلية عن هذه الرموز ، وكانت مبنية على
مجرد فرض أن الرموز هذه ، تخضع لقوانين المعادلات الجبرية
المعتادة • ووجد أنه بمجرد تسويغ استعمال هذه الرموز ، ببرهان

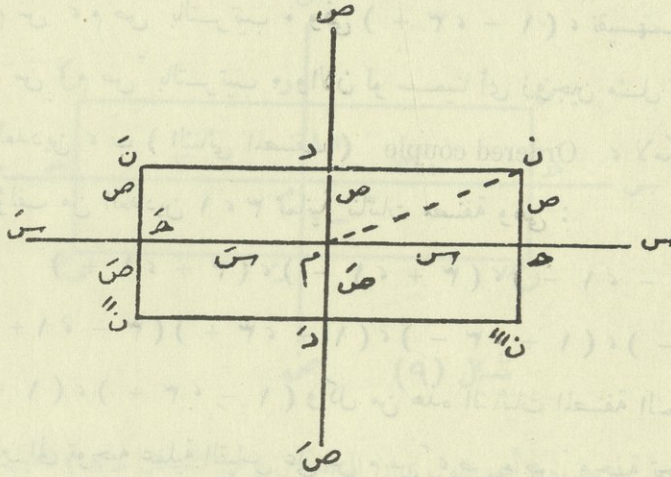
مقبول ، يمكن الوصول الى عالم كامل من النتائج الممتعة • فالكثير من الرياضيين اذ ذاك ، لم يكونوا على بينة من صحة منطقهم فى التعامل بها • وقد أدى ذلك الى أن قيل بأن رموزا لا معنى لها ، يمكن ان عولجت بمهارة أن تنتج ، بطريقة مبهمة ، براهين صحيحة لنظريات علمية • والحال أن لا شيء • أشد خطأ من ذلك • لان الرمز الذى لم يعرف ، كما يجب ، لا يكون رمزا مطلقا • بل هو لطخة حبر على ورق ، ولكنه ذو شكل يعرف بسهولة • واللطخات المتتالية على الورق ، لا يمكن ان تثبت شيئا ، الا وجود قلم ردىء ، او كاتب قليل الانتباه • وفى هذا الدور ، نعت $(1-)^V$ بالتخيلية • وكل ما استطاع أولئك الرياضيون اثباته ، كان سلسلة من نظريات مفروضة • واليك صيغة واحدة منها :

ان وجد تفسير لـ $(1-)^V$ ، ولجمع وطرح وضرب وقسمة $(1-)^V$ يمكن معه تطبيق القواعد الجبرية العامة (مثل $س + ص = ص + س$)

س ... الخ) ، ترتب على ذلك النتائج كذا وكذا • ومن البديهي ، أن لا يستسيغ الرياضيون ، (ان الشرطية) التى يجب أن تسبق بيان النتائج التى توصلوا اليها •

وعندما وجد التفسير كان ، كما هو المتوقع ، أشد تعقيدا من تفسير الاعداد السالبة • ونلفت انتباه القارئ ، الى الايضاحات التمهيدية الدقيقة التى سنقدمها • لقد سبق أن اطلعنا على كيفية تمثيل نقطة بعددين • واذا استعنا بالاعداد الموجبة والسالبة ، تتمكن من تعيين

موقع نقطة أية كانت على المستوى بزوجين من هذه الاعداد • وللتوصل الى ذلك نتخذ الخطين المستقيمين المتعامدين س م س⁻ ، ص م ص⁻ محورين ، لتقع عليهما جميع قياساتنا • فنعد الاطوال المقيسة على



شكل (٨)

م س ، م ص موجبة ، والمقاسة على الجهة العكسية م س⁻ ، م ص⁻ سالبة • ولنفرض الآن أننا كتبنا زوجين من الاعداد وفق ترتيب مثل $(1 + 3)$ ، بحيث أن العدد الاول (وهو في هذا المثال $3 + 1$) ، يمثل البعد عن م على المستقيم س م س⁻ ، والعدد الثاني (وهو في هذا المثال $1 + 3$) ، يمثل البعد عن م على المستقيم ص م ص⁻ • فيكون ما نقصده من $(1 + 3)$ ، « راجع الشكل ٨ » ، هو أن نقيس طولاً قدره (3) وحدات على س م س⁻ وفي الجهة الموجبة ، أى ابتداء من م الى جهة س ، وطولاً آخر قدره $1 + 3$ على ص م ص⁻ وفي الجهة الموجبة ،

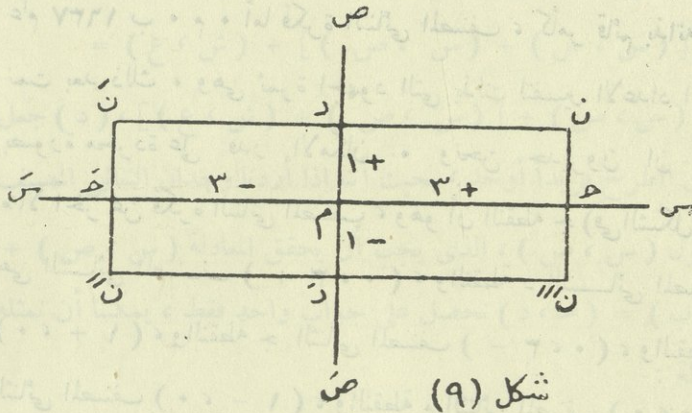
أى ابتداء من م الى جهة ص • وفى (٣ - ، ١ +) نقيس طولاً قدره ٣ وحدات من م الى جهة س • وآخر قدره وحدة واحدة من م الى جهة ص • كذلك الحال فى (٣ - ، ١ -) ، فاننا نقيس الطولين على م س • م ص بالترتيب • وفى (٣ + ، ١ -) ، نقيسهما على م س ، م ص بالترتيب • والان لو سمينا أى زوجين مثل هذين العددين ، ب (الثنائى المصنف) Ordered couple ، لامكنا أن نؤلف من العددين ١ ، ٣ ثمانية ثنائيات مصنفة وهى :

(٣ + ، ١ +) ، (٣ + ، ١ -) ، (٣ - ، ١ -) ، (٣ - ، ١ +) ، (٣ - ، ١ +) ، (٣ + ، ١ +) ، (٣ - ، ١ -) ، (٣ - ، ١ -) ، (١ - ، ٣ +) ، وكل من هذه الثنائيات المصنفة الثمانية ، يشير الى توجيه عملية القياس على س م س • م ص • م ص وجهة تختلف عن وجهات الباقين جميعا •

ولقد بينا تصويريا (فى الشكل - ٩) ، عمليات القياس التى تمثلها الثنائيات المصنفة الاربعة الاخيرة المذكورة أعلاه • فان الطولين م ج • م د معا ، يقابلان (٣ + ، ١ +) ، والطولين م ج • م د معا ، يقابلان (٣ - ، ١ +) ، كما أن م ج • م د معا ، يقابلان (٣ - ، ١ -) ، وم ج • م د معا يقابلان (٣ + ، ١ -) • ومن السهل أن نرى ، عند اكمالنا المستطيلات المختلفة ، ان موقع النقطة ن يتعين بالضبط بالثنائى المصنف (٣ + ، ١ +) • كما أن موقع النقطة ن يعين بالضبط مقدار العددين فى الثنائى المصنف (٣ + ، ١ +) •

ومثل ذلك يقال عن $\tilde{N}$ و $(-3, 1)$ وعن N و $(-3, 1)$ ،

$(1, -3)$ و $(1, -3)$.



شكل (٩)

وبصورة أعم نقول ، ان النقطة N (في الشكل - ٨) تقابل الثنائي المصنف (S, S) على فرض أن كلا من S ، S عدد موجب ، والنقطة $\tilde{N}$ تقابل $(\tilde{S}, \tilde{S})$ على فرض أن $\tilde{S}$ سالب ، ون تقابل $(S, \tilde{S})$ ون تقابل (S, S) . وعلى ذلك فإن ثنائيا مصنفا مثل (S, S) والنقطة المناظرة له N ، يعين أحدهما الآخر بالتبادل ، مع جواز جعل مقدار كل من S ، S أيًا كان من الأعداد الموجبة أو السالبة . وقد يكون من الملائم أن نقدم في هذه المرحلة بعض الاسماء ، ففي الثنائي المصنف (S, S) يدعى العدد الاول S بـ « الاحداثي السيني » والعدد الثاني S بـ « الاحداثي الصادي » ويسمى العددان معا بـ « احداثيي النقطة » . وعندما كانت نظرية الأعداد التخيلية في

دور التكوين ، لم تكن فكرة تعيين موقع نقطة بواسطة احداثيها بالامر الجريد . اذ ان هذه الفكرة تعزى الى الرياضى والفيلسوف الفرنسى ديكارت . وتظهر فى كتابه (Discours البحث) ، المطبوع فى ليدن عام ١٦٣٧ ب . م . م . أما فكرة الثنائى المصنف ، كأمر قائم بذاته ، فقد نمت بعد ذلك . وهى ثمرة الجهود التى بذلت لتفسير الاعداد التخيلية بصورة مجردة على قدر الامكان . ونحن جديرون ان نلاحظ مالا آخر عن فكرة الثنائى المصنف ، وهو أن النقطة ج (فى الشكل - ٩) هى الثنائى المصنف (+ ٣ ، ٠) ، والنقطة د الثنائى المصنف (٠ ، ٠) ، والنقطة جـ الثنائى المصنف (- ٣ ، ٠) ، والنقطة دـ الثنائى المصنف (٠ ، ٠) ، والنقطة م الثنائى المصنف (٠ ، ٠) . وتوجد وجهة نظر اخرى فيما يمثله الثنائى المصنف (س ، ص) ، وهى أن يمثل الخط المنقط م ن (شكل - ٨) لا النقطة ن . أى أن الثنائى المصنف ، يمثل مستقيما مرسوما من نقطة الاصل م بطول معلوم ووجهة معينة . ويصح أن نسمى م ن بالخط المتجه من م الى ن ، أو بالخطوة من م الى ن . ونرى من ذلك اننا ، فى هذا الفصل ، اكتفينا بأن نوسع المعنى السابق الذى أعطيناه للاعداد الموجبة والسالبة . ان طريقة التمثيل هذه بالمتجهات ، تفيدنا جدا عندما نريد أن نحدد معنى لجمع وضرب الثنائيات المصنفة .

لنقدم الآن ونسأل ، ما المعنى الذى نجد من الموافق تحديده لجمع الثنائين المصنفين (س ، ص) و (س' ، ص') ؟ ان تفسير الجمع

يجب أن يتضمن (أ) جعل حاصل الجمع ثنائياً مصنفاً آخر ، (ب) جعل العملية قابلة الابدال ، بحيث يكون (س ، ص) + (س ، ص) = (س ، ص) + (س ، ص) ، (ح) جعل العملية قابلة الربط ، بحيث يكون [(س ، ص) + (س ، ص)] + (س ، ص) = (س ، ص) + [(س ، ص) + (س ، ص)] ، (د) جعل حاصل الطرح فريداً أوحد ، بحيث أننا إذا أردنا وجدان الثنائي المصنف المجهول (س ، ص) ، الذى يجب أن يحقق المعادلة (س ، ص) + (أ ، ب) = (ح ، د) نحصل على جواب واحد فقط ، يمكننا أن نمثله بالمعادلة :

$$(س ، ص) = (ح ، د) - (أ ، ب)$$

ان هذه الشروط جميعاً تحقق ؟ اذا ثبتنا أن (س ، ص) + (س ، ص) ، تعنى الثنائي المصنف (س + س ، ص + ص) • وعلى ذلك نعرف (س ، ص) + (س ، ص) بأنها = (س + س ، ص + ص) • وليلاحظ هنا ، أننا جارينا العادة الرياضية التى تجوز استعمال الرمز + بمعان مختلفة • فأن الـ + التى على الجهة اليمنى من المعادلة ، تحمل المعنى الجديد الذى عرفناه الآن ، بينما نجد أن اشارتى الـ + اللتين على الجهة اليسرى منها ، يحمالان المعنى الذى عرفناه فى الفصل السابق ، وهو جمع الاعداد الموجبة والسالبة ، أى (العمليات) • ومع ذلك ، فلا ينشأ التباس على عن هذا الاستعمال

المزدوج • واليك بعض الامثلة عن الجمع :

$$(٧ + ، ٥ +) = (٦ + ، ٢ +) + (١ + ، ٣ +)$$

$$(٧ - ، ١ +) = (٦ - ، ٢ -) + (١ - ، ٣ +)$$

$$(٠ ، ٠) = (١ - ، ٣ -) + (١ + ، ٣ +)$$

وبهذا نكون قد حسبنا أمر الطرح ايضا فنجد أن (س ، ص) -

$$(ش ، ع) = (س - ش ، ص - ع) • وعليه فأن :$$

$$(١ + ، ٢ +) = (١ + ، ١ +) - (٢ + ، ٣ +)$$

$$(٢ + ، ١ -) = (٤ - ، ٢ +) - (٢ - ، ١ +) و$$

$$(٥ - ، ٣ -) = (٣ + ، ٢ +) - (٢ - ، ١ -) و$$

ومن السهل ان نرى ان :

$$(س ، ص) - (ش ، ع) = (س ، ص) + (- ش ، - ع)$$

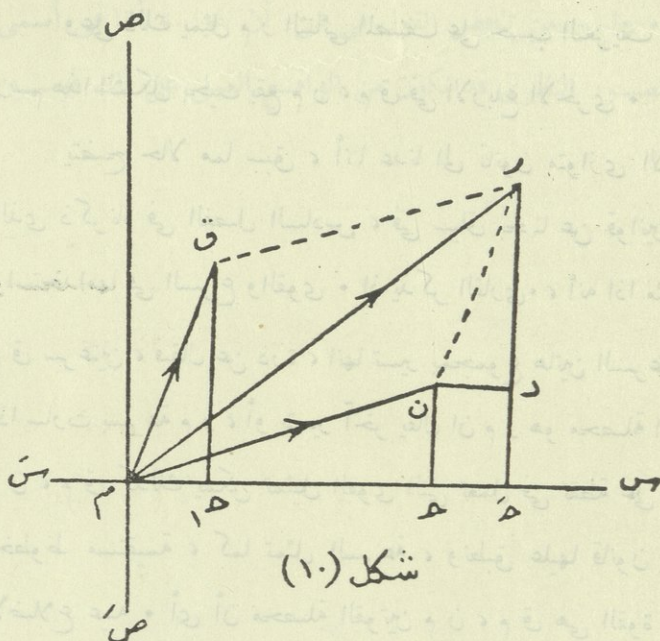
$$• (س ، ص) - (س ، ص) = (٠ ، ٠) •$$

ولذلك ينظر الى (٠ ، ٠) بأنها (الثانئى المصنف الصفر) • مثال

$$• ذلك ، ان (س ، ص) = (٠ ، ٠) + (س ، ص)$$

والتمثيل التصويري ، لجمع الثانئيات المصنفة ، امر قد يأخذنا

العجب من سهولته •



شكل (١٠)

لنجعل من يمثل (ص، ص)، أي أن $م = ص = ن = ص$ ،
ولنفرض أن $ق$ يمثل (ص، ص) أي $م = ص = ن = ص$ ،
 $ح = ص$ ، ثم لنكمل متوازي الاضلاع من $ق$ بالخطين المنقطين $نر$ ،
 $قر$ ، فيكون القطر $مر$ ، هو الثنائي المصنف (ص + ص، ص + ص).
لأننا لو رسمنا $ند$ موازيا الى $مس$ لوجدنا ان المثلثين $مقح$ ، $نرد$
متساويان من جميع الوجوه. واذن يكون $ح = ن = د = ص = ن$ ،
 $رد = قح = ص$ وعليه ينتج أن:

$$م = ح + ح + ح = ص + ص + ص$$

$$ر = د + د + د = ص + ص + ص$$

وعلى ذلك يمثل م ر الثنائى المصنف على حسب التعريف • ويمكن
رسم هذا الشكل بحيث يقع م ن ، م ق فى الارباع الاخرى •
يتضح حالا مما سبق ، أننا عدنا الى قانون متوازى الاضلاع ،
الذى ذكرناه فى الفصل السادس ، فى سياق بحثنا عن قوانين الحركة
واستخدامها فى السرعة والقوى • اذ يذكر القارىء ، أنه اذا مثل م ن ،
م ق سرعتين ، فيقال عن ذرة ، انها تسير بمجموع هاتين سرعتين معا ،
اذا سارت بسرعة م ر ، أو بتعبير آخر يقال ان م ر هو محصلة سرعتين
م ن ، م ق كذلك يمكن تمثيل القوى التى تعمل فى نقطة على جسم ما
بخطوط مستقيمة ، كما تمثل السرعة ، ونطبق عليها قانون متوازى
الاضلاع عنه • أى أن محصلة القوتين م ن ، م ق هى القوة الممثلة
بالقطر م ر • وينتج عن ذلك امكان النظر الى الثنائى المصنف بأنه يمثل
سرعة أو قوة • وتكون القاعدة التى بسطناها الآن ، عن جمع الثنائيات
المصنفة ، شاملة للقوانين الاساسية فى علم الآلة (الميكانيك) عن جمع
القوى والسرع • ان من أبهر صفات الرياضيات ، ذلك الشكل العجيب
الذى تتشابه به الافكار والنتائج لمختلف أجزاء الموضوع • ومع أن
الاعتبارات الرياضية البحتة ، بأصفي انواعها ، كانت دليلنا فى أبحاث
هذا الفصل والفصل السابق ، فانها رجعت بنا الى أعظم القوانين الطبيعية أهمية
تلك القوانين التى يستعين بها كل مهندس ، عندما يضع تصميم محرك
Engine ، وكل بناء سفن ، عندما يحسب مدى استقرار سفينة

وتوازنها • وليس من تناقض القول في شيء أن نقول ، أننا في أسمى
حالات التصور النظرى قد نكون من الواقع العملى على قاب قوسين
أو أدنى •

الفصل الثامن

الأعداد التخيلية "تمة"

ان تعريف ضرب المصنفات الثنائية يخضع لنفس الاعتبارات التي روعيت في جمعها • وتفسير الضرب يجب أن يضمن :

(أ) أن حاصل الضرب مصنف ثنائي آخر •

(ب) أن العملية قابلة للاببدال بحيث يكون :

$$(س، ص) \times (س، ص) = (س، ص) \times (س، ص)$$

(ح) أن العملية قابلة للربط بحيث يكون :

$$\{ (س، ص) \times (س، ص) \} \times (ش، ع) =$$

$$(س، ص) \times \{ (س، ص) \times (ش، ع) \}$$

(د) أن خارج القسمة فريد أوحد { باستثناء حالة الثنائي المصنف

الصفري (•،•) } بحيث أننا إذا اردنا وجدان الثنائي المصنف المجهول

(س، ص) الذي يجب أن يحقق المعادلة :

$$(س، ص) \times (أ، ب) = (ح، د)$$

نحصل على جواب واحد فقط يمكننا أن نمثله بـ :

$$(س، ص) = (ح، د) \div (أ، ب) \text{ أو } (س، ص) =$$

$$(ح، د)$$

$$(أ، ب)$$

(هـ) وعلاوة على ذلك ، يجب أن يصح تطبيق القانون الذي

يربط الجمع والضرب وهو قانون التوزيع أى أن يكون :

$$(س، ص) \times \{ (أ، ب) + (ح، د) \}$$

$$= \{ (س، ص) \times (أ، ب) \} + \{ (س، ص) \times (ح، د) \}$$

ويمكن ضمان جميع هذه الشروط (أ) ، (ب) ، (ح) ، (د) ، (هـ) ،

بتعريف ، وان يبدو معقدا عند اول نظرة ، فهو هين التوضيح هندسيا

وهذا التعريف هو :

$$(س، ص) \times (س''، ص'') = \{ (س، ص) - (س، ص'') \}$$

$$(س، ص) + (س، ص') \dots\dots\dots \text{« أ »}$$

ومنه نعرف معنى الرمز $\times$ عندما نكتبه بين ثنائيين مصنفين •

من السهل أن نرى ، أن هذا التعريف يجعل حاصل الضرب ثنائيا

مصنفا اخر ، وان الطرف الايسر من المعادلة (أ) ، لا يتأثر اذا

عوضنا ، فى آن واحد ، عن (س) بـ (س') ، وعن (ص) بـ

(ص') • وبذلك يتحقق الشرطان (أ) و (ب) • اما برهان

تحقق الشروط (هـ) ، (ح) ، (د) فيدانى ذلك يسرا ، كما سنرى

عندما نقدم التفسير الهندسى بعد قليل • ومن الممتع أن نقف ، قبل الاقدام

على ذلك ، لنرى ان كنا قد وصلنا الى الهدف الذى من اجله بذلنا كل هذا الجهد .

كنا قد تطرقنا الى معادلات من الصيغة $س^2 = ٣ -$ التى لم نجد لها حلا بدلالة الاعداد الحقيقية الموجبة والسالبة . ثم وجدنا أن جميع مشاكلنا تذوب فيما اذا وقفنا الى تفسير المعادلة $س^2 = ١ -$ أى اذا استطعنا أن نعرف $١ -$ بحيث يكون $١ - \sqrt{١ -} \times ١ - \sqrt{١ -} = ١ -$ والآن دعنا نعلم النظر فى الثنائيات الثلاثة الخاصة $(٠, ٠)$ ، $(٠, ١)$ ، $(١, ٠)$ ، لقد سبق وبرهنا أن $(س, ص) + (٠, ٠) = (س, ص)$

زيادة على ذلك لدينا الآن :

$$(س, ص) \times (٠, ٠) = (٠, ٠)$$

يتضح من هذين أن الثنائى المصنف $(٠, ٠)$ يقوم فى حالتى الجمع والضرب ، بالدور نفسه الذى يقوم به الصفر ، فى أوليات الحساب والجبر ، وما عليك ، لتتأكد ذلك ، الا أن تقارن المعادلتين أعلاه بالمعادلتين $س + ٠ = س$ ، $س \times ٠ = ٠$

لننظر الآن فى $(٠, ١)$ فنجد أنها تمثل دور ١ (الواحد) فى مبادئ الحساب والجبر حيث نجد فى أوليات هذين العلمين أن الميزة الخاصة بالـ ١ هى $س \times ١ = س$ لكافة قيم $س$ وعلى حسب قانون الضرب نجد أن :

$$\{(س، ص) \times (٠، ١) = (س، -) ، (ص، +)\} = (س، ص) \times (٠، ١) \text{ هي وحدة ثنائية} \cdot$$

واخيرا لنأخذ (١، ٠) : ان هذه ستفسر لنا الرمز $\sqrt{1-}$ اي
 أنها يجب أن تمتلك خاصية $\sqrt{1-} \times \sqrt{1-} = 1-$ ويظهر ذلك من
 تطبيق قانون الثنائيات المصنفة ، حيث أن : $(١، ٠)(١، ٠) =$
 $(٠، ١ -) = \{(٠، +) ، (١ - ، ٠)\}$

ولكن (٠، ١) هي الوحدة الثنائية و (٠، ١ -) هي الوحدة
 الثنائية السالبة وعلى ذلك فان (١، ٠) تمتلك الخاصية المطلوبة^(١) .
 على أنه يوجد جذران لـ ١ - ، يجب أن يحسب حسابهما ، وهما
 $\pm \sqrt{1-}$ وللتوصل الى ذلك ننظر في (١، ٠) . فاذا تذكرنا أن
 $1 = 1^2 = (1-)(1-)$ نجد ان $(1- ، ٠) \times (١ - ، ٠) =$
 $(٠، ١ -)$ [يرجى مراجعة الحاشية (٢) في أسفل الصفحة] .

وينتج عن ذلك أن (١ - ، ٠) هي الجذر التربيعي الثاني لـ
 $\sqrt{1-}$ ، أي أن الثنائيين المصنفين (١، ٠) ، (١ - ، ٠) هما
 التفسيران لـ $\pm \sqrt{1-}$ بدلالة الثنائيات المصنفة . ولنسأل الآن

(١) يقصد المؤلف بذلك أن مربع الثنائي المصنف (١، ٠) هو الوحدة
 الثنائية السالبة (٠، ١ -) أي أنه يمتلك نفس الخاصية المطلوبة في
 مربع $1-\sqrt{1-}$

(٢) يقصد المؤلف بذلك أن مربع (١ - ، ٠) هو مربع (١، ٠)
 نفسه أي انه (٠، ١ -) وعلى ذلك يكون للوحدة الثنائية السالبة
 (٠، ١ -) جذران تربيعيان هما (١، ٠) و (١ - ، ٠) .

أى زوجين يتناظران ؟ أى هل $(١, ٠)$ تقابل $٧ + (١ -)$ و

$(١, ٠)$ تقابل $٧ - (١ -)$ أم على العكس $(١, ٠)$ تقابل $+$

$٧ - (١ -)$ و $(١, ٠)$ تقابل $٧ - (١ -)$ ؟ والجواب هو: لارجحان لاحد

هذين الترتيبين الرمزيين على الآخر ويجوز الاصطلاح على كل منهما •

ان الثنائيات المصنفة يمكن تقسيمها الى ثلاثة انواع (١) النوع

« التخلي المركب » (س، ص)، وهو الذى لا تكون فيه كل من س

أو ص صفرا • (٢) النوع « الحقيقى » (س، ٠) • (٣) النوع « التخلي

البحث » (٠، ص) • ولتنظر الآن فى علاقات هذه الانواع بعضها

ببعض ولنبداً أولاً بضرب الثنائى « التخلي المركب » (س، ص)

بالثنائى « الحقيقى » (أ، ٠) فنجد: $(٠، أ) \times (س، ص) =$

$(أس، أ ص)$ • أى ان النتيجة هى ضرب كل حد من حدى الثنائى

(س، ص) بالعدد الحقيقى أ الموجب أو السالب •

ثانياً، نضرب الثنائى « التخلي المركب » (س، ص) بالثنائى

« التخلي البحث » (٠، ب) فنجد ان •

$$(٠، ب) \times (س، ص) = (- ب ص، ب س) \cdot$$

والنتيجة هنا أكثر تعقيداً، ويحسن أن نفهمها عن طريق التفسير

الهندسى، الذى سنقدم عليه بعد ملاحظة ثلاث حالات خاصة أخرى •

ثالثاً، نضرب الثنائى « الحقيقى » (أ، ٠) بالثنائى « التخلي

$$(٠، ب) \text{ فنحصل على } (٠، أ) \times (٠، ب) = (٠، أب) \cdot$$

رابعاً ، نضرب الثنائين « الحقيقيين » $(٠, ١')$ ، $(١, ٠')$ ببعضهما

فَنَحْصِلُ عَلَى :

$$٠(٠, ١') = (٠, ١') \times (٠, ١')$$

خامساً ، نضرب « الثنائين التخيليين » $(٠, ٠')$ و $(١, ٠')$

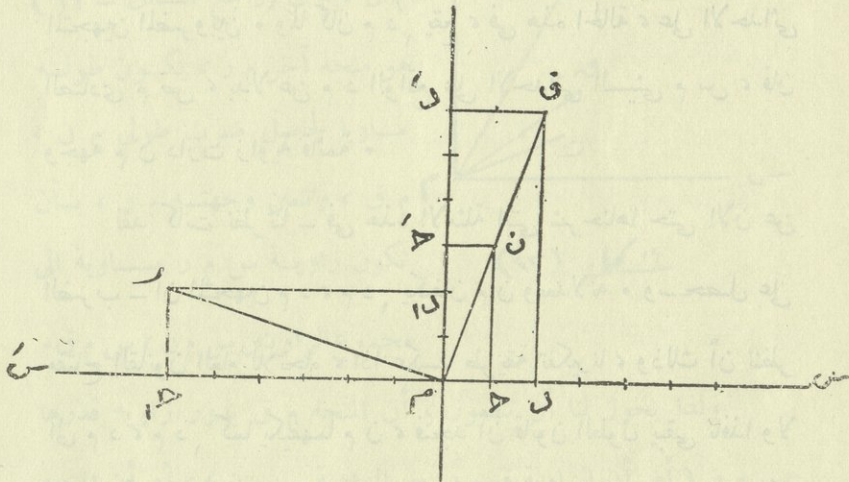
فَنَحْصِلُ عَلَى :

$$٠(٠, ٠') = (٠, ٠') \times (٠, ٠')$$

نعود الآن الى التفسير الهندسى ، وسنبداً بعدد من القضايا

الخاصة • لنأخذ الثنائين $(٣, ١)$ و $(٠, ٢)$ وننظر فى المعادلة :

$$(٦, ٢) = (٣, ١) \times (٠, ٢)$$



شكل (١١)

فَنَجِدُ فى الشكل (١١) ، أن المتجه م ن يمثل $(٣, ١)$ ، والمتجه

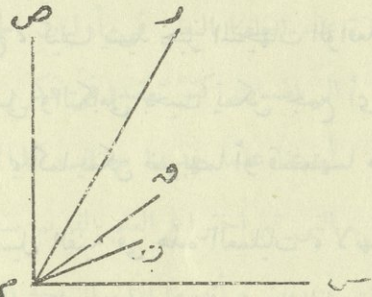
م د يمثل $(٠, ٢)$ ، والمتجه م ق يمثل $(٦, ٢)$ وكما نجد حاصل

ضرب (٠،٢) × (٣،١) هندسياً ، نأخذ طول المتجه م ق مساوياً الى حاصل ضرب طولى المتجهين م ن ، م د ، وفى هذه الحالة الخاصة ، نمد م ن الى ق بحيث يساوى طوله الطول المطلوب . ولننظر الآن فى حاصل ضرب (٢،٠) × (٣،١) ، فنجد أن (٢،٠) × (٣،١) = (- ٢،٦) . وتفسير ذلك ، هندسياً ، هو أن المتجه م د ، يقابل (٢،٠) ، والمتجه م ر يقابل (- ٢،٦) . وعليه فإن م ر ، الذى يمثل حاصل الضرب ، يكون عموداً على م ق ومساوياً له بالطول . ولنلاحظ أن القانون الذى ضبط طول م ق فى القضية السابقة ، هو نفسه الذى ضبط طول م ر ، أى أن طوله هو حاصل ضرب طولى المتجهين المضروبين . ولما كان م د ، يقع ، فى هذه الحالة ، على الاعدائى الصادى م ص ، بدلاً عن م د الواقع على الاعدائى السينى م س ، فإن وجهة م ن دارت زاوية قائمة .

لقد كانت نظرتنا - فى هذه الامثلة التى شرحناها حتى الان عن الضرب - ان المتجهين م د ، م د ، يكيفان م ن ويعدلانه . وسنحصل على مفتاح القانون العام للاتجاه ، اذا عكسنا طريقة تفكيرنا ، وذلك أن ننظر الى م د ، م د ، كما يكيفهما م ن ، فنجد أن قانون الطول يبقى نافذاً ولا يتأثر ، أى ان محصلة الطول هى حاصل ضرب طولى المتجهين . أما الوجهة الجديدة لمكبر م د ، (أى م ق) ، فنجدها بتدوير م د ، فى وجهة الدوران (العكساعى) أى من م س الى م ص ، زاوية تساوى

الزاوية س م ن • وانه لمن باب الصدفة في هذه الحالة الخاصة ، أن هذا الدوران جعل م ق يقع على امتداد م ن • دقق الآن حاصل ضرب م د ، م ن فتجد أن الوجهة الجديدة لمكبر م د ، (أى م ر) ، تتعين بتدوير م د ، باتجاه الدوران العكساعى ، زاوية تساوى الزاوية س م ن • أى أن الزاوية د م ر تساوى الزاوية س م ن • وقد آن لنا أن نعرب عن القاعدة العامة لتمثيل الضرب هندسيا ، على الوجه الآتى :

ان حاصل ضرب المتجهين م ن ، م ق (راجع الشكل - ١٢) هو متجه آخر م ر ، يكون طوله مساويا لحاصل ضرب طولى م ن ، م ق ، وتعين وجهته م ر ، بأن تكون زاوية س م ر مساوية الى



شكل (١٢)

مجموع الزاويتين س م ن ، س م ق • ولذا يجوز لنا أن نتصور ، أن المتجه م ق يدور زاوية قدرها س م ن (أى أن الزاوية ق م ر = الزاوية س م ن) ، أو أن المتجه م ق يجعل المتجه م ن يدور زاوية قدرها س م ق (أى أن الزاوية ن م ر = الزاوية س م ق) •

اننا لم ندعم هذا القانون العام ببرهان ، فأن ذلك يؤدينا الى مداخل

فى الرياضيات ليس من خطة هذا الكتاب التطرق اليها • ولكننا نستطيع أن نرى من فورنا ، أن ذلك يحقق قانون الربط فى الضرب (رقم ح اعلاه) ، لان طول المتجه المحصلة ، ينتج عن عملية الضرب المعتادة بين الاعداد الحقيقية ، وهى مما ينطبق عليها قانون الربط • ثم أن وجهة المتجه المحصلة ، تتعين بمجرد جمع زوايا ، وهذه أيضا مما ينطبق عليها قانون الربط •

ذكرنا ما فيه الكفاية عن الضرب ، كما أننا بينا بصورة خاطفة ، وعن طريق النظر فى الجمع والطرح ، كيف يشيد جبر المتجهات الواقعة فى مستو واحد ، أو حسابها التفاضلى والتكاملى بحيث يمكن جمع أى متجهين فى مستو واحد أو طرحهما ، كما يمكن ضربهما أو قسمتهما • ومع أننا لم نتطرق الى التفاصيل الفنية فى هذه العمليات ، لأنها تطوح بنا الى أغوار عميقة من التفاصيل الرياضية ، فقد أوضحنا الطريقة العامة لكيفية معالجة هذه الامور • وعند تفسير رموزنا الجبرية بهذا الشكل ، يقال اننا نتعامل « بكميات تخيلية » أو « كميات مركبة » • وهذه التسميات ، أمور ثانوية تفصيلية بحتة • ولدينا من الامور الكثيرة ، التى يجب أن نفكر فيها ، مالا يدع مجالا للنظر فيما اذا كان قد أحسن تسمية هذه المصطلحات أم لا •

ان زبدة ما توصلنا اليه من بحثنا هذا ، هو أن جعلنا فى الامكان دوما ، تفسير معادلات من قبيل $٢ = ٣ + ٢$ أو $(٣ + س) = ٢$ ،

كأثرة ما كانت ووجدان حلول لها بدلالة المتجهات • ويحسن بنا عندما
نبحث في مثل هذه التفسير ، أن نلاحظ أن ٣ تصبح (٠ ، ٣) وأن
٢ - تصبح (- ٠ ، ٢) وان س تصبح الثنائي المجهول (ش ، ع) •
وعلى ذلك تأخذ المعادلتان ، الشكلين :

$$(ش ، ع) + (٠ ، ٣) = (٠ ، ٢) + [(ش ، ع) + \\ (٠ ، ٣)] = (٠ ، ٢ -) ، على الترتيب •$$

لقد توصلنا الان الى حل كامل للمصعوبات الاولى التي جابهتنا
عند انعامنا النظر في أوليات الجبر • ونتيجة هذا الحل ، أصبح علم
الرياضيات أكثر تعقيدا في فكره مما كان عليه عند بدئنا • والحقيقة ، اننا
أبدعنا علما جديدا يختلف كليا عن العلم القديم ، ويخدم كافة المقاصد
التي تم اختراع العلم القديم بسببها ، بل أكثر منها جدا • ولكن قبل
أن نهنيء أنفسنا لهذه النتيجة الطيبة لاتعابنا ، يجب أن نعمل على ازالة
الشك الذي لا بد أنه الان بدأ يخامر نفس الطالب • ان السؤال الذي
ينبغي أن يسأل عنه القارئ نفسه ، هو أين ينتهى هذا الابداع في
التفسير الجديدة ؟ لاشك اننا توقفنا في تفسير الجبر بحيث أصبح في
مقدورنا على الدوام ، أن نحل معادلة تربيعية مثل س^٢ - ٢ س +
٤ = ٠ • ولكن يوجد عدد لا ينتهى من المعادلات الاخرى ، مثل
س^٣ - ٢ س + ٤ = ٠ و س^٤ + س^٣ + ٢ = ٠ وغيرها مما
لا حصر له • فهل علينا أن نبذل علما جديدا كلما ظهرت معادلة جديدة ؟

ان الامر لو كان كذلك ، لكنت جميع تحرياتنا السالفة ، على امتاعها لبعض العقول ، تافهة الاهمية • ولكن الحقيقة العظيمة التى جعلت التحليل الرياضى الحديث من الممكنات ، هى أن حساب التفاضل والتكامل للمتجهات ، مكنا من اعطاء تفسير صائب لكل دستور جديد ، واثبات أن المجهول فى كل معادلة ، يدل على متجه ما • وبقدر ما يتعلق الامر بالافكار الاساسية فى الرياضيات ، يصح لنا ان نقول بأن هذا العلم أصبح الان كاملا بذاته • وفى الوقت الذى كانت فيه الجهود تبذل ، لوضعه بصيغته النهائية ، كان قد تم اختراع المحركات البخارية • على ان هذا العلم سيبقى أداة جبارة تعمل على انتصار الفكر على المادة ، على حين تكون النتائج الغريبة الشكل من هذه المحركات قد أودعت المتاحف ، لتوضع الى جانب الخوذ والدروع التى كانت تستعمل فى دور مضى عليه زمن ليس بالبعيد •

الفصل التاسع

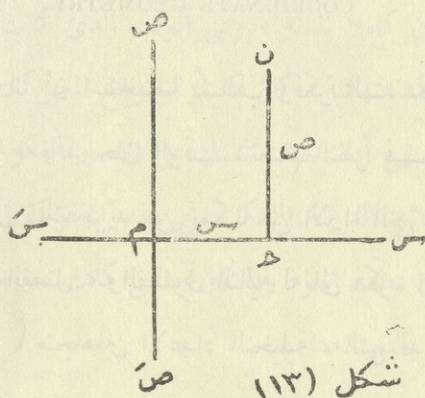
الهندسة الإحداثية

COORDINATE GEOMETRY

لقد سبق لنا أن استخدمنا أساليب وفكر الهندسة الاحداثية فى
الفصول السابقة • وقد حان الوقت لانعام النظر فيها على وجه
التخصيص ، لان ذلك يزيد من تمكننا من الاراء التى توصلنا اليها •
وسنعود فى هذا الفصل ، والفصول التالية له الى فكرة الاعداد الحقيقية
الموجبة والسالبة ، متجاهلين الاعداد التخيلية ، التى قدمناها للقارىء
فى الفصلين الاخيرين •

كنا نستعمل باستمرار ، الفكرة القائلة باننا اذا رسمنا المحورين
س م س ، ص م ص على مستو ما ، ففى الامكان تعيين موقع نقطة أية
كانت مثل ن عليه ، بزوجين من الاعداد الموجبة أو السالبة هما س ، ص
بحيث أن س (راجع الشكل - ١٣) هو الطول م ح ، وأن ص هو
الطول ن ح • وهذه الفكرة على سداجة مظهرها هى الفكرة الجوهرية
فى موضوع الهندسة الاحداثية الواسع • والكشف عنها ، كان مطمح
دور خطير الشأن فى تأريخ الفكر الرياضى • وهى تعزى ، كما بينا

سابقا ، الى الفيلسوف ديكارت ، الذى خطر له كونها طريقة رياضية مهمة عندما كان مستلقيا على فراشه فى صبح أحد الايام . والفلاسفة الذين عرفوا الرياضيات حق المعرفة ، كانوا من بين الذين غدوا هذا العلم باجود الآراء . على أن الواجب يحتم علينا ، من الوجهة الاخرى ، أن نقول ايضا ، ان تعليقات الفلاسفة ، الذين كانت معلوماتهم الرياضية طفيفة أو سطحية أو حديثة عهد ، على الرياضيات ، كانت من غير



استثناء تقريبا ، عديمة القيمة او تافهة او مغلوطة فيها . انها حقيقة عجيبة ، وسببها أن الآراء الجوهرية فى الرياضيات ساذجة جدا ، بل تكاد تكون صيانية فى سذاجتها ، وهى لذلك تقع ، بسهولة ضمن نطاق التفكير الفلسفى . ويرجح أن سذاجتها هذه بالذات ، هى علة الخطأ فيها ، لاننا لم نتعود التفكير بأمور سهلة مجردة كهذه . والمرانة الطويلة ضرورية للحصول على مناعة جزئية ضد الخطأ فيها ، وخاصة ، حينما نتحرف عن الطرق العقلية الممهدة .

ان اكتشاف الهندسة الاحداثية ، واكتشاف هندسة المساقط ،
الذين حدثا فى حدود تاريخ واحد ، يصوران حقيقة أخرى كثيرا ما
أكد صحتها تاريخ المعرفة • وهى أن قسما من أعظم الاستكشافات
تفرع عن أوسع المباحث انتشارا وتداولاً • فقد مر حتى مطلع القرن
السابع عشر ما ينيف على الالفى عام ، كان خلالها علم الهندسة موضع
الدرس ، هذا اذا عددنا ظهوره عاصر اليونان • ان كل ما فعله اقليدس -
المولود سنة ٣٣٠ ق • م ، والذي كان يدرس فى جامعة الاسكندرية -
هو قيامه بتنظيم وتوسيع ما أبدعه سلسلة من رجال سلفوه ، بينهم عباقرة
أفذاذ • ثم عقبه جيل وراء جيل من الرياضيين ، عملوا على تحسين
الموضوع • وزيادة على ذلك لم يقع هذا الموضوع تحت تأثير ذلك الحاجز
المميت للتعلم ، ونعنى ، أن دراسته لم تكن مقصورة على مجموعة ضيقة
من الناس المتشابهين فى الاصل والمظهر • بل كان الامر على العكس من
ذلك تماما ، فقد عاجلته حتى القرن السابع عشر عقول المصريين واليونان
والعرب والامان • وبرغم هذا الجهد والعناية التى نالها خلال هذا العدد
العديد من الاجيال والعصور ، ومع تنوع العقلیات التى درستة ، فإن
أهم اسراره كانت تنتظر الكشف عنها •

لايمكن لاحد ان يدرس علم الهندسة ، بل حتى مبادئه الاولى
دون أن يملكه الشعور ، بعدم وجود طريقة عامة تهديه سواء السبيل •
ذلك أن البرهنة على كل نظرية ، تتطلب اظهار الجديد من البراعة

والحذق ، أى ان هذا العلم كانت تنقصه حاجة هامة من مستلزمات التفكير العلمى ، وهى الطريقة • والامر الرئيسى فى هندسة الاحداثيات أنها خطت لأول مرة ، طريقة • ان الاستنتاجات ، البعيدة المآخذ ، فى الرياضيات ليست بذات أهمية نظرية كبرى ، لان العلم لا يعد بالغاً درجة الكمال ، ما لم يتألف فى جوهره ، من بسط طرق واضحة متألّفة ، بحيث يمكن الحصول ، بسهولة تامة ، على المعلومات الخاصة بكل مطلب يقع ضمن نطاقه • ولا ينمو العلم بتضخيمه ، بل ينمى بأرائه • فكلما نمت آراؤه ، قلت الاستنتاجات الجديرة بالتدوين • ومن المؤسف فى الرياضيات ، أن كتبها التدريسية مشحونة بنظريات فرعية لاعداد لها ، نظريات لم تقب لها أهمية تذكر ، بل ينبغى دمجها ، كحالات خاصة ، فى الحقائق الأكثر عمومية منها • لان العمومية ، كما سبق وأكدنا بأصرار ، هى روح الرياضيات •

تصور لنا الهندسة الاحداثية ميزة اخرى للرياضيات ، سبقت الإشارة اليها ، وهى ان العلوم الرياضية تتشابه بعضها مع بعض فى اثناء نموها ، وتتشارك الآراء أنفسها • ولن نبالغ اذا قلنا ان الفروع الرياضية المختلفة خاضعة ، أبداً ، لعملية التعميم بصورة مستمرة • وهى عندما تعمم ، تلتحم وتتحد • وسبب ذلك يعود الى طبيعة هذا العلم نفسها ، وهى عموميتها • ونقول بكلمة أخرى ، يعود الى كون أن العلم هذا يتعامل بالحقائق العامة ، التى تنطبق على الاشياء كافة لمجرد وجودها كاشياء • وبهذه المناسبة نقول ، أن أهمية الهندسة الاحداثية ترجع الى

انها تربط علم الهندسة ، الذى بدأ كعلم للفراغ أو للحيز ، بالجبر
الذى يعود باصله الى علم الاعداد .

لنتذكر الان الفكر الاصلية لهذين العلمين ، لنرى كيف يرتبطان
معا بطريقة ديكارت الاحداثية . ولنبدأ بالجبر ، ونترك جانبا الاعداد
التخيلية ، ونقصر تفكيرنا على الاعداد الحقيقية فقط ، موجبة كانت أو
سالبة . ان الفكرة الاساسية فيه تدور حول العدد ، أيا كان ، ونقصد
بذلك العدد المتغير الذى نعبر عنه بحرف لا بأرقام معينة . ونتقدم بعد
ذلك للنظر فى الروابط بين المتغيرات . مثال ذلك اذا كان s ، ص
متغيرين ، فيجوز أن نتصور انهما مربوطان بمعادلة ما ، مثل
 $s + v = 1$ أو $s - v = 1$ ، أو بأى شكل من الاشكال الاخرى
التي لا حصر لها . والواقع أننا عندما نفكر برابطة ما ، اذا كانت على
شئ من الاهمية ، ينتقل الذهن بنا من الفكرة الاولى عن الاعداد المتغيرة
الى الفكرة الثانوية عن الروابط المتغيرة بين الاعداد . وعلى ذلك ، فاننا
نعلم الرابطة الخاصة $s + v = 1$ ، بوضعها على شكل الرابطة العامة
 $as + bv = c$ ، التي نجد فيها أن الحروف a ، b ، c تقوم مقام
أعداد ، أيا كانت تلك الاعداد . أى أنها نفسها متغيرات . ولكن هذه
المتغيرات تعين الرابطة المتغيرة ، وهذه الرابطة ، عند تحديدها ، تربط
بين العددين s ، v . ان المتغيرات من نوع a ، b ، c المذكورة أعلاه ،
والتي تستعمل فى تحديد الرابطة ، تسمى (كميات ثابتة) أو
برمترات . وقد يتراءى للقارىء أن استعمال الصفة (ثابتة) ،

لكميات هي في الواقع متغيرة ، أمر لا يخلو من الغرابة والتناقض •
والحقيقة ، انه أمر طبيعي جدا • لان التحرى الرياضى يدور حول
العلاقة بين المتغيرين س ، ص على فرض أن أ ، ب ، ح كميات معينة
معلومة • وبهذا الاعتبار ، وبالنسبة الى س ، ص ، تعد الكميات
(الثابتة) أ ، ب ، ح ، كميات ثابتة • وعليه فإن أس + ب ص = ح تقوم
بتمثيل عام لصيغة معينة من الصيغ الجبرية ، أى أنها تمثل الرابطة المتغيرة
لصنف معين •

كذلك نعمم المعادلة $س^2 + ص^2 = ١$ على الشكل
 $أس^2 + ب ص + د = ٠$ و او بصورة أعم على الشكل
 $أس^2 + ٢ ب س ص + ٢ ب س ص + د = ٠$ ، أو أكثر من ذلك عمومية
 $أس^2 + ٢ ب س ص + ٢ ب س ص + د = ٠$ •
وهنا أيضا ، نلاقى روابط متغيرة تشير اليها الصيغ الجبرية
المختلفة •

لنعد الان الى علم الهندسة • ان اسم هذا العلم يدعو لاذهاننا فكرة
الاشكال والصور للمثلثات والمستطيلات والمربعات والدوائر ، وما بينها
من علاقات خاصة • وان دراسة الخواص السهلة لهذه الاشكال ، هي
مواد موضوع الهندسة الاولى ، كما تقدم ، بحق للمبتدئ • على أن
تفكير لحظة في الامر ، يكفي لتبيان أن هذه ليست بالفكرة الحقيقية التى
تحيط بالموضوع • وقد يكون من الاجدى للطفل ، ان يبدأ مناقشاته
الهندسية ، بدراسة الاشكال التى يقصها بالمقص ، كالمثلثات والمربعات •

ولكن ما المثلث ؟ انه شكل معين محدود بثلاث قطع صغيرة من ثلاث خطوط مستقيمة •

ومع ان أمر تحديد المساحات بقطع صغيرة من خطوط ، فكرة معقدة جدا ، فهي لا تمدنا بتاتا ، بأى شعاع من الامل ينير الطريق الى الافكار السهلة العامة التى تؤلف الهيكل العظمى للموضوع • ان بنا حاجة الى شىء أكثر سهولة وأوسع عمومية • وشغل الذهن بالاراء التى كان البدء بها خطأ - مع انها أى تلك الاراء كانت طبيعية وصالحة لابداع الافكار الاولى فى الموضوع - هو السبب فى العقم النسبى لهذا العلم ، برغم الانكباب على دراسته هذه العصور العديدة • ويعود فضل الكشف ، عن الاهداف الحقيقية البسيطة للفكر الهندسى ، الى الهندسة الاحداثية والى مبدعها ديكارت •

والان بدلا من أن نفكر فى قطعة من الخط المستقيم ، لنفكر فى المستقيم كله ، بطوله الذى لا نهاية له من الجهتين • ان هذا النوع من الفكر العامة هو الذى يجب أن نبدأ به تحرياتنا الهندسية • ويلوح أن اليونانيين لم يجدوا اية فائدة قط فى هذا التصور ، الذى يعد الان أساسيا فى الفكر الهندسى الحديث بأسره • فقد كان اقليدس يفكر فى الخط المستقيم بأنه يصل بين نقطتين معلومتين ، كما كان حريصا جدا على ذكر المواضع التى يقتضى أن يمدده فيها الى أكثر من هذا الجزء المحدود • وهو لم يفكر بتاتا بالمستقيم ، على أنه كيان يجب النظر اليه دوما ككل • وهذا التعريف والتحديد الدقيق ، الذى يقضى فكرة

اللانهاية ، بوصفها غير واضحة مباشرة للحواس ، كان طابع اليونانيين
الحاص فى جميع فعاليتهم الكثيرة . وهذا الطابع نجده محفوظا بالفرق
الظاهر بين الفن المعمارى الاغريقى والفن المعمارى القوطى ، وبين
الدين الاغريقى والدين الحديث فالمسئلة فى ذروة كنيسة قوطية ،
وأهمية المستقيم الذى لا حدود له فى الهندسة الحديثة كلاهما من شعار
تطور العالم الحديث .

يظهر مما سبق ، ان النظر الى الخط المستقيم ككل ، هو الفكرة
الاصلية التى تبدأ بها الهندسة الحديثة . وهنا ، تخطر على بالنا ،
أنواع أخرى من الخطوط ، تتدرج بها الى ادراك معنى المنحنى الكامل ،
وهو الذى تكون له ، فى كل نقطة من نقاطه ، خاصية مطردة مثلما يكون
للخط المستقيم ، فى جميع نقاطه ، خاصية الاستقامة . لتأخذ الدائرة ،
كمثال على ذلك ، فنجد انها ، فى جميع نقاطها ، تمتلك خاصية الوقوع على
بعد معلوم عن مركزها . كذلك لو أخذنا القطع الناقص ، وهو منحنى
بيضى ، لوجدنا أن مجموع بعدى أية نقطة عليه ، عن نقطتين معينتين
تسميان البؤرتين ، ثابت لجميع نقاط المنحنى . ومن الواضح أن الدائرة
ليست سوى حالة خاصة من حالات القطع الناقص ، وذلك عندما تتطابق
البؤرتان فى نقطة واحدة ، فيكون مجموع البعدين آتد ، ضعف نصف
قطر الدائرة . وكان القدماء يعرفون خواص القطع الناقص والدائرة ،
ويعدونهما بالطبع كلين تامين . مثال ذلك أن أفليدس ، لم يبدأ بمجرد
أجزاء من الدوائر (أى بقطع منها) ثم بعد ذلك يمدّها بل كان على

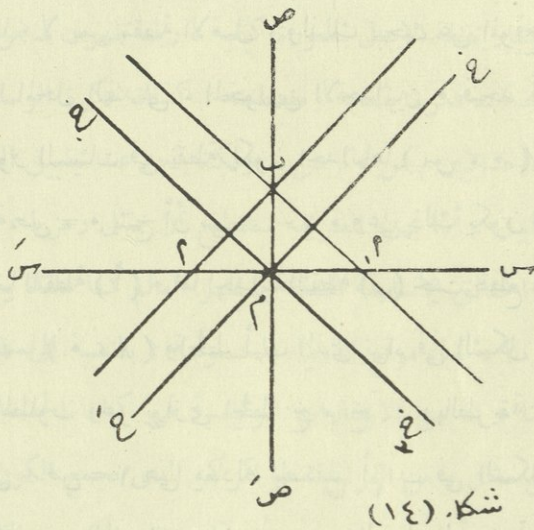
الدوام ، ينظر للدائرة كلها ، كما لو رسمت بتمامها • ولكن الدائرة
لسوء الحظ ليست هي الخط الاساسى الصحيح فى الهندسة ، لتصبح
نظريته الخاطئة للخط المستقيم أقل خطرا •
ان الفكرة العامة عن منحن يمتلك فى كل نقطة من نقاطه خاصية
مطردة ، يعبر عنها فى علم الهندسة ، بكلمة « المحل الهندسى » • فالمحل
الهندسى اذاً ، هو منحن أو سطح (اذا لم نقيّد أنفسنا بالمستوى) ،
مؤلف من نقاط تمتلك جميعها خاصية معينة معلومة • وفى حالة فحصنا
لمنحن ، محدود ككل ، يجب النظر فى أية نقطة كانت أو نقاط واقعة
عليه • وهكذا نلتقى مرة ثانية ، بالفكرة الاساسية للمتغير • وزيادة على
ذلك ، نجد أن فكرة الصيغة تظهر مرة أخرى عندما نصنف المحال
الهندسية تحت عناوين كالخطوط المستقيمة والدوائر والقطوع الناقصة
•••• الخ •

وعلى ذلك ، فكما نهتم فى الجبر ، بالاعداد المتغيرة ، والروابط
بين الاعداد المتغيرة ، وتصنيف هذه الروابط الى أنواع بالاستعانة بفكرة
الصيغة الجبرية ، يجب أن نهتم فى الهندسة بالنقاط المتغيرة ، والنقاط
المتغيرة تحت شروط ما لترسم محلا هندسيا ، وتصنيف المحال الهندسية
الى أنواع ، بالاستعانة بفكرة الشروط ذات الصيغة الواحدة •
ان جوهر الهندسة الاحداثية ، هو تمثيل الروابط الجبرية بالمحال
الهندسية • فالتقطة على مستو تمثل جبريا باحداثيها س ، ص ، والشرط
الواجب تحقيقه فى كل نقطة من نقاط المحل الهندسى ، يمثل جبريا

بالرابطة المناظرة له بين س ، ص ، وأخيرا ، يجب أن يكون للروابط ،
التي يمكن التعبير عنها بصيغة من الصيغ الجبرية العامة ، ما يناظرها من
مجال هندسية ذات نوع عام ، أى التي تكون شروطها الهندسية ذات صيغة
واحدة . وبهذا نكون قد وصلنا الى مرحلة ، نستطيع فيها أن نجرى تبادلا
كاملا فى الافكار والنتائج ، بين هذين العلمين ، فيلقى كل منهما نورا على
الآخر ويستمد منه قوة عظيمة لا يعرف مداها . ويستحيل على المرء
ان لا يشعر بهزة نفسية ، عندما يفكر فيما يغمر نفوس الرجال من
شعور فياض ، فى اللحظات الحاسمة ، لمغامراتهم وكشوفهم - كولو ميس
عندما شاهد شواطئ الغرب أول مرة ، ويزارو عندما وقف ذاهلا يطل
على الباسفيك ، وفرانكلين عندما نقلت أسلاك طائرته الشرارة الكهربائية ،
وغاليليو عندما وجه مقرابه (تلسكوبه) الى السماء . ولا تخلو حياة
المشتغلين ، فى الحقل الفكري المحضة ، من مثل هذه اللحظات . وصباح
ذلك اليوم الاغر ، الذى أبدع فيه ديكارت طريقة الهندسة الاحداثية ،
يجب أن يحتل بينها مكانا رفيعا .

وأول ما يرد على الخاطر ، عندما يدرك المرء فكرة الهندسة
الاحداثية أول مرة ، هو السؤال عن أنواع المجال الهندسية ، التي
تناظر الصيغ الجبرية المعروفة . مثال ذلك : ان أسهل أنواع الصيغ
الجبرية العامة ، هى الصيغة $أس + ب ص = ح$ ، وأما نوع المحل الهندسى
الذى يناظرها ، فهو الخط المستقيم . وعلى العكس من ذلك ، فان كل
خط مستقيم ، يناظر معادلة بهذه الصيغة . ومن حسن الصدف ، أن

يكون أسهل المحال الهندسية مناظراً لاسهل الصيغ الجبرية • والحق ، أن هذا التناظر العام ، وسهولته الجبرية الهندسية كان مصدر قوة للموضوع بأسره ، فهو ينبثق عن كون العلاقة بين الهندسة والجبر ليست عرضاً أو متكلفة ، ولكنها أساسية متأصلة • ان المعادلة التي تناظر محلاً هندسياً ، تدعى معادلة المحل الهندسى • وسنوضح الموضوع بأمثلة من معادلات الخطوط المستقيمة •



شكل (١٤)

لنأخذ المعادلة $ص - س = ٠$ ، فنجد أن $١ - ١ = ٠$ ، قد حلت محل أ ، ب ، ح في الصيغة العامة ، وأن خطها المستقيم يمر « بنقطة الاصل » م ، وينصف الزاوية $س م ص$ (راجع الشكل - ١٤) ، وهو في الشكل خ م خ • أما مروره بنقطة الاصل ، فواضح من ملاحظة ان المعادلة تتحقق اذا جعلنا $ص = ٠$ ، $س = ٠$ في آن واحد ، ولكن

• ، • ، • هما احداثيا « م » • ونرى ، باتباع الطريقة نفسها ، من السهل ،
أن نضع تعميما ينص على أن أى خط يمر بنقطة الاصل يجب أن تكون
معادلته على الصيغة $أس + ب ص = •$ فالمحل الهندسى للمعادلة
 $س + ص = •$ يمر أيضا بنقطة الاصل وينصف الزاوية $س م ص$ وهو
فى الشكل الخط $خ م خ$ •

لننظر الان فى المعادلة $ص - س = ١$ ، فنجد ان المحل الهندسى
المنظر لها ، لا يمر بنقطة الاصل ، ولذلك نبحث عن الموقع الذى يقطع
فيه ، هذا المحل الهندسى ، المحورين الاحداثيين • فنجد أنه يجب أن
يقطع محور السينات فى نقطة يكون احداثياها $(س ، •)$ ، فاذا جعلنا
فى المعادلة $ص = •$ ينتج أن $س = ١ - •$ وعلى ذلك يكون $(١ - • ، •)$
هما احداثيا النقطة (أ) • اما احداثيا النقطة (ب) حيث يقطع الخط المحور
 $م ص$ ، فهما $(١ ، •)$ والخط $أ ب$ الذى نراه فى الشكل ، هو المحل
الهندسى المطلوب وهو يوازى الخط $خ م خ$ • وبالطريقة نفسها نصل
الى أن $س + ص = ١$ هى معادلة المستقيم $أ ب$ فى الشكل ، وهذا
المحل الهندسى يوازى $خ م خ$ • ومن السهل البرهنة على توازى
الخطين الممثلين لمعادلتين من الصيغتين $أس + ب ص = •$ ، $أس + ب ص$
• > =

ان للمجموعة الثانية من المحال الهندسية ، التى ينبغى أن نتطرق
اليها ، من الاهمية ما يستلزم افراد فصل خاص بها • ولكننا قبل الاقدام
على ذلك ، سنتبسط قليلا فى الافكار الاصلية للموضوع •

لتعيين موقع أية نقطة مثل ن ، نبدأ باختيار موقع نقطة الاصل بصورة
 كيفية ، ثم نرسم المحورين المتعامدين م س ، م ص وبعد ذلك نعين موقعها
 بملاحظة احداثيها س ، ص أى م ح ، ن ح (لاحظ الشكل - ١٣) •
 • كذلك يمكن تعيين موقعها - كما رأينا فى الفصل السابق ، بالمتجه م ن ،
 على أساس أن فكرة المتجه تتضمن أمرين : اتجاهها معنا وطولا معلوما •
 وأن فكرة اختيار نقطة الاصل بصورة كيفية ، ربما ظهرت - من الوجهة
 الرياضية البحتة - فكرة سمجة ومصطنعة ، كذلك فكرة الرسم الكيفي
 للمحورين الاحداثيين م س ، م ص • ولكننا نجد عند تطبيق الرياضيات
 على حيز الكون ، أننا بهذه الطريقة نستطيع أن نمثل رمزيا ، وبسهولة
 تامة ، أعماق الحقائق الاساسية المتعلقة بمظهر العالم كما نلقاه بحواسنا •
 ان كل فرد منا ، يعين موقع الاشياء المحسوسة ، بالنسبة الى نقطة أصل
 يسميها « هنا » اذ من الاعتبارات الرئيسية فى كياننا الجسماني ، أن
 نعد موقعنا فى محل ما من الفراغ ، هو المركز الذى نجتمع الكون حوله •
 ومع أنه فى الوسع أن تصور وجود مخلوقات تنظر الى جميع الظاهرات ،
 فى الفضاء بأسره ، نظرة متساوية دون تحيز لمكان دون آخر ، فان الامر
 معنا على العكس من ذلك • فنقطة عند ارجلنا ، تثير من انتباهنا اكثر مما
 يثيره زلزال فى (كيب هورن) ، او دمار عالم فى المجرة • ولا ريب اننا ،
 اذا اردنا ان نجعل من معلوماتنا ملكا مشاعا بين اخواننا البشر ، وجب
 علينا ان نتنازل ، بعض الشيء ، عن انانيتنا الضيقة ، التى تتجلى بقولنا
 « هنا » ، مشيرين بها ، الى ان موقفنا الشخصى هو مركز الكون • وذلك

بأن نعوض عن كلمة « هنا » بكلمة « تقريبا هنا » • اصطلحت بعض
 الممالك ، على تسجيل ابعاد الاماكن بالاميال ، اما عن بهو البلدية لا قرب
 مدينة ، او عن عاصمة البلاد ، اما فى قياس الكرة الارضية ، فان رجال
 العلم يعدون مركز الارض ، هو نقطة الاصل • ويسمو الفلكيون الى •
 غاية التسامح والغيرية ، عندما يضعون نقطة الاصل ضمن الشمس •
 وايضا وضعنا نقطة الاصل هذه ، حتى اذا ذهبنا بها الى نقطة مناسبة فى
 احدى النجوم الثابتة القريبة ، فان بعد موقعها عنا ، بالنسبة الى الابعاد
 اللامتناهية فى الفضاء ، يؤيد صحة القول ، بأن موقع نقطة الاصل ،
 التى ينبغى تثبيتها لقياس الابعاد الكونية هو « هنا تقريبا » •
 ومن جهة اخرى ، فان العلاقة بين الاحداثيين m ، h ، z (أى
 $ص$ ، $ص$) والمتجه من هـى حالة من حالات قانون متوازى الاضلاع
 المعروف (راجع الشكل - ٨) ، كما يتبين بسهولة ، عند اكمالنا
 متوازى الاضلاع $م د هـ$ • ان فكرة « المتجه » من ، ونعنى به المقدار
 ذو الاتجاه ، هى الفكرة الاصلية فى علم الطبيعة ، فكل جسم متحرك ،
 مقدار معلوم من السرعة فى اتجاه معلوم • وبكلمة اخرى ، ان سرعته
 هى مقدار ذو اتجاه ، أى متجه • وللقوة كذلك ، مقدار معلوم واتجاه
 معين • ولذلك كان ادخال فكرة « نقطة الاصل » و « الاحداثيات »
 و « المتجهات » فى الهندسة التحليلية ، مؤديا الى دراستنا للاراء
 المجردة ، التى تناظر الحقائق الاساسية فى العالم المادى •

الفصل العاشر

الْقُطُوعُ الْمَخْرُوطِيَّةُ

CONIC SECTIONS

عندما استنفذ علماء الاغريق - على حسب ظنهم - الخواص البارزة
للاشكال المؤلفة من الخطوط المستقيمة والدوائر ، التفقتوا الى دراسة
منحنيات أخرى • وبذلك الغريزة التي تكاد لا تخطيء في اصابة
الاهداف الجديرة بالتفكير ، وقفنوا انفسهم لدراسة القُطوع المخروطية •
وهي المنحنيات الحادثة من قطع المستويات لسطوح المخاريط الدائرية •
اما الرجل الذي يعود اليه فضل اختراع هذه الدراسة فهو منا شمس
(Menaechmus) «المولود سنة ٣٧٥ ق.م • والمتوفى سنة ٣٢٥ ق.م •»
وكان من تلاميذ افلاطون ، وأحد مدرسي الاسكندر الكبير • وبهذه
المناسبة نقول ، ان الاسكندر الكبير كان مثالا بارزا على مزايا التعليم الصالح ،
فقد كان ارسنطا طاليس من بين اساتذته الآخرين • ولنا ان نظن ، ان
الاسكندر وجد معلمه منا شمس ، على شيء من البلادة • فقد جاء في
الاخبار انه طلب الى معلمه اختصار البراهين ، وقد كان جواب منا شمس
على هذا الطلب قوله « توجد في البلاد طرق خاصة ، بل طرق سلطانية ،
اما في علم الهندسة ، فالطريق واحد للجميع » • ان هذا الجواب كان بلا

شك صحيحاً ، بالمعنى الذى كان يقصد ان يفهمه الاسكندر من فوره •
اما اذا اعتقد منا شمس بعدم امكان اختصار براهينه ، فقد كان فى
اعتقاده هذا على ضلال مبين • فالرياضيون الحديثون لو اضطروا الى درس
خواص القطوع المخروطية بالبراهين الاغريقية ، لوجدوا فى ذلك عنتا
وسأماً عظيمين • ولا شئ يصور لنا مدى ما نالته القوة العلمية من كسب
بنتيجة استحداث آراء سديدة ، احسن من ملاحظة الاختصارات الكثيرة
فى البراهين ، وهو الامر الذى يصحب نمو الآراء وغزارتها • وبين
الرياضيين فريق ، لا يتحمل النظر الطويل فى آراء الموضوع ، بل يتوق
الى التقدم ، من فوره ، الى براهين المسائل المهمة • ولكن تاريخ العلم
لا يؤيد هذا التصرف بتاتا • فى العلم طرق سلطانية ولكن اول من يطؤها
ليس الملوك بل نوابغ الرجال •

ان الكيفية التى بدت فيها فكرة القطوع المخروطية لرياضيين
كانت على الوجه الآتى : (راجع الشكل ١٥) تصور مخروطاً رأسه
م ، وقاعدته الدائرة س ط و فتجد ان سطحه يشبه سطح نوع من
مظلات المصابيح الكهربائية • والان دع الخطوط المولدة ، المارة
بالنقطة م والمنطبقة على السطح المخروطى ، تمتد الى الوراء ، فتكون
النتيجة مخروطاً مزدوجاً ، وفيه المقطع ن ك ر يقابل المقطع س ط و على
الجهة الثانية من م • اما محور المخروط ، وهو ح م ح ، فيمر بمراكز
جميع هذه الدوائر ، ويكون عموداً على مستوياتها ، التى يوازي بعضها
البعض • وانك لو اوجد فى الشكل ، ان اجزاء المنحنى التى يفترض انها

تقع وراء مستوى الصحيفة ، قد رسمت على هيئة خطوط منقطة ^(١) ، اما
الاجزاء التى تقع على مستوى الصحيفة او امامها ، فقد رسمت كخطوط
متصلة •

والان لنفرض أن هذا المخروط المزدوج ، قطع بمستوى لم يكن
موازيا لمحوره $حم$ ، أو على الاقل ليس من الضرورى أن يكون
موازيا له فينشأ عن ذلك ثلاث حالات :

الاولى - أن يحدث من تقطع المستوى للمخروط منحنى بيضى مقفل
أ ب آ ب ، يقع بتمامه على أحد نصفي المخروط المزدوج • وفى هذه
الحالة لا يلتقى المستوى مع النصف الثانى للمخروط • ومثل هذا المنحنى
يسمى القطع الناقص (Ellipse) ، وهو منحن بيضى • ولهذا
المقطع حالة خاصة ، عندما يكون المستوى القاطع عمودا على المحور
 $حم$ ، فيكون شكل المقطع اذ ذاك دائرة مثل $ط و ، ن ك ر$ •
وعلى ذلك فالدائرة هى حالة خاصة من القطع الناقص •

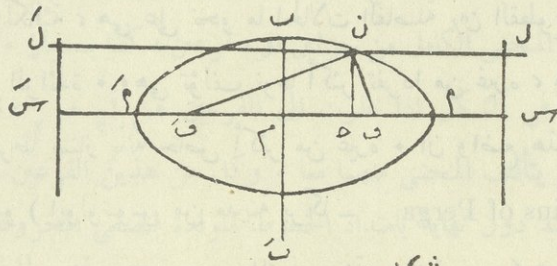
الثانية - أن يكون المستوى موازيا لمستوى آخر ، يمس المخروط فى
أحد الخطوط المولدة له • ففي الشكل نجد المستوى $د١ أ١ د٢$ ، يوازي
المستوى الذى يمس المخروط فى الخط المولد $م س$ • وفى هذه الحالة
أيضا ، يكون المنحنى محصورا فى سطح أحد نصفي المخروط المزدوج •

(١) فى الشكل ١٥ كان يجب أن يكون أ ب آ منقطا لا متصلا •
كذلك النصف الامامى من كل من الخطين $ه٢ ه٣$ ، $د١ د٢$ ، كان
يجب أن يكون متصلا لا منقطا •

وعلى ذلك توجد ثلاثة أنواع من القطوع المخروطية ، وهى القطع الناقص والقطع المكافئ والقطع الزائد • ومن السهل أن نرى ، أن القطوع المكافئة ، هى على نحو ما الحالات الفاصلة بين القطوع الناقصة والقطوع الزائدة • وهى تؤلف نوعا أكثر تنمردا من غيره ، وينبغى أن تحقق شرطا يمتاز بأنه خاص أكثر من غيره • ان واضع هذه الاسماء الثلاثة هو (ابولونيوس من مدينة پرگا - Apollonius of Perga المولود حوالى سنة ٢٦٠ ق • م والمتوفى سنة ٢٠٠ ق • م) • وقد وضع رسالة منسقة عن القطوع المخروطية ظلت المرجع الاساسى حتى القرن السادس عشر •

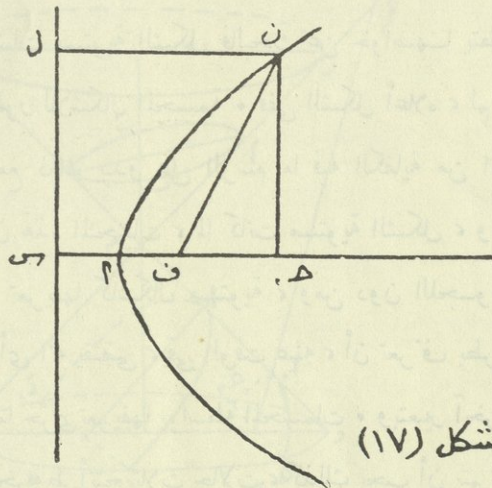
ويستبان على الفور ، مدى ما عاناه علماء الهندسة الاغريق ، من صعوبة ومشقة ، فى تحرياتهم عن خواص هذه المنحنيات ، فهى على كونها منحنيات مستوية الشكل فالبحت عن خواصها يتطلب استعمال الرسم المنظور للاشكال المجسمة • ففى الشكل أعلاه ، لم نرسم خطوطا مساعدة ومع ذلك يبدو على الرسم ما فيه الكفاية من التعقيد • ومن الواضح أن هذه المنحنيات ، لما كانت مستوية الشكل ، وجب أن يكون فى الوسع تعريفها كأشكال مستوية ، ومن دون اللجوء الى الشكل المجسم • أى انه يقتضى ، فى الوقت عينه ، أن تعرق بطريقة ذات نسق واحد ، كما جرى تعريفها بواسطة المجسمات • وبتعبير آخر ، كما أن قطع المستوى لمخروط أنتج ثلاث حالات ، كذلك يجب أن يتم تعريفها كشكل مستو ، بطريقة ذات أصل واحد ، تشعب عنه ثلاث حالات • أما صورها

عندما ترسم على مستوياتها فتتمثل بالخطوط المنحنية في الاشكال ١٦ ،



شكل (١٦)

١٧ ، ١٨ . وتسمى النقاط أ ، آ في الاشكال هذه (بالرؤوس) ،



شكل (١٧)

والخط أ آ بالمحور الكبير ، وجدير بالملاحظة أن للقطع المكافئ رأسا

واحدًا • وقد برهن أبولونيوس ، أن النسبة

$$ن > ٢ \text{ الى } ١ > x > ١ \text{ (ن) } \left(\frac{ن}{١ > x > ١} \right)$$

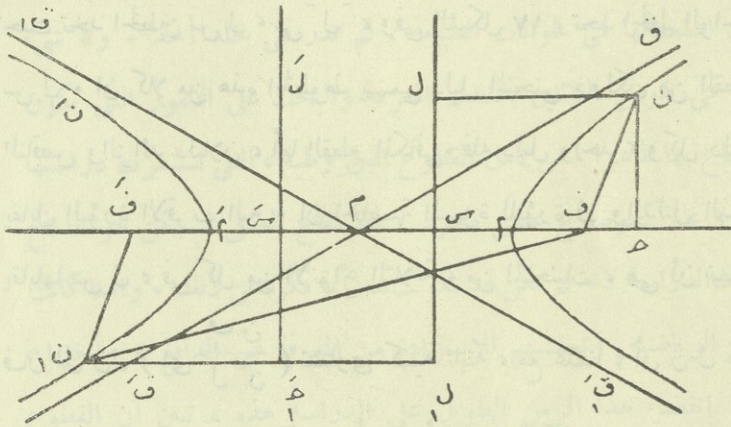
تبقى ثابتة في كل من القطع الناقص والقطع الزائد ، (شكل ١٦ ، ١٨) ،

وان نسبة $ن > ٢$ الى $١ > x > ١$ تكون ثابتة في القطع المكافئ (شكل ١٧) •

ولقد قام معظم عمله على هذه الحقيقة • يظهر من ذلك ، اننا نتقرب من

تعريفها جميعا ، بتعريف ذي نسق واحد يعدها منحنيات مستوية غير

اننا لم نصل بعد الى هذا النسق •



شكل (١٨)

نجد في الشكلين ١٦ ، ١٨ ، النقطتين ف ف وفي الشكل ١٧

النقطة ف وهي تقاطع على غاية الاهمية وتدعى (بؤر) المنحنى • وكان

أبولونيوس على علم بأنه ، أينما وقعت النقطة ن المتحركة على منحنى

القطع الناقص ، فإن مجموع فن ، ف^ن (أى فن + ف^ن) يكون ثابتاً ومساوياً الى أ^ن . أما فى القطع الزائد ، فيكون ف^ن - فن ثابتاً ومساوياً الى أ^ن ، عندما تتحرك ن على أحد الفرعين ، كما يكون الفرق فن^ن - ف^ن ثابتاً ومساوياً الى أ^ن عندما تكون ن على الفرع الآخر . ولكنه لا توجد نقطة تقابل ذلك على المقطع المكافئ .

وأخيراً ، وبعد مرور ٥٠٠ عام ، كشف اخر علماء الاغريق فى الهندسة ، وهو پاپس الاسكندرى ، عن السر الاخير الذى أكمل هذه السلسلة الفكرية . وتفصيل ذلك تجده بملاحظة الشكلين ١٦ ، ١٨ ، حيث تجد الخطين س ل ، س^ن ل^ن ، وفى الشكل ١٧ ، تجد الخط الواحد س ل . ان كلا من هذه الخطوط يسمى دليل المنحنى ، ولكل من القطع الناقص والزائد دليلان ، أما القطع المكافئ فله دليل واحد ، وكل دليل يقابل البؤرة الاقرب اليه . ان الخاصية المميزة للبؤرة ف والدليل الذى يقابلها س ل ، فى كل من الانواع الثلاثة ، من المنحنيات ، هى أن نسبة فن الى نل (أى $\frac{فن}{نل}$) تساوى كمية ثابتة ، مع علمنا ، أن ن ل هو العمود على الدليل من نقطة ن وأن ن أية نقطة كانت على المنحنى . وبهذه نكون قد وجدنا الخاصية المطلوبة للمنحنيات ، وهى لا تتطاب الخروج عن المستوى ، كما انه يمكن النص عليها بنسق واحد للمنحنيات الثلاثة جميعاً . ففى القطع الناقص تنقص النسبة $\frac{فن}{نل}$ عن الواحد

* راجع الملاحظة ب فى آخر الكتاب .

الصحيح أى أنها تكون أقل منه ، وفى القطع المكافئ ، تكافئه أى تكون مساوية للواحد ، أما فى القطع الزائد ، فتزيد عن الواحد أى تكون أكبر منه .

ولا شك ان بايس عندما أنهى تحقيقاته شعر ، باستثناء بعض التفاصيل الصغيرة ، بأنه قد استنفذ الموضوع وأداه حقه . ولو أمكنه أن ينفذ ببصره فى مستقبل العلم ، للآلف سنة التى أعقبت زمانه لآمن بصحة شعوره هذا . أما الحقيقة ، فهى أن الافكار المثمرة حقا فى هذا الفرع من الرياضيات لم تكن قد مست بعد ، كما أن أهميتها العظيمة ، من حيث استعمالها فى حوادث الطبيعة ، لم تدر فى خلد أحد . ولا شئ أفعل فى نفوس القائلين باقتصار المعرفة والبحث على الامور التى يكون الانتفاع بها ظاهرا ، من تأمل القطوع المخروطية ، التى استمرت دراستها ١٨٠٠ عام كموضوع علمى مجرد . فالانتفاع العملى لم يكن هو الدافع الى تلك الدراسة لانه لم تكن قد تكونت بعد أية فكرة عن ذلك . وانما كانت رغبة الرياضيين وتعطشهم للاستزادة من المعرفة هى الدافع . وأخيرا ، وبعد انقضاء هذا الزمن الطويل على الدراسة هذه ، تبين أن القطوع المخروطية ، هى المفتاح الضرورى للتوصل الى معرفة قانون من أهم قوانين الطبيعة .

وفى الوقت نفسه ، كانت دراسة علم الفلك ، وهو موضوع متميز بذاته ، تتقدم الى أمام . فالفلكى الاغريقى بطليموس (المتوفى سنة ١٦٨ ب . م) . كان قد نشر فى جامعة الاسكندرية بحثه الانموذجى

عن الموضوع ، شارحا ثبوت الارض ، ودوران الشمس والسيارات
 حولها . وفى خلال الـ ١٣٠٠ عام التى أعقبت ذلك ازداد الرصد
 الفلكى عددا ودقة . وكانت النتيجة ، أن أخذ وصف حركات الكواكب
 السيارة ، بموجب فرضية بطليموس ، يزداد تعقدا وصعوبة . وبعد
 ذلك أشار كوبرنيكوس (المولود سنة ١٤٧٣ ب . م والمتوفى سنة
 ١٥٤٣ ب . م) ، بإمكان تفسير حركات هذه الاجرام السماوية بأسلوب
 أسهل ، فيما لو فرضنا أن الشمس ثابتة وأن الارض والكواكب السيارة
 تدور حولها . ومع أنه استمر يعتقد أن هذه الحركات دائرية ، فقد قال
 بوجود تعديلها وذلك باجراء مجموعة من التصحيحات الكيفية الصغيرة
 على الحركة الدائرية الاصلية . كان الامر مستقرا على الوجه الذى
 ذكرناه ، عندما ولد كبلر الالماني ، فى مدينة ستغارت *Stutt Gart*
 عام ١٥٧١ ب . م . ومع أن كلا من علم الفلك ، وعلم هندسة
 القطوع المخروطية ، كان موضع الدرس ، فمنذ الازمنة القديمة ، فإن
 وجود علاقة ما بين الاثنين لم يخطر على بال أحد . وكان كبلر فلكيا ،
 كما كان متضلعا فى علم الهندسة ، أما فى القطوع المخروطية فقد توصل
 الى آراء ، سبق بها زمانه . وهو أحد الامثلة العديدة ، على خطأ الفكرة
 القائلة ، بأن النجاح فى البحث العلمى ، يكون حليف المتفرغ للاحية
 ضيقة من الدراسة . ذلك أن الاراء الجديدة ، أدعى الى ان تصدر من
 مجموعة فنون شتى من المعرفة مع ادراك تام ، لما تنطوى عليه الاتجاهات
 الفكرية المتميزة من أساليب وآراء ، وليس من الضرورى عن معلومات

كثيرة •

وقد يتذكر القارئ أن مما ساعد جارلس داروين على الوصول الى فكرة قانون النشوء والارتقاء ، قراءته لرسالة مالطوس الشهيرة عن السكان • وهى بحث يدور عن موضوع يختلف عن أبحاث داروين أو هذا ، على الأقل ، ما كانوا يتصورونه فى ذلك الحين •
جاء كبلر بثلاثة قوانين لحركة الكواكب السيارة • ظهر الاثنان الاولان منها عام ١٦٠٩ ، أما الثالث فظهر بعد عشر سنوات وهى كما يأتى :

١ - ان أفلاك الكواكب السيارة ، قطوع ناقصة ، وفى بؤرتها تقع الشمس •

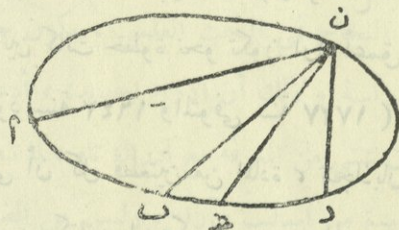
٢ - يمر نصف القطر المتجه Radius Vector - وهو الخط الواصل بين الكوكب والشمس أثناء سير الكوكب فى فلكه ، على مساحات متساوية فى أوقات متساوية •

٣ - يتناسب مربع الزمن الدورى لكل من الكواكب السيارة ، مع مكعب المحور الاكبر لفلكه (وهو قطع ناقص) •

ان هذه القوانين كانت خطوة نحو تكون آراء أعمق أساسا ، ذلك أن نيوتن ، (المولود سنة ١٦٤٢ والمتوفى سنة ١٧٢٧) ، أدرك فكرة الجذب العام • وهى أن كل قطعتين من المادة ، تتجاذبان بقوة تتناسب طرديا مع حاصل ضرب كتلتيهما وعكسيا مع مربع المسافة بينهما • وهذا القانون العام الشامل ، والقوانين الثلاثة للحركة ، التى وضع هو صيغها

النهائية العامة ، برهنت على كفايتها فى تفسير جميع الظواهرات الفلكية ، بما فيها قوانين كبلر • كما انها أصبحت عماد الفيزياء الحديثة • وكان من جملة ما برهنه ، أن المذنبات يمكن أن تتحرك فى مدارات ، على شكل قطوع ناقصة أو قطوع مكافئة • أما المذنبات التى يتكرر ظهورها ، مثل مذنب هالى ، فان مداراتها يجب أن تكون ، بالطبع ، قطوعا ناقصة • ولكن الخطوة الاساسية ، فى برهان قانون الجذب العام ، بل فى الايحاء بادراكه البدائى ، كانت فى العمل على التحقق من صحة قوانين كبلر ، التى تربط حركات الكواكب السيارة بنظرية القطوع المخروطية •

ومنذ القرن السابع عشر فصاعدا ، ساعدت النظرية المجردة للمنحنيات ، على القيام بعمل مزدوج للنهوض بعلم الهندسة ، وذلك بابتداع علم الهندسة الاحداثية Coordinate Geometry وعلم هندسة المساقط Projective Geometry فالافكار الاساسية فى هندسة المساقط ، تتجمع حول فكرة مجموعة الخطوط (أو الحزمة كما تسمى) المارة بنقطة مشتركة (هى رأس الحزمة) •



شكل (١٩)

فإذا كانت أ ، ب ، ح ، د فى الشكل ١٩ ، أربع نقاط ثابتة على قطع مخروطى ، وكانت ن نقطة متغيرة على المنحنى ، يكون لحزمة الخطوط ن أ ، ن ب ، ن ح ، ن د ، خاصية معينة ، وهى الخاصية المعروفة باسم ثبوت النسبة اللاتوافقية لها *Constancy of its cross ratio* ويكفى أن نقول هنا ، ان النسبة اللاتوافقية هذه ، فكرة أساسية فى علم هندسة المساقط (Projective Geometry) وفيه يعتمد عليها أو على خاصية مرادفة لها فى تعريف المنحنيات • ويتضح من ذلك مدى ابتعادنا ، خلال العصور المتعاقبة من الدرس ، عن الفكرة القديمة الاصلية العائدة لقطع المخروط الدائرى القائم • وهكذا يتبين ، ان ماتوصل اليه الاغريق لم يكن أكثر من معرفة خاصية صغرى ، ذات أهمية تافهة نسبيا • ومن حسن الحظ ، وبالتوفيق الربانى ، كانت هذه المنحنيات جديرة بالعناية التى بذلت فى درسها • ويتجلى عدم أهمية فكرة « التنطع » ، أن هذه الكلمة أصبحت تسقط الآن من التعبيرات الرياضية المعتادة • فكثيرا ما يطلق على القطوع المخروطية اسم « المخروطيات » وحده •

وأخيرا نعود الى الفكرة التى تركنا عندها بحث الهندسة الاحداثية فى الفصل السابق ، فقد سألنا هناك عن نوع المحال الهندسية التى تناظر الصيغة الجبرية العامة $أس + بص = ح$ • وكان الجواب أنها من صنف الخطوط المستقيمة فى مستوى الاحداثيين • كذلك وجدنا أن لكل خط مستقيم معادلة ذات صيغة كهذه ، وأن لكل معادلة بهذه الصيغة مستقيما

ينظرها • ونريد الان أن نتقدم الى النوع العام الثانى من الصيغ الجبرية •
وهى بلا شك المعادلات التى تحتوى على حدود فيها s^2 ، s ص ،
ص² • ويجب أن تكون الصيغة العامة الجديدة على الشكل
أ $s^2 + 2bs + c$ ص² + $2ds + e$ ص + $w = 0$ •

ولنسأل الان ماذا تمثل هذه ؟ والجواب على ذلك ، أنها تمثل قطعاً
مخروطياً ، ان كانت تمثل محلاً هندسياً ما • فضلاً عن ذلك فمعادلة
كل قطع مخروطى يمكن أن توضع على هذه الصيغة • أما تمييز الاشكال
الخاصة المختلفة للمخروطيات ، كما تعطى بهذه الصيغة من المعادلة ،
فأمر على غاية السهولة ، ويعتمد كلياً على $a - b^2$ ، وفيها أ ، ب ،
 c ، وهى الكميات الثابتة نفسها ، والمدونة أعلاه فى المعادلة • فان كانت
أ $c - b^2$ عدداً موجباً ، يكون المنحنى قطعاً ناقصاً • وان كانت أ $c - b^2$
 $- b^2 = 0$ • يكون المنحنى قطعاً مكافئاً • اما اذا كانت أ $c - b^2$ عدداً
سالباً فيكون المنحنى قطعاً زائداً •

مثال ذلك اذا كانت أ $c = 1$ ، $b = d = e = 0$ ، $w = -4$
نحصل على المعادلة $s^2 + 2s - 4 = 0$ • ومن السهل البرهنة على أن
هذه معادلة دائرة ، مركزها نقطة الاصل ، وطول نصف قطرها 2
(أى وحدتان) ، وفيها تكون أ $c - b^2 = 1 - 1 = 0$ ، أى
أنها كمية موجبة • فالدائرة اذاً حالة خاصة من القطع الناقص ، كما
يجب أن تكون • وتعميم القضية ، يمكن وضع معادلة أية دائرة على
الصيغة أ ($s^2 + 2bs + c$) ص² + $2ds + e$ ص + $w = 0$ ، وفيها نجد

أن $أ - ب$ تصبح $أ^2 - أ$ أي $أ^2$ وهي كمية موجبة حتما .
وعلى ذلك فالدوائر تحقق شرط القطوع الناقصة . اما الصيغة العامة
لمعادلة القطع المكافئ ، فهي $(ر س + ح ص) + ٢ د س + ٢ ه ص$
 $+ و = ٠$ ، أي أن الحدود ذات الدرجة الثانية ، كما تسمى ، يمكن
كتابتها على شكل مربع كامل . وباجراء عملية التربيع نحصل على
المعادلة :

$$ر^2 س^2 + ٢ ر ح س ص + ح^2 ص^2 + ٢ د س + ٢ ه ص + و = ٠$$

وبمقارنتها مع المعادلة العامة نجد ان $أ = ر$ ، $ب = ح$ ،
 $ح = ح$. ومنه ينتج ان :

$$أ - ب = ر^2 ح^2 - (ر ح)^2 = ٠$$

وعليه يكون
الشرط الضروري متوفرا ذاتيا . اما المعادلة $٢ س ص - ٤ = ٠$ ، وفيها
(بالمقابلة مع المعادلة العامة) $أ = ح = د = ه = و = ٠$ ،
 $ب = ١$ ، $و = - ٤$ ، فتمثل قطعاً زائداً ، لان الكمية المميزة ،
 $أ - ب = ٢ - ١ = ١$ أي $١ - ١$ وهي كمية سالبة .

ان الشرط الذي وضعناه ، بقولنا ، ان كانت المعادلة العامة تمثل
محلا هندسيا ما فهي تمثل قطعاً مخروطيا ، كان ضروريا . اذ توجد
حالات خاصة للمعادلة العمومية لا تمثل محلا هندسيا حقيقيا . مثال
ذلك ان $س^2 + ص^2 + ١ = ٠$ لا تصح لاية قيمة حقيقية تعطى لـ
س ، ص .

وقد جرت العادة أن يقال ، في مثل هذه الحالة ، ان المحل الهندسي

يتألف من نقاط تخيلية • وفكرة النقاط التخيلية ، فى علم الهندسة ،
على غاية التعقيد ولن نتطرق اليها هنا •

تقع فى نطاق الصيغة العامة للمعادلة ، حالات خاصة ، لا يتبادر
للذهن انها قطوع مخروطية • فبالوسع ، اذا اخترنا الاعداد الثابتة فى
المعادلة بشكل مناسب ، أن نجعل المعادلة تمثل خطين مستقيمين • ولا
نعزو الصواب اذ قلنا ، أن المستقيمين المتقاطعين ، يمكن أن يمثلوا قطعا
مخروطيا ، وذلك بموجب الفكرة الاغريقية عن القطوع المخروطية •
فلو رجعنا الى صورة المخروط المزدوج أعلاه (شكل ١٥) لتبين لنا أن
بعض المستويات المارة بالرأس م ، تقطع المخروط بخطين مستقيمين
متقاطعين فى م • ويمكن أيضا عد المستقيمين المتوازيين ، من القطوع
المخروطية • وذلك بأن نعتبر الاسطوانة الدائرية القائمة ، حالة خاصة
من المخروط ، فاذا قطعها مستو مواز للمحور ، كان المقطع ، مستقيمين
متوازيين • وعلى كل ، سواء أجاز الاغريقى القديم عد هذه الحالات
الخاصة قطوعا مخروطية ، أم لم يجز ، فهى بلا شك ، من المنحنيات
التي تمثلها الصيغة الجبرية العامة للمعادلات ذات الدرجة الثانية • وهذه
حقيقة جديرة بالملاحظة ، اذ من مميزات الرياضيات الحديثة ، أن
تتضمن فى صيغها العامة كل الحالات الخاصة ، التي كانت تعالج قبلا
على انفراد ، لان الرياضيات تتوخى العمومية على الدوام •

الفصل الحادى عشر

الدَّوالُ

FUNCTIONS

اقتبست الحياة العامة استعمال كلمة دالة Function بمعناها المستعملة به فى الرياضيات • مثال ذلك أن نقول « ان مزاج الانسان دالة هضمه » ، نكون قد استعملنا الكلمة بمعناها الرياضى نفسه • ويكون المقصود بها ، امكان تحديد قاعدة ، تنبؤنا عن حالة مزاجه اذا علمنا حالة هضمه • فالفكرة سهلة بحد ذاتها ، وما علينا الا أن نرى كيفية تطبيقها فى الرياضيات على الاعداد المتغيرة • ولنبدأ بأمثلة محسوسة : اذا سار قطار بمعدل (٢٠) ميلا فى الساعة ، فالمسافة (م ميلا) ، التى يقطعها خلال أى عدد من الساعات ، وليكن ن ، تحسب بموجب الدستور $m = 20n$ • ويقال لـ (م) انها دالة ن • كذلك ٢٠ ن تعد دالة ن أيضا وهى تطابق م • واذا كان جون أكبر من توماس بسنة واحدة ، فمهما كان عمر توماس ، ولنفرضه (س) من السنوات ، فان عمر جون ، ولنفرضه (ص) سنة ، يحسب بموجب القاعدة $v = s + 1$ •

وتكون ص ، دالة س أى أنها س + ١ •

وفى هذين المثالين ، تسمى كل من (ن) و (س) سند الدالة

Argument of the function وعلى ذلك فإن ن ، سند الدالة

٢٠ ن ، و (ص) سند الدالة س + ١ • وإذا كانت م = ٢٠ ن ،

ص = س + ١ فإن كلا من م ، ص تدعى « قيمة » الدالة ٢٠ ن ،

س + ١ على الترتيب •

لنتقدم الان الى الحالة العامة ، فنعرّف الدالة فى الرياضيات ، بانها

رابطة بين عددين متغيرين - يدعى أولهما سند الدالة وثانيهما قيمتها -

بحيث اذا أعطينا أية قيمة كانت « لسند الدالة » ، نجم عنها « قيمة

معينة للدالة » • وليس من الضرورى أن يكون العكس صحيحا ، أى

أنه اذا تعينت قيمة الدالة ، لزم أن ينتجم عن ذلك أيضا ، قيمة معينة فريدة

للسند • وإليك دوال أخرى سندها س ، مثل ص = س^٢ ،

ص = ٢ س^٢ + ٣ س + ١ ، ص = س ، ص = لو س ،

ص = جا س • والمثالان الاخيران من هذه المجموعة ، يقتضيان معرفة

القليل من الجبر. والمثلثات للتعرف بهما • ومن العبث ان نصرف الان

وقتا فى ايضاحهما ، لانا لم نذكرهما الا على سبيل المثال •

لقد رينا ما نغنيه بالدالة بصورة عامة • ولم نذكر حتى الان الا

سلسلة من الدوال الخاصة • ولكن الرياضيات ، وهى بحكم الطبع تنزع

الى تعميم اساليبها ، ترمز الى الفكرة العامة لكل دالة بالرموز د (س) ،

هـ (س) ، و (س) ، الخ ، اذا كان سندها س • أى انه لكتابة

دالة ما ، يوضع السند بين قوسين ويسبقه حرف ما ، مثل د ، ه ، و ،
 الخ ليرمز للدالة . ولهذا الاصطلاح الرمزى معائبه ، فهو
 يناقض العرف السائد ، من ان الحروف المفردة تمثل اعدادا متغيرة .
 ولكن الحروف د ، ه ، و ، الخ لما كانت فى هذه الحالة تثبت بازاء
 قوسين فهى تمثل دوالا متغيرة . ومن السهولة ان نورد امثلة ، لا يمكن الاعتماد
 فيها على غير الفطنة وسياق البحث ، لتبين المقصود من الرمز . واحدى
 وسائل تجنب هذا الالتباس استعمال الحروف الاغريقية
 للدوال . ووسيلة أخرى ، هى الاعتماد على د (وهى الحرف الاول
 من كلمة دالة) . واذا دعت الحاجة الى الرمز عن دوال متغيرة أخرى
 فتستعمل الحروف الابجدية المجاورة للحرف د مثل ه ، و .

فاذا كتبنا $V = D(S)$ ، وراعينا الشروح والحدود التى اسلفنا
 ذكرها ، فاننا نعنى ان V هى قيمة دالة غير معينة ، وان سندها S . أى
 ان $D(S)$ يمكن ان تمثل أى شىء مثل ، $S + 1$ ، $S - 2$ ، $S + 1$ ،
 جاس ، لو S ، او مجرد S وحدها . والامر الاساسى ، هو ان V
 تتعين بصورة قطعية ان علمت S . ومن المهم ان يكون ما نقصده بعمومية
 هذه الفكرة واضحا . ففى $V = D(S)$ يسوغ لنا ان نعين $D(S)$ ،
 اذا شئنا ، بقولنا مثلا ، ان $D(S)$ تكون صفرا عندما تكون S عددا
 صحيحا ، وانها تكون واحدا اذا كانت S أى عدد آخر . وعلى ذلك ،
 ووفق هذا الاختيار لمعنى D ، فان V ، اما ان تكون صفرا او واحدا ،
 على حسب ما تكون S عددا صحيحا او عددا غير صحيح . وينتج عن

قيمتها بالتدرج بتغير قيمة سندها بالتدرج • وتكون منقطعة Discontinuous
 اذا تغيرت قيمتها بطفرات فجائية • فالدالتان س + ١ ، ١ - س مثلا ،
 اللتان رأينا خطوطهما البيانية على شكل مستقيمين ، (راجع الشكل - ١٤
 من الفصل التاسع) ، هما دالتان مطردتان • وكذلك الدالة $\frac{1}{x}$ المرسومة
 فى الفصل الثانى مطردة اذا اقتصرنا الامر على القيم الموجبة للكمية ح •
 اما الدالة المرسومة فى الشكل - ٢٠ من هذا الفصل فمنقطعة ، لان
 قيمتها تتغير بطفرات فجائية ، وذلك عندما تصبح قيمة سندها س = ١ ،
 س = ٢ ... الخ •

لننظر الان فى نماذج من الامثلة ، تقدمها لنا الطبيعة عن الدالة ،
 وذلك كما نتفهم المعنى الحقيقى للاطراد والانقطاع (Continuity and
 discontinuity) • لنأخذ القطار فى رحلته على الخط الشمالى الغربى
 للسكة الحديد ، من محطة بوسطن الى المحطة النهائية فى لندن ، فنجد
 ان المحطتين بلشلى و رغبى تقعان بالتعاقب على هذا الخط • ولنفرض ان
 ن هى عدد الساعات التى قضاها القطار فى سيره ابتداء من بوسطن ،
 وان م عدد الاميال التى قطعها • وعليه تكون م دالة ن ، أى انها القيمة
 المتغيرة التى تناظر السند المتغير ، ن • واذا كنا على علم بأحوال سير
 القطار ، فيقتضى ان نعرف مقدار م حال معرفتنا لاية قيمة معينة للزمن
 ن • والان ، اذا تركنا الخوارق والمعجزات جانبا ، يمكننا ان نقول بثقة ،
 ان م دالة مطردة لـ ن • ولو روى لنا أحد ، انه تعقب سير القطار

باطراد من بوستن الى بلشلى ، وبعد ذلك ، وبدون أى فاصل زمنى مهما
 كان قصيرا ، ظهر القطار بغتة فى رگبى ، لما سلمنا وقوع مثل هذا
 الحادث اطلاقا ، لانه اغرب من ان يدخل فى الحسبان • ان تصور هذه
 الاحتمالات ، لا يقع خارج كتاب ألف ليلة وليلة وحتى فى تلك
 القصص ، لا يقحم على التصور انعدام الزمن فى الحركة • فهى لا تتحدى
 سذاجتنا ، باكثر من انتقال الاشياء بسرعة فائقة • ولكن السرعة
 المجيبة هذه ، لا تناقض قانون اطراد الحركة المهم الذى نلمسه فى
 الطبيعة • فالنور يتحرك بسرعة تناهز الـ ١٩٠٠٠٠ ميل فى الثانية ويصعدنا
 من الشمس فى مدة سبع او ثمان دقائق ورغمنا عن ذلك فالمسافة التى
 يقطعها هى على الدوام دالة مطردة للزمن • وليس من
 الواضح لنا بمثل هذه السهولة ، ان سرعة الجسم ، هى ايضا على
 الدوام ، دالة مطردة للزمن • ولننظر فى أمر القطار بعد أى زمن كان
 على بدء الحركة ، وليكن بعد ن من الساعات ، فنجد انه يتحرك بسرعة
 معينة ، نفرض انها س من الاميال فى الساعة • وان س هذه تكون صفرا
 عندما يكون القطار فى حالة الوقوف فى المحطة ، وتكون كمية سالبة
 عندما يتراجع القطار القهقرى • ولا شك فى اننا نعلم ، ان سرعة قطار
 ضخمة تقيل لا يمكن ان تتغير فجأة • فلا يمكن مثلا ، ان يكون القطار
 سائرا بسرعة (٤٠) ميلا فى الساعة منذ الساعة ١١/٤٥ الى الساعة
 -/١٢ ، ثم تصبح سرعته بغتة ، وبدون انقضاء لحظة زمنية مهما كانت
 صغيرة ، (٥٠) ميلا فى الساعة • ولا بد لنا ان نعترف ، بأن تغير السرعة

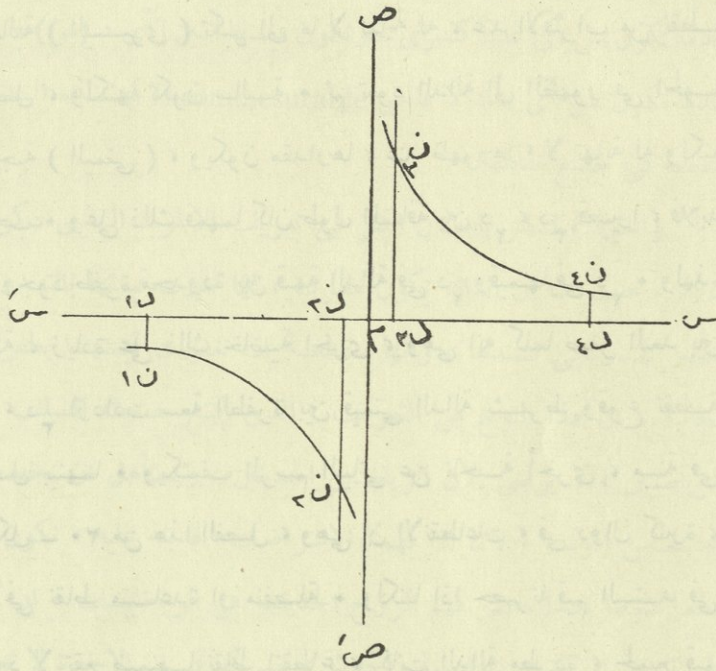
حدث بصورة تدريجية ولكن بماذا نعلل السرعة الناشئة عن التصادم ،
 اذا حدث بقوة كافية ؟ لنفرض ان قطارين اصطدما ، او لنأخذ شيئين
 أصغر منهما ، ولنفرض ان رجلا ركل كرة قدم ، فيخيل اليها كأن
 الكرة بدأت فجأة بالحركة ، أى ان حواسنا ، فى قضية السرعة ، لا تتمرد
 على عد السرعة دالة منقطعة للزمن ، كما تمردت على فكرة انتقال
 القطار من بلشلى الى رغبى فجأة وبغير زمن • والحقيقة ، ان قوانين
 الحركة ، بما فيها فكرة الكتلة ، ان كانت صحيحة ، فلا يوجد فى
 الطبيعة سرعة منقطعة (أى فجائية) • وكل ما يظهر لحواسنا من تبدل
 منقطع (أى فجائى) فى السرعة ، يجب ، بموجب هذه القوانين ، ان
 نعهده حالة من حالات التبدل التدرجى ، ولكنه يحدث بسرعة أعجل من
 ان تدركها حواسنا • على انه من الحمق ان تدفع الى القول بانعدام
 الدوال المنقطعة فى الطبيعة عموما • ومثلا فى ذلك ، كمثل الرجل
 الذى اعتمد ان متوسط الارتفاع عن سطح البحر ، بين لندن وباريس ،
 دالة مطردة للبعد عن لندن • فكان يسير ليلا وهو غارق فى تأملاته فى
 المجرة ، مقتربا من حافة الهاوية العميقة فى اطراف دوفر ، فلم يجد
 نفسه الا وهو يهوى ، ويتخطفه الموت قبل ان يستجمع افكاره ليدرك
 ضرورة التحفظ فى الاستنتاجات العلمية •

ومن السهل جدا ان نجد دالة منقطعة ، حتى لو قيدنا انفسنا

بأبسط القوانين الجبرية • ولنأخذ على سبيل المثال ، الدالة $v = \frac{1}{s}$ ، التى

سبق ونظرنا فيها ، وهي بالشكل ص = $\frac{1}{C}$ وكانت قيم ح محصورة

ضمن الكميات الموجبة فقط . اما الان فلنعط س أية قيمة موجبة كانت أم سالبة فنجد ان الحظ البياني للدالة يصبح كما هو في الشكل - ٢١ . لنفرض



شكل (٢١)

ان س تتغير باطراد ، ابتداء من قيمة سالبة كبيرة ثم تصغر بالتدريج ، مارة بسلسلة من القيم السالبة ، حتى تصل الصفر وتتجاوزوه الى سلسلة القيم الموجبة المتزايدة . فيكون تفسير ذلك بيانيا ان نقطة مثل د ، تمثل مقدار س على المحور س م س~ ، تتحرك على محور السينات ، مبتدأة

من أقصى اليسار ، ومارة على التوالي بالقيم $d_1, d_2, d_3, d_4, \dots$ الخ
اما النقاط على منحني الدالة ، التي تناظر هذه القيم فهي $n_1, n_2, n_3, \dots$
 $n_1, n_2, \dots$ الخ ومن السهل ان نرى ان هناك نقطة انقطاع عندما
تكون $s = 0$ ، أى عند نقطة الاصل . فان قيمة الدالة في الجهة
السالبة (اليسرى) تكبر الى ما لا نهاية له ، عند الاقتراب من نقطة
الاصل ، ولكنها تكون سالبة . ثم تعود الدالة الى الظهور في الجهة
الموجبة (اليمنى) ، ويكون مقدارها ، عند ظهورها ، لا نهاية له ولكنه
موجب . وعلى ذلك فمهما كان طول المسافة بين $d_1, d_2, d_3, \dots$ قصيرا ، فلا بد
من وجود طفرة محدودة بين قيمة الدالة في d_1 وقيمتها في d_2 . ولهذه
الحالة ، زيادة على ذلك خاصية اخرى ، وهى انه كلما صغر البعد بين
 $d_1, d_2, d_3, \dots$ ازدادت سعة الطفرة بين قيمتي الدالة بشرط وقوع نقطة
الاصل بينهما . ويكشف الرسم البياني عن ناحية أخرى ، مبينة في
الشكل - ٢٠ من هذا الفصل ، وهى ان الانقطاعات ، فى دوال كثيرة ،
تقع فى نقاط متباعدة او منفصلة . ولكننا اذا حصرنا قيم السند فى
حدود لا تقع ضمنها نقاط انقطاع ، كانت الدالة مطردة ، لجميع قيم
السند الواقعة ضمن هذا النطاق . وفى الشكل - ٢١ يتضح لنا ان
الدالة $s = \frac{1}{s}$ ، دالة مطردة اذا لازمنا القيم الموجبة وحدها ،
واستثنينا نقطة الاصل . كذلك تكون الدالة نفسها مطردة ، اذا لازمنا
القيم السالبة وحدها واستثنينا نقطة الاصل . اما الدالة المرسومة بيانيا فى

او ان يكون اولهما كذا وكذا من مضاعفات الآخر • ولا توجد علاقة
« تدرج » بين العددين ، ولهذا لا يسمح باستعمال هذه الكلمة • وقد
يرى القارئ فى ذلك شيئاً من التحذلق ، ولكن هذه التهمة تدفع
بقولين • الاول منهما ان عدداً من كبار الرياضيين ، وخاصة آبل Abel
فى السويد و وايستر اس Weierstrass فى المانيا ، وجدوا فى
النصف الاول من القرن التاسع عشر ، ان نصوص اقسام كثيرة من
الرياضيات وضعت دون تبصر وبصورة لا أبالية ، واقل ما يقال فيها انها
خطأ • ولقد قابل ما كولى ، فى مقال له عن يكون ، بين التوثق والاتقان
فى الرياضيات ، والشك وعدم التثبت فى الفلسفة • وكمثال بليغ على
ذلك قال : « لم يحدث رد فعل ضد نظرية تيلور » • ولم يكن فى وسعه ،
والحق يقال ، ان يتقدم بمثال أسوأ من هذا • ولا نعدو الصواب اذا
قلنا ، ان الكتب الانكليزية فى الرياضيات ، التى عاصرت نشر هذا المقال ،
اوردت نص نظرية تيلور هذه والبرهان عليها بشكل خاطئ • وهذا
القول لا يتطلب منا حتى فحص تلك الكتب • ان الحرص الشديد ، فى
التعبير ، ضرورى للاتقان والضبط • اما الثانى منهما ، فهو ان الدقة من
مستلزمات القيام بالبحث والاستقصاء ، وتعمل على جلاء الفكر وخصبه ،
واقdamه على تجربة مزج مجموعات مبتكرة من الآراء • فاذا كانت
النصوص البدئية غامضة وواهنة ، فلا بد من الالتجاء الى سلامة الذوق
فى كل مرحلة ، من مراحل التفكير التالية ، لوضع الحدود وتوضيح
المقاصد • ولكن سلامة الذوق هذه ، سيد سىء لاغراض الابداع

العلمى ، لان ميزان الحكم عندها هى ان يكون للآراء الجديدة مظهر
الآراء القديمة • وتعبير آخر انها لا تعمل الا على طمس الابتكار
وقهره •

وكيما نشق طريقنا نحو التعريف المحكم للاطراد، (كما يستخدم
فى الدالة) ، دعنا ننظر بتمعن اكثر ، فى القول بانه لا توجد علاقة
« تدرج » بين الاعداد • ورب سائل يقول ، الا يمكن ان يكون عدد
اكبر بشئ زهيد من عدد آخر • او بكلمة أخرى ، الا يمكن ان يكون
الفرق بين عددين صغيرا جدا ؟ ان كل ما فى الامر ، هو أنه لا يوجد فى
المجردات ، باستثناء قليل من الحالات التطبيقية المفروضة بصورة كيفية ،
ما يسمى عدد كبير او عدد صغير • فمليون ميل مثلا ، عدد صغير ، فى
نظر الفلكى الباحث عن ابعاد النجوم الثابتة ، اما مليون دينار ، فتعد
واردا سنويا ضخما • وصرف ربع الدخل فى اعمال البر ، يعتبر نسبة
كبيرة ، ولكنه ، اذا ما اريد الاقتصار عليه فى النفقات الخاصة يعد كسرا
صغيرا • ويوجد من الامثلة ما لا حصر له ، لبيان ان كلمتى كبير وصغير ،
بأى معنى مطلق ، لا مجال لاستخدامها المجرد فى الاعداد • ولكنه فى
الوسع ان نقول عن عددين ان احدهما اكبر او اصغر من الثانى • ولا
يجوز لنا ان نقول عن عدد واحد انه كبير او صغير ، دون تحديد
للظروف الخاصة به • فواجبنا اذن ان نعرف الاطراد دون ان نتطرق الى
ذكر تبدل « صغير » او « تدريجى » فى قيمة الدالة •

وللوصول الى ذلك ، سنطلق أسماء على بعض الفكر التى ستفيدنا

أيضا ، عندما نتقدم للنظر في موضوع (الغايات Limits) وحساب
التفاضل Differential calculus .

عندما نقول « فترة » ^(١) قيم السند (س) في الدالة د (س) ،
نقصد بذلك ، جميع قيم السند (س) الواقعة بين قيمتين مفروضتين له .
مثال ذلك ، ان الفترة بين س = ١ ، س = ٢ تتألف من جميع القيم
التي يمكن أن تأخذها س ، والتي تقع بين ١ و ٢ . أى انها تتألف من
جميع الاعداد الحقيقية بين ١ و ٢ . على أنه ليس من الضروري أن
يكون العددين المحددان للفترة ، عددين صحيحين . ويمتد لفترة قيم
السند انها « تحتوى » على العدد أ ، اذا كان أ من جملة القيم الواقعة
ضمن حدود الفترة . مثال ذلك ، ان الفترة بين ١ و ٢ تحتوى على
 $\frac{1}{4} , \frac{2}{4} , \frac{3}{4} , \dots$ الخ .

واذا قيل ان مجموعة من الاعداد تقترب من العدد أ ضمن المقياس
ك ، فمعنى ذلك أن الفرق العددي بين أ وكل عدد من أعداد المجموعة
يكون أقل من ك . مثال ذلك ، ان مجموعة الاعداد ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ،
تقترب من العدد ٥ ضمن المقياس ٤ . وفى هذه الحالة نجد أن المقياس
٤ ليس أقل عدد أمكن اختياره ، لان المجموعة تقترب من العدد ٥ ضمن
أى من المقاييس ٣ او ٣.٠١ او ٣.٠٠١ . كذلك نجد الاعداد
٣.١ ، ٣.١٤١ ، ٣.١٤١٥ ، ٣.١٤١٥٩ تقترب من ٣.١٤١٥٢ ضمن
المقياس ٠.٣٢ او المقياس الاصغر ٠.٣١٠٣ . ايضا .

Interval (١)

ان هاتين الفكرتين ، الفترة والاقتراب من عدد ضمن مقياس ،
فكرتان على شئ من السهولة • والصعوبة الوحيدة فيهما ، توهم انهما
تافهتان • فهما اذا دمجتا بالفكرة التالية وهى فكرة « جوار » العدد ،
تألف منها جميعا أسس التفكير الرياضى الحديث • فماذا نقصد ، اذا
قلنا ان امرأ ما ، فى دالة مثل د (س) ، يكون صحيحا ، عندما تكون قيمة
السند س فى جوار المقدار أ ؟ ان هذه الفكرة الاساسية هى التى يجب
أن نحددها باتقان •

يقال لقيم دالة ، مثل د (س) ، انها تمتلك صفة خاصة فى
« جوار أ » ، اذا أمكن ايجاد فترة بحيث (أولا) تحتوى على العدد
أ ، على أن لا يكون نقطة طرف لها ^(١) . و (ثانيا) أن تمتلك هذه الصفة
الخاصة نفسها ، جميع قيم الدالة ، المناظرة لقيم السند الواقعة فى الفترة
عدا القيمة أ • اما د (أ) ، وهى قيمة الدالة عندما تكون قيمة السند أ ،
فيجوز أن تمتلك تلك الصفة الخاصة كما يجوز أن لا تمتلكها • ولا يبت
فى هذا الامر عند الكلام عن القيم فى « جوار » أ •

مثال ذلك لو أخذنا الدالة الخاصة س^٢ ، لامكنا القول ان قيم
س^٢ « فى جوار الـ ٢ » ، تكون أقل من ٥ • اذ فى وسعنا أن نجد
فترة ما ، ولتكن من ١ الى ٢١ بحيث (أولا) تحتوى على العدد ٢
وهو ليس بنقطة طرف لها • و (ثانيا) ان س^٢ أقل من ٥ لجميع قيم

(١) End point « المعرب » أى أن لا يكون العدد أ نقطة بدء
الفترة أو نقطة انتهائها بل يكون فى مكان ما بين النهايتين •

س الواقعة فيها •

والان ، اذا استعنا بمجموعة الاراء السابقة ، نعرف ماهو المقصود
من القول بأن الدالة د (س) ، تقترب في جوار أ ، من ح ، ضمن المقياس
ك • فهو يعنى ، ان فى الامكان ايجاد فترة ما ، بحيث (اولا) تحتوى على
أ على ان لا تكون نقطة طرف لها ، و (ثانيا) أن الفرق بين ج وبين أية قيمة
من قيم الدالة د (س) ، المناظرة لاية قيمة من قيم س الواقعة فى الفترة ،
عدا القيمة أ ، يكون أقل من ك • مثال ذلك ، ان قيمة الدالة $\sqrt{s}$ فى
جوار ٢ تقترب من ١.٤١٤٢٥ ضمن المقياس ٠.٠٠٠٠١ • وسبب صحة
هذا القول ، أن الجذر التربيعى للمقدار ١.٩٩٩٩٦١٦٤ هو ١.٤١٤٢ ،
والجذر التربيعى للمقدار ٢.٠٠٠٠٣٤٤٤٩ هو ١.٤١٤٣ ، وعليه فجميع
قيم س فى الفترة من ١.٩٩٩٩٦١٦٤ الى ٢.٠٠٠٠٣٤٤٤٩ ، تجعل جميع قيم
الدالة $\sqrt{s}$ تقع بين ١.٤١٤٢ و ١.٤١٤٣ • وكل من هذه القيم
تختلف عن ١.٤١٤٢٥ بأقل من ٠.٠٠٠٠١ • وفى هذه الحالة نستطيع ،
ان أردنا ، تحديد مقياس للتقريب أصغر مما ذكرنا ، مثل ٠.٠٠٠٠٠٥١
او ٠.٠٠٠٠٠٥٠١ • واليك مثالا آخر فى قولنا ان الدالة s^2 فى جوار ٢ ،
تقترب من ٤ ضمن المقياس ٠.٠٥ • لان (١٩) $s^2 = ٣٦١$ و
(٢١) $s^2 = ٤٤١$ وبهذا نكون قد وجدنا الفترة المطلوبة وهى من
١٩ الى ٢١ ، وتحتوى على ٢ ولكن لا كنقطة طرف لها • ان هذا
المثال يبين لنا ، ان الكلام عن الدالة د (س) فى جوار العدد أ ، يختلف
عن الكلام عن قيمة الدالة د (س) عندما تكون س = أ • اذ ان

المطلوب وجدان « فترة » تصح الخاصية خلالها • ومجرد أن $٢٢ = ٤$ ،
لا يسوغ بحد ذاته ، القول بأن الدالة $س٢$ في « جوار » ٢ تساوى ٤ •
ان مثل هذا القول خطأ ، اذ لا يمكن وجدان فترة لها هذه الخاصية •
وكذلك مجرد أن $٢٢ = ٤$ لا يبرر بحد ذاته أن نقول ان الدالة $س٢$
في جوار ٢ تقترب من ٤ ضمن المقياس ٥٠ • رغم اننا بالحقيقة ، قد
برهنا على صحة ذلك قبل قليل •

اذا كنا قد فهمنا هذه الآراء التي سلفت ، نكون قد فهمنا أسس
الرياضيات الحديثة • وسنعود الى آراء مماثلة لها ، في الفصل الذى
سنعقده عن المتسلسلات ، وفي الفصل عن حساب التفاضل • كما اصبحنا
الآن على استعداد لتعريف الدوال المطردة •

يقال للدالة $د (س)$ انها مطردة عند القيمة $أ$ لسندها ، اذا كانت
قيم الدالة فى جوار $أ$ ، تقترب من $د (أ)$ (أى من قيمتها عندما يكون
السند مساويا لـ $أ$) ، ضمن « أى مقياس كان » من مقياس التقريب •
وتفسير ذلك أنه ، كيفما انتخبنا المقياس $ك$ ، فان قيمة $د (س)$
فى جوار $أ$ ، تقترب من $د (أ)$ ضمن المقياس ، $ك$ • مثال ذلك ، ان $س٢$
تكون مطردة عند القيمة ٢ للسند $س$ ، لانه كيفما انتخبنا المقياس $ك$ ،
ففى الوسع ، دوماً ، أن نجد فترة بحيث (أولا) تحتوى على ٢ لا كنقطة
طرف لها و (ثانيا) ان جميع قيم $س٢$ ، المناظرة لقيم السند الواقعة فى
هذه الفترة ، تقترب من ٤ (أى ٢٢) ، ضمن المقياس $ك$ • ولنفرض أننا
انتخبنا المقياس ١٠ فان $(١٩٩٩)٢ = ٣٩٩٦٠٠١$ و $(٢٠١)٢$

= ٤٠١.٤٠٤ وكل من هذين العددين يختلف عن الـ ٤ بمقدار أقل من ٠.١ وعليه فنقول انه في الفترة من ١٩٩٩ الى ٢٠١١ تقترب قيم s^2 من ٤ ضمن المقياس ٠.٠١ وبالشكل نفسه ، يمكن وجدان فترة لاي مقياس نريد أن نجربه •

لنأخذ قطار السكة الحديد ، فان سرعته مطردة عندما يمر بصندوق الاشارات • اذ مهما كانت السرعة التي نقررها (ولتكن واحد من مليون من الميل في الساعة) ، ففي الامكان وجدان فترة زمنية ، تمتد من قبيل لحظة الاجتياز الى بعيدها ، بحيث أن سرعة القطار ، في جميع اللحظات الواقعة في هذه الفترة ، تختلف عن السرعة التي اجتاز بها القطار الصندوق بأقل من واحد من مليون من الميل في الساعة • ويصدق هذا أيضا على مقدار السرعة التي نقررها مهما كان بدلا عن واحد من مليون من الميل في الساعة •

الفصل الثاني عشر

الدَّورِيَّةُ فِي الطَّبِيعَةِ

PERIODICITY IN NATURE

ان رجوع الحوادث الدورية يسود حياة الطبيعة بأسرها • أى أنه توجد حوادث متتالية ، تشابه الى حد ، يمكن معه القول ، دون اجتهاد للفكر ، بأنها تكرر لحادثة واحدة • فدورة الارض تولد تتالى الايام ، ومع أنه لا يوجد شك فى أن كل يوم يختلف عن الايام السابقة له ، مهما حاولنا أن نجعل تعريف اليوم مجردا بحيث لا يشمل الظواهر الطارئة ، فان التعريف هذا ، اذا كان على درجة كافية من التجرد ، يجعل التمييز بين خصائص يوم وآخر أمرا تافها ، وبعيدا عن مقتضيات العملية • ولذلك يجوز أن نتصور كل يوم بأنه تكرر ظاهرة دورة واحدة للارض • ودوران الارض حول الشمس ، ينتج عنه التكرر السنوى للفصول ، ويفرض دورية أخرى على كافة أعمال الطبيعة • وتوجد دورية ثالثة ، أول شأننا ، وتتمثل فى أوجه القمر • وتعد هذه فى الحياة العصرية المتحضرة ، بأنوارها الصناعية ، تافهة القدر ، أما فى الازمنة القديمة ، وفى الاجواء التى يكون نهارها ملتهبا وسماؤها صحوا ، فقد تأثرت حياة الانسان كثيرا ، حسب الظاهر ، بوجود نور القمر • ولذلك ،

انتشر تقسيم السنة الى اسابيع وشهور وما يصحب ذلك من الامور الدينية ، بين الشعوب الاوربية ، مقتبسا عن سورية وما بين النهرين ، مع وجود معلومات مستقلة عن أوجه القمر لدى معظم الامم • وعلى كل ، لم ينشأ أثر دورية القمر فى تاريخ الارض ، عن أوجه القمر بنورها وظلامها ، بل كان للمد الاثر الرئيسى فيه •

ان حياتنا الجسدية دورية بجوهرها • فهى تخضع لضربات القلب وتكرار التنفس • وافراض الدورية أسامى لادراكنا للحياة • فلا يمكن أن نتصور دورا من أدوار الطبيعة ، تتلاحق فيه الحوادث ، ولا نستطيع أن نقول عنه « ان هذا قد حدث قبلا » • ولولا ذلك لفقدنا قيمة التجارب كمرشد لنا فى تصرفاتنا • فان الناس اذ ذاك يجدون أنفسهم ، على الدوام ، فى حالات جديدة لم يسبق لهم أن خبروها ، اذ لا مثل لها اطلاقا فى التاريخ الماضى ؟ ولفقدنا أيضا ، حتى الوسائل التى نقيس بها الزمن كمقدار • ويجرى التعرف بالحوادث اذذاك على أساس وقوعها بصورة متسلسلة فيكون بعضها أقدم أو أحدث مما سواه • أما الان فنحن نذهب الى ما هو أبعد من مجرد هذا التعرف ، فلا نكتفى بالقول ، مثلا ، ان الحوادث الثلاث أ ، ب ، ح حدثت بهذا الترتيب بحيث أن (أ) وقعت قبل (ب) و (ب) قبل (ح) بل نستطيع أن نقول أيضا أن طول الزمن بين الحادثتين أ ، ب هو ضعف طوله بين ب ، ح • ان تقدير كمية الزمن يعتمد ، بالضرورة ، على ملاحظة عدد الحوادث الطبيعية المتكررة التى تتخلله • فنقول مثلا ان طول الزمن بين أ ، ب كان كذا

وكذا من الايام أو الشهور أو السنين على حسب نوع التكرار الذى
تريد أن نرجع اليه فى قياس الزمن • والحقيقة ، ان هذه الاساليب الثلاثة
فى قياس الزمن ، كانت متميزة عند بدء الحضارة • ولقد كان من أولى
وجائب العلم بين الامم المتحضرة أو نصف المتحضرة ، ادماجها جميعا
للحصول على مقياس واحد متماسك • ولكى نفهم مدى أهمية هذا
العمل ، يتحتم علينا أن لا نكتفى باقرار عدد الايام فى سنة من السنوات ،
(٣٦٥ ر ٢٥٠٠ يوما مثلا) ، بل ان نقرر مقدما ، ان هذا العدد نفسه من الايام ،
سيؤلف السنين المقبلة ايضا • اذ فى الوسع أن نتخيل علما توجد فيه أمور
دورية ولكن لا يتطابق منها أى اثنين • كأن تكون بعض السنين مؤلفة
من ٢٠٠ يوم واخرى من ٣٥٠ يوما • وان اقرار وجود التشابه
والاتساق ، بصورة واسعة عامة ، بين الدورات الاكثر أهمية ، كان
الخطوة الاولى فى علم الطبيعة • وهذا الاتساق لم ينتج عن مقتضيات
قانون فكرى مجرد يدرك بالبداهة ، ولكنه حقيقة ملحوظة فى الطبيعة
تؤيدها الخبرة • والحق انه أبعد عن أن يكون قانونا ضروريا ، حتى
أن صحته ليست تامة • اذ توجد انحرافات عنه فى كل حالة • ففى بعض
هذه الحالات تلحظ هذه الانحرافات بسهولة ، ولذلك تبين رأسا • أما
فى الحالات الاخرى ، فتتطلب أدق الارصاد والضبط الفلكى للوقوف
عليها • وبوجه عام ، نقول ان كافة الامور المتكررة التى تتوقف على
المخلوقات الحية ، مثل ضربات القلب ، تكون عرضة للتغير السريع ،
بالمقارنة مع المتكررات الاخرى • أما المتكررات العظيمة الثابتة والظاهرة

للعيان - ثابتة بمعنى أنها تتفق فيما بينها الى درجة عظيمة من الدقة -
فهى التى تتوقف على حركة الارض بأسرها وعلى حركات مماثلة
للاجرام السماوية •

ولذلك نحن نفترض ان هذه المتكررات الفلكية تعين فترات
متساوية من الزمن • ولكن ماذا نصنع تجاه ماينها من التباين الذى
تسجله الارصاد الفلكية الدقيقة ؟ يظهر أن علينا ان نعود الى الافتراض
الكيفى ، من أن احدى مجموعات هذه الظاهرات الطبيعية يحدد أوقانا
متساوية فاما أن نقول مثلا ان جميع الايام ذات طول واحد أو أن السنين
جميعا متساوية فى الطول • ولكن الامر ليس كذلك : لا بد اذاً من وضع
بعض الفرضيات ، ولكن الفرضية الاساسية التى يقوم عليها أسلوب
الفلكيين بأسره ، فى وجدان قياس للزمن ، هى تحقق قوانين الحركة
بصورة تامة • وقبل توضيح كيفية اجراء ذلك ، يكون من الممتع أن
نلاحظ أن الرجوع الى الفلكيين فى أمر وجدان ، مقياس للزمن ، نشأ
(كما سبق أن قلنا) عن التناسق الثابت فى المتكررات التى يتعاملون
بها • ولو وجد فى المتكررات الخاصة بالجسم الانسانى تناسق دقيق كهذا ،
لرجعنا طبعاً ، الى دكثرة الطب فى ضبط ساعاتنا •

وعند النظر فى كيفية ادخال قوانين الحركة فى هذا الموضوع ،
يجب الالتفات الى أن استعمال طرازين متعارضين فى قياس الزمن ،
يؤدى الى نتيجتين مختلفتين فى تغيرات السرعة للجسم الواحد • مثال
ذلك لنفرض أننا عرفنا الساعة الزمنية بأنها جزء واحد من أربعة

وعشرين جزءاً من اليوم ، ولنأخذ حالة قطار يسير بسرعة منتظمة لمدة ساعتين ، بمعدل عشرين ميلاً في الساعة • والان لنأخذ مقياساً للزمن تتفاوت وحداته بشدة ، ولنفرض أنه يجعل طول الساعة الأولى ضعف طول الساعة الثانية ، فيكون على حسب مقياس الزمن الأخير هذا ، ان المسافة التي قطعها القطار تقسم الى قسمين ، قطع في كل منها المسافة نفسها ، أى عشرين ميلاً ، ولكن الوقت الذي مر عليه في القسم الأول ضعف الوقت الذي قضاه في القسم الثاني • وعلى ذلك فان سرعة القطار لم تكن منتظمة ، بل كان معدلها في الفترة الثانية ضعف معدلها في الفترة الأولى • وهكذا فان السؤال عما اذا كان القطار يسير بسرعة منتظمة أم لا ، يتوقف كلياً على مقياس الزمن الذي نستخدمه عليه •

وبالنسبة لكافة مقتضيات الحياة على الارض ، يمكن عد المتكررات الفلكية ، على تباينها ، متطابقة تماماً • وبافتراضنا هذا التطابق ، وما يتبعه من افتراض السرعة التي تمتلكها الاجسام ، وتغيرات السرعة ، نجد زيادة على ذلك ، أن قوانين الحركة التي كانت موضع النظر أعلاه ، تكاد تتحقق بالتمام • ونقول (تكاد) بسبب بعض الظواهر الفلكية • وعلى كل نجد من جهة أخرى ، أن فرض سرعة متباينة قليلاً لدورات الكواكب وحركات النجوم ، يجعل القوانين تتحقق بكل اتقان • وعليه نشأت هذه الفرضية وبذلك نكون قد اتخذنا مقياساً للزمن ، يصح تعريفه بالرجوع الى الظواهر الفلكية ، ولكنه لا ينطبق على انتظام تكرر أى منها • ولكن هذا لا ينفي الحقيقة الكبرى ، وهي أن جريان الزمن

منتظم ، الذى تبنى عليه أمور كثيرة ، هو نفسه يعتمد على ملاحظة
الحوادث الدورية •

ان بعض الظاهرات الطبيعية التى تبان ، لدى النظرة السطحية ،
أنها عرض طارىء أو أمر شاذ ، أو أن تكون بخلاف ذلك فتجرى على
وتيرة واحدة ، ربما كانت متأية عن تأثير بعيد للدورية • ولناخذ مثلاً
على ذلك قاعدة الرنين^(١) Resonance • ينشأ الرنين عندما يكون
لمجموعتين من الحالات المترابطة دورية واحدة • فمن قوانين الحركة ،
أن الاهتزازات الصغيرة لكل الاجسام - اذا تركت هذه الاجسام
وشأنها - تجرى فى فترات زمنية معينة خاصة بكل جسم • فالخطار أى
البندول ، الذى تكون خطرته صغيرة ، تكون ذبذباته ذات زمن معلوم •
ويتوقف مقدار الزمن ، للذبذبة الواحدة ، على شكل الخطار وتوزع
وزنه وطوله • اما الجسم الاكثر تعقيداً ، فيمكن أن يهتز بأشكال عدة •
على أن للذبذبة فى كل من هذه الاشكال « دورة زمنية » خاصة يحددها
شكل الاهتزاز • وتدعى هذه الدورات الزمنية او الفترات بالدورات
« الحرة » • وفى الخطار ، تكون الدورة الزمنية واحدة لكل من اهتزازاته ،
اما فى الجسر المعلق ، فتكون متعددة • ويتضح ذلك فى الآلات الموسيقية ،
كوتر الكمان ، عندما تكون الدورات أو الفترات الزمنية لاهتزازاته
من القواسم البسيطة لاطول دورة أو فترة فيه - أى أنه اذا كانت أطول

(١) العرب ان كلمة رنين هنا تعنى اكثر من معناها اللغوى
المقتصر على الصوت لانها تشمل الاستجابة للاهتزاز أو الذبذبة •

دورة ن من النوانى فان الدورات الاخرى تكون $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n}$ ، $\frac{1}{n}$ الخ . ويجوز أن لا تظهر واحدة أو أكثر من هذه الدورات الصغرى . والآن لنفرض أننا أثّرنا اهتزازات فى جسم ، بواسطة مسبب دورى بذاته فإذا كانت دورة المسبب تساوى ، على وجه التقريب ، احدى دورات الجسم ، فان ذلك النوع من الاهتزاز فى الجسم يتقوى بشدة ، حتى اذا كان مقدار السبب المؤثر صغيرا . هذه الظاهرة تسمى الرنين . ويمكن ادراك العلة العامة لذلك بسهولة . فكل من يريد أن يقلب صخرة مثقلة ، يجب أن يجعل دفعه « وفق » اهتزازات الصخرة ، حتى تحين اللحظة المؤاتية للدفعة الاخيرة . أما اذا لم يكن دفعه بالتوافق مع الاهتزاز ، فان بعض الدفع يوسع الاهتزازات والبعض الآخر يعيقها . ان كلمة Resonance رنين تأتي فى اثناء بحث الصوت ، ولكن الظاهرة تتسع الى أمور تقع بعيدا خارج نطاق الصوت . فقوانين امتصاص النور واشعاعه تعتمد عليها ، وكذلك توفيق جهاز استقبال اللاسلكى (أى تهيئته للاستجابة للموجات اللاسلكية التى تلقى عليه) ، والاهمية النسبية لتأثير الكواكب السيارة على حركات بعضها البعض ، والخطر الذى يهدد الجسر المعلق اذا سار عليه جيش من الجنود بالخطوات العسكرية المترنة الموقوتة ، والاهتزازات العنيفة التى تحدث فى بعض انواع السفن نتيجة الايقاع المنظم لآلاتها عندما تبلغ سرعة السفينة مقادير معينة . وهذا التطابق فى الدوريات Periodicities قد يحدث ظاهرات مستقرة اذا كان الاقتران بين حادثين دوريتين ثابتا

مستقرا أو قد يولد اندفاعات عنيفة فجائية إذا كان الاقتران صدفة عارضة وأمرًا مؤقتًا •

وعدى عن ذلك ، فالدورات « اى المدد » الثابتة المذكورة أعلاه ، والخاصة بالاهتزاز ، هى علة ما يظهر لنا كتنبيه ثابت مستمر لحواسنا • فقد تشغل لمدة ساعات على ضوء ثابت مستمر ، وننصت الى صوت ثابت مستمر لا يتغير ، ولكن ، اذا كان العلم الحديث صحيحا ، فلا مثل لهذا البتات المستمر فى الطبيعة • فالنور الثابت ناشئ عن عدد لا يحصى من الموجات الدورية ، فى أثر متموج ، تضطدم بالعين • واما الصوت فينشأ عن موجات متماثلة فى هواء متموج • لقد قلنا ما فيه الكفاية ، لبيان ان اولى الخطوات الضرورية لجعل الرياضيات أداة صالحة لاستقراء الطبيعة ، هو أن تكون قادرة على التعبير عن الدورية الاساسية فى الاشياء • فاذا فهمنا ذلك ، نستطيع أن ندرك أهمية الافكار الرياضية التى تنطرق اليها وهى الدوال الدورية •

الفصل الثالث عشر

علم المثلثات

TRIGONOMETRY

لم ينبعث علم المثلثات عن النظر العام فى دورية الطبيعة ، وبذلك كان تاريخه يماثل تاريخ القطوع المخروطية ، التى ترجع بأصلها هى أيضا الى آراء خاصة جدا • وفى المقارنة بين تاريخى هذين العلمين ، وما بينهما من تشابه وتباين ، فائدة تعليمية كبيرة • ان علم المثلثات ، كالقطوع المخروطية يعود بأصله الى الاغريق ، والذى اخترعه يدعى هپاركسوس Hipparchus (المولود فى حدود عام ١٦٠ ق م •) • وهو فلكى يونانى كان يقوم بارصاده فى جزيرة رودس ، وله خدمات جليلة لعلم المثلثات • فهو الذى جعله موضوعا علميا حقا ، كما توصل فيه الى نتائج ذات أهمية ، ورسم طريقا لتقدمه • ولعل اختراعه علم المثلثات ، لم يكن أقل خدماته شأنًا لموضوعه العلمى الاصلى • ثم جاء بطليموس الفلكى الاسكندرى العظيم الذى سبق ذكره ، وهو الرجل الثانى الذى وسع علم المثلثات • وهنا نشاهد من فورنا ، التباين بين القطوع المخروطية وعلم

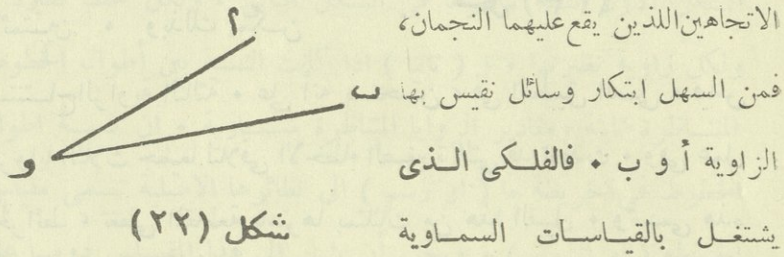
المثلثات • فصل علم المثلثات عملي واختراعه حدث بحكم ضرورته
 للابحاث الفلكية أما أصل القطوع المخروطية فنظري بحث وكان مافى
 البحث من متعة فكرية هو السبب الوحيد للبدء بدراستها • وتمتاز
 القطوع المخروطية بان اختراعها وقع قبل اختراع علم المثلثات ب ١٥٠
 سنة ، أى فى أخصب أدوار الفكر الاغريقى • أما أهمية المثلثات فى
 الرياضيات النظرية والتطبيقية ، فهى حالة واحدة من حالات لا عداد لها ،
 عن الآراء المثمرة التى اكتسبها العلم العام من التطبيقات العملية

سنحاول الان ان نبين ما هى المثلثات ، وكيف انبثقت عن الدراسة
 الهندسية لآحوال الفلك • ولنسأل اولاً ما القياسات التى يقوم بها الفلكى ؟
 والجواب عن ذلك انه يقوم بقياسات للزمن وقياسات للزوايا • فالفلكى
 يقدر أن يحكم وضع مقرابه^(١) (اذ من الاسهل علينا أن نتكلم عن الآلة
 المعروفة لدى الفلكيين الحديثين) بحيث لا يدور الا حول محور ثابت يشير
 الى الشرق والغرب ، وتكون النتيجة أن امتداد المقرب يشير نحو
 الجنوب فقط ، مع امكان تدويره رفعا او خفضا • فاذا ادار المقرب حتى
 تتجاوز سمت الرأس ، فهو يشير اذذاك الى الشمال • وهذه هى آلة
 الترانسيت (أى المراقبة)^(٢) ؛ تلك الآلة العظيمة التى تقيس بدقة الاوقات التى
 تكون فيها النجوم فى وجهة الجنوب أم فى وجهة الشمال • ولكن هذه الآلة

(١) Telescope

(٢) Transit وهى آلة لمراقبة وقت اجتياز الاجرام السماوية
 لدائرة نصف النهار للمحل الذى هى فيه ويجوز ان تسمى المزولة أيضا •

تقيس الزوايا بصورة غير مباشرة • اذ بمعرفة الزمن المار بين اجتياز
نجمين لدائرة نصف النهار ، وعلى فرض أن الارض تدور بانتظام ،
يمكننا أن نحسب مقدار الزاوية التى دارتها الارض فى تلك الفترة
الزمنية • وتوجد آلات اخرى يمكن بها قياس الزاوية بين نجمين بصورة
مباشرة • ففى الشكل - ٢٢ اذا كانت (و) عين الراصد ، وكان أ ، ب



(مسح السماء) يقوم بالحقيقة بقياس الزوايا ، لتثبيت الاتجاهات النسبية
للنجوم والكواكب السيارة فى أية لحظة • أما فيما يماثل هذه القضية
عند مسح الارض فقياس الزوايا ايضا يؤلف الموضوع الرئيسى فيه ،
لان القياس المباشر للطول لا يكون على درجة وافية من الدقة الا نادرا
فالانهار والبيوت والغابات والجبال والعوارض الارضية العامة، تحول دون
ذلك • ومسح مقاطعة عظيمة بأسرها يعتمد على قياس طول خط واحد ،
او خطين ، بعناية فائقة وفى أماكن مختارة مثل سهل سالسبورى •
لان العمل الاساسى فى المسح هو قياس الزوايا • مثال ذلك اذا كانت
أ ، ب ، ح ثلاث نقط بارزة « ولتكن قمم أبراج كنائس » فى مقاطعة
يراد مسحها ، فمن السهل أن نقيس فى أ الزاوية ب أ ح ، وفى ب

الزاوية أ ب ح وفي ح الزاوية ب ح أ • اما من الوجهة النظرية فيكفى

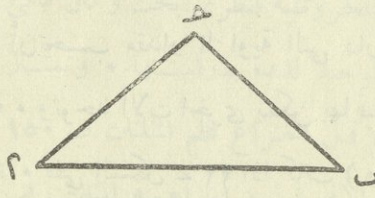
ان نقيس زاويتين فقط من هذه

الزوايا • اذ على حسب نظرية

مشهورة في الهندسة ، يساوى

مجموع زوايا المثلث زاويتين

قائمتين • وبذلك يمكن



شكل (٢٣)

استنتاج الزاوية الثالثة • على أنه يستحسن ، فى التطبيق العملى ، قياس

الزوايا الثلاث جميعا لتلافى الاخطاء الصغيرة التى قد تحدث • وفى عمل

الخرائط ، تغطى المقاطعة بأسرها بمثلثات من هذا القبيل • وتسمى هذه

عملية التثليث^(١) وهى عملية أساسية فى مسح الارض •

ان المثلث اذا عرفت زواياه جميعا ، تعرف هيئته - والهيئة غير

السعة • وهذا يؤدىنا الى مبدأ التشابه الهندسى المهم ، وهو فكرة مألوفة

وشائعة فى التطبيقات العملية • فقد ألفنا جميعا مشاهدة رسوم مرسومة

بمقياس معلوم • فاذا كان مقياس الرسم انجا واحدا لليارد الواحد ، فان

طول ثلاث انجات فى الرسم يعنى ثلاث ياردات فى الاصل • ولكن الهيئة

المبينة بالرسم هى هيئة الاصل نفسه • فالزاوية القائمة فى الاصل تظهر

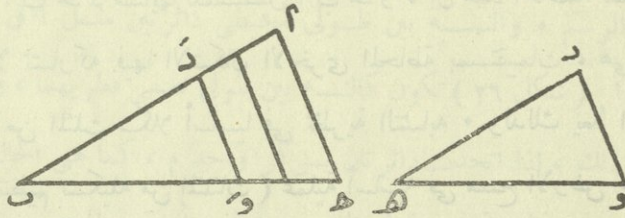
قائمة فى الرسم ايضا • وتكون نسب الاطوال فى الخريطة ، وهى ليست

سوى رسم لمقاطعة من الاراضى ، مساوية لنسب الابعاد بين الاماكن

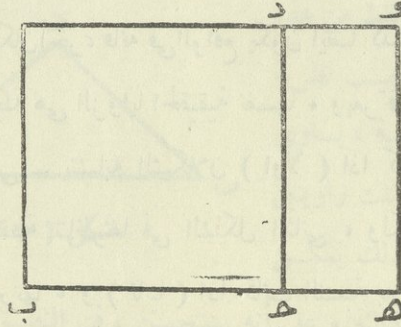
المناظرة لها • كما تكون الاتجاهات فى الخريطة كالاتجاهات على

(١) التثليث - تقسيم الارض الى مثلثات •

الارض • مثال ذلك اذا كان مكان ما على الخريطة ، يقع فى شمال - شمال - غرب مكان آخر ، فانه فى الواقع يكون ايضا كذلك وبقول آخر ان الزوايا فى الخريطة هى الزوايا الحقيقية نفسها • ويعرف التشابه الهندسى على الوجه الآتى - يتشابه الشكلان (اولا) اذا كان لكل نقطة فى الشكل الاول نقطة تناظرها فى الشكل الثانى ، ولكل خط نظيره ، ولكل زاوية نظيرتها • و (ثانيا) اذا كانت النسبة بين أطوال الخطوط المتناظرة ثابتة ومقادير الزوايا المتناظرة متساوية • ان نسبة اطوال الخطوط فى خريطة ما (او رسم) الى نظائرها الاصلية تسمى مقياس الخريطة (او الرسم) • ويجب أن يشار الى هذا المقياس دوما على هامش الخريطة أو الرسم • لقد سبقت لنا الاشارة الى ان المثلثين يتشابهان اذا ساوت زوايا الاول نظائرها فى الثانى • وعليه فى المثلثين أ ب ح ، د ه و اذا كانت الزاوية فى أ تساوى الزاوية فى د ، والزاويتان فى ب ، ح تساويان الزاويتين فى ه ، و كانت نسبة د ه الى أ ب



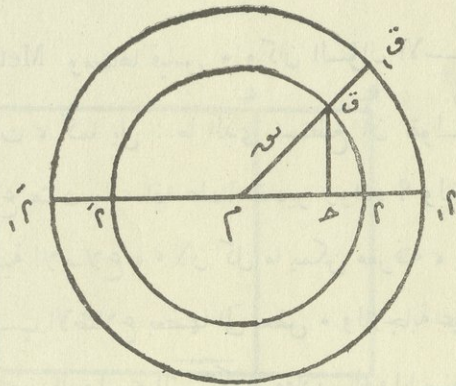
شكل (٢٤)



شكل (٢٥)

كنسبة هـ و الى ب ح ، وكنسبة و د الى ح أ . اما فى الاشكال الاخرى
فمجرد تساوى الزوايا ، لا يضمن وحده تشابه الشكلين . ففى
الشكل ٢٥ اذا كان أ ب ح د مربعا ، أ ب هـ و مستطيلا ، فان الزوايا
المتناظرة ، جميعا ، متساوية . ومع أن أ ب ، الذى هو ضلع المربع
يساوى أ ب الذى هو ضلع المستطيل ، فان الضلع ب ح من المربع ،
يقرب من ثلثى طول ضلع المستطيل ب هـ وعليه لا يصح أن يكون
المربع أ ب ح د مشابها للمستطيل أ ب هـ و . ان هذه الخاصية للمثلث ،
التي لا تشاركه فيها الاشكال الاخرى المحاطة بمستقيمت ، هي التي
تجعل من المثلث شكلا أساسيا فى نظرية التشابه . ولذلك يعد التثليث
(أى تنظيم تشكيكه من المثلثات) عملية أساسية فى مسح الارض . ومن
هذه العملية اشتقت كلمة Trigonometry أى قياس المثلثات ، فهى
مؤلفة من كلمتين اغريقيتين الاولى Trigonometria ومعناها المثلث ،

والثانية Metria ومعناها قياس • وكان السؤال الاساسى الذى قام عليه علم المثلثات ، كما يلى : ما الذى نستطيع أن نقوله عن المقادير النسبية لاضلاع مثلث ما ، اذا علمنا مقادير زواياه ؟ وليلاحظ أننا قلنا « المقادير النسبية لاضلاع » ، لان كل ما يمكن معرفته ، بموجب نظرية التشابه ، هو نسب الاضلاع بعضها الى بعض • وللإجابة على هذا السؤال يقتضى ايراد بعض الدوال ، التى تكون مقادير الزوايا سندا لها • وكان قد تم الوصول الى هذه الدوال ، فى الاصل ، عن طريق النظر فى المثلث القائم الزاوية ، وعلى أساس تعريف مقدار الزاوية ، بطول قوس دائرة • أما الكتب الاولى الحديثة فقد أهملت ، الى حد ما ، ما نقوس الدائرة من أهمية أساسية فى تعريف مقدار الزاوية ، الامر الذى لم يكن فى مصلحة النظرية أو سهولة التوضيح وجلالته • ومما تجب ملاحظته حول التشابه ، أن الدائرة تحتل بين الاشكال المنحنية (أو المقوسة) نفس الموقع الاساسى الذى يحتله المثلث بين الاشكال التى تحيط بها مستقيمت • فكل دائرتين متشابهتان ، والفرق الوحيد بينهما ، يكون بمقياس الرسم • والنسبة بين طولى محيطى دائرتين مثل AQ ، AQ' ، Q ، Q' (شكل ٢٦) تكون كالنسبة بين طولى نصفى قطريهما ، وبالإضافة الى ذلك ، اذا اتحدت دائرتان بمركز واحد ، كما هى الحال فى الشكل ٢٦ ، فالنسبة بين طولى النوسين AQ ، AQ' ، المحصورين بين ضلعى أية زاوية مثل AMQ ، تساوى النسبة بين نصفى القطرين •



شكل (٢٦)

وعليه تكون نسبة طول القوس أ ق الى طول نصف القطر
 $\frac{\text{القوس أ ق}}{\text{نصف القطر م ق}}$ ، وهو عدد لا علاقة له البتة بالطول م ق ،
 مساويا للكسر $\frac{\text{القوس أ ق}}{\text{نصف القطر م ق}}$. والكسر هذا أى « القوس
 مقسوما على نصف القطر » ، هو الطريقة النظرية الصحيحة لقياس مقدار
 الزاوية ، لانه لا يعتمد على وحدة كيفية للطول ، ولا على طريقة تقسيم
 كفى لزاوية مفروضة بصورة كيفية كالزاوية القائمة . فالكسر
 $\frac{\text{أ ق}}{\text{م ق}}$ يمثل اذا ، مقدار الزاوية أ م ق . والان لرسم ق ح عموديا
 على م أ . فنحصل على الخط ق ح الذى سماه رياضيو الاغريق جيب
 القوس أ ق ، وعلى الخط م ح الذى دعوه جيب تمام القوس أ ق .
 ومع أنهم كانوا على علم تام بأن العلاقات بين هذه الخطوط المختلفة ،

تعتمد على نظرية التشابه ، التي شرحناها ، فهم لم يضعوا تعاريفهم بحيث
تعبّر عن الخواص التي تنشأ عن هذه النظرية ولم يدر في خلدكم أيضا ،
شي عن الآراء العامة الحديثة المتعلقة بالدوال ، وأنها ارتباط بين أعداد
متغيرة • كما لم يكونوا على علم بالأفكار الحديثة في الجبر والتحليل
الجبري • ولذلك كان من الطبيعي أن يقصروا تفكيرهم على العلاقات
بين خطوط معينة ، تقع ضمن الأشكال الهندسية • أما بالنسبة لنا فالامر
على خلاف ذلك ، فنحن نريده أن يتضمن من آراءنا ما هو أكثر أهمية
وقوة •

لأنهم في الرياضيات الحديثة بالقوس أ ق ، بل نأخذ بنظر
الاعتبار ، بدلا عنه الكسر ، $\frac{ا ق}{م ق}$ وهو عدد لا يتغير مهما كان طول نصف

القطر م ق • كما نأخذ الكسرين $\frac{ق}{م ق}$ و $\frac{م}{م ق}$ وهى أيضا أعداد لا تعتمد

في قيمها على م ق ، بدلا عن الحطين ق > ، م > ونعرف العدد $\frac{ق}{م ق}$ بأنه

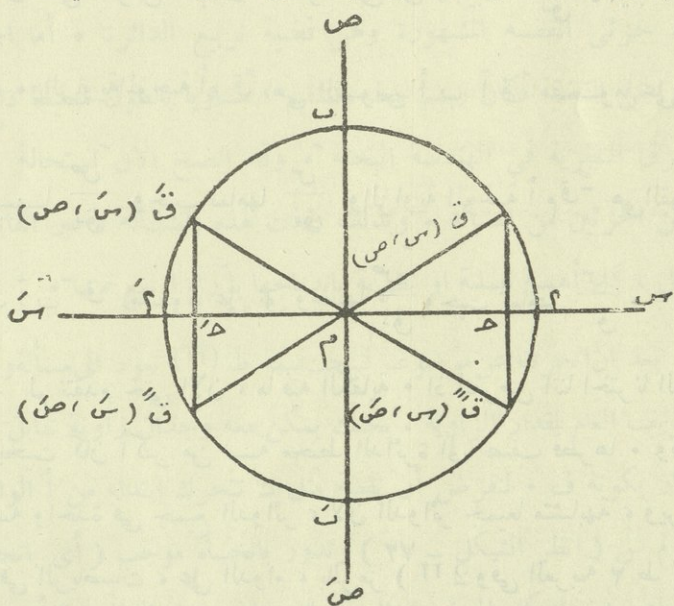
جيب العدد $\frac{ق}{م ق}$ ، والعدد $\frac{م}{م ق}$ بأنه جيب تمام العدد $\frac{ق}{م ق}$ • ولما كانت

هذه الصور الكسرية مربةكة عند الطباعة ، عوضنا عن الكسر $\frac{ا ق}{م ق}$

بالمقدار ف وهو يمثل مقدار الزاوية أ م ق ، وعوضنا عن الكسر $\frac{ق}{م ق}$

بالمقدار ش ، وعن الكسر $\frac{م}{ق}$ بالمقدار ع • فينتج عن ذلك أن كلا من
 ف ، ش ، ع ، عدد من الاعداد • وبما اننا نتكلم عن « أية » زاوية كانت ،
 يقتضى اذاً ، ان تكون الاعداد هذه متغيرة ، مع وجود علاقة فيما بين
 قيمها • فاذا عرف ف ، (وهو مقدار الزاوية أم ق) ، تتعين قيمة كل من
 ش ، ع • ولذا يعد كلا من ش ، ع دالة للسند ف • وقد سبق لنا
 ان أسمينا ش ، جيب (ف) و (ع) جيب تمام ف • والان يحسن بنا
 أن نطبق الرمز العام للدالة ص = د (س) على هذه الحالات الخاصة •
 وللتوصل الى ذلك اصطلاحوا ، فى الرياضيات الحديثة ، على استعمال
 (جا) بدلا من « د » عندما يراد الاشارة الى دالة الجيب الخاصة ،
 ووضع « جتا » بدلا من « د » عندما يشار الى دالة جيب التمام الخاصة •
 وعلى ذلك ، وبموجب المعانى التى سبق واعطيناها لكل من ف ، ش ،
 ع ، يكون ش = جاف ، ع = جتا ف • وبهذا ، نكون قد حذفنا
 الاقواس المحيطة بـ (س) فى الرمز د (س) ، ووضعنا بدلها الدوال
 الخاصة • اما معنى الدالة جا ، جتا ، بوصفها رابطة بين زوجى العددين
 (ف ، ش) ، (ف ، ع) ، فيتضح عند معرفة العلاقات الدالية وذلك بأن نرسم
 زاوية مثل أم ق (راجع الشكل - ٢٦) ، فيكون ف مساويا الى قياس
 الزاوية الحاصل من « قسمة أق على م ق » ، اما العدد ش فينتج من قسمة
 « ق ح على م ق » والعدد ع يحصل من قسمة « م ح على م ق » •
 ومن الواضح أننا ، اذا لم نتقدم بتعاريف جديدة أخرى ، سنجابه

صعوبات عندما يكون العدد ف أكبر مما ينبغي • اذ من الجائز أن يكون
 القوس أ ق أكبر من ربع محيط دائرة ، فنقع النقطة ح (راجع الشكلين
 ٢٦ - ٢٧) بين م ، ا وليس بين م أ كما يمكن أن تقع النقطة ق أسفل
 الخط أ م ا وليس أعلاه كما هي الحالة في الشكل - ٢٦ • وللتغلب
 على هذه الصعوبة ، نرجع الى آراء الهندسة الاحداثية ومصطلحاتها ،
 لصوغ التعاريف الكاملة للجيب وجيب التمام • فنجعل أحد ضلعي
 الزاوية ، وليكن م أ ، محورا للسينات ، ونمده الى الورا لنحصل على
 الجزء السالب له ، وهو م س • ونرسم ، بعد ذلك ، المحور الآخر
 ص م ص عمودا عليه • ونفرض أن س ، ص هما احداثيا أية نقطة



شكل (٢٧)

مثل ق ، تبعد عن م بمقدار نق • فهذان الاحداثيان يكونان موجبين في الربع الاول من المستوى ، كالاحداثيين س ، ص للنقطة ق في الشكل ٢٧ • اما في الارباع الاخرى فيكون أحد الاحداثيين أو كلاهما سالبا مثل س~ ، ص للنقطة ق~ ؛ س~ ، ص~ للنقطة ق~ ؛ س~ ، ص~ للنقطة ق~ كما ترى ذلك في الشكل ٢٧ ، وفيه كل من س~ ، ص~ أعداد سالبة • ثم نقول أن الزاوية الموجبة ق م أ هي القوس أ ق

مقسوما على نق وجيبها $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ وجيب تمامها $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ • والزاوية الموجبة

أ م ق~ هي القوس أ ب ق~ مقسوما على نق وجيبها $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ وجيب تمامها

$\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ • والزاوية الموجبة أ م ق~ هي القوس أ ب آ ق~ مقسوما على نق

وجيبها $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ وجيب تمامها $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ والزاوية الموجبة أ م ق~ هي القوس

أ ب آ ب~ ق~ مقسوما على نق وجيبها $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ وجيب تمامها $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ •

لم نتقدم حتى الآن ، ما فيه الكفاية • اذ لنفرض اننا اخترنا العدد ف بحيث كان أكبر من نسبة محيط الدائرة الى نصف قطرها • وهذه النسبة واحدة في جميع الدوائر ، لان الدوائر جميعا متشابهة ، ويرمز لها في الرياضيات ، على الدوام ، بالرمز (2π وفي العربية ٢ ط) • و π هي الصيغة الاغريقية للحرف اللاتيني P وتسمى في الحروف

الهجائية الاغريقية (پاى PI) • وفى الامكان البرهنة على أن II
او ط عدد غير قياسى ولذلك لا يمكن التعبير عن قيمتها بكسر اعتيادى
أيا كان ولا بكسر عشرى منته ولا دورى • اما قيمتها لبضع أرقام
عشرية فهي ٣١٤١٥٩ ، وفى الكثير من المقاصد يكفى استعمال القيمة
التقريبية $\frac{22}{7}$ ، على أن فى وسع الرياضيين استخراج قيمة ط.
بسهولة الى الدرجة التى تراد من الدقة، كما يستخرجون 2^7 • والواقع
أنهم وصلوا فعلا الى ٧٠٧ أرقام بعد الفاصل العشرى وكان الدافع ،
الى هذا التعمق الشاق فى حسابها، حسب الاستطلاع • اذ لافائدة نظرية او
عملية تجنى من وراء ذلك • ان وجدان الط بصورة دقيقة كان
أحد جزئى القضية المشهورة وهى قضية تربيع الدائرة • أما الجزء
الثانى من القضية فكان رسم خط مستقيم ، مساويا بالطول لمحيط دائرة
بالطرق النظرية فى الهندسة البحتة • وقد اتضح الان استحالة حل
هذين الجزئين من المسألة • وبذلك فقدت هذه المسألة ، غير القابلة
للحل ، كل أهمية عملية او نظرية باندماجها بآراء اوسع منها •

بعد ان انحرفنا عن موضوعنا لنبحث قيمة ط (II) نعود الى مسألة وضع
التعريف العام لمقدار الزاوية ، بحيث يمكن معه وجدان زاوية تقابل أى
مقدار يكونه ف • لنفرض أن نقطة مثل ك تتحرك ابتداء من أ الواقعة
على م س (انظر الشكل - ٢٧) وتدور باتجاه موجب (أى باتجاه
عكساعى فى الشكل الموضوع البحث) حول محيط الدائرة ، أى عدد

كان من الدورات ثم تستقر أخيرا في أية نقطة مثل ق أو ق~ أو ق^٢
 اوق^٢ . فيكون طول المنحنى الدائري ، الذي قطعتة النقطة في سيرها ،
 بجملة ، متسوما على نصف قطر الدائرة نق ، هو التعريف العام للزاوية
 الموجبة مهما كانت سعتها . ولنفرض أن (س ، ص) هما احداثيا الموقع
 الذي تستقر فيه لـ ، وأعني ، أحد المواقع الاربعة التي أشرنا اليها في
 الشكل ٢٧ . كما أن (س ، ص) (كما استعملناها هنا) تكون اما
 (س ، ص) أو (س^٢ ، ص^٢) أو (س^٣ ، ص^٣) أو (س^٤ ، ص^٤)
 وبذلك يكون جيب هذه الزاوية العامة $\frac{ص}{نق}$ وجيب تمامها $\frac{س}{نق}$ على ان لا
 ننسى الاشارة التي يجب أن تسبق س أو ص بالنسبة لمواقعها . وبهذه
 التعاريف نكون قد توصلنا أخيرا الى تعيين العلاقات الدالية ش = جاف ،
 ع = جتا ف . اما فيما يتعلق بالقيم السالبة لـ ف فيتم ذلك بمجرد دوران لـ
 باتجاه معاكس (أى باتجاه ساعى) . وبعد أن أوضحنا أساليب التعامل
 العامة ، حول هذه النقطة ، لم تبق حاجة الى اعطاء تفاصيل أكثر من
 ذلك عنها .

ان دالتى الجيب وجيب التمام ، كما عرفناهما سيجعلان في وسعنا التعامل
 بالقضايا المتعلقة بالمثلث والتي انبعث عنها نشوء علم المثلثات . ونحن
 الان في وضع نستطيع معه أن نصل علم المثلثات ، بفكرة الدورية الاوسع
 منه والتي أوضحنا أهميتها في الفصل السابق . ومن السهل أن نرى
 أن الدالتين جاف و جتا ف دالتان دوريتان لـ ف . واذا تأملنا الموقع في

(فى الشكل - ٢٧) ، للنقطة المتحركة ك ، التى ابتدأت حركتها من أ ودارت حول الدائرة ، نجد أن هذا الموقع ق يبين الزوايا الآتية

$$\frac{\text{القوس أ ق}}{\text{نق}} + \frac{\text{القوس أ ق}}{\text{نق}} + \frac{\text{القوس أ ق}}{\text{نق}} + \frac{\text{القوس أ ق}}{\text{نق}}$$

وهكذا الى ما حد له . الا ان لهذه الزوايا جميعها الجيب وجيب التمام نفسيهما وأعنى بهما $\frac{\text{ص}}{\text{نق}}$ و $\frac{\text{س}}{\text{نق}}$ وهكذا أصبح من الهين أن ندرك أنه ، مهما كانت القيمة التى نختارها لـ ف ، تكون جميع قيم الجيوب المناظرة الاسناد فى ٢ ط + فى ٤ ط + فى ٦ ط + فى ٨ ط + فى ، وهكذا الى ما لا حد له ، متساوية وكذلك تكون جيوب التمام .
وبتعبير آخر يكون :

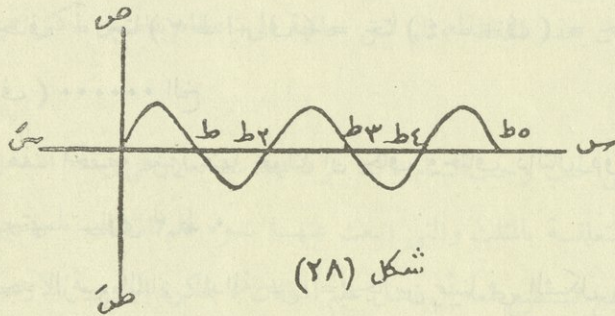
$$\begin{aligned} \text{جاف} &= \text{جا (٢ ط + ف)} = \text{جا (٤ ط + ف)} = \text{جا (٦ ط + ف)} \\ &\text{ط (ف)} \dots \dots \dots \text{الخ} \\ \text{جتاف} &= \text{جتا (٢ ط + ف)} = \text{جتا (٤ ط + ف)} = \text{جتا (٦ ط + ف)} \\ &\text{ط (ف)} \dots \dots \dots \text{الخ} \end{aligned}$$

وهذه الحقيقة نعبر عنها بقولنا ان جاف وجتاف دالتان دوريتان وأن دورتهما تساوى ٢ ط .

تجد الرسم البيانى للدالة ص = جا س مينا فى الشكل ٢٨ .
(وليلاحظ هنا أننا تركنا الحرفين ف ، ش واستعملنا الحرفين س ، ص المألوفين اكثر منهما) . أما طريقة عمل الرسم هذا ، فهى أن نأخذ على

محور السينات طولاً كيفياً مناسباً يمثل العدد ط ، وعلى محور الصادات طولاً كيفياً مناسباً يمثل العدد ١ ، لان قيم الجيب وجيب التمام لا يمكن أن تتعدى الوحدة بتاتاً ، ثم تلاحظ تكرار الشكل بعد كل دورة مقدارها ٢ ط . وهذا الرسم يمثل أبسط أنواع الدوال الدورية التي تبنى عليها جميع الدوال الاخرى . أما الرسم البياني لجيب التمام فلا يختلف بشئ * جوهرى عن رسم الجيب . فمن السهل أن نبرهن على أن جتا س = جا (س + $\frac{\pi}{2}$) . ولذلك يكون الرسم البياني لجتا س هو الشكل - ٢٨ نفسه مع اجراء تحويل بسيط فيه ، وهو أن يمر محور الصادات بالنقطة $\frac{\pi}{2}$ الواقعة على محور السينات بدلاً من رسمه فى موقعه الفعلى الذى يظهر به فى الشكل .

وليس من الصعب أن نرسم دالة جيب تكون دورتها أية قيمة



نحددناها ولتكن أ . ويتم ذلك بمجرد كتابة ص = جا $\frac{2\pi س}{١}$.

ثم نقول :

$$\text{جا} \frac{\text{ط}^2}{\text{أ}} = \left\{ \text{ط}^2 + \frac{\text{ط}^2}{\text{أ}} \right\} \text{جا} = \frac{(\text{أ} + \text{س}) \text{ط}^2}{\text{أ}}$$

وعليه تكون أ هي دورة هذه الدالة الجديدة .

لنتقدم الان الى ذكر التعريف العام لما نقصده بقولنا دالة دورية .
يقال للدالة د (س) انها دورية ، وان مقدار دورتها أ ، اذا (اولا)
كانت د (س) = د (س + أ) لكل قيمة من قيم س و (ثانيا) لا
يوجد عدد مثل ب أصغر من أ بحيث تكون د (س) = د (س + ب)
« لكل قيمة » من قيم س .

والفقرة الثانية وضعت في التعريف ، لان دالة مثل $\frac{\text{ط}^2}{\text{أ}}$

لا تكون دورية ، اذا كانت دورتها أ فقط ، بل اذا كانت دورتها أيضا
أ٢ ، أ٣ ، الخ . والسبب هو أن :

$$\text{جا} \frac{\text{ط}^2}{\text{أ}} = \left\{ \text{ط}^2 + \frac{\text{ط}^2}{\text{أ}} \right\} \text{جا} = \frac{(\text{أ}^3 + \text{س}) \text{ط}^2}{\text{أ}}$$

يتبين من ذلك أن أصغر دورة ، هي التي تجب معرفتها وتسميتها
دورة الدالة . ان الجزء الاعظم من نظرية الدوال الدورية ، وتطبيقاتها
العملية كافة ، تخضع لنظرية هامة تسمى نظرية فوريير Fourier
وهي أنه اذا كانت د (س) دالة دورية دورتها أ ، واذا حققت د (س)
بعض شروط معينة ، يفترض بالفعل وجودها ، على الدوام ، في الدوال

التي تقتضيها الظاهرات الطبيعية ، يصبح في الامكان كتابة د (س)
كمجموعة من الحدود على الشكل :

$$ج. + ح. + ج. (\frac{ط ٢}{١} + ه.) + ح. (\frac{ط ٤}{١})$$

$$+ (ه. + ح.) (\frac{ط ٦}{١} + ه.) + الخ .$$

وتعد ج. ، ح. ، ح. ، ح. ، ح. ، وكذلك ه. ، ه. ، ه. ، ه. ، الخ
في الدستور هذا ، كميات ثابتة تم اختيارها لتلائم الدالة الخاصة .
ولنسأل الان ما عدد الحدود التي يجب اختيارها ؟ وهنا تبرز مشكلة
جديدة ، لاننا نستطيع أن نبرهن أن كل ما يمكن عمله بوجه عام ،
باستثناء بعض الحالات الخاصة التي يكتفى فيها بعدد معين من الحدود ،
هو أن نقرب من قيمة الدالة الى أى حد نشاؤه ، بتزويد عدد الحدود .
وعملية التقريب التدريجي هذه تؤدي بنا الى التفكير بنظرية المتسلسلات
اللانتهائية التي تؤلف قسما رئيسيا من النظرية الرياضية التي ستكون
موضع النظر في الفصل القادم .

ان الطريقة ، التي ذكرناها أعلاه ، في التعبير عن دالة دورية على
شكل حاصل جمع عدد من الجيوب ، تسمى « التحليل التوافقي » للدالة .
مثال ذلك ان المد ، في أية نقطة على ساحل البحر ، يرتفع وينخفض
بصورة دورية . فهو يحدث في نقطة ما على مضيق دوفر ، مرتين في
اليوم بسبب دوران الارض . ويتعقد ارتفاع المد وانخفاضه اليومي ،

بسبب وجود موجتين مديّتين ، تأتي الاولى منهما صاعدة عن طريق القناة الانكليزية أما الثانية فتأتي من الشمال ، وبعد أن تلف حول شمالى اسكتلندة ، تتحدر نحو الجنوب الى البحر الشمالى • وبعض نوبات المد تكون أعلا من غيرها • وهذا ناشئ عن أن للشمس أثرا فى توليد المد كما للقمر • فينتج عن ذلك دورات شهرية ودورات اخرى • وإذا أهملنا المفعول الاستثنائي للرياح وهو ما لا يمكن التنبؤ به ، تكون القضية العامة للتحليل التوافقى للمد ، عبارة عن وجدان مجموعات من الحدود ، كالتى ذكرناها فى التعبير الوارد فى الصحيفة السابقة ، بحيث تعطينا كل مجموعة ، بدقة تقريبية ، مدى الارتفاع الذى تسببه فى اية لحظة كانت ، العوامل المولدة للمد فى دورة واحدة • ويكون السند (س) اذ ذاك ، الزمن محسوبا من لحظة بدائية مناسبة •

وتخضع حركة اهتزاز وتر الكمنجة الى تحليل توافقى مماثل لما بيناه ومثلها اهتزازات الاثير والهواء التى تناظر النور والصوت على الترتيب • نحن الان أمام طريقة أساسية من طرق الفيزياء الرياضية وهى الطريقة العامة لمعالجة الحقيقة الطبيعية العظمى وأعنى بها الدورية •

الفصل الرابع عشر

المتسلسلات

SERIES

لم يصب الضرر أى قسم من الرياضيات ، بسبب الصورة التافهة التى يقدم بها للمبتدئين ، كما أصاب موضوع المتسلسلات المهم . اذ يبدأ باعطاء مثالين صغيرين ، هما المتوالية العددية والمتوالية الهندسية . ولا تخفى أهمية هذين المثالين لانهما من أسهل الامثلة عن نظرية عامة مهمة . ولكن الاراء العامة لا يكشف عنها وبذلك تصبح الامثلة هذه وهى لا تمثل شيئا ، هراء سخيفا .

ان الفكرة الرياضية العامة عن المتسلسلة هى أنها مجموعة من أشياء منسقة على وفق ترتيب ، أى بالتتابع . ويتمثل هذا المعنى نفسه باستعمالنا المعتاد للكلمة . لننظر مثلاً فى سلسلة رؤساء الوزارة الانكليز فى القرن التاسع عشر فنجدهم مصنفين بالترتيب الذى تولى كل منهم هذا المنصب أول مرة خلال ذلك العصر . فتبدأ السلسلة بوليم بيت وتنتهى باللورد رزبرى الذى كتب تأريخ حياة الاول .

لقد كان فى وسعنا أن نرتب هؤلاء الرجال وفق تراتيب متسلسلة

أخرى ، كأن نرتبهم على حسب أطوالهم أو أوزانهم ولكن مثل هذه الترتيب تبدو سخيفة عند تطبيقها على رؤوساء الوزارات وهى بالبداية لا ترد على الحاضر • ولكنها من الوجهة الفكرية البحتة ، تعد ترتيب كغيرها على السواء • وإذا كان أحد الترتيب لمجموعة من الحدود ، أكثر أهمية أو أشد وضوحا من الترتيب الأخرى لها ، قيل عنه انه هو « الترتيب » لتلك الحدود • وعلى ذلك « فالترتيب » للاعداد الصحيحة ، يعنى دوما ، الترتيب الذى تصنف به على حسب أقدارها ، على أنه من البديهي وجود كيفيات لا حصر لها فى ترتيب الاعداد الصحيحة • وإذا كان عدد الاشياء التى يراد ترتيبها محدودا ، سمي عدد الترتيب التى يمكن اجراءها عدد « تبادلها Permutations • فعدد تبادل مجموعة مؤلفة من n من الاشياء على اعتبار أن n عدد صحيح محدود هو :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (3-n) \times (2-n) \times (1-n)$$

$1 \times 2 \times \dots$ أى حاصل ضرب أول n من الاعداد الصحيحة • ونظرا لما لحاصل الضرب هذا من أهمية فى الرياضيات ، فقد وضع له رمز خاص به • فهو يكتب على الدوام ، « $n!$ »^(١) وعليه فان $2! = 1 \times 2 = 2$ ، $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ ، $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ ، $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ وعندما تكبر n تزداد قيمة $n!$ بسرعة • مثال ذلك أن $100!$ هى مائة مرة بقدر $99!$ •

(١) تسمى $n!$ « نون العاملة » وتكتب أيضا على الشكل $n!$

من أنسهل أن تتحقق ، فى الحالات التى تكون فيها ن صغيرة ، من أن ن ! هى عدد الكيفيات التى يمكن أن ترتب بها ن من الاشياء مثال ذلك اذا أخذنا شيئين أ ، ب فيمكن أن يرتبا بكيفيتين أ ب ، ب أ وان

$$2! = 2 \cdot 1$$

فإذا أخذنا ثلاثة أشياء أ ، ب ، ح ، أمكن أن نرتبها بست كيفيات وهى أ ب ح ، أ ح ب ، ب أ ح ، ب ح أ ، ح أ ب ، ح ب أ ولكن $3! = 6 \cdot 1$ ومثل ذلك يقال عن الرابع والعشرين كيفية التى يمكن أن ترتب بها أربعة أشياء أ ، ب ، ح ، د .

أما اذا أتينا الى المجموعات التى تتألف مما لا نهاية له من الاشياء ، كمجموعة الاعداد الصحيحة بأسرها أو مجموعة الكسور جميعها أو مجموعة الاعداد الحقيقية مثلا - فاننا ندخل من فورنا فى تعقيدات نظرية أنواع الصنف Order type . وقد لمحنا الى هذا الموضوع فى الفصل السادس عندما نظرنا فى الاصناف الممكنة للاعداد الصحيحة والكسور والاعداد الحقيقية . وقضية أنواع الصنف هذه موضوع جديد نسبيا فى الرياضيات وهو على جانب كبير من الاهمية ، ولكننا لن نتطرق اليه بعد الان .

ان جميع المتسلسلات اللانهائية التى ننظر فيها الان ، هى من نفس نوع صنف Order type الاعداد الصحيحة المرتبة ترتيبا تصاعديا على حسب أقدارها ، بحيث يكون لها حد أول ويكون لكل حد ، حد يسبقه مباشرة واخر يتلوه ، باستثناء الحد الاول ، الذى له حد يتلوه

مباشرة وليس له حد يسبقه • وعليه اذا كانت م أى عدد صحيح (غير
 الصفر) ، تحتم وجود حد ميمى على الدوام • واذا كان عدد حدود
 المتسلسلة منتهيا (ولنقل أنه ن) ، يكون لحدودها خواص المتسلسلة
 اللانهائية نفسها من حيث التجاور والتالى والفرق الوحيد بينهما هو أن
 يكون للمتسلسلة المنتهية حد أخير هو الحد النونى •

والامر المهم الذى يقتضى عمله فى متسلسلات الاعداد - سنستعمل
 فى المستقبل كلمة « متسلسلة » أو « سلسلة » بالمعنى المحدود الذى
 ذكرناه أعلاه - هو جمع حدودها المتتالية •

اذا كانت ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ح_ن تمثل على الترتيب

الحد الاول والثانى والثالث والحد النونى لمتسلسلة ما ، فاننا
 نؤلف منها المتسلسلات الاتية على التوالى : ح_١ ، ح_١ + ح_٢ ،
 ح_١ + ح_٢ + ح_٣ ، ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_٤ ، وهكذا دواليك •
 ويكتب مجموع أول ن من الحدود هكذا :

$$ح_1 + ح_2 + ح_3 + \dots + ح_n$$

واذا كان للمتسلسلة عدد منته من الحدود فاننا نتوصل بهذه الوسيلة
 الى وجدان مجموع حدودها جميعا • أما اذا كان عدد الحدود لا نهاية
 له فان عملية اضافة الحدود بالتتابع ، الى مجموع الحدود السابقة لها ،
 تصبح عملية لا نهاية لها • وبهذا المعنى لا يوجد ما يسمى مجموع
 متسلسلة لا نهائية •

ولكن ما هي أهمية جمع الحدود بالتتابع على الوجه الذى أشرنا إليه ؟
والجواب ، اننا نرمز بذلك الى العملية الفكرية الاساسية للتقريب وهي
عملية ذات أهمية تمتد الى ما وراء الحقول الرياضية . لان أفهامنا
المحدودة لا تطبق التعامل بالقضايا المعقدة بجملتها ، فلجأ فى ترتيبها
الى طريقة التقريب . فرجل الدولة عندما يصوغ خطابه يضع القضايا
الرئيسية فى المقام الاول ويدع التفاصيل تحتل مكانها الثانوى . وتوجد ،
بالطبع ، الطريقة الفنية المعاكسة لهذه ، وهي تهئية المخيلة بتقديم تفاصيل
خاصة أو فرعية ثم تسمو بالتدريج الى الفكرة الحاسمة . ان كلا من
هاتين الطريقتين تعمل على تجميع (١) النتائج بصورة تدريجية . وهذا
بالضبط ما نصنعه عند التجميع المتتالى لحدود متسلسلة ما . وطريقتنا
المعتادة فى التعبير عن الاعداد ، أو على الاقل الاعداد الكبيرة ، هي من
عمليات الجمع التدريجى . فالعدد ٥٦٨٢١٣ يتمثل للفكر على الشكل

$$٣ + ١٠ + ٢٠٠ + ٨٠٠٠ + ٦٠٠٠٠ + ٥٠٠٠٠٠$$

أما فى الكسور العشرية فالامر أشد وضوحا . فالعدد ٣١٤١٥٩ هو :

$$٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠٠٠٠} + \frac{٩}{١٠٠٠٠٠}$$

$$\text{وان كلا من } ٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠٠٠٠} + \frac{٩}{١٠٠٠٠٠} \text{ و } ٣ + \frac{١}{١٠} + \frac{٤}{١٠٠} + \frac{١}{١٠٠٠} + \frac{٥}{١٠٠٠٠} + \frac{٩}{١٠٠٠٠٠}$$

هى تقريبات متتالية للنتيجة الكاملة ٣١٤١٥٩ . واذا قرأنا العدد

Summation (I)

٥٦٨٠٢١٣ بصورة عكسية ، أى من الجهة اليمنى ، مبتدئين بالـ ٣ فان قراءتنا تكون على الطريقة الفنية التى تهيؤ الفكر تدريجيا للعدد

• • • • •

والطريقة المعتادة فى ضرب الاعداد تبدأ بتجميع متسلسلات • لننظر مثلاً فى عملية الضرب :

٣٤٢

٦٥٨

٢٢٣٦

١٧١٠

٢٠٥٢

٢٢٥٠٣٦

جد أن السطور الثلاثة المطلوب وجدان مجموعها تؤلف متسلسلة حدها الاول هو السطر الاعلى • وخضوع هذه المتسلسلة للطريقة الفنية ، التى تضع أهم الحدود فى الاخير ، لم ينشأ عن شعور خاص نحو الفن بل للسهولة الناشئة عن الاستمساك بموقع الاحاد ، الامر الذى يمكننا من حذف بعض الاصفار الضرورية عرفاً •

اما اذا أجرينا التقريب ، بان نجمع بالتدرج الحدود المتتالية لمتسلسلة لا نهائية ، فيقتضى أن نعلم مم نقرب ؟ فالصعوبة هى أن المتسلسلة هذه لا « مجموع » لها بالمعنى المتعارف لهذه الكلمة ، لان عملية جمع حدودها لا يمكن أن تكمل • والجواب اننا نقرب مجموع المتسلسلة الى « غاية »

ولذلك وجب علينا أن نفسر ما يعنى بكلمة « غاية » المتسلسلة •
 يقال ان تجميع متسلسلة يقترب من غاية ، اذا كان مجموع أى
 عدد من حدودها ، بشرط أن يكون هذا العدد كبيرا كفاية ، يساوى
 على وجه التقريب ، الغاية بقدر ما نود الاقتراب منها •

ولكن من الواضح أن هذا الوصف لمعنى التقريب من غاية ، لا يثبت
 بازاء تمحيص الرياضيات الحديثة الشديد • اذ ماذا يقصد بـ « كبيرا
 كفاية » وبـ « يساوى على وجه التقريب » وبـ « قدر ما نود الاقتراب
 منها » • هذه التعابير الغامضة تتطلب توضيحا بدلالة الفكر البسيطة
 المجردة ، التى وحدها يسمح بها فى الرياضيات البحتة •

لنفرض أن الحدود المتتالية للمتسلسلة هى $1, 2, 3, 4, 5, \dots$
 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ الخ بحيث يكون $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ هو الحد النونى للمتسلسلة •
 كذلك لنفرض أن $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ هو مجموع أول $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ من الحدود مهما كانت
 قيمة n • وعليه يكون :

$$1 = 1, \quad 1 + 2 = 3, \quad 1 + 2 + 3 = 6, \quad 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad \dots$$

ان الحدود $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ تؤلف متسلسلة

جديدة • وتأليف هذه المتسلسلة هو عملية تجميع المتسلسلة الاصلية •
 ويكون معنى « تقريب » ، « تجميع » المتسلسلة الاصلية من « غاية »
 هو تقريب حدود هذه المتسلسلة الجديدة من غاية • فعلى اذن أن نفسر

قصدا في تقريب حدود متسلسلة من غاية •

إذا تذكرنا تعريف « مقياس التقريب » (الذي سبق وأعطيناه في الفصل ١٢) فإن فكرة الغاية تعنى ما يأتي : تكون غ غاية حدود المتسلسلة ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_ن ، إذا أمكن أن يوجد مقابل كل عدد

حقيقي مثل ك ، نتخذ مقياسا للتقريب ، حد يناظره في المتسلسلة مثل ح_ن ، بحيث أن كل الحدود التالية له (أى ح_١ + ١ ، ح_٢ + ٢ ،

... الخ) تقترب من غ ضمن مقياس التقريب الذي اتخذناه • وإذا وقع اختيارنا على مقياس أصغر ، مثل ك_١ ، فإن الحد ح_ن ربما جاء مبكرا في المتسلسلة ، وإذا ذاك يجب أن يوجد فيما يتلوه ، حد مثل ح_م

تتوفر فيه الخاصية المذكورة أعلاه •

ومن البين عند تحقق هذه الخاصية أنك إذا سرت في المتسلسلة ح_١ ، ح_٢ ، ح_٣ ، ... ، ح_ن ، ... ، من اليمين إلى اليسار فستصل بعد مدة إلى حدود تكون جميعها أقرب إلى غ (أى أن الفرق بينها وبين غ يكون أصغر) من أى عدد يقع اختيارك على تعيينه ، وبتعبير آخر تقرب من غ ، بدرجة التقريب التي تريدها • وهنا ندرك من الفور العلاقة بين هذا التعريف لغاية المتسلسلة وتعريف الدالة المطردة الذي ذكرناه في الفصل الحادى عشر •

نعود الآن إلى المتسلسلة الأصلية ح_١ ، ح_٢ ، ... ، ح_ن ، ... ،

وجدان « المجموع الى ما لا نهاية له » متسلسلة ، بل اقتصرنا على ذكر الشروط التى يجب أن يحققها مثل هذا العدد • والحقيقة ان وجدان طريقة عامة يستخرج بموجبها ، فى كل الحالات ، مجموع ما لا نهاية له من متسلسلة ما ، أمر خارج الصدد لسبب معين ، وهو أن مثل هذا المجموع ، كما عرف هنا ، لا يوجد دوما • فالتسلسلات التى لها مجموع ، الى ما لا نهاية له من حدودها ، تسمى « متقاربة » ، اما التى ليس لها مجموع ، الى ما لا نهاية له من حدودها ، فتدعى « متباعدة » •

وكمثال يبين عن المتسلسلة المتباعدة ، خذ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ن

••• ، أى سلسلة الاعداد الصحيحة مرتبة حسب أقدارها • فاذا حاولت أن تجعل عددا ما مثل ل ، مجموعا لحدودها الى ما لا نهاية له ، ضمن أى مقياس للتقريب تختاره مثل ك ، فستجد أن فى وسعتك على الدوام اذا أخذت عددا كافيا من الحدود أن تحصل على مجموع يختلف عن ل بأكثر من ك • ومثل آخر عن المتسلسلة المتباعدة هو ١ ، ١ ، ١ ، الخ وهى المتسلسلة التى يساوى كل حد من حدودها واحدا • وهنا يكون ، ن ، مجموع ن من الحدود • وهذا المجموع يزداد ، دون حد ، كلما ازدادت ن • ومثال ثالث عن المتسلسلة المتباعدة هو ١ - ١ ، ١ - ١ ، ١ - ١ ، أى المتسلسلة التى تكون حدودها على التناوب ١ - ١ ، وفيها نجد أن مجموع أى عدد فردى من الحدود يساوى واحدا ، ومجموع أى عدد زوجى منها يساوى صفرا • وعليه فإن حدود المتسلسلة ح ، ح ، ح ، ن لا تقترب من غاية رغم أن قيمتها لا تزداد دون حد •

من المغرى أن نظن أن الشرط في وجود مجموع للحدود ح_١،
 ح_٢، ح_{٢٠٠٠}، الى ما لا نهاية له هو أن تتناقص ح_١ دون
 حد، بتزايد ن. وهذا الامر، لو صح، لكانت الرياضيات علما سهلا
 جدا مما هي عليه الان ولكن هذا الظن خاطيء مع الاسف.

مثال ذلك ان المتسلسلة ١، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{n}$ الخ متسلسلة
 متباعدة. ومن السهل بيان ذلك. لننظر في مجموع ن من حدودها،
 مبتدئين بالحد (١ + ن) وهذه الحدود هي :

$$\frac{1}{1+n} \text{ و } \frac{1}{n+2} \text{ و } \frac{1}{n+3} \text{ و } \frac{1}{n^{2000}} \text{ ويبلغ عددها ن وأصغرها هو}$$

$$\frac{1}{n^2} \text{ وعلى ذلك فان مجموعها اكبر من ن مرة } \frac{1}{n^2} \text{ اي } (n \times \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n})$$

أى أكبر من $\frac{1}{n}$. والان نستطيع أن نجتمع الحدود المتجاورة دون أن
 نتعرض للمجموع الى ما نهاية له ان وجد ونحصل على المتسلسلة التالية :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots \text{ الخ}$$

وهي، بموجب ما ذكر أعلاه، متسلسلة جميع حدودها، بعد الحد
 الثانى، أكبر من حدود المتسلسلة ١، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، الخ، التى
 تتساوى جميع حدودها بعد الحد الاول. ولكن هذه المتسلسلة متباعدة
 وعليه فالمتسلسلة الاصلية متباعدة أيضا*.

* يرجى مراجعة الملاحظة ج فى اخر الكتاب.

ان قضية التباعد تبين لنا كم يجب أن نحتاط ، عند مناقشة خواص
المجموع لعدد متناه من الحدود لتتوصل منها الى خواص مجموع
متسلسلة لا نهائية . فالخاصية الاولى لعدد متناه من الحدود ، هي بالطبع ،
وجود مجموع لها أما المتسلسلة اللانهائية فليس من الضروري أن تمتلك
هذه الخاصية الاساسية . وهذا الاحتياط هو مجرد اشارة لئلا نسيء فهم
ما يوحيه الاصطلاح العلمى (مجموع) فى المتسلسلات اللانهائية .
وقد جرت العادة أن يشار الى مجموع المتسلسلة اللانهائية ح_١ ، ح_٢ ،
ح_٣ ، ، ح_{٠٠} ب ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ح_{٠٠} + الخ

لنتقدم الان الى تعميم فكرة المتسلسلة ، فنجد أن الرياضيات ، وفقا
لاساليبها ، تضع هذا التعميم مستعينة بالمتغير . كنا قد قصرنا تفكيرنا حتى
الان على المتسلسلات التى كل حد معين فيها ، عدد معين . ولكننا نستطيع
بسهولة أن نعمم ذلك فنجعل كل حد تعبيراً رياضياً ، يتضمن متغيراً مثل
س . ويصبح فى وسعنا أن ننظر فى متسلسلة مثل ١ ، س ، س^٢ ، س^٣
..... س^ن . أو فى متسلسلة مثل س ، $\frac{س}{٢}$ ، $\frac{س}{٣}$ ،
..... $\frac{س}{ن}$ ، $\frac{س}{٦}$ ،
..... $\frac{س}{ن}$

وكيما نرمز الى الفكرة العامة لدالة كهذه ، تتصور دالة لـ س ،
ولتكبن دن (س) ، تحتوى فى تكوينها على العدد الصحيح المتغير ن .
ثم نعطى ن ، القيم ١ ، ٢ ، ٣ ، الخ على التوالى ونحصل على المتسلسلة :

د_١ (س) ، د_٢ (س) ، د_٣ (س) ، ، د_ن (س) . . . الخ
 ومثل هذه المتسلسلة تكون متقاربة لبعض قيم س ومتباعدة لقيم
 أخرى . ومن النادر حقاً وجود متسلسلة تحتوى على متغير (س) وتكون
 متقاربة لجميع القيم التى نفترضها له - او على الاقل - ليس من سداد
 الرأى القول بذلك فى أية حالة خاصة . مثال ذلك لنفحص أسهل
 الحالات وهى المتسلسلة « الهندسية »

$$١، س، س^٢، س^٣،، س^ن،،$$

ومجموع ن من حدودها هو :

$$ح_n = ١ + س + س^٢ + س^٣ + + س^{ن-١}$$

والآن لنضرب الطرفين فى س :

$$س ح_n = س + س^٢ + س^٣ + + س^{ن-١} + س^n$$

س^ن

ثم نطرح السطر الاخير مما فوقه فينتج :

$$ح_n (١ - س) = ١ - س^n$$

ومن ذلك ، ان لم تكن س = ١ ، ينتج :

$$ح_n = \frac{١ - س^n}{١ - س}$$

فإذا كانت س اقل عددياً من ١ فان $\frac{س^n}{١ - س}$ تكون على الدوام اصغر

عدديا من (ك) كيفما اخترنا (ك) بشرط ان تكون ن كبيرة كفاية * وعليه
 اذا كانت س أقل عدديا من ١ تكون المتسلسلة ١، س، س^٢،
 س^ن، ... متقاربة وتكون غايتها $\frac{1}{1-s}$ ونعبر عن ذلك رمزيا
 على الوجه :

$$\frac{1}{1-s} = 1 + s + s^2 + \dots + s^n + \dots$$

$$(1 > s > -1)$$

اما اذا كانت س اكبر عدديا من ١ او مساوية له فالتسلسلة تكون
 متباعدة * وبقول آخر اذا وقعت س بين ١ - و ١ + تكون المتسلسلة
 متقاربة * اما اذا ساوت س ، ١ - او ١ + او وقعت خارج نطاق الفترة
 من ١ - الى ١ + تكون المتسلسلة متباعدة * وعليه تكون المتسلسلة
 متقاربة في جميع النقاط ضمن الفترة من ١ - الى ١ + باستثناء نقطتي
 النهايتين *

وفي هذه المرحلة من بحثنا ينبعث سؤال آخر * لنفرض ان
 المتسلسلة :

$d_1 (s) + d_2 (s) + d_3 (s) + \dots + d_n (s) + \dots$ متقاربة
 لجميع قيم س الواقعة في الفترة من أ الى ب ، أى ان المتسلسلة متقاربة لأية
 قيمة لـ س أكبر من أ وأصغر من ب ، كذلك لنفرض اننا نريد أن نتأكد ،
 عند التقريب من الغاية ، من جمع عدد كاف من الحدود بحيث يقع
 المجموع ضمن مقياس ما للتقريب مثل ك * والان هل نستطيع ، بشرط

وقوع قيمة s ضمن الفترة ، ان نعين على الدوام ، عددا من الحدود
وليكن n ، بحيث يقع مجموع n او اكثر ، من الحدود ، فى نطاق مقياس
التقريب المطلوب ؟ ؟

ان ذلك احيانا ممكن لكل قيمة من قيم k ، وغير ممكن احيانا
آخر . فان أمكن قيل عن المتسلسلة انها متقاربة بانتظام (أو منتظمة
التقارب) ضمن الفترة ، وان لم يمكن قيل عنها انها متقاربة باضطراب
(او مضطربة التقارب) ضمن الفترة . وسنصور ذلك بأسهل الامثلة
وأسهل الاعداد :

لننظر فى المتسلسلة الهندسية :

$$1 + s + s^2 + s^3 + \dots + s^n + \dots$$

وهى متقاربة ضمن الفترة من -1 الى $+1$ باستثناء القيمتين النهائيةتين
 $s = \pm 1$ الا انها ليست متقاربة بانتظام ضمن هذه الفترة . واليك
السبب . اذا كانت h مجموع n من الحدود فقد برهنا ان الفرق
بين $J_n(s)$ والغاية $\frac{1}{1-s}$ هو $\frac{s^n}{1-s}$ لنفرض الآن

ان n أى عدد معلوم من الحدود وليكن 20 ، ثم لنفرض لك أى مقياس
معين للتقريب ، وليكن 0.001 ، فاذا اخذنا s قريبة كفاية من $+1$
او قريبة كفاية من -1 تمكن من جعل القيمة العددية لـ $\frac{s^n}{1-s}$
اكبر من 0.001 وعليه فان 20 حدا لا تكفى فى كل الفترة ، مع انها

أكثر من كافية في بعض أجزاء الفترة •

ويصدق مثل هذا التعليل في حالة أى عدد آخر نأخذه بدلا من ٢٠ وأى مقياس آخر للتقريب بدلا عن ٠٠٠٠١ • فالتسلسلة الهندسية

$$١ + س + س^٢ + س^٣ + + س^ن + + س^٠$$

تكون اذن مضطربة التقارب خلال « كل » الفترة من ١ - الى ١ + ولكننا لو أخذنا أية فترة اصغر منها ، بحيث تقع نهايتها ضمن الفترة من ١ - الى ١ + ، فان التسلسلة الهندسية تكون منتظمة التقارب خلالها •

مثال ذلك لنأخذ الفترة من (٠) الى $\frac{1}{٣}$ فنجد ان أية قيمة لـ

ن ، من القيم التى تكون بها $\frac{س^ن}{١-س}$ اقل عدديا من ك ، تجعل

ما يصدق على أية قيمة لـ س واقعة على هاتين النهايتين ، يصدق على

جميع القيم الاخرى لـ س بين النهايتين نفسيهما • والواقع ، ان القيمة

العددية لـ $\frac{س^ن}{١-س}$ تتناقص عدديا بتناقص القيمة العددية لـ س •

مثال ذلك لنأخذ ك = ٠٠٠١ • ولنجعل س = $\frac{1}{٣}$ فنجد انه :

$$\text{اذا كانت } ن = ١ \text{ فان } \frac{س^ن}{١-س} = \frac{س^١}{\frac{1}{٣}-١} = \frac{1}{٢} = \frac{1}{٤} = ٠.٢٥$$

$$\text{واذا كانت } ن = ٢ \text{ فان } \frac{س^ن}{١-س} = \frac{س^٢}{\frac{1}{٣}-١} = \frac{1}{٩} = ٠.١١١١٠٠٠$$

$$\text{واذا كانت } n = 3 \text{ فان } \frac{s_n}{s-1} = \frac{3 \left(\frac{1}{10} \right)}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{3}{9} = 0.3333333333$$

$$\text{واذا كانت } n = 4 \text{ فان } \frac{s_n}{s-1} = \frac{4 \left(\frac{1}{10} \right)}{\frac{1}{10} - 1} = \frac{4}{9} = 0.4444444444$$

لذلك فان اربعة حدود تكفى لكل الفترة ، على انه ، فى بعض
أجزاء الفترة ، يكون هذا العدد ، بالطبع ، أكثر مما تقتضيه الضرورة •
ولنلاحظ ان $1 + s + s^2 + \dots + s^n + \dots$ ،
كانت متقاربة (ولو باضطراب) خلال الفترة من $1 -$ الى $1 +$ لكل
قيمة من قيم s ضمن الفترة هذه ، فبالوسع وجدان عدد من الحدود ،
 n ، يحقق لنا درجة او مقياس التقريب الذى نريده ، ولكن قيمة s
كلما اقتربت من احدى النهايتين $1 +$ او $1 -$ ، وجب ان تتصاعد قيمة
 n فى الكبر •

ومن العجيب ان هذا التمييز الهام بين التقارب المنتظم والتقارب
المضطرب ، لم ينشر الا فى سنة ١٨٤٧ من قبل ستوكس (Stokes)
الذى صار فيما بعد السير جورج ستوكس ، كما نشر بعد ذلك فى سنة
١٨٥٠ ، بصورة مستقلة من قبل سيدل (Seidel) وهو رياضى المانى •
ليس من الضرورى ان تقع النقاط الحرجة التى يظهر فيها
التقارب المضطرب ، فى نهايتى الفترة التى يصح خلالها التقارب ،
ولكن هذه خاصية المتسلسلات الهندسية •

ففى حالة المتسلسلة الهندسية $١ + س + س^٢ + + س^ن$
 + ، يمكن التعبير عن الغاية ، خلال فترة التقارب ، بإفادة جبرية
 سهلة هي $\frac{١}{١ - س}$ ، ولكن الامر ليس كذلك دوما . ففى كثير من
 الاحوال نستطيع ان نبرهن ان متسلسلة تتقارب خلال فترة معينة ، مع
 اننا لا نعلم عن غايتها اكثر من انها غاية المتسلسلة . وهذه طريقة صالحة
 جدا لتعريف الدالة ، أى تعريفها كغاية لمتسلسلة . والواقع ، انها
 هى الطريقة التى تعرف بها ، او يجب ان تعرف بها معظم الدوال .
 ان اهم متسلسلة فى التحليل الاولى هى :

$$١ + س + \frac{س^٢}{١٢} + \frac{س^٣}{١٣} + + \frac{س^ن}{ن!} + + ١$$

وفيهان ! تعنى ما سبق وعرفناه فى أوائل هذا الفصل . ويمكن البرهنة
 على ان هذه المتسلسلة متقاربة حتما « لجميع » قيم س ، وان تقاربها منتظم
 ضمن أية فترة نريدها . ولذلك فلها جميع الخواص الرياضية المريحة
 التى يجب ان تتوفر فى متسلسلة . وهى تدعى المتسلسلة الأسية ولنرمز
 لمجموعها الى ما نهاية له بـ س « أسية » . فينتج عن ذلك ان :

$$س (أسية) = ١ + س + \frac{س^٢}{١٢} + \frac{س^٣}{١٣} + + \frac{س^ن}{ن!} + + ١$$

..... وتسمى س (أسية) الدالة الأسية . وبمعرفة القليل من

الرياضيات الاولى تسهل البرهنة على ان س (أسية) × ص (أسية)

$$\begin{aligned}
 &= (س + ص) \text{ أسية } ٠٠٠٠ (أ) ، وبتعبير آخر ان : \\
 &س (أسية) \times ص (أسية) = ١ + (س + ص) + \\
 &..... + \frac{(س + ص)^2}{2!} + \frac{(س + ص)^3}{3!} + \frac{(س + ص)^4}{4!} + \frac{(س + ص)^5}{5!} + \frac{(س + ص)^6}{6!} + \frac{(س + ص)^7}{7!} + \frac{(س + ص)^8}{8!} + \frac{(س + ص)^9}{9!} + \frac{(س + ص)^{10}}{10!} + \dots
 \end{aligned}$$

والخاصية (أ) مثال على ما يدعى « نظرية الجمع » • فإذا عرفنا دالة ما ،
 [ولتكن د (س)] ، فأول ما نصنعه هو ان نحاول التعبير عن د (س + ص)
 بدلالة دوال معروفة لـ (س) وحدها ، ودوال معروفة لـ ص وحدها •
 فان امكن ذلك كانت النتيجة « نظرية جمع » • ولنظريات الجمع هذه
 دور هام فى التحليل الرياضى • فنظرية الجمع للجيب هى :
 حا (س + ص) = جاس جتا ص + جتا س جاس
 وجيب التمام :

جتا (س + ص) = جتا س جتا ص - جاس جاس
 والواقع ، ان افضل الاساليب فى تعريف جاس وجتا س ، ليس بالطرائق
 الهندسية المعقدة الواردة فى الفصل السابق بل بتعريفها كغايات
 للمتسلسلات التالية على الترتيب •

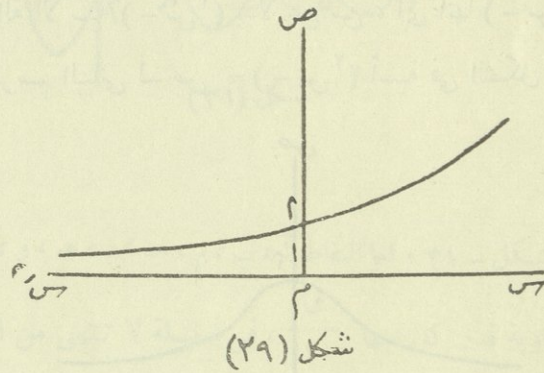
$$س - \frac{س^3}{3!} + \frac{س^5}{5!} - \frac{س^7}{7!} + \frac{س^9}{9!} - \frac{س^{11}}{11!} + \frac{س^{13}}{13!} - \frac{س^{15}}{15!} + \dots$$

$$١ - \frac{س^2}{2!} + \frac{س^4}{4!} - \frac{س^6}{6!} + \frac{س^8}{8!} - \frac{س^{10}}{10!} + \frac{س^{12}}{12!} - \frac{س^{14}}{14!} + \dots$$

$$\text{أى أن } \cdot \text{ جاس} = \text{س} - \frac{\text{س}^3}{!3} + \frac{\text{س}^5}{!5} - \frac{\text{س}^7}{!7} + \dots \text{الخ}$$

$$\text{جناس} = 1 - \frac{\text{س}^2}{!2} + \frac{\text{س}^4}{!4} - \frac{\text{س}^6}{!6} + \dots \text{الخ}$$

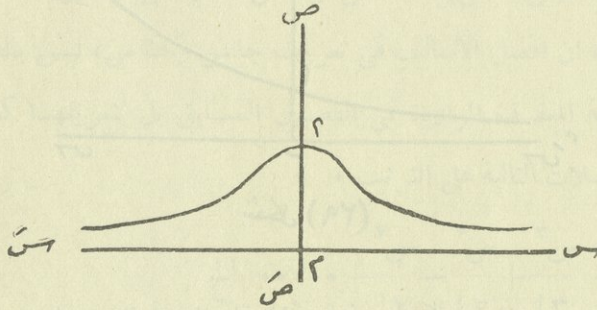
ومعه التعاريف تعادل التعاريف الهندسية • ويمكن اثبات ان كلا من هاتين المتسلسلتين متقارب لجميع قيم س ، وان هذا التقارب منتظم خلال أية فترة • وهاتان المتسلسلتان يحمالان شيها عاما للمتسلسلة الأسية المذكورة أعلاه • والحقيقة انهما يرتبطان بها بواسطة نظرية الاعداد التخيلية التي أوضحناها فى الفصلين السابع والثامن •



تجد الرسم البيانى للدالة الأسية فى الشكل - ٢٩ ، وهو يقطع المحور م ص فى النقطة ص = ١ كما هو متوقع • لانه عندما تكون س = ٠ ، يصبح كل حد فى المتسلسلة صفرا ، عدا الحد الاول • واهمية

الدالة الأسية هي انما تمثل أية كمية فيزيائية (طبيعية) متغيرة ، يكون معدل تزايدها في أية لحظة ، نسبة مئوية ثابتة من قيمتها في تلك اللحظة .
 مثال ذلك ، ان الرسم البياني السابق يمثل مقدار السكان ، في أية لحظة على ان يكون معدل الولادات منتظما ، وكذلك معدل الوفيات وبشرط عدم الهجرة ، مع العلم بأن س تمثل الزمن ، ابتداء من أى يوم يوافقنا ، وان ص تمثل عدد السكان على حسب المقياس الذى نصلح عليه .
 ويجب ان يكون المقياس بحيث ان م أ يمثل عدد السكان فى اليوم الذى اعتبرناه نقطة الاصل . وهنا نلتقى بفكرة « معدلات التزايد » وهى عنوان الفصل المقبل .

توجد دالة مهمة تكاد تتحد بالدالة الأسية ونحصل عليها اذا جعلنا
 سند الدالة الأسية (- س) بدلا عن س ، أى انما (- س) أسية .
 وتجد الرسم البياني لـ ص = (- س) أسية فى الشكل - ٣٠ .

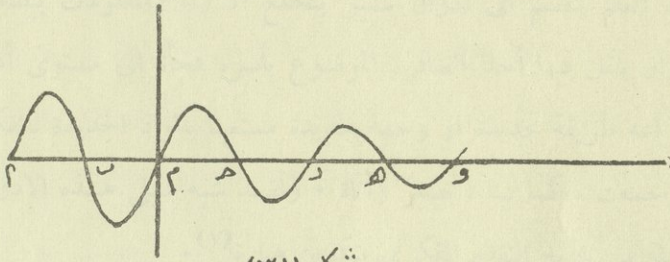


شكل (٣٠)

ان هذا المنحنى الذى يحمل بعض الشبه للقبعة المثلثة الشكل

يسمى منحنى الخطأ القياسي Curve of Normal Error ، والدالة التي تقابله (أى الدالة التي هو رسمها البياني) ذات اهمية حيوية في علم الاحصاء Statistics ، وهى تنبأ ، فى حالات كثيرة ، بما يجب ان نتوقعه من انحرافات عن معدل النتائج •

ونستخرج دالة أخرى مهمة بمزج الدالة الأسية مع الجيب على الوجه التالى : ص = (- ح س) أسية × جا $\frac{2\pi}{ق}$ وتجد رسمها



شكل (٣١)

البياني فى الشكل - ٣١ • اما النقاط أ، ب، ج، د، هـ، و ، فتقع على فترات متساوية قدر كل منها $\frac{ق}{٢}$ ، فى سلسلة لا تنتهى من الجهتين • وهذه الدالة تمثل تلاشى الاهتزازات بتأثير الاحتكاك أو القوى الملطفة (Damping Forces) • ولولا الاحتكاك لكنت الاهتزازات دورية، Periodic ، وفترتها ق ، ولكن تأثير الاحتكاك يجعل امتداد كل

الفصل الخامس عشر

الحساب التفاضلي

DIFFERENTIAL CALCULUS

حدث اختراع الحساب التفاضلي انقلابا في تاريخ الرياضيات •
فتقدم العلم ينقسم الى أدوار تتميز بتجمع الآراء والمعلومات ببطء ،
وأدوار ينقل فيها أحد العباقرة الموضوع بأسره فجأة الى مستوى أعلى
باختراعه طريقة جديدة او وجهة جديدة مستعينا بالمواد الجديدة للتفكير
التي جمعت ، كما بينا ، بصبر وأناة • ولقد شبه شيلي هذه الادوار
المتقابلة في تاريخ التقدم الفكرى بتكوين هيارة^(١) •

الهيارة التي يقظتها الشمس ! وكتلتها

التي نخلتها العاصفة ثلاثا فتجمعت هناك

طبقة فوق طبقة - كذلك فى العقول التي تتحدى السماء

تتراكم فكرة الى فكرة ، واحدى الحقائق العظيمة

تنبثق فتردد صداها الامم •

هذه المقايسة تحتاج الى شىء من التأكيد • اذ ليس من الضرورى

(١) أطلقنا كلمة هيارة على Avalanche وهى الكتلة الثلجية
العظيمة تنفصل عن مرتفعات الجبل وتندفع على منحدراته الى الهاوية •

أن تكون الاشراقاة الاخيرة لاشعة الشمس ، تلك التى أيقظت الهياراة ،
أعظم قدرا من أن تقارن مع قوى الطبيعة الاخرى ، التى عملت على
تكوينها ببطء • ويصدق مثل ذلك على العلم فليس من الضرورى أن
يكون العبقري الذى كان من حسن حظّه أن ينتج الفكرة النهائية التى
تغير مجرى من مجارى التفكير ، أكثر تفوقا من جميع أسلافه الذين
عملوا على تكوين الاراء الاولية لها • ومن السخف ونكران الجميل أن
نحصر اعجابنا عند النظر فى تاريخ العلم بأولئك الذين تقدموا بالخطوات
الاخيرة نحو دور جديد ، وأن نقف أمامهم مشدوهين •

وفى الحالة الخاصة التى أمامنا ، كان لهذا الموضوع تاريخ طويل
قبل أن يأخذ قلبه النهائي على يد مخترعيه الاثنين • فقد وجدت بعض
آثار طرائقه حتى بين رياضى اليونان ، وأخيرا وقيل الانتاج الفعلى
للموضوع كان فرمات ، (ولد سنة ١٦٠١ وتوفى سنة ١٦٦٥) وهو
رياضى افرنسى ممتاز ، قد أدخل من التحسينات على الآراء السالفة ما
يمكن أن يقال معه أنه أوجد الموضوع من العدم • ولفرمات هذا كذلك ان
يدعى بأنه شارك معاصره ومواطنه ديكارت فى اختراع الهندسة الاحداثية •
ومع أن ديكارت ، فى الواقع ، هو الذى اتحف عالم العلم بالآراء
الجديدة ، فمما لا شك فيه أن فرمات كان قد توصل الى هذه الآراء
بصورة مستقلة •

وعلى كل يجب أن لا تشوب اعجابنا بكل من نيوتن وليبنيز ، أية
شائبة • فقد كان نيوتن رياضيا وباحثا فى العلوم الطبيعية ، وليبنيز رياضيا

وفيلسوفاً، وكان كل منهما فى دائرته الفكرية من أعظم العباقرة الذين عرفهم العالم • أما الاختراع المشترك ، فكان مدعاة لنقاش مؤسف لا يشرف أحدا •

فقد استعمل نيوتن فى سنة ١٦٦٦ ، طرق الـ Fluxions (معدلات الجريان) ، كما سُمى الموضوع ، واستخدمها فى تأليف كتابه الاصول Principia • ولكن المؤلف ، كما طبع ، جاء خلوا من أية إشارة جبرية خاصة • ولم يطبع نيوتن بياناً صريحاً لطريقته الا فى سنة ١٦٩٣ • أما لينتزر فكان قد نشر بيانه الاول فى سنة ١٦٨٤ واتهمه أصدقاء نيوتن بأخذ الفكرة عن مخطوطة نيوتن التى اطلع عليها بصورة خصوصية • وأجاب لينتزر على ذلك بأن اتهم نيوتن بانتحال آرائه • ولا يوجد كبير شك الان بأن كلا منهما له فخر الاكتشاف بصورة مستقلة • لان الموضوع كان قد وصل الى مرحلة من النضوج حان بها وقت اكتشافه • ولا عجب اذا تم العثور عليه بصورة مستقلة ، من قبل رجلين قديرين كهذين • ومثل هذه الاكتشافات المشتركة ، كثيرة الوقوع فى العلم • لان الاكتشافات ، بصورة عامة ، لاتحدث دون أن تمهد لها الوجيهات الفكرية السابقة ، واذ ذاك تدخل عقول كثيرة فى سباق حام للكشف عن الفكرة المهمة • وبمجرد رجوعنا الى الاكتشافات ذات العلاقة بالانكليز ، يرد على الحاطر أن داروين ووالاسي نشرا ، على انفراد وفى وقت واحد ، قانون الانتخاب الطبيعى ، وأن آدامس والفلكى الافرنسى لفرير اكتشفا فى وقت واحد ، وعلى الانفراد أيضا ، السيار

نبتون • والنزاع حول من يجب أن يمنح فخر الاكتشاف ، يتأثر كثيرا ما بعوامل قومية لاقيمة لها • ان الصورة المشجعة حقا والتي يوحى بها تاريخ الرياضيات هي وحدة الفكر والمصلحة بين رجال جاءوا في أزمنة متباعدة ومن أمم كثيرة ومن شتى الاجناس • فقد قام كل من الهنود والمصريين والآشوريين والاعريق والعرب والايطاليين والافرنسيين والالمان والانكليز والروس بخدمات جوهرية لتقدم العلم • ومن المؤكد أن الزهو بما قدمته أمة معينة من أياد للعلم لايدل على نفس كبيرة •

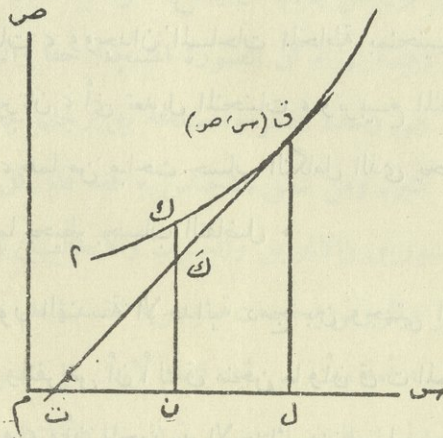
تتأتى أهمية الحساب التفاضلى عن طبيعة الموضوع ذاتها ، وهى الملاحظة المنظمة لمعدلات تزايد الدوال • وتبرز الفكرة لنا ، من الفور ، عند درس الطبيعة • فالسرعة هي معدل تزايد المسافة ، والتعجيل معدل تزايد السرعة • وهكذا فان فكرة التغير الاساسية ، وهى التى نستند اليها فى ادراك الظاهرات الطبيعية ، توحى لنا من الفور ضرورة البحث فى معدل التغير • فالكلمات المتعارفة « سريعا » و « بطيئا » تستمد معناها من الاشارة الضمنية الى معدلات التغير • لذلك نجد فى الحساب التفاضلى مفتاح الطريق الذى يؤدى الى استعمال الرياضيات بنجاح فى تفسير مجرى الطبيعة •

ان فكرة معدل التغير ، كانت تدور بالتأكيد فى خلد نيوتن ، وقد تضمنتها أقواله التى شرح بها الموضوع • ويحوم الشك حول ما اذا كانت وجهة النظر هذه ، المشتقة من الظاهرات الطبيعية ، قد جالت فى أفكار الرياضيين السابقين ، الذين هيئوا الموضوع أن يولد • فقد كانوا

مهتمين بالمسائل الأكثر تجرداً ، وهى رسم المماسات للمنحنيات ووجدان
 أطوال المنحنيات ، ووجدان المساحات المحاطة بمنحنيات • وهاتان
 المسألتان الأخيرتان ، أى تعديل المنحنيات ، وتربيع المنحنيات ، كما
 تسميان الآن ، هما من مباحث حساب التكامل الذى يحيط به الموضوع
 العام نفسه كما يحيط بحساب التفاضل •

ان ظهور الهندسة الاحداثية دمج بين وجهتى النظر • لنراجع
 الشكل - ٣٢ ولنفرض أن A ك ق منحن ما وأن ق ت المماس له فى نقطة
 ق الواقعة عليه ، وأن المحورين الاحداثيين هما م س ، م ص وأن
 $ص = د (س)$ هى معادلة المنحنى بحيث يكون م ل = س ، ق ل
 $= ص$ • فاذا كانت ك أية نقطة متحركة على المنحنى واحداثياتها
 $س_١ ، ص_١$ ، ينتج أن $ص_١ = د (س_١)$ • لنأخذ النقطة ك~ على
 المماس بحيث يكون احداثيتها الأفقى س~ ، نفسه ولنفرض أن احداثيات
 ك~ هى س~ ، ص~ • ثم لنفرض أن ن ، تتحرك على المحور م س من
 اليسار الى اليمين بسرعة منتظمة ، فيكون من السهل أن نرى أن الاحداثى
 الرأسى ص~ ، للنقطة ك~ الواقعة على المماس ت ق ، يزداد أيضا بصورة
 منتظمة مع حركة ك~ على المماس بصورة مناظرة • ومن الواضح أن
 نسبة معدل تزايد ك~ ن الى معدل تزايد م ن كنسبة ك~ ن الى ت ن وهى
 نسبة ثابتة فى كل نقاط المستقيم المماس (الشكل - ٣٢) •

أما معدل تزايد ك~ ن ، أى معدل تزايد د (س) ، فيتغير من نقطة الى



شكل (٣٢)

أخرى على المنحنى ، طالما لا يكون مستقيما • وعندما تجتاز النقطة ك النقطة ق يكون معدل تزايد د (س) [حيث تنطبق س_١ على س للحظة] كمعدل تزايد ص~ على المماس في ق • وعليه اذا كانت لدينا طريقة عامة لوجدان معدل تزايد دالة مثل د (س) ذات المتغير س ، يكون في الوضع وجدان ميل المماس Slope في اية نقطة (س ، ص) على المنحنى وبذلك نستطيع رسمه • وهكذا فان قضايا رسم مماسات لمنحنى وقضايا وجدان معدلات التزايد لدالة تصبح واحدة •

ويلاحظ أن الموضوع نشأ - كما هي الحال في القطوع المخروطية والمثلثات - عن وجهة النظر الأكثر اصطناعا من بين وجهتي النظر • أما الناحية الاساسية حقا من هذا العلم فلم تبرز الا في وقت متأخر نسبيا •

ومن القواعد الرصينة التاريخية العامة ، أن آخر ما يكتشف فى علم من العلوم ، هو الموضوع الحقيقى الذى يدور حوله العلم • فقد يبقى الناس يتلمسون طريقهم لعدة عصور ، لا ترشدهم الا غريزة خفية وحب متحير للاستطلاع حتى تتجلى أخيرا حقيقة عظيمة •

لنأخذ بعض الحالات الخاصة ، كى تألف انفسنا نوع الافكار التى نريد جعلها مضبوطة • قطار فى حالة الحركة - كيف نستخرج سرعته فى لحظة ما ولتكن لحظة الزوال ؟ يمكن أن نأخذ فترة خمس دقائق تكون لحظة الزوال من ضمنها ، ثم نقيس مقدار ما قطعه القطار خلال هذه المدة • ولنفرض أنه قطع خمسة أميال • فنستنتج اذذاك أن القطار كان يسير بمعدل ٦٠ ميلا فى الساعة • ولكن الخمسة أميال مسافة طويلة ، ولا يمكن أن نتأكد منها أن القطار فى لحظة الزوال ، كان يسير بهذه السرعة • فهو فى تلك اللحظة ربما كان يسير بسرعة ٧٠ ميلا فى الساعة ثم استعمل الموقّف فور اجتيازها ، ولذلك يكون من الاصول استعمال فترة أصغر منها ، ولنقل دقيقة واحدة ، تتضمن لحظة الزوال ثم نقيس المسافة التى قطعت فى هذه المدة • ولكن الحاجة قد تمس فى بعض الاغراض الى توخى تدقيق أكثر ، وربما كانت الدقيقة أطول مما يجب • وبما أن مقاييسنا ليست مضبوطة بحكم الضرورة ، كان من العبث ، فى التطبيقات العملية ، أخذ فترة قصيرة جدا للقياس فيها • أما من الوجهة النظرية ، فان الفترة كلما صغرت ، كانت النتيجة أفضل ، بل لتحذونا الرغبة الى القول بالحاجة الى فترة لامتناهية فى الصغر فى

سبيل الحصول على دقة مثلية • ولم يقف الرياضيون القدماء ، وعلى
الاخص ليبنز ، عند حدود مجرد الرغبة ، بل خضعوا لها وقالوا
بالفكرة • وهذه الفكرة لاتزال حتى الآن طرازا نافعا من القول على أن
نعرف كيف نفسرها بلغة المنطق السليم • ومن العجيب أن نيوتن ، وهو
العالم الطبيعي ، كان في عرضه لاسس حساب التفاضل والتكامل ،
فيلسوفاً أكثر من الفيلسوف ليبنز • ولكن ليبنز بدوره وضع نظام
الاشارات المدهش الذي كان جوهريا لتقدم الموضوع •

نأخذ الآن مثالا آخر ، في حقل الرياضيات البحتة ، ولنبدأ
بالبحث عن معدل التزايد للدالة s^2 ، لاية قيمة ، مثل s ، لسندها •
لم نعرف حتى الآن مانقصده بمعدل التزايد ، وسنحاول الآن تفهم
معناه بالنسبة لهذه القضية الخاصة • عندما تزداد s الى $s + h$ ،
تزداد الدالة s^2 الى $(s + h)^2$ ويكون مجموع الزيادة
 $(s + h)^2 - s^2$ ، وهى ناشئة عن زيادة قدرها h في السند ،
وعلى ذلك يكون المقدار $\frac{(s+h)^2 - s^2}{h}$ معدل زيادة الدالة مقابل زيادة
كل وحدة واحدة في السند ، وذلك خلال الفترة من s الى
 $(s + h)$ • ولما كان :

$$(s + h)^2 = s^2 + 2sh + h^2$$

$$\text{تصبح} \quad \frac{(s+h)^2 - s^2}{h} = \frac{s^2 + 2sh + h^2 - s^2}{h} = 2s + h$$

ويكون إذاً ، ٢ س + هـ هو معدل زيادة الدالة س^٢ عن زيادة كل وحدة واحدة في السند ، وهذا المعدل أخذ خلال الفترة من س الى س + هـ • ولكن ٢ س + هـ تعتمد على هـ ، وهى سعة الفترة • أما معدل التزايد عند القيمة س للسند ، فمن الواضح امكان الحصول عليه بتقيص هـ أكثر وأكثر • ولذلك فى « الغاية » عندما تكون هـ قد « تناقصت دون حد » نقول ان ٢ س هى معدل تزايد س^٢ ، عند القيمة س للسند •

وهنا أيضا نرى انفسنا مسوقين حسبما يظهر الى فكرة الكميات اللامتناهية فى الصغر ، باستعمالنا الكلمات « فى الغاية عندما تكون هـ قد تناقصت دون حد » • وكان لينتز يعتقد ، على غموض هذا الامر ، بوجود اشياء بالفعل من قبيل الكميات اللامتناهية فى الصغر ، ويتبع ذلك بالطبع وجود أعداد لا متناهية فى الصغر ، تناظرها • أما لغة نيوتن وآرائه فقد كانت اقرب الى النزعة الحديثة ، ولكنه لم ينجح فى تفسير القضية بوضوح كاف يظهر منه بجلاء أنه عمل أكثر من تفسير آراء لينتز بطريقة غير مباشرة • وأول من أعطى التفسير الحقيقى للموضوع كان وايرستراس ومدرسة برلين الرياضية فى أواسط القرن التاسع عشر • ولكن بين لينتز ووايرستراس ظهرت كتابات كثيرة رياضية وفلسفية ، حول هذه الكميات الغامضة اللامتناهية فى الصغر ، التى اكتشفها الرياضيات وتقدمت الفلسفة لتفسيرها • فقد أنكر بعض الفلاسفة مثل يشوب بركلى ، وهم على صواب ، صحة الفكرة بتمامها ، لاسباب غير

التي أشرنا إليها هنا • ولكنه بالرغم من الانتقادات التي وجهت الى أسس الموضوع فقد بقيت تلك الحقيقة العجيبة وهي أن هذا التصرف الرياضي كان بلا شك صحيحا من حيث الجوهر • والواقع أن الموضوع كان صحيحا ولكن تفاسيره مغلوطة فيها • ان امكانية صحة العمل مع الخطأ التام في تفسير ما يعمل ، هي التي تجعل النقد الخارجى - اذا كان القصد منه إيقاف اتباع طريقة ما - مجدبا ولا قيمة له في تقدم العلم • ويكون من الاسلام الاسترشاد بغريزة الملاحظين المدرسين ونزعتهم الاستطلاعية لكونهم ، كما هو واضح ، قد توصلوا الى شىء ما • وعلى كل فالأثر العام الذى تركه نجاح الحساب التفاضلى كان مقدارا كبيرا من فلسفة خاطئة تدور حول اللامتناهى فى الصغر • ولا نزال نجد آثار هذا اللغو حتى الآن فى الايضاحات التى تقدمها الكثير من الكتب المدرسية فى الرياضيات الاولى عن حساب التفاضل • ومن القواعد السليمة القول بأن المؤلف فى الفلسفة أو الرياضيات اذا كتب بتعمق غامض ، انما يقول هراء •

كان على نيوتن أن يضع صيغته للقضية بقوله أن (هـ) اذا اقتربت من الصفر فإن ٢ س + هـ تصبح فى الغاية ٢ س • ويكون من واجبا اذ ذاك أن نفسر هذا القول بصورة لا تفترض ضمنا وجود الكميات اللامتناهية فى الصغر التى قال بها ليبنتز • ولدى قراءتنا لاسلوب نيوتن فى أقواله نجد من المغربى ، توخيا للبساطة ، أن يقال ان ٢ س + هـ هي ٢س عندما تكون هـ صفرا • ولكن هذا لا يفي بالمرام ، لانه يهمل الفترة من س الى س + هـ التى يحسب خلالها معدل التزايد • والقضية هي

كيف نحفظ بفترة طولها ه ، نحسب خلالها معدل التزايد ، على أن
نعامل ه في الوقت عينه كأنها صفر • وقد فعل نيوتن ذلك بتصور وجود
« غاية » و تتقدم الآن لذكر ايضاح وايرستراس للمعنى الحقيقي •
لنلاحظ أولا اننا عند بحثنا ٢ س + ه ، كنا نعد س ثابتة القيمة
و (ه) متغيرتها • وبكلام آخر عوملت س معاملة متغير « ثابت » أو
برامتر كما شرحنا ذلك في الفصل التاسع ، أى أننا في الحقيقة كنا نعد
٢ س + ه كدالة سندها ه • وعليه في الوسع تعميم المسألة التي بين
أيدنا بالاستفسار عما نعبه بقولنا ان الدالة د (ه) تنجح الى الغاية ل ،
مثلا ، عندما يتنجح سندها ه الى القيمة صفر • ولكننا سنرى أيضا أن
قيمة السند الخاصة وهى الصفر ليست من صلب الموضوع ، ونلحق ذلك
ايضا بتعميم أوسع فنسأل عما نعبه بقولنا ان الدالة د (ه) تنجح الى
الغاية ل عندما تنجح ه الى القيمة أ •

وبموجب التفسير الوايرستراسى ، نجد أن كل الفكرة القائلة
بأن ه تنجح الى القيمة أ ، على انها تعطى صورة مجازية لمقصودنا ، تقع
خارج الصدد تماما • اذ من الواضح اننا باحتفاظنا بشيء مثل قولنا
« تنجح الى أ » ، كفكرة اساسية ، سنبقى في قبضة اللامتناهى في الصغر ،
لأننا نعبى بذلك أن ه قريبة (لامتناهى) من أ • وهذا هو بالذات ما نريد
التخلص منه •
بناء على ذلك ينبغي أن نعيد سرد الكلام الذى يقتضى أن نفسره
ونسأل عما نعبه بقولنا ، ان غاية الدالة (ه) فى أ هى ل •

ان غاية د (هـ) فى أ هى خاصية جوار أ وقد استعملت كلمة
« جوار » بالمعنى الذى عرفناها به فى الفصل الحادى عشر عند بحث
اطراد الدوال • قيمة الدالة د (هـ) فى أ هى د (أ) • ولكن « الغاية » تتميز
فكريا عن القيمة وربما اختلفت عنها ، وقد توجد الغاية عندما تكون القيمة
ليست معروفة • كذلك سنستعمل الاصطلاح « مقياس التقريب » بالمعنى
الذى عرّف به فى الفصل الحادى عشر • والواقع اننا فى تعريفنا
للاطراد ، فى أواخر ذلك الفصل ، عرفنا الغاية بالفعل • وتعريف
الغاية هو :

تكون ل غاية الدالة د (س) عند قيمة مثل أ لسندها س ، اذا
اقتربت الدالة فى جوار أ من ل ، ضمن أى مقياس من مقاييس
التقريب • (١) • فالتالى لنا ان الغاية قيمة ل عند دالته وسند دالته
قارن هذا التعريف بتعريف الاطراد الذى سبق وذكرناه وهو :
تكون الدالة د (س) مطردة عند قيمة مثل أ لسندها ، اذا
اقتربت قيمتها فى جوار أ من قيمتها عند أ ضمن « أى » مقياس كان من
مقاييس التقريب •

يتضح من الفور ان الدالة تكون مطردة اذا كانت (١) تمتلك
غاية عند أ • (٢) وكانت الغاية تساوى قيمة الدالة عند أ • ولذلك كانت
الامثلة التى ضربناها عن الاطراد فى آخر الفصل الحادى عشر ، امثلة
عن فكرة الغاية اذ انها جميعا ترمى الى البرهان على أن د (أ) هى غاية
د (س) فى أ ، للدوال التى كانت قيد البحث ولقيمة أ التى كانت قيد

البحث • ومن الوجهة التعليمية يكون من الافيد النظر فى الغاية عند النقطة التى تكون فيها الدالة غير مطردة • مثال ذلك لننظر فى الدالة التى نجد رسمها البيانى فى (الشكل - ٢٠) فى الفصل الحادى عشر • وهذه الدالة عرّفت بأن قيمتها تساوى واحداً ، لكافة قيم السند على أن يستثنى من هذه القيم الاعداد الصحيحة ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٠٤ ، ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٠٧ ، ١٠٨ ، ١٠٩ ، ١١٠ ، ١١١ ، ١١٢ ، ١١٣ ، ١١٤ ، ١١٥ ، ١١٦ ، ١١٧ ، ١١٨ ، ١١٩ ، ١٢٠ ، ١٢١ ، ١٢٢ ، ١٢٣ ، ١٢٤ ، ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٢٧ ، ١٢٨ ، ١٢٩ ، ١٣٠ ، ١٣١ ، ١٣٢ ، ١٣٣ ، ١٣٤ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٣٧ ، ١٣٨ ، ١٣٩ ، ١٤٠ ، ١٤١ ، ١٤٢ ، ١٤٣ ، ١٤٤ ، ١٤٥ ، ١٤٦ ، ١٤٧ ، ١٤٨ ، ١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥١ ، ١٥٢ ، ١٥٣ ، ١٥٤ ، ١٥٥ ، ١٥٦ ، ١٥٧ ، ١٥٨ ، ١٥٩ ، ١٦٠ ، ١٦١ ، ١٦٢ ، ١٦٣ ، ١٦٤ ، ١٦٥ ، ١٦٦ ، ١٦٧ ، ١٦٨ ، ١٦٩ ، ١٧٠ ، ١٧١ ، ١٧٢ ، ١٧٣ ، ١٧٤ ، ١٧٥ ، ١٧٦ ، ١٧٧ ، ١٧٨ ، ١٧٩ ، ١٨٠ ، ١٨١ ، ١٨٢ ، ١٨٣ ، ١٨٤ ، ١٨٥ ، ١٨٦ ، ١٨٧ ، ١٨٨ ، ١٨٩ ، ١٩٠ ، ١٩١ ، ١٩٢ ، ١٩٣ ، ١٩٤ ، ١٩٥ ، ١٩٦ ، ١٩٧ ، ١٩٨ ، ١٩٩ ، ٢٠٠ ، ٢٠١ ، ٢٠٢ ، ٢٠٣ ، ٢٠٤ ، ٢٠٥ ، ٢٠٦ ، ٢٠٧ ، ٢٠٨ ، ٢٠٩ ، ٢١٠ ، ٢١١ ، ٢١٢ ، ٢١٣ ، ٢١٤ ، ٢١٥ ، ٢١٦ ، ٢١٧ ، ٢١٨ ، ٢١٩ ، ٢٢٠ ، ٢٢١ ، ٢٢٢ ، ٢٢٣ ، ٢٢٤ ، ٢٢٥ ، ٢٢٦ ، ٢٢٧ ، ٢٢٨ ، ٢٢٩ ، ٢٣٠ ، ٢٣١ ، ٢٣٢ ، ٢٣٣ ، ٢٣٤ ، ٢٣٥ ، ٢٣٦ ، ٢٣٧ ، ٢٣٨ ، ٢٣٩ ، ٢٤٠ ، ٢٤١ ، ٢٤٢ ، ٢٤٣ ، ٢٤٤ ، ٢٤٥ ، ٢٤٦ ، ٢٤٧ ، ٢٤٨ ، ٢٤٩ ، ٢٥٠ ، ٢٥١ ، ٢٥٢ ، ٢٥٣ ، ٢٥٤ ، ٢٥٥ ، ٢٥٦ ، ٢٥٧ ، ٢٥٨ ، ٢٥٩ ، ٢٦٠ ، ٢٦١ ، ٢٦٢ ، ٢٦٣ ، ٢٦٤ ، ٢٦٥ ، ٢٦٦ ، ٢٦٧ ، ٢٦٨ ، ٢٦٩ ، ٢٧٠ ، ٢٧١ ، ٢٧٢ ، ٢٧٣ ، ٢٧٤ ، ٢٧٥ ، ٢٧٦ ، ٢٧٧ ، ٢٧٨ ، ٢٧٩ ، ٢٨٠ ، ٢٨١ ، ٢٨٢ ، ٢٨٣ ، ٢٨٤ ، ٢٨٥ ، ٢٨٦ ، ٢٨٧ ، ٢٨٨ ، ٢٨٩ ، ٢٩٠ ، ٢٩١ ، ٢٩٢ ، ٢٩٣ ، ٢٩٤ ، ٢٩٥ ، ٢٩٦ ، ٢٩٧ ، ٢٩٨ ، ٢٩٩ ، ٣٠٠ ، ٣٠١ ، ٣٠٢ ، ٣٠٣ ، ٣٠٤ ، ٣٠٥ ، ٣٠٦ ، ٣٠٧ ، ٣٠٨ ، ٣٠٩ ، ٣١٠ ، ٣١١ ، ٣١٢ ، ٣١٣ ، ٣١٤ ، ٣١٥ ، ٣١٦ ، ٣١٧ ، ٣١٨ ، ٣١٩ ، ٣٢٠ ، ٣٢١ ، ٣٢٢ ، ٣٢٣ ، ٣٢٤ ، ٣٢٥ ، ٣٢٦ ، ٣٢٧ ، ٣٢٨ ، ٣٢٩ ، ٣٣٠ ، ٣٣١ ، ٣٣٢ ، ٣٣٣ ، ٣٣٤ ، ٣٣٥ ، ٣٣٦ ، ٣٣٧ ، ٣٣٨ ، ٣٣٩ ، ٣٤٠ ، ٣٤١ ، ٣٤٢ ، ٣٤٣ ، ٣٤٤ ، ٣٤٥ ، ٣٤٦ ، ٣٤٧ ، ٣٤٨ ، ٣٤٩ ، ٣٥٠ ، ٣٥١ ، ٣٥٢ ، ٣٥٣ ، ٣٥٤ ، ٣٥٥ ، ٣٥٦ ، ٣٥٧ ، ٣٥٨ ، ٣٥٩ ، ٣٦٠ ، ٣٦١ ، ٣٦٢ ، ٣٦٣ ، ٣٦٤ ، ٣٦٥ ، ٣٦٦ ، ٣٦٧ ، ٣٦٨ ، ٣٦٩ ، ٣٧٠ ، ٣٧١ ، ٣٧٢ ، ٣٧٣ ، ٣٧٤ ، ٣٧٥ ، ٣٧٦ ، ٣٧٧ ، ٣٧٨ ، ٣٧٩ ، ٣٨٠ ، ٣٨١ ، ٣٨٢ ، ٣٨٣ ، ٣٨٤ ، ٣٨٥ ، ٣٨٦ ، ٣٨٧ ، ٣٨٨ ، ٣٨٩ ، ٣٩٠ ، ٣٩١ ، ٣٩٢ ، ٣٩٣ ، ٣٩٤ ، ٣٩٥ ، ٣٩٦ ، ٣٩٧ ، ٣٩٨ ، ٣٩٩ ، ٤٠٠ ، ٤٠١ ، ٤٠٢ ، ٤٠٣ ، ٤٠٤ ، ٤٠٥ ، ٤٠٦ ، ٤٠٧ ، ٤٠٨ ، ٤٠٩ ، ٤١٠ ، ٤١١ ، ٤١٢ ، ٤١٣ ، ٤١٤ ، ٤١٥ ، ٤١٦ ، ٤١٧ ، ٤١٨ ، ٤١٩ ، ٤٢٠ ، ٤٢١ ، ٤٢٢ ، ٤٢٣ ، ٤٢٤ ، ٤٢٥ ، ٤٢٦ ، ٤٢٧ ، ٤٢٨ ، ٤٢٩ ، ٤٣٠ ، ٤٣١ ، ٤٣٢ ، ٤٣٣ ، ٤٣٤ ، ٤٣٥ ، ٤٣٦ ، ٤٣٧ ، ٤٣٨ ، ٤٣٩ ، ٤٤٠ ، ٤٤١ ، ٤٤٢ ، ٤٤٣ ، ٤٤٤ ، ٤٤٥ ، ٤٤٦ ، ٤٤٧ ، ٤٤٨ ، ٤٤٩ ، ٤٥٠ ، ٤٥١ ، ٤٥٢ ، ٤٥٣ ، ٤٥٤ ، ٤٥٥ ، ٤٥٦ ، ٤٥٧ ، ٤٥٨ ، ٤٥٩ ، ٤٦٠ ، ٤٦١ ، ٤٦٢ ، ٤٦٣ ، ٤٦٤ ، ٤٦٥ ، ٤٦٦ ، ٤٦٧ ، ٤٦٨ ، ٤٦٩ ، ٤٧٠ ، ٤٧١ ، ٤٧٢ ، ٤٧٣ ، ٤٧٤ ، ٤٧٥ ، ٤٧٦ ، ٤٧٧ ، ٤٧٨ ، ٤٧٩ ، ٤٨٠ ، ٤٨١ ، ٤٨٢ ، ٤٨٣ ، ٤٨٤ ، ٤٨٥ ، ٤٨٦ ، ٤٨٧ ، ٤٨٨ ، ٤٨٩ ، ٤٩٠ ، ٤٩١ ، ٤٩٢ ، ٤٩٣ ، ٤٩٤ ، ٤٩٥ ، ٤٩٦ ، ٤٩٧ ، ٤٩٨ ، ٤٩٩ ، ٥٠٠ ، ٥٠١ ، ٥٠٢ ، ٥٠٣ ، ٥٠٤ ، ٥٠٥ ، ٥٠٦ ، ٥٠٧ ، ٥٠٨ ، ٥٠٩ ، ٥١٠ ، ٥١١ ، ٥١٢ ، ٥١٣ ، ٥١٤ ، ٥١٥ ، ٥١٦ ، ٥١٧ ، ٥١٨ ، ٥١٩ ، ٥٢٠ ، ٥٢١ ، ٥٢٢ ، ٥٢٣ ، ٥٢٤ ، ٥٢٥ ، ٥٢٦ ، ٥٢٧

هذا مثال عن دالة لها قيمة وغاية ، عند القيمة ٣ للسند ، ولكن القيمة لا تساوى الغاية • كما أننا فى ختام الفصل الحادى عشر ، بحثنا الدالة س^٢ عند القيمة ٢ للسند • فكانت قيمتها عند ٢ تساوى ٢^٢ أى ٤ • كما برهنا أن غايتها كانت أيضا ٤ • وهنا نجد دالة لها قيمة وغاية متساويتان •

وأخيرا نأتى الى الحالة التى لها أهمية كبيرة لاغراضنا وهى الدالة التى لها ، عند قيمة معلومة لسندها ، غاية ولكن ليست لها قيمة معينة ♦

ولا نذهب بعيدا للبحث عن مثل هذه الدالة فان $\frac{س^2}{س}$ تكفى لبيان

مقصدنا. فلو نظرنا فى أى كتاب للرياضيات ربما نجد المعادلة $٢ = \frac{س^2}{س}$
وقد كتبت دون تردد أو تعليق . ولكن فى الامر صعوبة وهى اذا كانت

$س = ٠$ فان $\frac{س^2}{س} = \frac{٠}{٠}$ و $\frac{٠}{٠}$ لا معنى محدد لها . ولذلك لا يكون لقيمة

الدالة $\frac{س^2}{س}$ معنى معيناً عندما تكون $س = ٠$. ولكن قيمة الدالة

$\frac{س^2}{س}$ تساوى ٢ عند أية قيمة أخرى لـ $س$. وعليه فان غاية $\frac{س^2}{س}$

هى ٢ عندما تكون $س = ٠$. ولكن لا قيمة لها عند $س = ٠$ وبمثل ذلك

فان غاية $\frac{س^2}{س}$ عندما تكون $س = أ$ هى أ . هما كانت أ وينتج عن

ذلك أن غاية $\frac{س^2}{س}$ عند $س = ٠$ هى صفر . ولكن قيمة $\frac{س^2}{س}$ عند $س$

$= ٠$ تأخذ الشكل $\frac{٠}{٠}$ الذي لا قيمة معينة له . وعليه يكون للدالة $\frac{س^2}{س}$

غاية عند الصفر ولكن لا تكون لها قيمة .

نعود الان الى المسألة التى بدأنا بها هذا البحث عن طبيعة الغاية .

كيف سنعرّف معدل تزايد الدالة $س^2$ عند أية قيمة $س$ من قيم السند ؟
وجوابنا ان معدل التزايد هذا ، هو غاية الدالة $\frac{س(س+١) - س^2}{س}$

عندما تكون قيمة السند $س$ صفراً (لاحظ ان $س$ هنا كمية ثابتة) .

لننظر الان كيف يعمل هذا الجواب على ضوء تعريفنا للغاية • لدينا

$$\frac{(س + هـ) - ٢س}{هـ} = \frac{٢س - ٢هـ}{هـ} = \frac{٢(س - هـ)}{هـ}$$

وعند بحثنا عن غاية $\frac{٢(س + هـ)}{هـ}$ عندما تكون قيمة السند هـ

صفراء، نستنتج قيمة الدالة (ان كانت لها قيمة ما) عند هـ = ٠ ولكن في جميع قيم هـ عدا القيمة هـ = ٠ تتمكن من القسمة على هـ. وعليه تكون $\frac{٢(س + هـ)}{هـ}$

عند هـ = ٠ هي نفسها غاية ٢س + هـ عند هـ = ٠. فاذا اتخذنا الان أى

مقياس نختاره للتقريب مثل ك، على اعتبار ان الفترة من $\frac{١}{٢}$ ك الى

$\frac{١}{٢}$ ك، نجد ان قيم هـ الواقعة ضمنها تجعل الفرق بين ٢س + هـ وبين

٢س اقل من $\frac{١}{٢}$ ك أى اقل من ك. ويصدق هذا على « أى » مقياس ك. •

وعليه عندما تكون قيمة هـ في جوار الصفر، تقرب ٢س + هـ من ٢س

ضمن أى مقياس كان من مقاييس التقريب. • ولذلك تكون ٢س هي

غاية ٢س + هـ عند هـ = ٠. وبموجب ما بيناه اعلاه تصبح ٢س غاية

$\frac{(س + هـ) - ٢س}{هـ}$ عند هـ = ٠. وينتج عن ذلك اذن، ان ٢س هي

ما أسميناه معدل تزايد ٢س عندما تكون س قيمة السند. وهذه

الطريقة تؤدي بنا الى معدل تزايد ٢س نفسه كما يتوصل اليه بالطريقة

الليبنيزية التي تجعل هـ تتضاءل الى ما لا نهاية له في الصفر. •

وعلى العموم، يستعمل الاصطلاحان الاكثر تجردا وهما

« معامل التفاضل » أو « الدالة المشتقة » لما كنا ندعوه ، حتى الان
 « معدل تزايد » الدالة • اما التعريف العام فهو ما يأتي : ان معامل
 التفاضل للدالة د (س) هو غاية الدالة $\frac{د(س + هـ) - د(س)}{هـ}$

التي سندها هـ - ان وجدت لها غاية - عندما يكون الصفر قيمة سندها •
 كيف استطعنا بواسطة هذا التعريف وبمساعدة تعريف الغاية ان
 نتجنب بالتمام فكرة « العدد اللامتناهى فى الصفر » التي اقلقت اسلافنا
 الرياضيين ؟ ان المشكلة ظهرت عندهم لان كان عليهم من جهة ان
 يستعملوا الفترة من س الى س + هـ ليحسبوا معدل التزايد فى اثناءها ،
 ومن جهة أخرى يريدون اخيرا ان يضعوا هـ = 0 فكانت النتيجة ان
 ادى بهم المطاف ، على ما يظهر الى القول بوجود فترة مقدارها صفر •
 ولكن كيف نتجنب نحن هذه الصعوبة ؟ نفعل ذلك على الوجه التالى
 نستخدم الفكرة القائلة بإمكان وجدان فترة « ما » صفاتها كذا
 وكذا تناظر « أى » مقياس كان للتقريب • والفرق اننا ادر كنا اهمية
 فكرة « المتغير » وهم لم يفعلوا ذلك • وهكذا نعود فى خاتمة استعراضنا
 للفكر الجوهرية فى التحليل الرياضى الى الآراء التي بدأنا بها بحثنا فى
 الفصل الثانى وهى ان الفكرتين ذاتى الاهمية الاساسية فى الرياضيات
 هما فكرتا « أشياء ما » و « أى الأشياء » •

الفصل السادس عشر

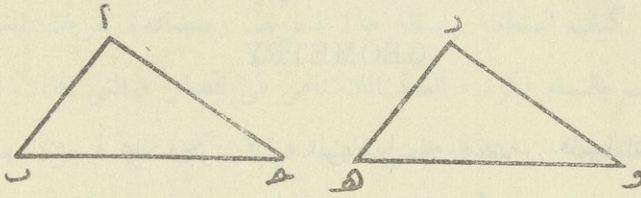
الهندسة

GEOMETRY

الهندسة علم مجرد كبقية الرياضيات • وتدرس فيها اشكال
الاشياء ومواقعها النسبية • ولا حاجة بنا الى التفكير بمن يلاحظ هذه
الاشياء او ما اذا كان يتعرف بها بالرؤية او اللمس او السمع •
وبالاختصار نتجاهل كل الاحساسات الخاصة • وزيادة على ذلك
نتجاهل الاشياء الخاصة كمنابى البرلمان او الكرة الارضية • وكل قضية
هندسية ، فى تطرقها الى الاشياء ، أيا كانت ، تقتصر على ما لها من
خواص هندسية هى كذا وكذا • ولاشك ان النظر الى امثلة خاصة من
الكرات والمخاريط والمثلثات والمربعات يساعد مخيلتنا ، ولكن القضايا
لا تصدق على الاشكال المطبوعة فى الكتاب وحدها بل على أى شكل
يمثلها •

فالهندسة كالجبر تسيطر عليها فكرة « أى » الاشياء وأشياء « ما »
وهى تعالج بالطريقة نفسها ، العلاقات ما بين مجموعات الاشياء • مثال
ذلك لآخذ أى مثلين أ ب ح ، د ه و • ما هى العلاقة التى يجب ان

توجد بين بعض أجزاء هذين المثلثين ليتساويا من جميع الوجوه ؟ ان هذا من الابحاث الاولى التى تعالجها كل كتب الهندسة الاولى ، وهى دراسة لمجموعة معينة من العلاقات المتبادلة بين المثلثين • والجواب ، ان المثلثين يتساويان من جميع الوجوه : اما (أ) اذا ساوى ضلعان والزاوية المحصورة بينهما من احد المثلثين ، الضلعين والزاوية المحصورة بينهما ،



شكل (٣٣)

المناظرة لها ، فى المثلث الاخر •

او (ب) اذا ساوت زاويتان والضلع الواصل بينهما من احد المثلثين ، الزاويتين والضلع الواصل بينهما ، المناظرة لها ، فى المثلث الآخر •

او (ح) اذا ساوت الاضلاع الثلاثة من احدهما الاضلاع الثلاثة المناظرة لها فى الآخر •

ان هذا الجواب يوحى حالا باجراء استقصاء ابعد مدى • ما طبيعة العلاقات المتبادلة بين المثلثين اذا ساوت الزوايا الثلاث من احدهما الزوايا الثلاث المناظرة لها فى الآخر ؟ وهذ التحرى الجديد يؤدى بنا الى نظرية التشابه بكاملها (راجع الفصل الثالث عشر) وهى نوع آخر من

العلاقات المتبادلة •

لنأخذ مثالا آخر وذلك بتأمل البنيان الداخلى للمثلث أ ب ح فنجد ان اضلاعه وزواياه ذات علاقة فيما بينها - الزاوية الكبرى يقابلها الضلع الاكبر وزاويتا قاعدة المثلث المتساوى الساقين متساويتان • واذا انتقلنا الى علم المثلثات تأخذ هذه صيغة ادق تحديدا وهى الصيغة المألوفة

$$\frac{ج أ}{أ} = \frac{ج ب}{ب} = \frac{ج ح}{ح} = \frac{ج}{ج} = 1$$

ب^٢ + ح^٢ - ب^٢ ح^٢ جتا أ مع دستورين يشبهانه •

يضاف الى ذلك وجود علاقة اكثر سهولة ما بين زوايا المثلث ، وهى ان مجموعها يساوى زاويتين قائمتين ، وعلاقة بين اضلاعه الثلاثة وهى ان مجموع طولى أى ضلعين اكبر من طول الضلع الثالث •

ان الطريقة الصحيحة لدراسة علم الهندسة تكون بالتفكير بالاشكال السهلة الممتعة ، مثل المثلث والمتوازى الاضلاع والدائرة وامتنعاء العلاقة فيما بين اجزائها المختلفة • فلا يكون فى ذهن المختص بعلم الهندسة قضية منعزلة بل شكل تعتمد اجزاؤه المختلفة على بعضها البعض ، ويقوم المختص كما فى الجبر بتعميم المثلث ليشمل المضلع والضلع ليشمل القطع المخروطى • او ان يتخذ طريقا معاكسا فيصنف المثلثات على حسب كونها متساوية الاضلاع أو متساوية الساقين أو مختلفة الاضلاع ، والمضلعات على حسب عدد اضلاعها ، والقطوع المخروطية على حسب كونها قطوعا زائدة او ناقصة او متكافئة •

والامثلة السابقة توضح كيف ان الفكر الاساسية فى الهندسة هى بالضبط نفسها كما فى الجبر ، باستثناء ان الجبر يتعامل بالاعداد والهندسة تتعامل بالخطوط والزوايا والمساحات والعناصر الهندسية الاخرى . وهذا التطابق الاساسى هو احد الاسباب التى تجعل فى الامكان وضع الكثير من الحقائق الهندسية بقلب جبرى . فاذا كانت A ، B ، عدد الدرجات فى زوايا المثلث A B C مأخوذة بالترتيب ، مثلث العلاقة فيما بين هذه الزوايا بالمعادلة $A + B + C = 180^\circ$ واذا كانت A ، B ، C عدد الاقدام فى الاضلاع الثلاثة مأخوذة على الترتيب ، مثلث العلاقة فيما بين الاضلاع بالمساواة $A > B + C$ ، $B > C + A$ ، $C > A + B$. والدساتير المثلثية التى جاء نصها اعلاه ، امثلة اخرى على هذه الحقيقة نفسها . وعلى ذلك فان فكرة المتغير والعلاقة فيما بين المتغيرات جوهرية فى الهندسة كما فى الجبر .

وهذا التطابق او التوازي بين علمى الهندسة والجبر ، يمكن السير به الى مدى ابعد . لان الاطوال والمساحات والحجوم والزوايا ، جميعها قابلة للقياس ، بحيث يمكن مثلا وجدان مقدار أى طول من الاطوال بمعرفة عدد احتوائه (ليس من الضروري ان يكون هذا العدد صحيحا) على وحدة اصطلاح العرف عليها . ويقال مثل ذلك عن المساحات والحجوم والزوايا . ومن الامثلة على هذه الحقيقة الدساتير المثلثية المذكورة اعلاه .

وتبلغ فائدة هذا الامر ذروتها فى الهندسة التحليلية . ذلك

الموضوع العظيم الذى كثيرا ما يسمى خطأ بالقطوع المخروطية التحليلية Analytical conic sections مما يؤدى الى تركيز الانتباه على احدا اجزائه الفرعية ليس الا * ومثل ذلك كمن يطلق على علم الانثروبولوجى الواسع (التاريخ الطبيعى للانسان) ، اسم دراسة الانوف على اعتبار ان الانوف جزء بارز فى جسم الانسان •

ومع ان الاساليب الرياضية فى الهندسة والجبر متطابقة من حيث الجوهر ومتشابهة فى نشوئها ، يوجد بحكم الضرورة فارق اساسى بين خواص الفراغ وخواص العدد • وهو يتضمن فى الواقع كل الاختلاف الجوهرى بين الفراغ والعدد • ذلك ان « فراغية » الفراغ Spaciness of space و « عددية » العدد Numerosity of number امران مختلفان من الاساس ويجب تفهم كل منهما على حدة • وليس فى تطبيقات الجبر على الهندسة او الهندسة على الجبر ما يقدمنا خطوة واحدة فى طريق محو هذا الفارق الحيوى •

واحد الفوارق البينة بين الفراغ والعدد هو ان الاول يلوح من ناحيتى التجرد والاهمية أقل بكثير من الثانى • فالملائكة المقربون يمكن عدهم لمجرد انهم أشياء ، فاذا علمنا ان اسماءهم هى رفائيل وميكائيل وجبرائيل ، وان كلا من هذه الاسماء يمثل مخلوقا مستقلا ، نعرف دون احتياج الى سؤال آخر ان عددهم ثلاثة ومهما كانت نظرة الناس الى طبيعة الوجود الملائكى فهى لا تستطيع تغيير هذه الحقيقة اذا كانت المقدمات صحيحة •

ولكننا لا نزال فى ظلام فيما يختص بمعرفة علاقتهم بالفراغ •
هل لهم وجود ما فى الفراغ ؟ ولا يقل عن ذلك سخفا القول بانهم هنا
او هناك او فى مكان ما او فى كل مكان • ذلك ان وجودهم قد لا تكون
له علاقة بمواقع فى الفراغ • وعليه بينما يمكن استخدام الاعداد لكل
الاشياء فلا حاجة ان يكون الفراغ كذلك •

ويظهر ان ادراك مواقع الاشياء يرافق بعض او كل احساساتنا
او هو مشمول بها • وهو مستقل عن أية حاسة معينة ، بمعنى انه يرافق
احساسات عديدة • ولكنه صفة خاصة للاشياء التى ندرکها باحساساتنا •
والادراك المباشر لما نقصده بمواضع الاشياء بنسبة بعضها الى بعض ، امر
خاص مثل ادراك الاصوات والالوان والمذاقات والروائح • ولذلك
يلوح عند النظرة الاولى ان الرياضيات ، عندما تقع الهندسة ضمن نطاقها ،
لا تكون مجردة بمعنى التجرد الذى نسبناه اليها فى الفصل الاول •

ولكن ذلك خطأ ، والحقيقة هى ان « فراغية » الفراغ لا تدخل فى
« التعليل » الهندسى بتاتا • بل تدخل فى البدائى الهندسية للرياضيين
بطرق شخصية ، خاصة بكل فرد • اما ما يدخل فى التعليل فهو مجرد
بعض الخواص المعينة لاشياء فى الفراغ ، او لاشياء تؤلف فراغا • وهذه
الخواص مجردة بالمعنى التام الذى عرفنا به المجرد فى الفصل الاول •
وهى لا تتضمن أى شىء من مفهوم الفراغ او بديهية الفراغ او الاحساس
بالفراغ ولكنها تقوم على نفس الاسس التى تقوم عليها الخواص الرياضية
للعدد • ولذلك فان بديهية الفراغ على اهميتها كعون فى دراسة الهندسة ،

لا تتعلق بالامر من الوجهة المنطقية • فلا تدخل فى المقدمات اذا نص عليها بالشكل الصحيح ولا فى أية خطوة من خطوات التعليل • ولكن لها من الاهمية العملية ، ما لمثال نراه جوهريا لشحن الذهن • والامثلة التى تستحث الازهان عند دراسة العدد ، لها الضرورة نفسها • فعندما نفكر فى العدد (اثنين) او (ثلاثة) تتصور خطوطا فى صف او كراة فى كومة او مجموعات مادية اخرى لاشياء معلومة • وخاصة الهندسة هى ثبوت صورة المثال المعين الواحد الذى خطر ببالنا واهميته المفرطة • اما الصيغة المنطقية المجردة للقضايا عندما ينص عليها بصورة كاملة فهى « اذا كان لمجموعات ما من الاشياء كذا وكذا من الخواص المجردة يكون لها ايضا كذا وكذا من خواص مجردة أخرى » • واما الصورة التى تظهر للفكر فهى مجموعة من النقاط والخطوط والسطوح والحجوم فى الفراغ : ولا مناص من تصور هذا النموذج • فهو الصورة الوحيدة التى تسبغ على القضية اهميتها • وعلى الرغم من اهمية النموذج المفرطة ، فهو ليس اكثر من مثال واحد •

والهندسة ، عند النظر اليها كعلم رياضى ، تعد فرعا من علم اعم ، هو علم النسق Order • ويمكن تسميتها علم النسق البعدى • ولقد ادخلت الصفة « بعدى » عليها لان الحدود التى تجعلها جزءا فقط من علم النسق العام ، هى التى تكوّن العلاقات المنتظمة بين الخطوط المستقيمة والمستويات وبين المستويات والفراغ بأجمعه •

ومن السهل ان نفهم الاهمية العلمية للفراغ عند تكوين فكرة

علمية عن عالم مادي خارجي • فمن الجهة الاولى يكون ادراكنا الحسي للفراغ متشابكا مع احساساتنا المختلفة ويربطها معا • واننا في الحالات الاعتيادية نحكم بأننا نلمس الجسم في المكان نفسه الذي نراه فيه • وحتى في الحالات الشاذة نلمسه في الفراغ نفسه الذي نراه فيه • وهذه هي الحقيقة الاساسية التي تربط معا احساساتنا المختلفة • وعلى ذلك فان ادراكنا الحسي للفراغ يكون من وجه ما جزءا اعتياديا من احساساتنا • ومن جهة اخرى يحدث ان الخواص المجردة للفراغ تؤلف جزءا كبيرا من كل ما يكون ذا اهمية فراغية • وليس من المبالغة في شيء القول بأن لكل خاصية من خواص الفراغ نصا رياضيا مجردا يناظرها • لأن أخذ أشد الحالات عمرا ، فقد يكون لشكل المنحنى جمال خاص ! ولكن هذا الشكل له ما يناظره من خواص رياضية مجردة تنطبق عليه ولا تنطبق على سواه •

والخلاصة : (١) ان خواص الفراغ التي يستقصيها علم الهندسة ، كخواص العدد ، تعود للأشياء كأشياء ودون الرجوع الى أى اسلوب معين من اساليب الادراك (٢) ان الادراك الحسي للفراغ ربما رافق جميع احساساتنا وبالتأكيد الكثير منها • ولكنه لا يبدو صفة ضرورية للأشياء ان توجد جميعا في فراغ واحد او في أى فراغ •

الفصل السابع عشر

الكُمِيَّة

بيننا في الفصل السابق ، ان الاطوال يمكن قياسها بواسطة احدى وحدات الطول ، والمساحات بواسطة وحدة مساحة والحجوم بواسطة وحدة حجم . وعندما يكون لدينا مجموعة من الاشياء كالاطوال التي يمكن قياسها بواسطة أحدها نقول عنها انها كميات من نوع واحد . ولذلك تعد الاطوال كميات من نوع واحد ومثلها تعد كل من المساحات والحجوم . ولكن المساحة كمية ليست من نوع الطول او نوع الحجم . ولنفكر اكثر قليلا عما نعبه بإمكانية القياس ولنأخذ الاطوال مثلا .

تقاس الاطوال بذراع طوله قدم واحد . وينقل هذه الذراع من مكان الى آخر ، نقرر المساواة بين الاطوال . ثم ان ثلاثة اطوال متجاوزة، طول كل منها قدم واحد، تؤلف طولاً كلياً واحداً قدره ثلاثة اقدام . وعليه ، في قياس الاطوال ، يجب ان نحدد تساوى الاطوال ومجموع الاطوال . ففي اجراء فحص مثل نقل الذراع نقول ان الاطوال متساوية ، وفي اجراء عملية لنحصل على اطوال متواصلة لا

متداخلة ، نقول ان الاطوال جمعت لتؤلف طولاً كلياً واحداً • ولكننا لا نستطيع بصورة كيفية ان نعد أى فحص كان فحصاً للمساواة ، وأية عملية كانت عملية جمع • اذ ان نتائج عمليات الجمع وقرارات الحكم بالمساواة يجب ان تتسجم مع شروط معلومة سلفاً • مثال ذلك ، ان مجموع طولين يجب ان ينتج طولاً اكبر من مجموع طولين آخرين اصغر منهما • وهذه الشروط المعلومة سلفاً ، اذا ما صيغت بقلب دقيق ، تسمى بديهيات الكمية • والسؤال الوحيد الذى يمكن ان يوجه عن صحتها او بطلانها هو ، هل اذا صحت البديهيات هذه ، نحصل بحكم الضرورة على ما يدعوه الناس الاعتاديون بالكميات • فأن لم نحصل على ذلك ، نكون قد أسأنا الحكم فى الاسم « بديهيات الكمية » وهذا كل ما فى الامر •

ان بديهيات الكمية هذه مجردة تماماً ، كما هى الحال فى الخواص الرياضية للفراغ • وهى واحدة لجميع الكميات ، ولا تفترض طريقة معينة من الادراك الحسى • والآراء المرتبطة بفكرة الكمية هى الوسائل التى نستعين بها فى تجزئة مطرد Continuum كالخط والمساحة والحجم الى اجزاء معينة • ثم نحصى هذه الاجزاء ، بحيث يمكن استخدام الاعداد فى وجدان الخواص الصحيحة لكل مطرد Continuous whole وما ادراكنا لجريان الزمن وتعاقب الحوادث الا مثل رائع عن تطبيق هذه الافكار عن الكمية • فالزمن نقيسه (كما سبق ان قلنا فى بحث الدورية) بتكرار حوادث متشابهة كاحتراق عقد متتالية لشمعة

منتظمة ، ودوران الارض بالنسبة الى النجوم الثابتة ، ودوران عقارب الساعة ، كل هذه امثلة لمثل هذا التكرار . وان حوادث من هذا القليل هي التي تقوم بما يقوم به الذراع بالنسبة للاطوال . وليس من الضروري ان نفترض الحوادث متساوية في مدتها عند كل تكرار في أى من هذه الانواع . ولكن الضرورى هو معرفة قاعدة تجعل في وسعنا التعبير عن المدد النسبية لنموذجين مثلاً من نوع ما . مثال ذلك يمكننا ، اذا شئنا ، ان نفترض ان معدل سرعة دوران الارض يتناقص ، بحيث يكون كل يوم اطول من سابقه بكسر صغير من الثانية . ومثل هذه القاعدة يمكننا من اجراء المقارنة بين طول أى يوم وطول أى يوم آخر . ولكن الامر الجوهري هو ان نتخذ سلسلة من المتكررات ، كالايام المتعاقبة ، سلسلة قياسية ، فاذا لم تكن الحوادث المختلفة لهذه السلسلة ، ذات مدد متساوية وجب وجدان قاعدة تضبط المدد المقتضى تحديدها لكل يوم بدلالة مدة أى يوم آخر .

ما اذن المطالب التي يجب ان تستوفى في مثل هذه القاعدة ؟ انها اولاً يجب ان تؤدي الى تثبيت مدد متساوية تقريباً ، للحوادث التي يقول حسن الادراك عنها ، انها ذات مدد متساوية . فلا يصح الاخذ بقاعدة تجعل الايام تتباين في اطوالها تبايناً كبيراً او ان تجعل السرعة في عمليات تشابه تشابهها بينا ، تختلف فيما بينها بصورة لا تتناسب بتاتا مع الفهاهة اليينة للفوارق بينها . وعلى ذلك فالمطلب الاول اذن ، ان تكون القاعدة على وفاق عام مع حسن الادراك . ولكن ذلك لا يكفي

مطلقاً لتحديد القاعدة لان حسن الادراك راصد غير دقيق وسهل
الاقتناع • اما المطلب الثانى فهو ان تجعل الضوابط الدقيقة للقاعدة
بشكل يسمح بأسهل النصوص الممكنة لقوانين الطبيعة • مثال ذلك ،
يخبرنا الفلكيون ان الارض تتباطأ فى دورتها بحيث ان كل يوم يزداد
طولا بكسر من الثانية لا يدركه التصور لصغره • والسبب الوحيد
لقولهم هذا (كما بينا بتفصيل اكثر فى بحث الدورية) هو ان عليهم
من دونه ان يهجروا قوانين نيوتن للحركة • وكما تكون قوانين الحركة
سهلة يغيرون مقياس الزمن • وهذا تصرف مشروع تماما طالما ان الامر
معروف جيدا •

وما قيل اعلاه عن الطبيعة المجردة لخواص الفراغ الرياضية
ينطبق بتغيرات ملائمة فى الكلمات ، على خواص الزمن الرياضية •
فالشعور بجريان الزمن يرافق كل احساساتنا وادراكاتنا • والواقع ، ان
كل ما يهمنا عن الزمن يمكن ان يتناظر هو والخواص الرياضية المجردة
التي نعزوها اليه • وعلى العكس من ذلك فان ما قلناه عن المطلقين اللذين
يجب ان مستوفيها القاعدة التي نجد بموجها طول اليوم ينطبق
ايضا على القاعدة فى تحديد طول المقياس يارد - وهو ان
اليارد يحتفظ حسب الظاهر بالطول نفسه فى تنقلاته • وعلى ذلك فكل
قاعدة يجب ان تنص - فيما عدا التغيرات الدقيقة - على بقاء طوله ثابتا •
كذلك فان المطلب الثانى هو ، وضع قاعدة معينة للتغيرات الدقيقة بحيث
تسمح بأسهل تعبير ممكن لقوانين الطبيعة • مثال ذلك نفترض فى

مقياس الiard ، وفقا للمطلب الثانى ، انه يتمدد ويتقلص بتغير درجة الحرارة على حسب المادة التى صنع منها •

وباستثناء الحقائق القائلة بأن احساساتنا ترافق ادراكنا الحسى للموقع والمدة ، وان الخطوط والمساحات والحجوم والمدد كميات ، كل من ناحيتها ، تصبح نظرية الاعداد ذات قيمة ثانوية جدا فى استقصاء قوانين الطبيعة • اما الواقع فهو ان العلوم الطبيعية تستند الى الافكار الاساسية عن العدد والكمية والفراغ والزمان • والعلوم الرياضية المربوطة بهذه الامور لا تؤلف كل الرياضيات ولكنها الاساس الذى تقوم عليه الفيزياء الرياضية كما هى عليه الان •

مُلاحَظَاتٌ

(أ) صحيفة ٥٨

مما تجب ملاحظته عند قراءة هذه المعادلات ان الاقواس تستعمل فى الرمزية الرياضية للإشارة الى ان العمليات المبينة داخلها هى التى يجب اجراؤها اولا • ففى $(١ + ٣) + ٢$ يجب اضافة الـ ٣ الى الـ ١ اولا ثم اضافة الـ ٢ الى الناتج • واليك مثالا عدديا عن المعادلة (٥)

$$(٤ \times ٢) + (٣ \times ٢) = (٤ + ٣) \times ٢$$

تجرى اولا العمليات المبينة داخل القوسين فنحصل على :

$$٨ + ٦ = ٧ \times ٢$$

وهى نتيجة صحيحة كما هو ظاهر •

(ب) صحيفة ١٢٨

ان النسبة الاساسية $\frac{ف ن}{ن ل}$ تسمى انحراف المنحنى

Eccentricity of the curve ويتوقف شكل المنحنى ، وهو أمر

يختلف عن مقياسه وسعته ، على قيمة الانحراف • ومن الخطأ الظن بأن

القطوع الناقصة عامة او ان القطوع الزائدة عامة ذات شكل واحد معين •

فلقطوع الناقصة ذات الانحرافات المتباينة اشكال مختلفة وتتوقف سعتها على مقدار محوريها الرئيسين • فالقطع الناقص ذو الانحراف الصغير يكون قريب الشبه بالدائرة • اما القطع الناقص الذى يكون انحرافه قريبا من الواحد الصحيح فيكون شكله بيضيا طويلا ضيقا • اما القطوع المكافئة فلها جميعا الانحراف نفسه ولذلك تكون جميعها ذات شكل واحد على انه يمكن رسمها بمقاييس مختلفة •

(ح) صحيفة ١٩٢

اذا كانت المتسلسلة التى جميع حدودها موجبة ، متسلسلة متقاربة ، فان المتسلسلة المستنبطة منها والتى نجدها بجعل طائفة من حدود المتسلسلة الاولى موجبة وطائفة منها سالبة ، طبقا لقاعدة معينة ، تكون ايضا متسلسلة متقاربة • وكل متسلسلة من بين مجموعة المتسلسلات التى استخرجت بهذا الشكل بما فيها المتسلسلة الاصلية يقال عنها انها « متقاربة بحتة » • على انه من الجائز ان تكون المتسلسلة التى قسم من حدودها موجب وقسم آخر سالب متسلسلة متقاربة وان كانت المتسلسلة المناظرة لها والتى جميع حدودها موجبة متسلسلة متباعدة • مثال ذلك ان المتسلسلة

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots \text{ الخ متسلسلة متقاربة مع ان}$$

$$\text{المتسلسلة } 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \text{ الخ متسلسلة متباعدة كما برهنا}$$

ذلك • والتعامل بمثل هذه المتسلسلات التى هى ليست متقاربة بحتة

أصعب جدا من التعامل بالمتسلسلات التى تكون متقاربة بحتة •

الكتب والمراجع

ملاحظات عن كيفية دراسة الرياضيات

ان الصعوبة التي يجدها المبتدئون بدراسة هذا العلم ناشئة عن الكمية الكبيرة من التفاصيل الفنية التي تسمح بتراكمها في كتب الدراسة الاولى فطغت على الافكار المهمة .

واول مواضيع الدراسة ، عدى ما يفترض معرفته من علم الحساب ، يجب ان يكون علم الهندسة ومبادئ الجبر . اما منهج الدراسة لهذين الموضوعين فيحسن ان يكون مختصرا ، ومقتصرا على الآراء الضرورية وحدها . ويقضى ان يدرس الجبر بالاستناد الى الرسم البياني ليهضم الطالب بالممارسة مبادئ آراء الهندسة الاحداثية أيضا . والموضوعان اللذان يجب أن يعقبا ذلك هما مبادئ المثلثات ، والهندسة الاحداثية للخط المستقيم والدائرة . والموضوع الاخير يؤخذ بصورة مختصرة لانه في الحقيقة يندمج بموضوع الجبر . وبذلك يتهىء الطالب للدخول في دراسة القطوع المخروطية بحيث يأخذها منهجا مختصرا من الناحية الهندسية ومنهجها اطول من الناحية

التحليلية • وينبغي ان يعنى بأن لا يحمل الفكر ، فى هذه الدراسات ،
بتفاصيل اكثر مما هو لازم لتمثيل الآراء الاساسية •

بقى لدينا حساب التفاضل وبعده حساب التكامل وهذان
الموضوعان يجب ان يقتحما بالطريقة عينها • على ان المدرس الحاذق هو
الذى سبق له ان تطرق اليهما ، عند النظر فى عدد من الحالات الخاصة ،
عند دراسة الجبر والهندسة الاحداثية • ولا بد من دراسة كتاب مختصر
عن الهندسة الفراغية (ذات الابعاد الثلاثة) •

ان هذا المنهج الاولى فى الرياضيات يفى بحاجات بعض انواع
المهن • وهو فى الوقت نفسه تمهيد ضرورى لمن يرغب بدراسة الموضوع
لقيمته الذاتية ، فيصبح بعده على استعداد للبدء بدراسة أوسع • وعليه ان
لا يتوقع امكان السيطرة على الموضوع بأسره لان هذا العلم توسع الى
حد نرجح معه ان بين الرياضيين الاحياء لا يوجد من يدعى انه توصل
الى الاحاطة به •

نأتى الان الى ذكر الكتب القيمة عن الموضوع ، التى ينبغي
قراءتها (بعد) الدراسة الاولى فنذكر ما يأتى : كتاب الهندسة البحتة
Pure geometry تأليف كرمونا Cremona وقد ترجم الى اللغة
الانكليزية ونشرته مطبعة كلارندن (او كسفورد) • وكتاب هوبسون
فى علم المثلثات وكتاب كريستال فى الجبر (والكتاب هذا يتألف من
مجلدين) وكتاب القطوع المخروطية تأليف سالمون وكتاب الحساب
التفاضلى تأليف لامب • وكتاب عن المعادلات التفاضلية • ومن المحتمل

أن الطالب لا يود أن يوجه اهتماما متساويا الى هذه المواضيع كلها بل
ويدرس واحدا منها أو أكثر وفق ما تفرضه عليه ميوله • وبذلك
يكون على استعداد ليختار لنفسه بحوثا ذات مستوا عالا وينغمر بالاقسام
العليا في الموضوع • فان كان ميله الى التحليل وجب عليه ان يتقن
دراسة بحث أولى قيم في نظرية دوال المتغير المركب • اما اذا فضل
التخصص بالهندسة فعليه ان يتقدم لدراسة احد الكتب القيمة في
الهندسة التحليلية ذات الابعاد الثلاثة • ولكنه في هذه المرحلة من حياته
العملية يكون في غنى عن التوصيات الواردة في هذه الملاحظة •

لقد تعمدت اجتناب ذكر الكتب الاولية لانها عديدة وذات مزايا
متنوعة ولا يوجد بينها كتاب يمتاز بالتفوق عليها جميعا لنوه باسمه دون
الكتب الاخرى •

فهرست الاسماء والمصطلحات

- | | |
|--|--|
| <p>بيكون ، ١٤٨
بيكونسفيلد (لورد) ، ٤٢
البؤرة ، ١١٤ ، ١٢٨
بزارو ، ١١٦</p> <p style="text-align: center;">ت</p> <p>التثليث ، ١٦٦
التجرد (تعريفه) ، ١٣ ، ١٦
التحليل التوافقي ، ١٨٠
تربيع الدائرة ، ١٧٥
التشابه ، ١٦٦ وما يليها ، ٢٢٢
التفسير الانديناميكي ، ١٦ ، ١٧ ، ٤٨
التقارب البحث ، ٢٣٥
التقارب المضطرب ، ١٩٧
التقارب المنتظم ، ١٩٦ وما يليها
التقريب ، ١٨٦ وما يليها
توماس هاريوت ، ٦٣
التيار الكهربائي ، ٣٥
تيلور (نظريته) ، ١٤٨</p> <p style="text-align: center;">ث</p> <p>الثنائي المصنف ، ٨٨ وما يليها
الثوابت ، ٦٦ ، ١١١</p> <p style="text-align: center;">ج</p> <p>الجازبية ، ٣٢ ، ١٣١
الجبر (الدساتير الاساسية) ، ٥٨
الجريان ، ٢٠٧
الجمع (نظرية) ، ٢٠٠
جوار ، ١٥١ وما يليها</p> | <p style="text-align: center;">١</p> <p>آبل ، ١٤٨
أبولونيوس ، ١٢٥ ، ١٢٧
الاحداثي السيني ، ٨٩
الاحداثي الصادي ، ٨٩
احداثيا نقطة ، ٨٩
آدمس ٢٠٧
ارسطو (ارسطاطاليس) ، ٣٣ ، ٤٤ ، ١٢١
أرشميدس ، ٣٩ وما يليها
الاسطوانة الدائرية ، ١٣٦
الاسكندر الكبير ، ١٢١ ، ١٢٢
الاعداد التخيلية ، ٨٣ وما يليها
الاعداد الحقيقية ، ٧٠ وما يليها
الاعداد الموجبة والسالبة ، ٧٩ وما يليها
أقليدس ، ١٠٩
أمير ، ٣٦
الانحراف ، ٢٣٤
أهمس ، ٦٨
اورستد ، ٣٦</p> <p style="text-align: center;">ب</p> <p>بابس ، ١٢٨ ، ١٢٩
بديهيات الكمية ، ٢٣٠ وما يليها
برامتر ، ٦٦
بركلي ، ٢١٣
باسكارا ، ٥٦
بطليموس ، ١٢٩ ، ١٦٣
بلوتارخ ، ٣٩</p> |
|--|--|

جورج ستنوكس (سير) ، ١٩٨
جورج كنتور ، ٧٥
الجيب ، ١٧١ وما يليها
جيب التمام ، ١٧١ وما يليها

ح

حدود النهايات العظمى ، ٧٣
الحركة (علم) ، ٣٣ ، ٤٤ وما يليها
الحركة (القانون الاول) ، ٤٤
الحزمة ، ١٣٢
الحساب التفاضلي ، ٢٠٥ وما يليها
حساب التكامل ، ٢٠٩

خ

الخطوات ، ٧٥ وما يليها ، ٩٠
الخطوط البيانية ، ١٤٠

د

دارون ، ١٣١ ، ٢٠٧
الدالة ، ١٣٧ وما يليها
الدالة المتغيرة ، ١٣٩
الدالة المشتقة ، ٢٢٠
الدالة المطردة ، ١٤١ وما يليها
تعريفها ، ١٥٣

الدالة المنقطعة ، ١٤٢ وما يليها
الدائرة ، ١١٤ ، ١٢٣ ، ١٧٤ وما يليها
الدليل ، ١٢٨
الدورة ، ١٦٠ ، ١٧٧ وما يليها
الدورية ، ١٥٥ وما يليها ، ١٧٦ ، ٢٠٤
ديكارت ، ٩٠ ، ١٠٨ ، ١١١ ، ١١٦ ، ٢٠٦

الديناميكا ، ٤٣ وما يليها

و

الرأس ، ١٢٤
الرنين ، ١٦٠ ، ١٦١

رزبري (لورد) ، ١٨٢

ز

الزمن ، ١٥٦ وما يليها ، ٢٣٠ وما يليها

س

ستايغل ، ٨٠
سند الدالة ، ١٣٨
سميدل ، ١٩٨
سويغت ، ١٣

ش

شيلي ، ٢٠٥

ص

الصغر ، ٦٠ وما يليها ، ٩٨
الصنف ، ١٨٤ وما يليها
الصيغة الجبرية ، ٦٣ وما يليها ، ٧٨ ، ١١٢

ط

الطبيعة المجردة لعلم الهندسة ، ٢٢٦

ع

العديّة العربية ، ٥٦
العلاقات بين متغيرين ٢١ وما يليها
علم الحركة ، ٣٣ ، ٤٤ وما يليها
علم الفلك ، ١٢٩ ، ١٦٣ ، ١٦٤
علم المثلثات ، ١٦٣ وما يليها
علم الهندسة ، ٣٨ ، ٢٢٣ وما يليها
العمومية في الرياضيات ، ٧٧

غ

غاليلو ، ٣٣ ، ٤٤ وما يليها ، ١١٦
غاية الدالة ، ٢١٤ وما يليها
غاية المتسلسلة ، ١٨٨ وما يليها

ف

- الفترة ، ١٥٠
فردى ، ٣٦
فرمات ، ٢٠٦
فرنكلين ، ٣٥ ، ١١٦
فولتا ، ٣٥
فيثاغورس ، ١٧

ق

- قانون متوازي الاضلاع ، ٥٢ وما يليها ،
٩٤ ، ١٢٠
القطع الزائد ، ١٢٤ وما يليها
القطع المكافئ ، ١٢٤ وما يليها
القطع الناقص ، ٤٦ ، ١١٤ ، ١٢٣
وما يليها
القطوع المخروطية ، ١٢١ وما يليها
القطوع المخروطية التحليلية ، ٢٢٥
قوانين الحركة ، ١٥٨ ، ٢٣٢
القوة ، ٣٢
قيمة الدالة ، ١٣٨

ك

- كالفاني ، ٣٥
كيلر ، ٤٦ ، ١٣٠ ، ١٣١
قوانينه ، ١٣١
الكتلة ، ٣٢
الكسور ، ٦٨ وما يليها
كلارك ماكسويل ، ٣٦ ، ٣٧
الكمية ، ٢٢٩ وما يليها
الكميات التخيلية ، ١٠٤
الكميات اللامتناهية فى الصغر ، ٢١٥
وما يليها
الكميات المركبة ، ١٠٤
كوبرنيكوس ، ٤٥ ، ١٣٠

كولمب ، ٣٦

- كولومبس ، ١١٦
الكهربا ، ٣٤ وما يليها
الكهرمغناطيسية ، ٣٤ ، وما يليها
كلبرت (دكتور) ، ٢٤

ل

- ليبوتا ، ١٤
لغزير ، ٢٠٧
ليوناردو دافنس ، ٤٣

م

- ماكولى ، ١٤٨
مالتوس ، ١٣١
مارسلس ، ٣٩
متجه الانتقال ، ٥٣
المتجهات ، ٨٠ ، ٩٠ ، ٥١
المتسلسلات ، ٧١ وما يليها ، ١٨٢
وما يليها
المتسلسلة الاسية ، ١٩٩
المتسلسلة المتباعدة ، ١٩١ وما يليها
المتسلسلة المتراصة ، ٧٢
المتسلسلة المتقاربة ، ١٩١ وما يليها
المتسلسلة الهندسية ، ١٩٤ وما يليها
المتغير ، ٢١ ، ٢٧ ، ٤٨ ، ٧٨ ، ٢٢٠ ،
٢٢٤
المثلث ، ١٦٦ وما يليها ، ٢٢٢
المجموع الى ما لا نهاية له ، ١٩٠
وما يليها
المجهول ، ٢١
المحل الهندسى ، ١١٥ ، ١٣٤
المحوران ، ١١٨
المسافة ، ٣٢
المستطيل ، ٥٥

نوع الصنف ، ١٨٤
نيوتن ، ١٤ ، ١٩ ، ٣٢ وما يليها ،
٤٦ ، ١٣١ ، ٢٠٦ وما يليها

و

والاس ، ٢٠٧
وايرستراس ، ١٤٨ ، ٢١٣ ، ٢١٥
الوزن النوعي ، ٤١
وليم بت ، ١٨٢

هـ

هالي ، ١٣٢
هرز ، ٣٧
هندسة المساقط ، ١٣٢
هباركوس ، ١٦٣
هيرو ، ٤٠

المسح ، ١٦٥
المعامل التفاضلي ، ٢٢٠
معدل التغير ، ٢٠٨ وما يليها
مقياس التقريب ، ١٥٠ ، ١٨٩ ، ٢١٦
مقياس الخريطة ، ١٦٦
منا شمس ، ١٢١ ، ١٢٢
منجني الخطأ القياسي ، ٢٠٣
الميكانيك ، ٤٧
الميل ، ٢١٠

ن

النسبة ، ٦٨
النسب اللاقياسية ٦٩
النسبة اللانوافقية ، ١٣٣
نقطة الاصل ، ٩٠
النور ، ٣٧

جدول الخطأ والصواب

الصفحة	السطر	الوارد	الصواب
٥	١٧	بدراسة	بدراسة
١٥	٧	لفكر	لنفكر
٢١	٧	نعر	نعر
٢٤	١٢	قنع	تقع
٢٤	١٨	القاط	النقاط
٢٦	٤	تاظر	تناظر
٢٩	٤	ولفكر	ولنفكر
٣٦	٣	كولمبس	كولومب
٤٣	٩	عد	عند
٤٦	١٠	النوى	القوى
٥١	١٧	الكثيرين	الكثيرين
٥٨	٤	فائدتها	فائدتها
٦٠	٢	الرياضيون	الرياضيون
٦٣	١٠	هاربوت	هاربرت
٧٣	٢	أشياه	أشباه
٧٣	٣	تفق	يتفق
٧٣	٧	ينم	يتم
٧٥	٩	كتور	كنتور
٨٤	٢	بى	فى
٨٥	٥	موجه	موجبه
٨٦	١٦	تعقيدا	تعقيدا
٨٨	١٨	رى	نرى
٩٠	٧	ممالا	مثالا
٩٠	٨	السنائى	الثنائى
٩٠	١٤	معية	معينة
٩٣	٢	ق	و
١٢٠	١٥	مقدار	له مقدار
١٣٠	١٣	فمنذ	منذ
١٥٣	١٣	مقيايس	مقاييس
١٥٦	٢	الددية	الدينية
١٦٧	١٢	الزواية	الزاوية
١٧٤	١١	ق~	ق

ورد فى السطر ٤ صحيفة ١٩٠ (المجموع المعتاد لعدد محدود من الحدود خواص مماثلة دون تمحيص ٠٠٠ الخ) والصحيح : (هذا المجموع ما يماثل خواص المجموع المعتاد لعدد محدود من الحدود دون تمحيص ٠٠٠ الخ)

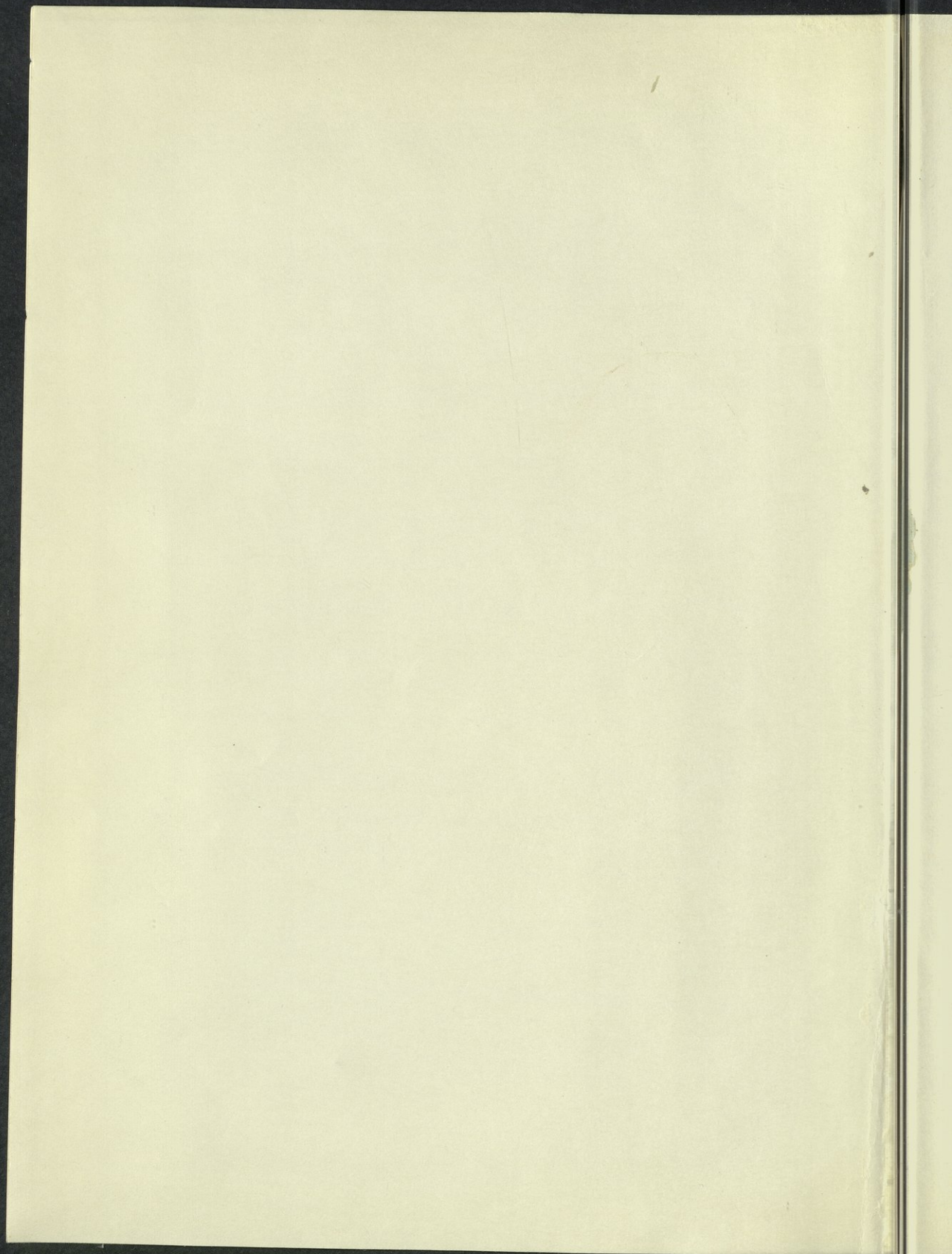
مطبوعات المجمع العلمي العراقي

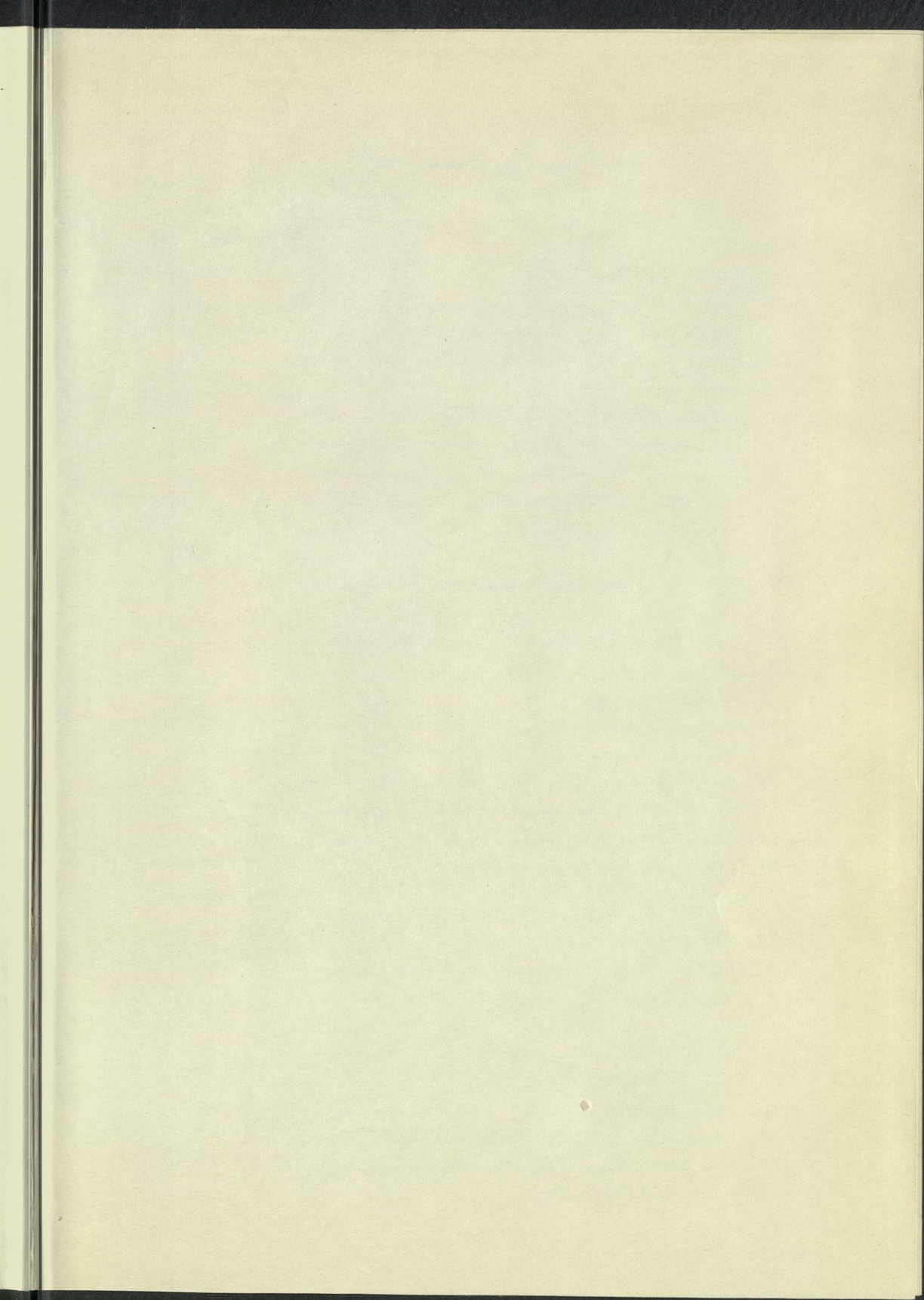
فلس

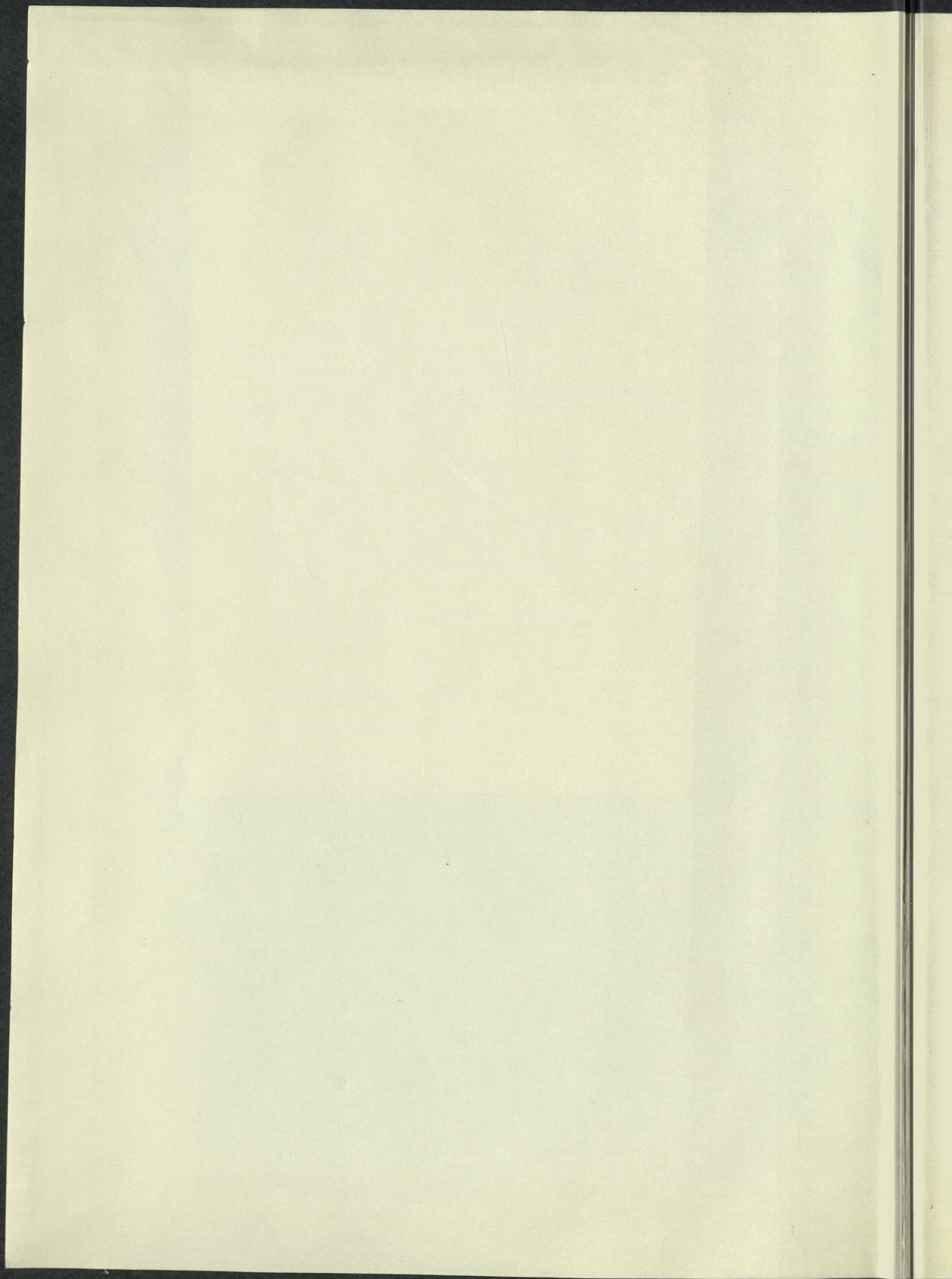
- ٦٠٠ - ١ - مجلة المجمع العلمي العراقي
- ٨٠ - ٢ - كتاب النعم ليحيى بن علي بن يحيى المنجم بتحقيق الأستاذ محمد بهجة الاثرى ومقدمة الدكتور جواد علي
- ٥٠٠ - ٣ - تاريخ العرب قبل الاسلام الجزء الاول تأليف الدكتور جواد علي
- ٧٠ - ٤ - خارطة بغداد الاثرية وضع الدكتور أحمد سوسة والسيد أحمد حامد الصراف والدكتور مصطفى جواد
- ٣٠٠ - ٥ - صورة الأرض للادريسى تحقيق الأستاذ محمد بهجة الاثرى والدكتور جواد علي
- تحت الطبع - ٦ - تاريخ العرب قبل الاسلام الجزء الثانى تأليف الدكتور جواد علي
- » - ٧ - ابن الفوطى لمعالى الاستاذ محمد رضا الشيبى
- » - ٨ - خريدة النضر وجريدة العصر للعماد الاصبهاني الكاتب ، تحقيق الأستاذ محمد بهجة الاثرى والدكتور جميل سعيد
- » - ٩ - الدينار الاسلامى فى المتحف العراقي تأليف السيد ناصر النقشبندى
- ١٢٠ - ١٠ - ملخص كتاب الدراسات فى دورة الكلية الدمية تلخيص الدكتور هاشم الوترى
- » - ١١ - الخطاط البغدادي علي بن هلال : تأليف الدكتور سهيل أنور ترجمة السادة محمد بهجة الاثرى وعزيز سامى
- » - ١٢ - دليل صورة الارض للدكتور جواد علي
- » - ١٣ - قاموس الرياضيات

الكتب التى ساعد المجمع على طبعها

- ١ - اليزيدية : تأليف السيد صديق الدمولوجى طبع فى الموصل
- ٢ - انت والوراثة : تأليف امرام شاينفيلد وترجمة بشير اللوس طبع فى بغداد
- ٣ - المدخل الى الفلسفة الحديثة : تأليف سى . آى . ام جود وترجمة كريم متى طبع فى بغداد
- ٤ - كتاب الديارات للشابشتى تحقيق كوركيس عواد
- ٥ - ديوان الشرر : للشاعر السيد أحمد الصافى النجفى
- ٦ - الشرفنامه : تأليف الامير شرف خان البدلىسى تعريب محمد جميل الروزبىانى





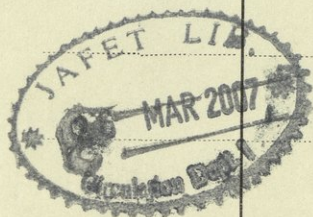


DATE DUE

NOV 1971

LIB

JUN 1979



510:W41mA:c.1

المجمع العلمي العراقي. بغداد

مقدمة للرياضيات

AMERICAN UNIVERSITY OF BEIRUT LIBRARIES



01025287

510:W41mA

وايتيميد

مقدمة للرياضيات

DATE	Borrower's Number	DATE	Borrower's Number
JUL 30 71	BIND		

510
W41mA

